MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO: 539
ATATÜRK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN NO: 21

FİZİKSEL ÖLÇMELER ve DEĞERLENDİRİLMESİ

Doç. Dr. İsa EŞME

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO: 539
ATATÜRK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN NO: 21

FİZİKSEL ÖLÇMELER ve DEĞERLENDİRİLMESİ

Doç. Dr. İsa EŞME

İstanbul 1993

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

ISBN : 975-400-093-x

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ
DÖNER SERMAYE İŞLETMESİ
MATBAA BİRİMİNDE BASILMIŞTIR.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İÇİNDEKİLER

1. FİZİKSEL ÖLÇME

1.1 Ölçme, Ölçek Birimi 1

1. 2 Ölçmede Belirsizlik 1

1.3 Ölçme Sonucunun Belirtilmesi 3

1.4 Duyarlık 5

1.5 Bağıl Belirsizlik 5

2. ANLAMLI RAKAMLAR

2.1 Anlamlı Rakamlarla İlgili Kurallar 7

2.2 Sayıların Yuvarlatılması 9

2.3 Sayıların Üstel Olarak Yazılması 10

2.4 Ön Takılar 11

2.5 Anlamlı Rakamlarla İşlemler 11

3. VERİLERİN SUNULMASI

3.1 Frekans Diyagramı 15

3.2 Histogram 16

4. FİZİKSEL ÖLÇMELERDE HATA

4.1 Hata 20

4.2 Hataların Sınıflandırılması 21

4.2.1 Sistematik Hatalar 21

4.2.2 İstatistik Hatalar 22

4.3 Doğruluk ve Duyarlık 23

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.4 İstatistik Hataların İncelenmesi 24

4.4.1 Aritmetik Ortalama 25

4.4.2 Dağılım Ölçüleri 28

5. NORMAL DAĞILIM

5.1 Normal Dağılımın Özellikleri 40

5.2 Standart Normal Dağılım 43

5.3 Normal Dağılımın Kritik Olasılıkları 44

5.4 Şüpheli Ölçümlerin Atılması 50

5.5 Aritmetik Ortalamanın Dağılımı 51

6. BİLEŞİK BİR SONUCUN HATASININ BULUNMASI

6.1 Dolaylı Ölçme 56

6.2 Bileşik Sonucun Maksimum Hatası 57

6.3 Bileşik Sonucun Standart Sapması 59

7. GRAFİK ANALİZİ ve DENEYSEL BAĞINTILAR

7.1 Grafik Analizi 69

7.2 Grafik ve Yararları 69

7.3 Grafik Çizilmesi 71

7.4 Grafiklerin Sınıflandırılması 74

7.4.1 Lineer Grafikler 74

7.4.2 Kuvvet Fonksiyonu Grafikleri 77

7.4.3 Üstel Fonksiyon Grafikleri 80

7.5 Grafik Yöntemi ile Deneysel Denklemlerin Bulunması 82

7.6 Denklem Katsayılarındaki Hatanın Bulunması 84

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

8.1 Değişkenlerden Birinin Hatalı Ölçülmesi Durumu 96

8.2 Denklem Sabitlerinin Bilgisayarla Hesaplanması 104

8.3 Her İki Değişkenin Hatalı Ölçülmesi Durumu 109

9. KORELASYON

9.1 Korelasyon Katsayısı 117

9.1 Korelasyon Analizi 124

EK1 Standart Normal Dağılım Çizelgesi 131

Kaynaklar 132

İndeks 133

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖNSÖZ

Fizik, Kimya ve Mühendislik gibi bilim dallarında deneysel çalışma yapanların yakından bildiği gibi, temel ölçme ve bu ölçmelerin nasıl değerlendirileceği en çok karşılaşılan problemlerdendir. Bu konuda yapılan yayın sayısı yok denecek kadar azdır. Temel ders veya Laboratuvar kitaplarının başlangıç kısmında verilen 3–5 sayfalık özet bilgiler ise yetersiz kalmaktadır. Bu kitap, belirtilen bu boşluğun yerini doldurmak üzere hazırlanmıştır.

Fiziksel ölçmeler ve ölçmelerin değerlendirilmesi ile ilgilenen öğrencilerin ve araştırmacıların asıl problemi ölçmenin nasıl yapılacağı, bunların nasıl sunulacağı ve sonuçların değerlendirilerek ampirik denklemin nasıl elde edileceğidir. Bu nedenle kitapta bu ihtiyaç hedef olarak seçilmiş ve gerekli olmayan kuramsal ayrıntılara girilmemiştir. Temel kavramların iyice anlaşılabilmesi için kesim ve bölüm sonlarında yeterli miktarda çözümlü örnek sorular verilmiştir. Okuyucu kitaptan yeteri kadar yararlanabilmek için, verilen kavramları dikkatle okumalı ve örnek soruları sabırla çözmelidir.

Kitap gerçekte iki ana kısımdan oluşmuştur. İlk altı bölümden oluşan ilk kısımda ölçme bilgisi, verilerin sunulması ve ölçme hatalarının kuramsal incelenmesine yer verilmiştir. Son üç bölümden oluşan ikinci kısımda ise deney verilerinden ampirik denklem elde edilmesi incelenmiştir.

Üniversitelerin Fen ve Mühendislik fakültelerinde laboratuvar çalışması yapan öğrenciler, tüm aradıklarını bu kitapta bulabileceklerdir. Bununla birlikte kitabın, aynı dallarda bilimsel araştırma yapan araştırmacılara da yararlı olacağı görüşündeyim. Meslektaşlarımın yakından bildiği gibi, fiziksel ölçmeler ve bunların değerlendirilmesine ilk ihtiyaç lise ve dengi okullarda başlamaktadır. Bu okullardaki meslektaşlarımızın da kitaptan geniş ölçüde yararlanabileceğini düşünüyorum.

Kitabın basımındaki yardımları nedeniyle, M.Ü. Teknik Eğitim Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Matbaa Birimi yetkililerine ve özellikle kitabın bilgisayar dizgisini yazan Dizgi Operatörü Sevil Girit' e teşekkür etmeyi bir borç olarak görüyorum.

Doç. Dr. İsa EŞME

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

I. FİZİKSEL ÖLÇME

1.1 ÖLÇME, ÖLÇME BİRİMİ

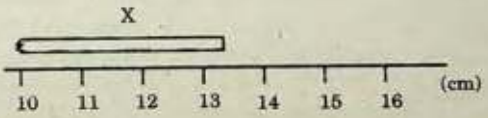
Fizik, onunla ilgilenenlerin yakından bildiği gibi, bir ölçme bilimidir. Örneğin bir sarkacın boyu ile peryodu arasındaki ilişkiyi bulmak istiyorsak; bu araştırma, sarkacın boyunu ve peryodunu ölçmekle başlar.

Ölçme; fiziksel büyüklüğün, seçilen bir birimle karşılaştırılıp onun kaç katı olduğunu belirleme işlemidir. Ölçmede kullanılan araca **ölçü aracı** denir. Ölçü araçları yapılarına göre; Göstergeli (Analog) ve sayısal (Dijital) olmak üzere iki gruba ayrılır. Halen kullanılmakta olan göstergeli saatler analog, son yıllarda yaygınlaşan elektronik saatler ise sayısal –zaman ölçen– ölçü araçlarına örnek olarak gösterilebilir.

Göstergeli ölçü araçları, ölçü birimleri cinsinden bölmelendirilmiştir. Ölçü aracının en küçük bölmesine **ölçek birimi** denir. Örneğin; mm bölmeli bir cetvelin ölçek birimi, 1 mm; cm bölmeli cetvelinki ise 1 cm dir. Son yıllarda özellikle elektrik ve elektronikte, göstergeli araçların yerini alan sayısal ölçü araçlarında aracın son dijiti (sayısı) ne ölçek birimi gözüyle bakılabilir

1.2 ÖLÇMEDE BELİRSİZLİK

Ölçme işleminin nasıl yapıldığını ve ölçmenin nasıl belirtildiğini, en çok bilinen ölçme olan, uzunluk ölçme örneği üzerinde açıklayalım.



Şekil 1.1 Uzunluk ölçülmesi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şekil 1.1 den, x uzunluğunun 13 cm den biraz büyük fakat 14 cm den küçük olduğu görülmektedir. 1 cm lik bölme; gözle 10 eşit parçaya bölünerek x uzunluğu 13.4 cm olarak okunabilir. Aynı ölçme mm bölmeli bir cetvelle de yapılmış olsa x uzunluğu 134 mm den biraz büyük ya da küçük bulunabilir. Buna göre; ölçme sonucunun son basamağında, dolayısıyla ölçmede bir belirsizlik bulunur.

Belirsizlik, ölçü aracı veya ölçü yapan kişiden değil, ölçmenin özelliğinden gelir. Hangi ölçü aracı kullanılırsa kullanılsın belirsizlik yok edilemez, daha duyarlı araç kullanılarak azaltılabilir. Bir tek ölçme ile bulunan bir büyüklükteki belirsizlik kesin bilinmemekle birlikte, alabileceği en küçük değer;

$$\Delta X \leq \frac{\text{Ölçek birimi}}{n} \qquad (1.1)$$

bağıntısı ile bulunabilir. Burada n; 1, 2, 4, 5 veya en çok 10 olarak alınabilen bir katsayıdır. n için yapılacak seçim, aracın ölçek biriminin büyüklüğüne ve ölçmeyi yapan kişinin deneyimine bağlıdır. Örneğin; ölçme birimi 1 cm olan cetvel için $n = 2$; $\Delta X \leq 0.5$ mm alınabilir. Denklem (1.1) ile tanımladığımız belirsizliğe, daha sonra tanımlayacağımız belirsizliklerden ayırt etmek için **mutlak belirsizlik** de denilmektedir.

Bir ölçme işleminde gerçek değer bulunmayacağından, ölçmede belirsizlik bilinmiyorsa bu ölçme hiç bir anlam ifade etmez. Bu nedenle ölçme sonucu yazılırken belirsizlik de yazılmalıdır. Belirsizliği yazılmayan bir ölçme sonucu ile karşılaşıldığında, belirsizliğin ölçme sayısının sıfırdan farklı son ondalık birimi kadar olduğu kabul edilir. Aşağıdaki çizelgeyi inceleyiniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ölçme	Belirsizlik
(102 ± 2) m	2 m
15 s	1 s
1.25 g	0.01 g
250 cm	10 cm

1.3 ÖLÇME SONUCUNUN BELİRTİLMESİ

Her ölçmede bir belirsizlik bulunacağından bir fiziksel büyüklüğün gerçek değeri (x) ölçülemez. Gerçekte ölçme; fiziksel büyüklüğün gerçek değerini değil, bulunduğu aralığı belirleme işlemidir. Ölçülen değer Xo, ölçü aracının belirsizliği Δx ise x gerçek değeri

$$X_o - \Delta X \leq X \leq X_o + \Delta X \qquad (1.2)$$

aralığında bulunuyor demektir. Bu nedenle bir ölçme sonucu

$$X = X_o \pm \Delta X \qquad (1.3)$$

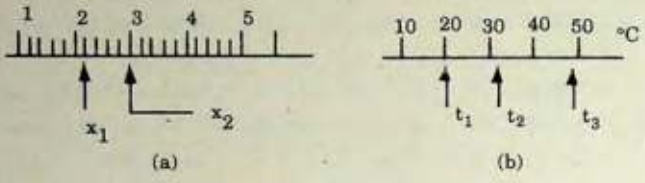
şeklinde gösterilir. Buna göre Şekil (1.1) deki ölçme

$$X = (13.4 \pm 0.2)\ \text{cm}$$

olarak okunabilir. Bunun anlamı x uzunluğunun Xo gerçek değeri bilinmemekte fakat gerçek değerin $13.2 \leq X \leq 13.6$ cm aralığında olduğu biliniyor demektir.

Buradan görüldüğü gibi, bir ölçme sonucu, üç elemandan oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla **ölçme sayısı** (13.4), **belirsizlik** – buna **ölçme hatası** da denir – (0,2) ve **birim** (cm) dir. Ölçme sayısındaki ilk iki rakam (1 ve 3) kesin, son rakam (4) şüphelidir, yani belirsizlik taşımaktadır. Şüpheli rakam, ölçek birimi gözle 2;5 veya 10 a bölünerek tahmin-le bulunur. Belirsizlikte olduğu gibi, bu seçim ölçek biriminin büyüklüğüne ve ölçmeyi yapan kişiye bağlıdır. Verilen örnekte şüpheli rakam, ölçek birimi 10 a bölünerek 0,4; belirsizlik ise ölçek birimi 5 e bölünerek 0,2 olarak bulunmuştur. Şüpheli rakam ve belirsizliğin birer rakamdan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 1.2 İki ölçme örneği

oluştuğuna ve aynı basamakta bulunması gerektiğine dikkat edilmelidir.

Buraya kadar yaptığınız tanımlardan yararlanarak Şekil (1.2) de gösterilen ölçmeleri yapabiliriz.

Şekil (1.2 a) da ölçek birimi: 0.2 b ; belirsizlik 0.1 b (ölçek birimi / 2) alınabilir. Buna göre:

$$X_1 = (2.2 \pm 0.1)\,b \quad ; \quad X_2 = (3.0 \pm 0.1)\,b$$

olur. X_2 ölçüsü için ölçü sayısı olarak 3,0 yerine 3 yazılması, gereksiz bir bilgi kaybı olacağından yanlıştır. $X_2 = 3$ b yazılması halinde 3 şüpheli rakam kabul edilir. Gerçekte bu araçla birler basamağı kesin, onda birler basamağı tahminle okunabilir. Yani; bu ölçmede onda birler basamağının –0– olduğu tahmin edilmelidir. Aynı şekilde bu araçla yüzde birler basamağı okunamayacağından 3.0 yerine 3.00 da yazılamaz. Şekil 1.2b de ölçek birimi 10 °C dir ve belirsizlik 2 °C (ölçek birimi / 5) alınablir. Buna göre;

$$t_1 = (20 \pm 2)\,°C \quad ; \quad t_2 = (32 \pm 2)\,°C \quad ; \quad t_3 = (49 \pm 2)\,°C$$

dir. Bir başkası aynı ölçü aracı için belirsizliği 1 °C (ölçek birimi / 10) olarak alabilir. Bu durumda ölçme sonuçları;

$$t_1 = (20 \pm 1)\,°C \quad ; \quad t_2 = (32 \pm 1)\,°C \quad ; \quad t_3 = (49 \pm 1)\,°C$$

olur.

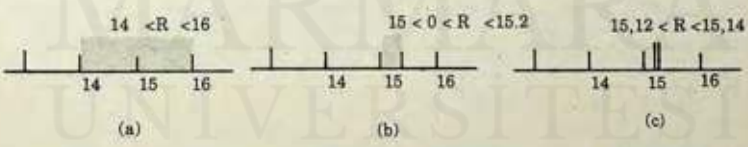
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1.4 DUYARLIK (PREZİSYON)

Bir ölçme işleminde, gerçek değer ölçülememekle birlikte, gerçek değerin bulunduğu aralık belirlenebilmektedir. Bu aralık ne kadar darsa, ölçme o kadar duyarlı demektir. Bu da aracın ölçek birimi, dolayısıyla belirsizlik ile yakından ilgilidir. Bu durumu, uzunluk ölçen ve ölçek birimleri farklı üç ölçü aracı (mm bölmeli cetvel, kompas ve mikrometre) ile yapılan bir ölçme ile açıklayalım. Bu araçların ölçek birimleri sırasıyla 1 mm ; 0.1 mm ; ve 0.01 mm dir. Aynı uzunluk bu üç araçla ölçülerek şu değerler bulunmuş olsun;

$R = (15 \pm 1)$ mm (Cetvel)
$R = (15.1 \pm 0.1)$ mm (Kompas)
$R = (15.13 \pm 0.01)$ mm (Mikrometre)

Bu ölçmelere göre, gerçek değerin bulunduğu aralık, her üç ölçme için, şekil 1.3 de gösterilmiştir. Görüldüğü gibi ölçek birimi cetvele göre 100 kat küçük olan mikrometrede, gerçek değerin bulunduğu bölge iyice daralmış, gerçek değere çok yaklaşılmıştır. Başka bir anlatımla; kompas cetvelden, mikrometre kompastan 10 kat daha duyarlıdır.



Şekil 1.3 Ölçmede duyarlık (a) Cetvel, (b) Kompas, (d) Mikrometre ile ölçme

1.5 BAĞIL BELİRSİZLİK

Bir ölçümün duyarlığı hakkındaki belirsizlik tek başına bilgi vermez. Örneğin; aynı cetvelle ölçülen a ve b uzunlukları

$$a = (132.2 \pm 0.1)\ m \quad ; \quad b = (1.2 \pm 0.1)\ mm$$

olarak ölçülmüş olsun. Her iki ölçmede belirsizlik aynı olmasına karşılık ilk ölçmede ölçülen değere göre küçük, ikincide ona yakındır. O halde belirsizliğin ölçülen değere oranı, ölçmenin duyarlığı için daha kullanışlı bir göstergedir. Bu orana bağlı belirsizlik, bunun 100 katına **yüzde**, 1000 katına **binde bağıl belirsizlik** denir. Ölçülen değer Xo, ölçmedeki belirsizlik ΔX olmak üzere:

$$\begin{aligned} \text{Bağıl Belirsizlik} &= \Delta X / Xo \\ \text{Yüzde Belirsizlik} &= (\Delta X / Xo).\ 100 \\ \text{Binde Belirsizlik} &= (\Delta X / Xo).\ 1000 \end{aligned} \qquad (1.4)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 1.3 te gösterilen üç ölçmede bağıl belirsizlikler (a) : % 7 ; (b) : % 0.7 ; (c) : % 0.007 dir. Buradan görüldüğü gibi en duyarlı ölçme, bağıl belirsizliğin en küçük olduğu ölçmedir.

Çizelge 1.1 Ölçme sonucunun belirsizliğinin bulunması:

Ölçülen büyüklük	BELİRSİZLİK			
(cm)	Mutlak	Bağıl	Yüzde	Binde
(25.2±0.1)	0.1	0.004	0.4	4
(1.50±0.05)	0.05	0.03	3	30
0.00052	0.00001	0.02	2	20
2	1	0.5	50	500
2.0	0.1	0.05	5	50
500	100	0.2	20	200

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2. ANLAMLI RAKAMLAR

Fiziksel bir ölçmenin sonucunu gösteren rakamlara anlamlı rakam denir. Bir ölçmedeki anlamlı rakam sayısı, kesin olarak bilinen rakamlarla belirsizlik taşıyan ve tahminle bulunan (şüpheli) rakamdan oluşur. Şüpheli rakamdan sonra yazılan sayılar, fiziksel ölçme ile bulunmuş olamayacağından anlamsızdır. Bunu bir örnek üzerinden açıklayalım.

$$x = (5.0 \pm 0.1)\ cm$$

olarak verilen bir ölçmede, ölçme sayısındaki 5 kesin, O şüpheli rakam olup ikisi de anlamlıdır. Bu sonucun 5 şeklinde yazılması yanlıştır. Çünkü bu durumda kesin olarak ölçülebilen 5 değerine şüpheli rakam gözü ile bakılır ve yapılan ölçmede ondabirler basamağının –0– olduğu tahmin edilmektedir. Bunun gibi ölçme sonucunun 5.0 yerine 5.00 yazılması da yanlıştır. Çünkü yapılan ölçmede ondabirler basamağı tahminle okunabildiği halde, yüzdebirler basamağının –ölçülemediği halde– 0 olduğu yazılmıştır. Başka bir anlatımla; 5.0 cm yerine 5.02 cm yazmakla ne kadar yanlışlık yapılıyorsa 5.00 yazmakla da aynı derecede yanlışlık yapılıyor demektir.

2.1 ANLAMLI RAKAMLARLA İLGİLİ KURALLAR

Ölçme sonuçlarını anlamlı rakamlarla yazabilmek veya verilen bir ölçme sonucunda hangi rakamların anlamlı olduğunu görebilmek için aşağıdaki kuralları bilmek ve ölçme sonuçlarını yazarken bu kurallara uymak gerekir.

Tam Sayılarda

1. Sıfırdan farklı rakamlar ve iki rakam arasındaki sıfırlar anlamlıdır.

3210 3 anlamlı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5001	4 anlamlı
12	2 anlamlı

2. Üzerinde özel bir işaret ($\bar{0}$ gibi) olmadıkça tam sayıların sağındaki sıfırlar anlamsızdır:

120	2 anlamlı
$12\bar{0}$	3 anlamlı
$120\bar{0}$	4 anlamlı

Ondalık Sayılarda

1. Ondalık sayının solundaki sıfırlar anlamsız, sağındakiler ise anlamlıdır.

0.082	2 anlamlı
0.0820	2 anlamlı
1.01030	6 anlamlı

2. Virgülün yerinin değişmesi, ölçmenin birimi ile ilgili olup bu işlem anlamlı rakam sayısını değiştirmez.

120 cm	2 anlamlı
1.2 m	2 anlamlı

Çizelge 2.1 de bazı ölçme sonuçları ve bunlardaki anlamlı rakam sayıları verilmiştir. Çizelgede yukarıdaki kuralların uygulanışını inceleyiniz.

Çizelge 2.1 Ölçme sonuçlarındaki anlamlı rakam sayısı

Ölçme sayısı	Anlamlı rakam sayısı
5000	1
$120\bar{0}0$	4
10030	4
0.0015	2
2.40	3

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Devirli Sayılar ve Sayma Sayıları

1. Matematikten bildiğimiz $\pi = 3.14 \ldots$ ve $e = 2.718 \ldots$ sayıları, istenildiği basamağa kadar uzatılabildiğinden, sonsuz anlamlı olarak alınabilirler.

2. Sayma sayılarında (1, 2, 3, ...) belirsizlik bulunmaz. 5 elma denilince bu kesin bir ölçmedir. Ondabirler ve diğer basamakların –0– olduğu kesindir. Bu yüzden sayma sayıları da sonsuz anlamlıdırlar.

Kesim 1.4 te tanımladığımız duyarlığı belirlemede anlamlı rakam sayısından yararlanabiliriz. Bir ölçmede anlamlı rakam ne kadar fazla ise, bağıl belirsizlik o oranda küçük, duyarlık o oranda büyük olur.

2.2 SAYILARIN YUVARLATILMASI

Bazı işlemlerde bulunan sonucu daha az rakamla ifade etmek veya anlamlı rakam sayısını azaltmak gerekebilir. Yuvarlatma işlemi, gereğinden fazla anlamlı rakamla ya da anlamsız rakamlarla işlem yaparak doğacak zaman kaybını önler. Sayıların yuvarlatılmasında şu kurallar uygulanır.

1. Atılan rakam 5 den büyükse bir önceki rakam 1 arttırılır, 5 den küçükse aynı kalır.

$$3.16 \equiv 3.2$$

$$1.34 \equiv 1.3$$

2. Atılan rakam 5, bir önceki rakam sıfır veya çift ise aynen kalır, tek ise bir arttırılır.

$$315 \equiv 320$$

$$2.35 \equiv 2.4$$

3. Birden fazla rakam yuvarlatıldığında kurallar sağdan–sola zincirleme olarak uygulanır.

$$876 \equiv 880 \equiv 900$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çizelge 2.2 Sayıların yuvarlatılması

Ölçme sayısı	Anlamlı rakam sayısı		
	3	2	1
15460	15500	16000	20000
6.666	6.67	6.7	7
0.3506	0.351	0.35	0.4
41545	41500	42000	40000
8003	$\bar{8}000$	$\bar{8}000$	8000

Çizelge 2.2 de verilen ölçme sonuçlarının; 3, 2 ve 1 anlamlı değerlere yuvarlatılması gösterilmiştir. Çizelgedeki son örnekte, 8003 sayısı 3 anlamlı olarak yuvarlatıldığında sağdaki sıfır anlamsız, fakat onun solundaki anlamlıdır. Bu nedenle anlamlı olan sıfır üzerine (-) işareti konulmuştur (Bu yapılmazsa sayı bir anlamlı olurdu).

2.3 SAYILARIN ÜSTEL OLARAK YAZILMASI

Çok büyük ve çok küçük sayıların üstel olarak yazılması, hesaplarda ve sonuçları anlamlı rakamlarla ifade etmede büyük kolaylık sağlar. Üstel sayı iki çarpandan oluşur. İlk çarpanda anlamlı rakamlar bulunur ve çarpan 1 ile 10 arasında olacak şekilde yazılır. İkinci çarpan 10^n şeklinde olup n; (pozitif) veya (negatif) tamsayıları gösterir.

Sayılar üstel hale getirilirken veya üstel bir sayıyı normal hale dönüştürürken, her iki ifadede anlamlı rakam sayısının aynı olmasına dikkat edilir. Çizelge 2.3 de verilen örneklerde sayıların üstel hale getirilişini inceleyiniz. Özellikle her iki durumda anlamlı rakam sayısının aynı tutulduğuna dikkat ediniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çizelge 2.3 Sayılarının üstel olarak yazılması

Sayı	Anlamlı rakam sayısı	Üstel sayı
13000	2	1.3×10^4
6500	3	6.50×10^3
0.00250	3	2.50×10^{-3}
500	1	5×10^2
0.0001	1	1×10^{-4}

2.4 ÖN TAKILAR (ÖN EKLER)

10' un bazı kuvvetlerine özel adlar verilir. Bunlara genel olarak **ön takı** veya **ön ek** adı verilir. Ön takılar ve sembolleri çizelge 2.4 de gösterilmiştir.

2.5 ANLAMLI RAKAMLARLA İŞLEMLER

Birden fazla anlamlı rakamın (ölçme sayısının), yer aldığı matematiksel bir işlem düşünelim. İşlem sonucunun duyarlığı ile işleme giren ölçme sayılarının duyarlığı arasında nasıl bir ilişki bulunmalıdır? Bu sorunun cevabına herkes tarafından bilinen şu sözü hatırlatarak geçelim. "Bir zincir, en zayıf halkasından daha kuvvetli olamaz. "Aynı

Çizelge 2. 4 Ön takılar

Sayı	Ön takı	Sembolü	Sayı	Ön takı	Sembolü
10	Deka	da	10^{-1}	Desi	d
10^2	Hekto	h	10^{-2}	Santi	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Mili	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	Mikro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	Piko	p

şekilde ölçme sayılarının yer aldığı bir hesaplamanın sonucu, işleme giren en az duyarlı sayıdan daha duyarlı olamaz. Başka bir ifadeyle, ölçü aracının duyarlığı matematiksel işlemlerle arttırılamaz. Anlamlı rakamların yer aldığı bir işlemde, sonucun duyarlığı ile işleme giren ölçmelerin duyarlığı arasındaki uyumun nasıl sağlandığını dört işlemde ayrı ayrı inceleyelim.

Toplama – Çıkarma İşlemi

Toplama ve çıkarma işlemlerinde; sonucun belirsizliği, belirsizliği en büyük olan sayınınki ile aynı basamakta olmalıdır.

Örnek 2.1

a = 8. 138 cm, b = 2.35 cm olarak verildiğine göre a + b ve a – b işlemlerini yapınız.

Burada a ölçümünde belirsizlik 1/1000, b ölçümünde 1/100 dir. Sonuçtaki belirsizlik de 1/100 olmalıdır. Buna göre işlemlerden;

a=8.138 cm	a=8.138 cm
b=2.35 cm	b=2.35 cm
a+b=10.488 cm	a–b=5.788 cm
a+b=10.49 cm	a–b=5.79 cm

sonuçları bulunur. Aynı sonuçları bulmada benimsenen ikinci yol işlemden önce rakamları, belirsizlikleri aynı basamakta olacak şekilde yuvarlatmaktır.

Çarpma – Bölme İşlemi

1. Anlamlı rakamların bir tamsayı (sayma sayısı gibi) ile çarpılması veya bölünmesinde; sonucun belirsizliği, çarpılan (veya bölünen) anlamlı rakamlarla aynı basamakta olmalıdır. Bunu sağlamak için gerekirse sonuç yuvarlatılır.

Örnek 2.2

$$8 \times 5.75\ g = 46.00\ g$$

Görüldüğü gibi ölçümdeki belirsizlik yüzdebirler basamağındadır. Dolayısıyla sonucun, virgülden sonra iki anlamlı rakamı bulunmalıdır.

Örnek 2.3

$$304\ g / 7 = 43.429 \ldots g$$
$$= 43\ g$$

Bu örnekte ölçümdeki belirsizlik birler basamağındadır. Sonucun belirsizliği de aynı basamakta olacağından, virgülden sonraki rakamlar anlamsızdır. Bölyece doğru sonuç 43 g dır.

2. Anlamlı rakamların, anlamlı rakamla çarpılması veya bölünmesinde; sonucun bağıl belirsizliği, bağıl belirsizliği en az olan rakamla aynı basamakta olmalıdır. Bunu sağlamak için sonuçtaki anlamlı rakam sayısı en az anlamlı rakamı olan büyüklüğünkine eşit olması sağlanır. İşlemlerde zaman kaybına yol açmamak için işleme giren ölçümler, en az anlamlı rakamı olan büyüklüğünkinden bir fazla anlamlı rakamı kalıncaya kadar yuvarlatılır.

Örnek 2.4

$$\frac{3.25\ cm \times 1.2\ g}{(12.35\ s)^2} = \frac{3.25\ cm \times 1.2\ g}{(12.4\ s)^2} = 0.0255699.\ g\ cm/s^2 = 0.026\ g\ cm/s^2$$

Verilen örnekte; ilk çarpan 3, ikinci çarpan 2, bölen 4 anlamlıdır. Bölen 3 anlamlı rakama, sonuç iki anlamlı rakama yuvarlatılmıştır.

Anlamlı rakamların toplama – çıkarma ve bir anlamlı sayı ile çarpılıp bölünmesinde, karşılaştırma faktörü olarak belirsizlik alındığı halde çarpma – bölme işlemlerinde; sonuçla ölçmeler aynı boyutta olmadığından, boyutsuz olan, bağıl belirsizlik alınmıştır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 2.5

$$\frac{0.0012\ kg \times 36450\ m/s}{186200\ s}$$ *işleminin sonucunu anlamlı rakamlar kuralına göre bulunuz.*

Burada en az anlamlı rakamı olan ölçme 0.0012 kg olup 2 anlamlıdır. Diğerlerini 3 anlamlı olacak şekilde yuvarlatıp hepsini üstel halde yazalım.

$$= \frac{1.2 \times 10^{-3} \times 3.64 \times 10^{4}}{1.86 \times 10^{5}}\ kgm/s^2 = \frac{1.2 \times 3.64}{1.86} \times 10^{-4}\ N$$

$$= 2.348 \ldots \times 10^{-4}\ N = 2.3 \times 10^{-4}\ N$$

İşlemleri, burada yapıldığı gibi üstel sayılarla yapmanın büyük yararı vardır. Bu yöntemle sonuç daha kısa sürede bulunabilir ve sonucun basamağı önceden tahmin edileceğinden, hatalı olup olmadığı ilk anda görülebilir. Verdiğimiz örnekte (1.2x3.64) : 1.86 işleminin sonucunun 1–10 arasında olduğu tahmin edileceği için işlem sonucunu yanlışlıkla 2.3 yerine 23 bulmuş olsaydık yapılan yanlış hemen fark edilebilirdi. Şimdi aynı işlemi, üslü sayı kullanmadan yaparak 0.023 bulduğumuzu düşünelim. Burada, gerek virgülün yerinde gerekse anlamlı rakamlarda yanlışlık olup olmadığını, sağlama yapmadıkça söyleyemeyiz.

Çok büyük ve çok küçük sayılarla işlem yaparken, işlemleri hesap makinası ile yapsak bile, başlangıçta sayıları üslü halde yazıp, işlemi örnek 2.5 deki gibi yapmanın daha uygun olduğunu belirtmede yarar görüyoruz. – Scientific– türden bir hesap makinası kullanıldığında, uzun zincirleme işlemler bir çırpıda yapılabilmektedir. Bu durumda sonucun, anlamlı rakamlar kuralına göre yuvarlatılması işi, çoğu zaman işlemi yapana kalır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

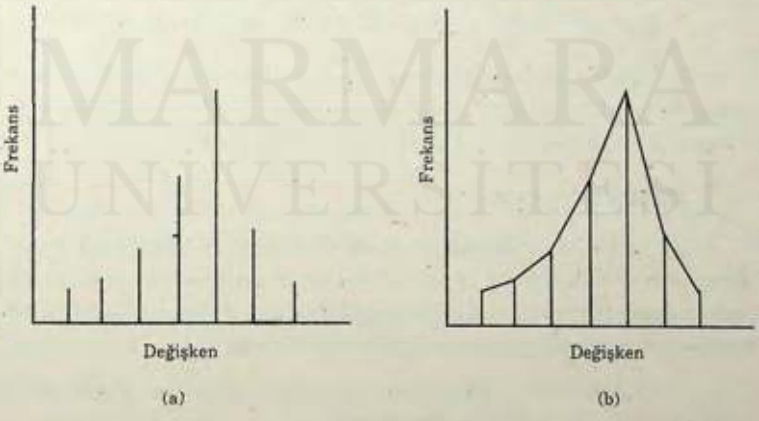
3. VERİLERİN SUNULMASI (GÖSTERİMİ)

Bir olay hakkında, ölçme sonuçlarını gösteren verilerden doğrudan doğruya bilgi edinmek zordur. Bu yüzden veriler gruplandırılarak dağılımları incelenir. Bu inceleme değişken sayısı az ise ($\leq$ 15) **frekans diyagramı** ile, çoksa ($\geq$ 15) **histogramla** olmak üzere iki şekilde yapılır.

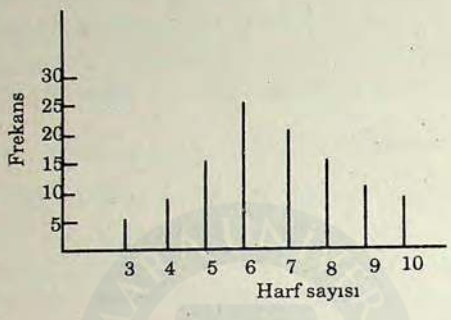
3.1 FREKANS DİYAGRAMI

Bir ölçme işleminde, belirli bir değere –ya da aralığa– düşen ölçme sayısına, o değerin –ya da aralığın– **frekansı** denir. Burada frekans, tekrarlanma sayısı anlamındadır. Örneğin bir sınıfta 8 öğrencinin notu 6 ise, bu notun frekansı 8 dir. 15 öğrenci 7–10 arasında not almışsa bu aralığın frekansı 15 dir.

Frekans diyagramı çizmek için, ölçülen değişken yatay eksene, frekans düşey eksene yerleştirilmek üzere koordinat eksenleri çizilir. Daha sonra yatay eksene ölçmenin frekansı ile orantılı çubuklar çizilir. Bu nedenle frekans diyagramına **çubuk grafikleri** de denir (Şekil 3.1 a). Çubukların uçları bir kırık çizgi ile birleştirilerek, frekans diyagramı, **frekans poligonuna** dönüştürülür (Şekil 3.1 b)



Şekil 3.1 a) Frekans diyagramı b) Frekans diyagramının frekans poligonuna dönüştürülmesi Şekil 3.2 Örnek 3.1 verilerinin frekans poligonu.



Şekil 3.2 Örnek 3.1 verilerinin frekans poligonu.

Örnek 3.1

Bir sözlükten rasgele seçilen sözcüklerdeki harfler sayılarak çizelgedeki veriler bulunuyor. Frekans diyagramını çizerek bunu frekans poligonuna dönüştürünüz.

Harf sayısı	3	4	5	6	7	8	9	10
Frekans	5	8	14	25	20	15	10	8

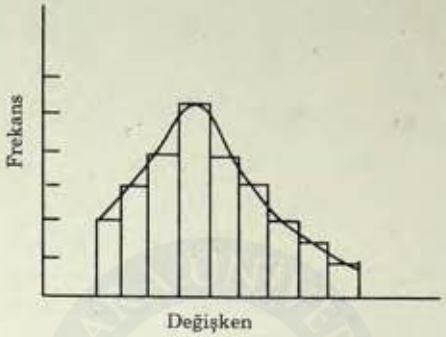
Yukarıda yaplan açıklamaya göre hareket edilerek Şekil 3.2 de görülen diyagram elde edilir. Bu diyagram bize, yapılan araştırmaya göre 6 harfli sözcüklerin çoğunlukta olduğunu göstermektedir.

3.2 HİSTOGRAM

Bir ölçme olayında değişken sayısı fazla (≥15) olduğunda frekans diyagramı yerine, ona çok benzeyen histogram çizilmesi tercih edilir. Histogramda da yatay eksen değişkeni, düşey eksen frekansı gösterir. Histogram çizmek için sırasıyla şu işlemler uygulanır :

i. Değişkenlerin miktarına göre uygun sayıda aralık belirlenir. Aralıklar daha çok 10–30 arasında seçilir.

ii. Frekans dağılımı için bir çizelge hazırlanır.



Şekil 3.3 Histogram ve histogramın frekans eğrisine dönüştürülmesi.

iii. Koordinat sistemlerinin yatay ekseni bu aralıkları, düşey eksen frekansı göstermek üzere bitişik çubuklar çizilir (Şekil 3.3). Böylece histogramı oluşturan dörtgenin boyu frekansla, eni değişkenle, alanı da veri sayısı ile orantılıdır. Histogramda çubuk tepelerinin orta noktalarını bir eğri ile birleştirirsek oluşan diyagrama frekans eğrisi denir. Frekans diyagramları ve histogramlar, bilimsel ve teknik çalışmalarda, ele alınan konunun değerlendirilmesinde sık sık kullanılır.

Örnek 3.2

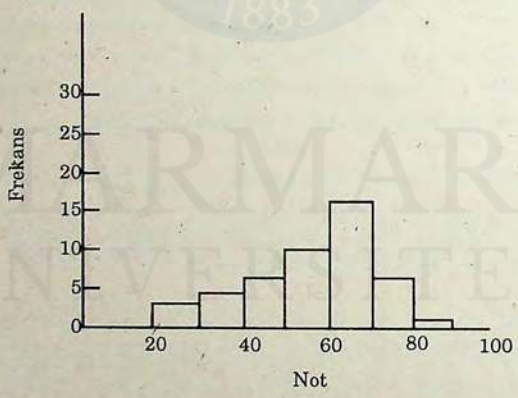
40 öğrencilik bir sınıfta fizik sınavının notları çizelgede verildiği gibidir. Bu notların histogramını çiziniz.

Not	20	25	28	30	35	40	45	50	55	60	62	65	68	70	74	82
Frekans	1	1	1	2	2	3	4	6	5	8	4	3	2	4	3	1

10 not bir aralık olarak seçilebilir. Bu durumda verilere göre 8 aralık bulunur ki bu uygun bir sayıdır. Buna göre frekans dağılımı ve bunun histogramı aşağıdaki gibi olur.

Aralık	Frekans
(20–30]	3
(30–40]	4
(40–50]	7
(50–60]	11
(60–70]	17
(70–80]	7
(80–90]	1
7	50

Histogramlar bir deneyde bulunan ölçmeleri değerlendirmek ve bu yolla bir sonuca ulaşabilmek amacıyla da kullanılırlar. Aşağıdaki örnek böyle bir uygulama ile ilgilidir.



Şekil 3.4 Örnek 3.2 verilerinin histogramı

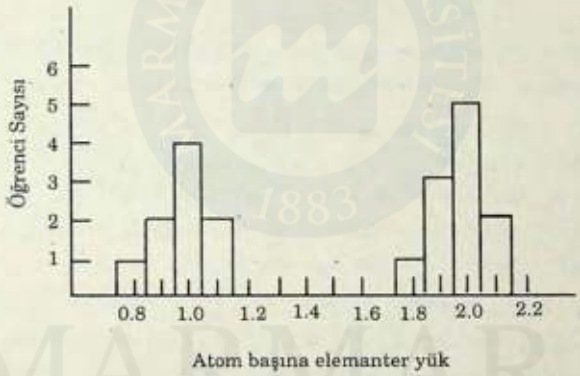
Örnek 3.3

40 öğrencilik bir sınıfta, 2 şer kişilik öğrenci grupları bir elektroliz deneyinde bakır atomu başına düşen elemanter yükü ölçerek aşağıdaki

verileri buluyor. Tüm sınıfın bulgularının histogramını çizerek sonucu yorumlayınız.

Atom başına e.y	0.8	0.9	1.0	1.1	1.8	1.9	2.0	2.1
Frekans	1	2	4	2	1	3	5	3

Verilen ölçümlere göre aralık 0.1 alınabilir. Histogram (şekil 3.5) bize deneyde iki ayrı bakır bileşiği kullanıldığını ve bunların atom başına elemanter yükün sırasıyla 1.0 ve 2.0 olduğunu gösterir.



Şekil 3.5 Örnek 3.3 verilerinin histogramı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. FİZİKSEL ÖLÇMELERDE HATA

4.1 HATA

Aynı sarkacın peryodunu iki kez ölçerek ;

$$T_1 = (4.3 \pm 0.1)\ s\ ;\ T_2 = (4.0 \pm 0.1)\ s$$

sonuçlarını bulduğumuzu düşünelim. Bu iki ölçme arasındaki fark ; 4.3 – 4.0 = 0.3 s olup bu değer, ölçü aracının belirsizliği olan 0.1 s den büyüktür. O halde bu ölçmede belirsizliğin dışında bir hata vardır demektir. Bir ölçme işleminde ölçülen x_i, gerçek değer μ olmak üzere;

$$x_i - \mu \qquad (4.1)$$

farkına, **ölçmenin hatası** denir. Birinci bölümde incelediğimiz **belirsizlik,** daha genel bir tanım olan –hata– nın kaynaklarından sadece biridir.

Hata, yanlış anlamında değildir. Yanlış, daha çok dikkatsizlikten ileri gelen bir kusurdur. Örneğin 6 rakamının, 0 okunması yanlıştır. Dikkatli çalışmakla yanlışlık ortadan kaldırılır. Hata, belirsizlik gibi ölçmenin özelliğinden ileri gelir. Bundan sonraki kesimde inceleyeceğimiz gibi bazı hatalar azaltılabilir fakat yok edilemez.

Bilinen fiziksel sabitlerin değerine (yer çekimi ivmesi, elektronun yükü gibi) gerçek gözüyle bakılırsa, ölçmenin hatası (4.1) den bulunabilir. Ancak çoğu zaman gerçek değer bilinmediğinden yakın bir hata faktörü bulunabilir. Bu bölümde; doğrudan ve dolaylı ölçülen fiziksel büyüklüklerdeki hata faktörünün nasıl bulunacağı incelenecektir. Bu inceleme bize;

i. Hata türleri,

ii. Hata kaynakları.

iii. Hatayı azaltmak için yapılması gereken işlemler,

iv. Gerçek değere en yakın ölçmenin nasıl yapılacağı

v. Ölçme sonuçlarının nasıl gösterileceği konularında bilgi verecektir. Ölçme fizikte olduğu gibi kimya ve mühendislik gibi dallarda da yer

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

aldığından yukarıda belirtilenlerin bilinmesi büyük bir önem taşır.

4.2 HATALARIN SINIFLANDIRILMASI

Hatalar genel olarak iki sınıfa ayrılır. Bunlar **sistematik hatalar** ve **istatistik (Raslantı hataları) hatalar**dır.

4.2.1 Sistematik Hatalar

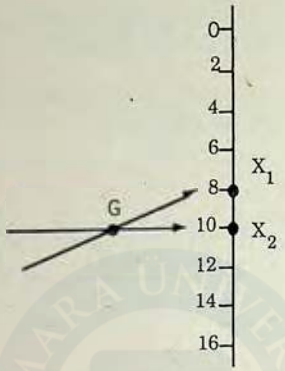
Sistematik hatalara **sabit hatalar** adı da verilir. Bunlar sonuca ya (pozitif) ya da (negatif) yönde etki ederler. Bu yüzden sistematik hatalara, istatistik kurallar uygulanamaz. Sistematik hataların belli başlı kaynakları şu şekilde sıralanabilir.

i. Ölçü araçlarının kusurlarından ileri gelen hatalar. Bu hatalar daha çok araçların kalibrasyon bozukluğu ile ilgilidir. Örneğin buzun erime noktasını 0 °C yerine –diyelim ki +2 °C – gösteren termometre her ölçmede sıcaklığı 2 °C büyük gösteriyor demektir. Bunun gibi, sıfır ayarı olmayan bir ampermetre, her ölçmede gerçek değerden biraz büyük (ya da küçük) bir değer gösterir. Kullanılan araçları kalibre etmek suretiyle bu hatalar önlenebilir.

ii. Ölçü aracının ölçmeye etkisinden ileri gelen hatalar. Bu hatalara **girişim hataları** da denir. Örneğin ısı sığası büyük bir termometre ile bir miktar sıcak suyun sıcaklığını ölçmek isteyelim. Termometre ile su arasındaki ısı alış verişi nedeniyle suyun sıcaklığı azalacak ve termometre, gerçek sıcaklığın altındaki bir sıcaklığı ölçecektir. Aynı şekilde, iç direnci büyük bir ampermetre bir devreye bağlandığında, devrenin direncini büyüteceğinden gerçek değerden küçük bir akımı ölçecektir. Duyarlı ölçü araçları kullanılarak girişim hataları hemen hemen ortadan kaldırılabilir.

iii. Deneyi yapan kişiden ileri gelen hatalar. Bu hatalara **personel hataları** da denir. En sık karşılaşılanı **paralaks hatası** dır. Paralaks hatası, bir analog araçla çalışırken göstergesine dik bakılmaması halinde ortaya çıkar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 4.1 Paralaks hatası, x_1 : Paralaks hatası yapılarak, x_2 : hata yapılmadan okunan değer.

Şekil 4.1 de paralaks hatası şematik olarak gösterilmiştir. Dijital araçlarda paralaks hatası yapılması söz konusu değildir. Dikkatli çalışmak suretiyle personel hataları önlenebilir. Bu hataları önlemenin bir yolu da aynı ölçmeyi, bağımsız çalışan birden fazla kişiye yaptırmaktır.

4.2.2 İstatistik Hatalar

İstatistik hatalara, **raslantı hataları** da denir. Bunlar, önceden bilinmeyen ve beklenmeyen nedenlerle ortaya çıkan hatalardır. Örneğin bir mikrometre ile metal bir paranın çapını bir–kaç kişi ölçtüğünde, birbirinden farklı değerler bulunabilir. Bulunan değerler, gerçek değerin üzerinde ve altında bir dağılım gösterirler. Mikrometrenin az ya da çok sıkıştırılması, okuyanın tahmin hatası yapması mikrometreye paranın aynı konumda yerleştirilmemesi, farklı değerler bulmanın ilk akla gelen nedenlerinden bazılarıdır. Bu örnekte açıklandığı gibi, istatistik hatalar; iki yönlü (pozitf veya negatif) olabilirler. Bunların (pozitf) ve (negatif) olma olasılıkları eşittir. Bu nedenle raslantı hatalarına, istatistik kuralları uygulanabilir. Bu işlem kesim 4.4 ün konusu olacaktır.

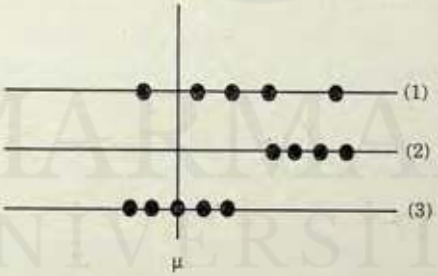
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Sistematik hatalar, gerekli önlemler alındığında ortadan kaldırılabildiği halde **istatistik hatalar, kaynağı ne olursa olsun, azaltılabilir fakat tamamen yok edilemezler.**

4.3. DOĞRULUK ve DUYARLIK

Bir ölçme işleminde ölçülen büyüklük gerçek değere ne kadar yakınsa ölçme o oranda doğru demektir. Başka bir anlatımla, yapılan ölçmenin iyi ya da kötü derecede doğru olması, onun gerçek değere yakın ya da uzak oluşuna bağlıdır. Bu da ölçmede yapılan sistematik hata derecesine bağlıdır. Bir ölçmede sistematik hata ne kadar az ise ölçme sonucu o oranda doğru demektir.

Duyarlık (prezisyon) tekrarlanan ölçmelerin birbirine göre dağılımları ile ilgili tanımdır. Bir ölçmeler kümesi için yapılan bu duyarlık tanımı ile 1. Bölümde bir tek ölçme için yapılan duyarlık tanımı birbirinden farklı anlamda olup bu iki tanım arasındaki fark iyi anlaşılmalıdır. Veriler birbirine yakın olduğu oranda duyarlık yüksek, uzak olduğu oranda düşük demektir. Bu da ölçmedeki istatistik hata derecesine bağlıdır. Yapılan ölçmelerde istatistik hata ne kadar az ise veriler birbirine o kadar



Şekil 4.2 Duyarlık ve Doğruluk (1) Duyarlık ve doğruluk kötü (2) Duyarlık iyi, doğruluk kötü (3) Duyarlık ve doğruluk iyi

yakın demektir.

Yukarıdaki tanımlardan anlaşılabileceği gibi, fiziksel ölçmelerde doğruluk ve duyarlık birbirinden farklı anlamdadırlar. Bir fiziksel sabitin, üç ayrı kişi tarafından farklı deney düzenekleriyle 5 er kez ölçüldü-

günü ve bulunan sonuçların Şekil 4.2 deki gibi olduğunu düşünelim. 1. Araştırmacının deneyinde, veriler hem gerçek değerden hem birbirinden uzak olduğundan, doğruluk ve duyarlık kötüdür. O halde bu deneyde büyük oranda hem sistematik hem istatistik hata yapılmıştır. 2. Araştırmacının deneyinde, veriler gerçek değerden uzak fakat birbirine yakın olduğundan, doğruluk kötü, duyarlık iyidir. Dolayısıyla bu deneyde sistematik hata yapılmıştır. 3. Araştırmacının deneyinde, veriler hem gerçek değere, hem birbirine çok yakın olduğundan, hem doğruluk hem duyarlık oldukça iyidir. Bu da deneyde sistematik hatanın bulunmadığını, istatistik hatanın küçük olduğunu gösterir.

Yukarıdaki örnek bize, doğruluk ve duyarlık tanımları ile bu iki tanım arasındaki farkı ve bunların sistematik ve istatistik hatalarla olan ilişkisini göstermektedir. İstatistik hataların iki yönlü (pozitif ve negatif) olabilmesine karşılık sistematik hatanın bir yönlü (verilen örnekte +) olduğu, Şekil 4.2 den açıkça görülmektedir.

4.4 İSTATİSTİK HATALARIN İNCELENMESİ

Bir deneyde, sistematik ve istatistik hatalardan her ikisi ile karşılaşılabilir. Sistematik hatalar kesim 4.3 de belirtildiği gibi, dikkatli çalışarak önlenebilir. İstatistik hataların önlenememesi nedeniyle, ölçme sonucu yine de hatalı olacaktır. Bundan sonraki incelemelerimizde, sonuçtaki hata faktörünün yalnız istatistik hata kaynaklı olduğu farz edilecek aksi belirtilmedikçe –hata– denildiğinde bundan istatistik hatanın sözü edildiği anlaşılmalıdır.

Bir ölçme sonucunda sonucun ne kadar hatalı olduğunun yani hata faktörünün değerinin bilinmesi raslantı hatalarının istatistik karakterli oluşu nedeniyle bulunabilmektedir. Bu da bazı temel istatistik kavramlarının bilinmesini gerektirir. Aşağıdaki kesimde, raslantı, hataları kuramı için gerekli olan bu kavramlar incelenecektir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çizelge 4.1 Bir sarkacın peryodu ile ilgili ölçümler

n	T(s)
1	8.1±0.1
2	8.5±0.1
3	8.2±0.1
4	8.8±0.1
5	8.0±0.1

4.4.1 Aritmetik Ortalama

Bir yaylı sarkacın peryodu 5 kez ölçülerek Çizelge 4.1 deki veriler bulunuyor. Görüldüğü gibi, ölçü aracının belirsizliği 0.1 s olmasına rağmen bazı ölçümler arasındaki fark bu belirsizliği aşmaktadır. Başka bir anlatımla, Çizelge 4.1 incelendiğinde görüleceği gibi n kez tekrarlanan bir ölçmede, sistematik hata yapılmasa bile, raslantı hataları nedeniyle ölçümler birbirinden farklı dolayısıyla her ölçümün hatası da birbirinden farklı olmaktadır. Bu bize her ölçmede ölçü aracının belirsizliğini aşan hatanın da bulunabileceğini göstermektedir. Bu ve bunun gibi deney sonuçları bize bir tek ölçmenin güvenilir olmadığını göstermektedir. Güvenilir sonuç bulabilmenin en iyi yolu, sistematik hataları önlemek için ölçme işlemini tekrarlamaktadır. Bu durumda n kez tekrarlanan ölçmede gerçek değerin yerine hangi değerin alınacağı ve tüm veri kümesi için raslantı hatalarından gelecek hata faktörünün nasıl bulunacağı sorunu ile karşılaşılır. Bunlardan ilki bu kesimin konusu olacaktır.

Bir fiziksel büyüklük n kez ölçülerek bu ölçmelerde $x_1, x_2, \ldots x_n$ verileri bulunmuş olsun. Ölçülen büyüklüğün gerçek değerini μ ile gösterirsek;

$$x_1 - \mu \; ; \; x_2 - \mu \quad ; \quad \ldots \; ; \; x_n - \mu$$

farkları bu ölçmelerdeki gerçek hataları gösterir. Gerçek değer μ bilinmediğinden, ölçmelerdeki gerçek hatalar da bulunamaz. Gauss' a göre μ

gerçek değer yerine öyle bir $\bar{x}$ değeri alınmalıdır ki bununla ölçümler arasındaki farkların (sapmaların) kareleri toplamı –0– olsun. Buna göre;

$$x_1 - \bar{x} = d_1 \; ; \; x_2 - \bar{x} = d_2 \; ; \; \ldots \; ; \; x_n - \bar{x} = d_n$$

olmak üzere minimum olması istenen toplam ;

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

olur.

Bu toplamın minimum olması x e göre birinci türevinin sıfır olmasını gerektirir. O halde yukarıdaki ifadenin x e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek;

$$-2\,(x_1 - \bar{x} - x_2 - \bar{x} + \ldots + x_n - \bar{x}) = 0$$

veya

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n\,\bar{x}$$

buradan

$$\bar{x} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) / n$$

ve

$$\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} Xi \qquad (4.1)$$

bulunur.

Bu sonuca, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ veri kümesinin **aritmetik ortalaması** denir. O halde bir ölçüm kümesinde bilinmeyen gerçek değer yerine alınabilecek en uygun değer, bu kümenin aritmetik ortalamasıdır.

Bir ölçmede; x_1, x_2 ... x_n verileri sırasıyla m_1, m_2 ... m_n kez ölçülmüş olabilir. Bu durumda **aritmetik ortalama**;

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

veya

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (4.1)$$

bağıntısıyla daha kısa yoldan bulunabilir.

Örnek 4.1

Çizelgede verilen ölçümler için aritmetik ortalamayı bulunuz.

i	x_i	m_i
1	3.2	5
2	3.0	2
3	3.4	4
4	3.3	3
5	3.5	1

Denklem 4.3 den ;

$$\bar{x} = \frac{3.2x5 + 3.0x2 + 3.4x4 + 3.3x3 + 3.5x1}{5+2+4+3+1} = \frac{49}{15} = 3.3$$

bulunur.

Bundan önceki kesimde, n kez tekrarlanan bir ölçmede, bilinmeyen gerçek değer yerine, ölçümlerin aritmetik ortalamasının alınabilece-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ KÜTÜPHANESİ

ğini gördük. Şimdi tekrarlanan bir ölçmede hata faktörünün nasıl bulunacağı, sonucun ne oranda duyarlı olduğu sorusu ile ilgileneceğiz.

4.4.2 Dağılım Ölçüleri

Kesim 4.3 de belirtildiği gibi bir ölçmenin duyarlığı, verilerin birbirlerine yakınlığına yani dağılımlarına bağlıdır. Duyarlık hakkında sayısal bir değer elde edilmesi, dağılımın sayısal olarak ölçülmesi ile mümkündür. Bunlar ölçümlerin gerçek değer veya ortalama etrafında dağılımları hakkında bilgi verirler. Öte yandan, ölçümlerin dağılımı raslantı hataları ile ilgili olduğundan dağılım ölçülerinin bilinmesiyle ölçme sonucundaki hata faktörü de bulanabilir. Başlıca dağılım ölçüleri, **değer bölgesi, sapma, standart sapma** ve **ortalama değerdeki standart sapmadır.**

Değer Bölgesi

Bir fiziksel büyüklük n kez ölçülerek x_1, x_2. ... x_n ölçümleri bulunmuş olsun. Bu ölçümlerin değer bölgeleri diye, ölçüm değerlerinden en büyüğü ile en küçüğü arasındaki farka denir. En büyük ölçüm x_{max} en küçük ölçüm x_{min} olmak üzere değer bölgesi W ;

$$W = x_{max} - x_{min} \qquad (4.3)$$

olur.

Şekil 4.2 de değer bölgesinin (1) ölçüm grubu için büyük, (2) ve (3) ölçüm grupları için küçük olduğu görülmektedir.

Sapma

Yukarıdaki gibi n kez tekrarlanan bir ölçme işleminde $x_1, x_2 ... x_n$ ölçümleri bulunmuş olsun. Ölçülen değer x_1, ölçümlerin aritmetik ortalaması $\bar{x}$ olmak üzere ;

$$d_i = x_i - \bar{x} \qquad (4.4)$$

farkına, **ortalama değerden sapma** ya da sadece **sapma** adı verilir. Bu tanım, (4.1) denklemi ile verilen hata tanımına benzemektedir. Aradaki fark, hata tanımındaki μ (gerçek değer) in yerini, sapmada $\bar{x}$ ortalamanın yerini almış olmasıdır. Sapma pozitif ve negatif işaretli olabileceği gibi, raslantı hataları nedeniyle, ölçümlerin sapmaları birbirinden farklı olabilir. Tüm ölçümler için ortalama sapma ;

$$\bar{d} = (|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_n|) / n$$

veya daha kısa bir notasyonla,

$$\bar{d} = (1/n) \sum_{i=1}^{n} |d_i| \qquad (4.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $|d_1|$, $|d_2|$, ... + $|d_1|$, ... $|d_n|$; sırasıyla $x_1 , x_2 , \ldots , x_i , \ldots , x_n$ ölçümlerine ait sapmaların mutlak değerlerini göstermektedir.

Standart Sapma

En çok kullanılan dağılım ölçüsü, standart sapmadır. Standart sapmanın elde edilmesinde kullanılan yaklaşım şu şekildedir; n sayıda ölçümden oluşan bir deneyde bir ölçüm için sapma (4.4) denkleminde verildiği gibi

$$\bar{d}_i = x_i - \bar{x}$$

olur. İşaretlerini de dikkate alarak tüm ölçümler için bu sapmanın ortalaması :

$$(1/n) \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \qquad (4.6)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde gösterilebilir. Bunun 4.5 denklemi ile verilen ortalama sapmadan farkı, d_i sapmanın son ifadede mutlak değerinin değil, işaretiyle birlikte yazılmasından ibarettir. Ölçüm değerlerinden bazıları ortalama değerden büyük, bazıları küçük olduğundan (4.6) denkleminin sıfıra eşit olması beklenir. Gerçekten bu ifade açılarak ;

$$(1/n)\ \Sigma\ (x_i - \bar{x}) = (1/n)\ \Sigma\, x_i - (1/n)\ \Sigma\ \bar{x}$$

yazılabilir.

Burada ;

$$(1/n)\ \Sigma\ x_i = \bar{x}\ ;\ (1/n)\ \Sigma\ \bar{x} = \bar{x}$$

olduğundan,

$$(1/n)\ \Sigma\ (x_i - \bar{x}) = \bar{x} - \bar{x} = 0$$

bulunur. O halde, denklem (4.6) ile verilen sapmaların ortalaması; her durumda –0– olacağından, bir dağılım ölçüsü olarak kullanılamaz. Bunun yerine, işaretin etkisinden kurtulmak için, sapmaların mutlak değerlerinin ortalaması bir dağılım ölçüsü olarak alınabilir ki bu bize, Denklem 4.5 ile gösterilen ortalama sapmayı verir. İşaretin etkisinden kurtulmanın ikinci yolu, sapmalar karesinin ortalamasını almaktadır. Böylece;

$$(1/n)\ \Sigma\ d_i^2 \neq 0$$

olacağından, bu ifade bir dağılım ölçüsü olarak kullanılabilir. Bulunan bu dağılım ölçüsüne **ölçümler grubunun varyansı**, varyansın karekökünе de **standart sapma** denir. O halde varyans ;

$$V = (1/n)\ \Sigma\ (x_i - \bar{x})^2 \qquad (4.7)$$

Standart sapma ;

$$\sigma = \sqrt{\Sigma.(x_i - \bar{x})2 / n} \qquad (4.8)$$

şeklinde gösterilir. Bu iki dağılım ölçüsü arasında ;

$$V = \sigma^2 \qquad (4.9)$$

ilişkisi bulunmaktadır. Denklem 4.7 açılarak ;

$$\begin{aligned} V &= (1/n)\,\Sigma\,(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ V &= (1/n)\,\Sigma\,\bar{x}_i^2 - (2\bar{x}/n)\,\Sigma\,x_i + \bar{x}^2 \\ V &= (1/n)\,\Sigma\,x_i^2 - \bar{x}^2 \end{aligned} \qquad (4.10)$$

buradan ;

$$\sigma = \sqrt{(1/n)\ \Sigma\ x_i^2 - \bar{x}^2} \qquad (4.11)$$

bulunur. Bu bağıntı bize, standart sapmanın bulunmasında kolaylık sağlayacaktır.

Denklem 4.8 (veya 4.11) ile verilen standart sapma gerçek (veya kuramsal) standart sapma olarak bilinir. Gözlenen (veya deneysel) standart sapmanın ;

$$S = \sqrt{\Sigma.(x_i - \bar{x})^2 / (n-1)} \qquad (4.12)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

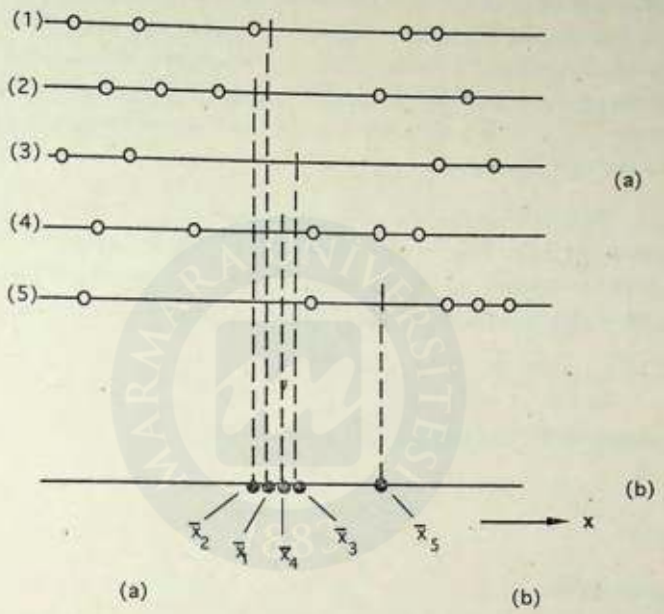
bağıntısı ile bulunabileceği gösterilmektedir. Gerçek ve gözlenen standart sapma sırasıyla σ ve S harfleri ile gösterildiği gibi σ_n veya σ_{n-1} sembolleri ile de gösterilmektedir. Bu iki standart sapma arasındaki fark, σ_n de paydada n olmasına karşılık, σ_{n-1} de n–1 olmasıdır. Bu fark, n nin büyük değerleri için önemli değildir. Örneğin $n \to \infty$ için $\sigma_n \equiv \sigma_{n-1}$ yazılabilir. Fakat n nin küçük değerleri için aynı şey söylenemez. n=1 için σ_n sonlu bir değer verdiği halde σ_{n-1} sonlu bir değer vermez. Ölçme sayısı n arttıkça, σ_n ve σ_{n-1} sapmaları birbirine yaklaşacaktır. Örneğin n = 5 için bu iki sapma arasındaki fark % 12 kadardır.

Ortalamalar Standart Sapması

Şimdiye kadar, ölçümlerin aritmetik ortalama etrafında dağılımları ile ilgilendik. Uygulamada daha çok, $\bar{x}$ ortalama değerinin, μ gerçek değerine ne kadar yakın olduğu sorusu ile karşılaşılır. Başka bir deyişle aritmetik ortalamanın standart sapmasının bilinmesi gerekir. Bunu bulmak üzere ; x_1, x_2, ..., x_n ölçümlerini yaparak bu ölçüm kümesinin aritmetik ortalamasını bulalım. Yine n sayıda ölçümden oluşan ikinci, üçüncü ... m inci ölçümleri alarak bir ölçüm kümesi için aritmetik ortalamayı bulalım. Bulunan aritmetik ortalamaların eşit olmadığı görülecektir. Bu, aritmetik ortalamaların da ölçüm değerleri gibi gerçek değer etrafında bir dağılım göstermesi demektir. Şekil 4.3' de bu dağılım şematik olarak gösterilmiştir.

Şüphesiz aritmetik ortalamalar için sapma, ölçüm değerlerine göre daha küçük olacaktır. Başka bir ifade ile, aritmetik ortalamanın gerçek değere yakın olma olasılığı, herhangi bir ölçümünkinden büyük olacaktır. Hatalar kuramında, n sayıda ölçümden oluşan bir küme için, standart sapma σ olmak üzere ortalamalar standart sapmasının

$$\sigma_m = \sigma / \sqrt{n} \qquad (4.13)$$



Şekil 4.3 (a) Ölçümlerin (b) Ölçümler kümesinin aritmetik ortalamasının dağılımı

bağıntısı ile bulabileceği gösterilmektedir. σ yerine gözlenen standart sapma alınarak, ortalamalar standart sapmasının deneysel (gözlem) değeri x, $\overline{x}$ ve n cinsinden ;

$$\sigma_m = \sqrt{\Sigma \frac{(xi - \overline{x})^2}{n\ (n-1)}} \qquad (4.14)$$

bulunur.

Bu bağıntı bize n=1 (bir tek ölçüm) için standart sapma gibi, ortalama değerdeki standart sapmanın da bulunamayacağını göstermektedir. Yine bu bağıntıya göre, ortalamalar standart sapması, n ölçüm sayısı ile ters orantılıdır. O halde ölçüm sayısının büyük olması, ortalamalar standart sapmasının küçük olmasını sağlar. Ortalamalar standart sapmasının bu şekilde küçültülebilmesi, gerçek değere aynı oranda yaklaşabileceğimizi gösterir.

Yukarıda gösterildiği gibi, ortalamalar standart sapması, ölçmede sistematik hata bulunması halinde, gerçek değere yakınlık hakkında bilgi verdiğinden en iyi duyarlık ölçüsüdür. Bu nedenle σ_m ölçmenin mutlak hatası (ΔX) olarak kabul edilir. Buna göre bir ölçme sonucu ;

$$x = \bar{x} \pm \sigma_m$$

şeklinde gösterilir. Bunun anlamı, aranan gerçek değer ;

$$\bar{x} - \sigma_m \leq x \leq \bar{x} + \sigma_m$$

arasındadır.

Hemen belirtelim ki gerçek değerin belirtilen bu aralıkta olması kesin değildir. Bunun nedeni ve gerçek değerin bu aralıkta bulunma olasılığının nasıl bulunacağı bundan sonraki bölümün konusudur.

Yukarıda incelenen W, d, V, σ ve σ_m dağılım ölçüleri bir ölçme işleminde duyarlık hakkında bilgi verirler. Bu ölçüler ne kadar küçükse ölçme o oranda duyarlı demektir. Çoğu zaman duyarlık hakkında bilgi edinmek için, dağılım ölçülerinin kendileri yerine bağıl değerleri kullanılmaktadır.

Bağıl değer bölgesi $= \dfrac{W}{x}$ (4.15)

Bağıl sapma $= \dfrac{\bar{d}}{\bar{x}}$ (4.16)

Bağıl standart sapma $= \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$ (4.17)

Bağıl ortalama standart sapma (Bağıl hata) $= \dfrac{\sigma_m}{\bar{x}}$ (4.18)

Çizelge 4.2 Ölçümler ve sapmaları

i (ölçme)	x_i (ölçümler)	d_i $(x_i - x)$ (sapma)	d_i^2
1	x_1	d_1	d_1^2
2	x_2	d_2	d_2^2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
n	x_n	d_n	d_n^2
Σ n	--	--	--

Bunlar boyutsuz olduklarından ve % olarak ifade edildiklerinden, duyarlığı daha somut olarak verebilirler.

Kesim 4.4 te özetlenen bilgileri bir ölçme işlemi için kullanırken yukarıdaki gibi çizelge düzenlemek pratik olmaktadır (Çizelge 4.2).

Hesaplamalarda daha çok, standart sapma

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\Sigma\ d_i^2\ /\ (n-1)} \qquad (4.19)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ve ortalama değerdeki standart sapma (= mutlak hata)

$$\sigma_m = \sqrt{\Sigma\ di^2\ /\ n\ (n-1)}$$

kullanılmaktadır.

Dağılım ölçülerinin yukarıda özetlendiği şekilde hesaplanması, öğrenci için sıkıcı olabilir. Bu nedenle aşağıdaki örneklerde, ölçüm sayısı olabildiği kadar, küçük (5) tutulmuştur. Şunu da belirtelim ki yaygın olarak kullanılan bazı cep hesap makinaları ile ; $\bar{x}$ σ_n ve σ_{n-1} gibi değerler doğrudan doğruya hesaplanabilmektedir.

Çizelge 4.3 Ölçme sonuçlarının yazılması

Ortalama değer	Ort. Değerdeki Standart sapma	Sonuç
2.50	0.0235	2.50 ± 0.2
52	0.98	52 ± 1
9.12	0.18	9.1 ± 0.2
15.4	0.008	15.40 ± 0.01

Son olarak şunu belirtmeyi de yararlı görüyoruz. σ_n veya σ_m standart sapmaları bir hata faktörü olarak kullanıldığında, bunlar aritmetik ortalamanın belirsizlik taşıyan son basamağını etkileyecektir. Bu nedenle bu hata faktörleri ortalama değerin sağındaki ilk rakamı ile aynı basamakta olacak şekilde 1 anlamlı rakama yuvarlanır. Bunu sayısal bir örnek üzerinde açıklayalım.

Bir ölçmede aritmetik ortalama 9.14, ortalama değerdeki standart sapma 0.018 olsun. Hata faktörü 1 anlamlı değere yuvarlatılarak ölçme sonucu

$$x = 9.14 \pm 0.02$$

şeklinde yazılır. Burada ortalamanın şüpheli rakamı (4) ile hata faktörünün (2) aynı basamakta (yüzdebirler) olduğuna dikkat edilmelidir. Çizelge 4.3 te bazı ölçme sonuçları ve bunların nasıl gösterileceği açıklanmıştır. Bu örneklerde ;

i. Hata teriminin 1 anlamlı olduğuna,

ii. Hata teriminin, ortalama değerin şüpheli rakamı etkileyebilecek basamakta bulunduğuna dikkat edilmelidir.

Örnek 4.2

Bir cismin kütlesi 5 kez ölçülerek g cinsinden 5.12; 5,10; 5.08 ; 5.14 ; 5.12 ölçümleri bulunuyor. $\bar{x}$, *w*, $\bar{d}$, σ_n, σ_{n-1} *ve* σ_m *değerlerini bulunuz.*

	i	x_i	x_i^2	$\lvert d_i \rvert$	d_i^2
	1	5.12	26.21	8×10^{-3}	0.64×10^{-4}
	2	5.10	26.01	12	1.44
	3	5.08	25.81	32	10.2
	4	5.14	26.42	28	7.84
	5	5.12	26.21	8	0.64
Σ	5	25.56	130.66	88×10^{-3}	20.8×10^{-4}

Çözüm için yukarıdaki tabloyu düzenleyelim.

Ortalama değer ;

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{25.6\ g}{5} = 5.112\ g\ ;$$

Değer bölgesi ;

$$W = X_{max} - X_{min} = 5.14 - 5.08 = 0.06\ g$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ortalama sapma :

$$\bar{d} = \frac{|d_i|}{5} = \frac{88 \times 10^{-3}}{5} = 0.01706$$

Standart sapma :

$$\sigma_n = \sqrt{\Sigma\, d_i^2 / n} = \sqrt{20.8 \times 10^{-4} / 5} = 0.020$$

Gözlenen standart sapma :

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\Sigma\, d_i^2 / (n-1)} = \sqrt{20.8 \times 10^{-4} / 4} = 0.023$$

Ortalama değerdeki standart sapma :

$$\sigma_m = \sigma_{n-1} / \sqrt{n} = 0.023 / \sqrt{5} = 0.01$$

Sonuç :

$$x = (5.11 \pm 0.01)\ g$$

bulunur.

Örnek 4.3

Aşağıdaki ölçüm kümesi için; aritmetik ortalama, standart sapma, gözlenen standart sapma ve ortalama değerdeki standart sapmayı bulunuz.

Ölçümler 5.2 ; 5.0 ; 5.3 ; 5.4 ; 5.8

İşlemi Casio fx–2700 P model bir cep hesap makinası ile yapalım. Bu amaçla şu işlem sırası uygulanacaktır.

İŞLEM TÜRÜ	İŞLEM	OKUNAN
Programa hazırlık :		
	MODE→→ 3	SD 0
	INV AC	SD 0
Bilgilerin verilmesi :		
	5.2 DATA	5.2
	5.0 DATA	5
	5.3 DATA	5.3
	5.4 DATA	5.4
	5.8 DATA	5.8
Sonuç :		
	Count n	5 (ölçüm sayısı)
	INV $\bar{x}$	5.34
	INV σ	0.26
	INV σ_{n-1}	0.296

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5. NORMAL DAĞILIM (GAUSS DAĞILIMI)

5.1 NORMAL DAĞILIMIN ÖZELLİKLERİ

Bir fiziksel büyüklük, belirli bir yöntemle n kez ölçülmüş olsun.Raslantı hataları nedeniyle $x_1, x_2, ..., x_n$ ölçümleri μ değeri etrafında dağılım gösterecektir. Yöntemde bir sistematik hata yoksa μ ölçülen büyüklüğün gerçek değeridir. Bu ölçümlerin frekansı düşey eksene, x değişkeni yatay eksene yazılmak üzere bir grafik çizildiğinde Şekil 5.1 deki eğri elde edilir. Bu eğriye **normal dağılım eğrisi, olasılık eğrisi** ya da kısaca **hata eğrisi** denir. Normal dağılım eğrisinin denklemi

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (5.1)$$

şeklinde olup bu denklem Gauss tarafından bulunmuştur. Burada ;

$P(x)$: Bir x ölçümünün bir tek ölçmede gözlenebilme olasılığı.

x : Ölçülen büyüklük olup buna **raslantı değişkeni** de denir.

μ : Gerçek değer.

σ : Standart sapma.

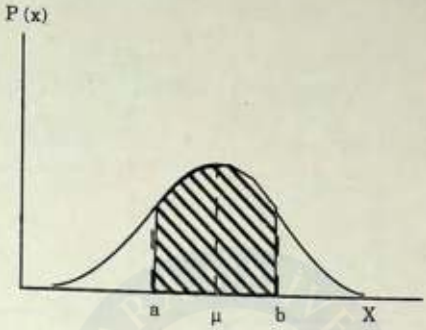
olarak alınmaktadır.

Hata eğrisinin şu özellikleri bulunmaktadır.

i. Eğri μ ye göre simetriktir. Bu durum aynı değerdeki pozitif ve negatif hataların yapılma olasılıklarının eşit olduğunu gösterir.

ii. Küçük hataların yapılma olasılığı, büyük hatalarınkinden daha büyüktür.

iii. Büyük bir hata yapma olasılığı hemen hemen imkansızdır.



Şekil 5.1 Normal Dağılım Eğrisi

iv. Eğrinin belirlediği alan [= P (x) dx], ölçülen değerin $-\infty$ ile $+\infty$ arasında bulunma olasılığını verir. Bu olasılık 1 olduğundan ;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dx = 1 \qquad (5.2)$$

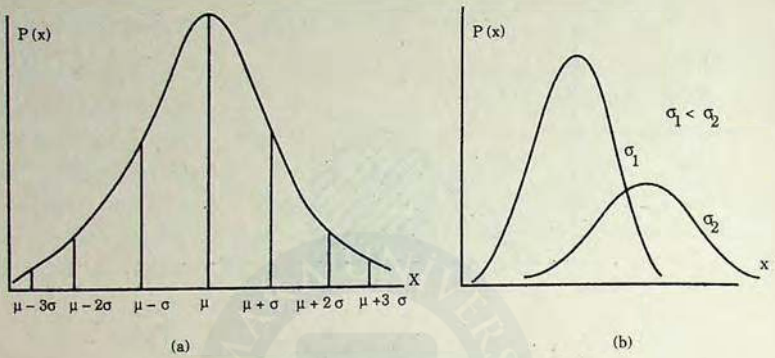
yazılabilir.

v. Bir ölçümün $a \leq x \leq b$ arasında bulunma olasılığı eğri ve bu aralığın belirlediği alana eşit olup bu olasılık (Şekil 5.1 de taralı alan)

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} P(x)\,dx \qquad (5.3)$$

bağıntısı ile bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 5.2 a) Normal dağılım b) Standart sapmanın dağılıma etkisi

vi. Eğrinin tepe noktasında $x = \mu$ olup bu matematiksel olarak ;

$$\frac{d\,P(x)}{dx}\Big|_{x=\mu} = 0 \qquad (5.4)$$

şeklinde yazılabilir.

vii. Eğrinin büküm noktasında $x = \mu \pm \sigma$ olup bu matematiksel olarak ;

$$\frac{d^2\,P(x)}{dx^2}\Big|_{x=\mu\pm\sigma} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bunun anlamı, 5.1 denkleminin ikinci türevinin sıfıra eşitlenmesinden $x = \mu \pm \sigma$ kökleri bulunur (Şekil 5.2). Bu özelliğe göre normal dağılım eğrisinin şekli, ölçümler kümesinin σ standart sapmasına bağlıdır. Şekil 5.2 b de iki ayrı σ değeri için normal dağılım eğrisi gösterilmiştir. Bu şekil bize, normal dağılım eğrisinin, ölçmenin duyarlığı konusunda bilgi vereceğini göstermektedir. Eğri dar olduğu oranda σ küçük, ölçme o derece duyalı demektir.

5.2 STANDART NORMAL DAĞILIM

Normal dağılımın özelliklerine göre x ölçümünün $a < x < b$ aralığında bulunma olasılığı ;

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b P(x)\, dx$$

bağıntısı ile hesaplanabilir. P (x) yerine 5.1 deki değeri yazılarak bu olasılık ;

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b (1/\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)\, e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2}\, dx \qquad (5.6)$$

olur. İntegrali kolay hesaplayabilmek için

$$t = (x-\mu)/\sigma \qquad (5.7)$$

şeklinde yeni bir t değişkeni tanımlayabiliriz. Buradan ;

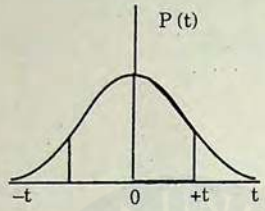
$$x = \mu + \sigma t\ ;\ dx = \sigma\, dt \qquad (5.8)$$

yazılarak bunlar (5.6) da yerine konursa ;

$$P(a \leq x \leq b) = P(t_a \leq + \leq t_b) \int_{t_a}^{t_b} (1/\sqrt{2\pi})\, e^{-t^2/2}.dt \qquad (5.9)$$

bulunur. Bu bağıntıya **standart normal dağılım fonksiyonu** denir. Çeşitli t değerleri için bu integralin değeri hesaplanarak cetvellerde hazır olarak verilir. Ek 1 deki cetvelde t nin bazı değerleri için standart dağılım fonksiyonunun hesaplanan değerleri verilmiştir. Bu değerler (5.9) denklemi ile verilen Gauss fonksiyonunun 0–t aralığındaki

alanına eşittir (Şekil 5.3). Bunlar t nin pozitif değerleridir. Eğri μ ya göre simetrik olduğundan bu değerler negatif bölge için de geçerlidir.



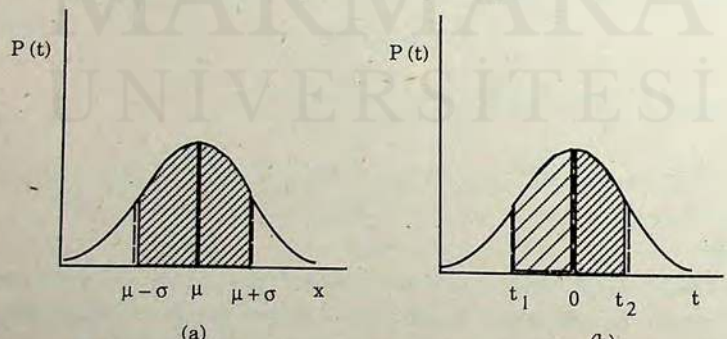
Şekil 5.3 Standart normal dağılım fonksiyonu.

5.3 NORMAL DAĞILIMIN KRİTİK OLASILIKLARI

Normal ve standart normal dağılım tanımlarından yararlanarak, bir ölçümün belirli bir aralıkta bulunma olasılığı hesaplanabilir. Örnek olarak bir ölçümün; μ±σ aralığında bulunma olasılığını hesaplayalım. Aranan olasılık ;

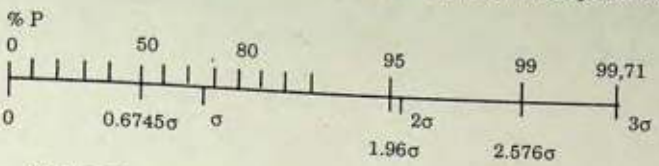
$$P(\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma)$$

dır. Normal dağılım eğrisinde bunun anlamı Şekil 5.4 a da taralı alandır.



Şekil 5.4 a) Normal dağılımın kritik noktaları, b) Standart normal dağılımda kritik t değerleri,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 5.5 Normal dağılımın bazı kritik değerleri ve bunların olasılıkları

Standart normal dağılıma geçebilmek için ;

$\mu-\sigma = a$; $\mu+\sigma = b$ ve denklem 5.7 den

$$t_1 = \frac{a-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma} = -1 \quad ; \quad t_2 = \frac{b-\mu}{\sigma} = \frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma} = +1$$

bulunur. O halde standart dağılım fonksiyonu için sınır değerler –1 ve +1 dir. Yapılacak işlem t nin bu sınırının belirlediği alanı (Şekil 5.4.b) bulmaktan ibarettir. İki fonksiyonun olasılıkları için;

$$P(\mu - \sigma \le x \le \mu + \sigma) = P(-1 \le t \le 1)$$

yazılabilir. P (t) olasılığı ;

$$P(-1 \le t \le +1) = P(-1 \le t \le 0) + P(0 \le t \le 1)$$

şeklinde iki terimin toplamı olarak da yazılabilir. Bu iki terimden sağdaki , Şekil 5.4.b de görülen noktalı alanı, soldaki, taralı alanı ; toplam ise işaretli tüm alanı göstermektedir. Eğri –0– değerine göre simetrik olduğundan ;

$$P(-1 \le t \le 0) = P(0 \le t \le 1)$$

ve

$$P(-1 \le t \le 1) = 2P(0 \le t \le 1) = 2\int_0^1 P(t)\,dt$$

yazılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

t = 1 için standart normal dağılım çizelgesinden integralin değeri 0.3413 bulunur. Bu değer yukarıdaki yerine yazılarak ;

$$P(-1 \leq t \leq 1) = 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

ve

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu - \sigma) = P(-1 \leq x \leq t) = 0.6826 = \%68$$

olur. Bunun anlamı; tekrarlanan ve raslantı hatalarının yapıldığı bir ölçmede, rasgele bir ölçümün $\mu \pm \sigma$ aralığında bulunma olasılığı %68 dir.

Yukarıda izlenen yoldan gidilerek, bir ölçümün $\mu \pm 2\sigma$, $\mu \pm 3\sigma$, ... aralıklarında bulunma olasılıkları sırasıyla %95.44 ve %99.74 bulunur. Bu sonuçlara göre, bir ölçümün $\mu \pm 3\sigma$ dışında bunma olasılığı 1–%99.74 ≅% 0.3 kadardır. Bu oldukça küçük bir olasılık olduğundan, bir ölçümün $\mu \pm 3\sigma$ nın dışında bulunma olasılığı incelenmez ve hata eğrisinin maksimum kritik değeri olarak 3σ değeri kabul edilir.

Standart normal dağılımdan yararlanarak bir ölçümün % 99, % 95 ... gibi olasılıklarla hangi bölgede bulunabileceği yani; olasılık belli olduğunda bu olasılığın karşılığı olan kritik değerin ne olduğu da hesaplanabilir. Bu hesaplamada, yukarıdaki işlem sırasının tersi izlenmelidir (Örnek 5.2 ye bakınız).

Fiziksel ölçmelerde çoğu zaman μ gerçek değeri bilinmez. Bu durumda denklemdeki μ yerine, $\bar{x}$ aritmetik ortalaması, standart sapma olarak da gözlenen standart sapma alınır. Bu yeni notasyona göre bir tek ölçümün bulunduğu aralık ;

$$x_i = \bar{x} \pm k\sigma$$

alınır. Bir tek ölçmeye ait ortalama değerden sapma

$$\bar{x} - x_i = k\sigma$$

olur. Burada k, σ nın; olasılığa göre değişen ve bazı kritik değerleri şekil 5.5 de gösterilen bir katsayıdır. Buna **güvenlik katsayısı** denir. Şekil 5.5 den görüldüğü gibi, k=0.6745 için, olasılık %50 dir. Bunun anlamı,

rasgele bir ölçümün ortalama değere yakın olma olasılığının %50 olduğu aralık x±0.6745σ dir. Bu kritik olasılık değeri nedeniyle

$$0.6745\,\sigma$$

sapmasına **olası (muhtemel) hata** adı verilir.

Örnek 5.1

Bir ölçümler kümesinin aritmetik ortalaması 14.2g, standart sapması σ=0.2 g dır. Bir ölçümün 14.5 g dan büyük olma olasılığını bulunuz.

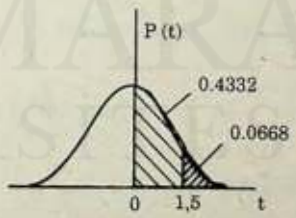
Verilen ölçüm için sapma 14.5 – 14.2 = 0.3 g olup bu standart sapmanın 0.3 / 0.2 = 1.5 katıdır. O halde ölçümün bulunacağı aralık :
a ≥ x±1.5 σ Bunun standart dağılımdaki t karşılığı :

$$t = \frac{a-\bar{x}}{\sigma} = \frac{\bar{x} + 1.5\,\sigma - \bar{x}}{\sigma} = 1.5$$

t nin bu değeri için standart dağılım fonksiyonunun değeri EK 1 den

$$P(0 \le t \le 1.5) = 0.4332$$

$$P(0 \le t \le \infty) = 0.5000$$



olacağından aranan olasılık ;

$$P(1.5 \le t \le +\infty) = 0.5000 - 0.4332 = 0.5000 - 0.4332 = 0.0886 \neq \%\ 6.68$$

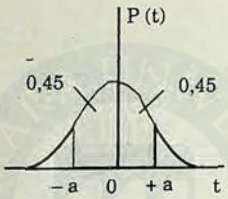
bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 5.2

Bir ölçümün % 90 olasılıkla bulunabileceği aralığın sınırlarını, standart sapma ve ortalama değer cinsinden bulunuz.

Probleme göre standart dağılım grafiğinin taralı alanı 0.90 ; bunun yarısı 0.45 olacağından (örnekle ilgili şekli inceleyiniz),



$P(0 \leq t \leq t_a) = 0.45$; cetvelden bu değerin karşılığı olan t değeri ; t=1.645 dir.

$$t = \frac{a-\bar{x}}{\sigma} \; ; \; a = \bar{x} + t\sigma \; ; \; a = \bar{x} + 1.645\,\sigma$$

Buradan aranan aralık; eğri x e göre simetrik olduğundan ;

$$\bar{x} = 1.645\,\sigma$$

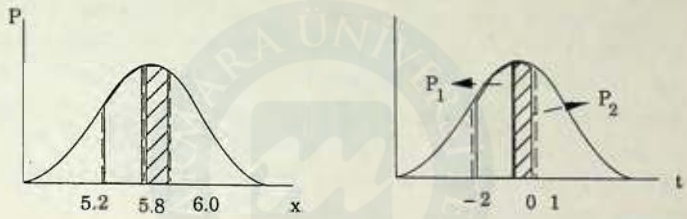
bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 5.3

Bir ölçüm kümesi için standart sapma 0.2; aritmetik ortalama 5.8 dir. Herhangi bir ölçümün; 5.2 ile 6.0 arasında, bulunma olasılığını bulunuz.

Aranan olasılığın karşılığı olan alanlar standart normal dağılım fonksiyonları üzerinde gösterildiği gibidir (Şekli inceleyiniz).



$x_1 = 5.2$, $x_2 = 6.0$ değerlerinin karşılığı olan t değerleri;

$$t_1 = (5.2-5.8)/0.2 = -2 \quad ; \quad t_2 = (6.0-5.8)/0.2 = 1$$

t_1 ve t_2 değerleri için aranan olasılıklar (EK 1 den)

$$P_1(t=2) = 0.4772 \quad P_2(t=1) = 0.3413$$

o halde ;

$$P(-2 \le t \le 1) = P_1(0 \le t \le 2) + P_2(0 \le t \le 1)$$

$$= 0.4772 + 0.3413$$

$$= 0.82$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5.4 ŞÜPHELİ ÖLÇÜMLERİN ATILMASI

Aynı büyüklüğün n kez ölçülmesiyle elde edilen ölçümlerden bir veya birkaçı diğerlerine göre, aritmetik ortalamadan beklenilmeyen sapmalar gösterebilirler. Bu durumda bu tür ölçümlerin ortalamaya katılıp katılmayacağı sorusu ile karşılaşılabilir. Hangi ölçümlerin ortalamaya katılmayacağı –atılacağı– **Chanvenet** kriteryumu ile belirlenebilmektedir. Bu yaklaşıma göre bir ölçümün, ortalamaya alınması için, olasılığının 1/2n den küçük olmaması gerekir. Örneğin; 10 ölçümden oluşan ve σ=0.02 olan bir ölçmede, bir ölçümün atılabilmesi için ortalama değere yakın olma olasılığının 1/20 = 0.05 den küçük olması gerekir. Başka bir anlatımla bu ölçümün olasılığının 1–0.05 = %95 olduğu x±1.96 σ aralığının dışında olması gerekir. (P=%95 için k=1.96 olduğunu hatırlayınız.) O halde bu ölçmede ölçümlerden sapması 1.96–0.02 = 0.039 dan büyük olan ölçüm ortalamaya alınmaz.

Her defasında yukarıdaki işlemin yapılması uzun süreceğinden, hangi ölçümlerin atılacağına karar verebilmek için, Chanvenet kriteryumuna göre hazırlanan çizelge 5.1 deki cetvelden yararlanılır. Bir ölçümün sapmasının, ölçmenin standart sapmasına oranı; aynı n için çizelgedeki değerden büyükse bu değer ortalamadan atılır. Chanvenet Kriteri, 5 ve daha çok ölçümü olan ölçme işleminde uygulanabilir.

Çizelge 5.1 Chanvenet Kriteri için maksimum sapmalar (Kaynak 6 dan alınmıştır).

n	d_i / σ
5	1.65
6	1.73
7	1.81
8	1.86
9	1.91
10	1.96
20	2.24
50	2.57
100	2.81

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ölçümlere Chanvenet kriteryumunun uygulanması sırasında yeni bir sorunla karşılaşılabilir. Bir ölçüm atılınca, Ölçümler kümesi için yeni bir ortalama ve standart sapma bulunacaktır. Kalan ölçümlerden birinin aynı kritere göre yeniden kümeden çıkarılması gerekebilir. Bu işlemin zincirleme olarak uygulanmasından elimizde hiçbir ölçüm kalmayabilir. Bu nedenle Chanvenet kriteri daha çok bir kere, ard arda olmak üzere en çok iki kez uygulanmalıdır.

Örnek 5.4

2.00 ; 2.10 ; 2.20 ; 2.80 ; 2.00 ölçümler kümesinde 4. ölçümün ortalamaya alınıp alınamayacağı Chanvenet kriterine göre bulunuz.

Ölçümlerin aritmetik ortalaması : $x = 2.22$

Standart sapma → : $\sigma_{n-1} = 0.33$

Şüpheli ölçüm için → : $d_4 = 2.8 - 2.22 = 0.58$

$$\frac{d_i}{\sigma_{n-1}} = \frac{0.5}{0.33} = 1.61$$

bulunur. Bu oran çizelge 5.1 den n=5 için $d_i / \sigma = 1.65$ olan orandan küçük olduğundan ele alınan ölçüm ortalamadan atılamaz.

5.5 ARİTMETİK ORTALAMANIN DAĞILIMI

Herbiri n sayıda ölçümden oluşan ölçümler kümeleri elde edilmiş olsun. Bu kümelerin aritmetik ortalamaları, μ gerçek değeri etrafında bir dağılım gösterir. Ortalamaların farklı olması, raslantı hatalarıyla ilgili olduğundan, bunların dağılımı, Şekil 5.1 de gösterilen normal dağılım eğrisine ve bu eğirinin denklemi olan 5.1 bağıntısına uygun olacaktır. Ancak standart sapma olarak σ yerine, ortalama değerdeki standart sapma olan

$$\sigma_m = \sigma / \sqrt{n} \qquad (5.10)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

alınmalıdır.

Kesim 4.4.2 de tekrarlanan ölçmelerde, ölçülen büyüklüğün gerçek değerinin

$$\mu = \bar{x} \pm \sigma_m \qquad (5.11)$$

şeklinde yazılabileceğini belirtmiştik. Buna göre gerçek değerin bulunduğu aralık.

$$\bar{x} - \sigma_m \leq \mu \leq \bar{x} = \sigma_m \qquad (5.12)$$

Ölçmede yapılan mutlak hata (Denklem 5.11 den)

$$\sigma_m = \bar{x} - \mu$$

olacaktır.

Hatalara istatistiğin uygulanması ile elde edilen ve bu bölümde elde ettiğimiz sonuçlar, yukarıdaki kabulün kesin olmadığını göstermektedir. Çizelge 5.1 e göre x nın μ ye σ_m kadar yakın olma olasılığı %100 değil %68 dir. O halde tekrarlanan ölçmelerde ölçme sonucu daha genel ve daha doğru olarak ;

$$\mu = \bar{x} \pm k\sigma_m$$

Ölçümdeki mutlak hata

$$\Delta x = k\,\sigma_m$$

şeklinde yazılmalıdır. Burada k güvenlik katsayısı olup daha çok $0<k\leq3$ arasında alınan bir reel sayıdır. k nın bazı değerleri için, k σ_m nın mutlak hata ya da μ gerçek değerinin (5.13) denklemi ile belirtilen aralıkta bulunma olasılıkları çizelge 5.2 de verilmiştir. Bu değerler gerçekte Şekil 5.5 den alınmış değerlerdir. Çizelgeden görüldüğü gibi, k büyük tutularak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çizelge 5.2 Güvenirlik katsayısı ve karşılığı olan % olasılıklar.

k	Olasılık (%)
0.6745	50.00
1	68.27
1.96	95.00
2	95.45
2.576	99.00
3	99.73

hata faktörü olan k σ_m büyütülmekle duyarlık azalmakta fakat buna karşılık gerçek değerin, **güven aralığı** denilen

$$x - k\sigma_m \leq \mu \leq x + k\sigma_m$$

aralığında bulunma olasılığı artmaktadır. Uygulamada daha çok %95 güven aralığı yeterli bulunduğundan k=1.96 alınmaktadır.

Örnek 5.5

4 ölçümden ibaret bir ölçüm kümesi için standart sapma 0.2 cm dir. (a) Aritmetik ortalamanın gerçek değere 0.3 cm yakın olma olasılığını, (b) Ortalamanın, gerçek değerin 0.3 cm üzerinde olma olasılığını, (c) Güven aralığının %95 olduğu değerlerin sınırlarını bulunuz.

$$k\sigma_m = 0.3 \text{ cm} ; \quad k = \frac{0.3}{\sigma_m} = \frac{0.3}{0.1} = 3$$

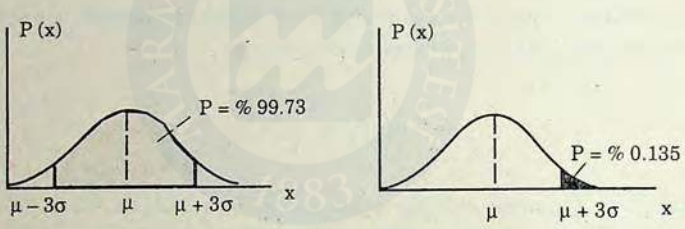
bulunur. Çizelge 5.2 den, k = 3 için olasılık % 99.73 tür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(a) 4 ölçüm için $\sigma_m \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.2 / \sqrt{4} = 0.1$ cm dir.

(b) Soruda, gerçek değerin 0 ile 0.3 cm aralığının pozitif tarafının dışındaki olasılık sorulmaktadır. $-3 \leq k \leq +3$ için olasılık %99.73 ; bu sınırların dışı için olasılık : 1 – 0.9973 = 0.0027 ; eğri simetrik olduğundan yalnız pozitif dış bölge için olasılık, 0.0027/2 = %0.135 olur.

(c) %95 olasılık için k = 1.960 olduğundan $k\sigma_m$ = 1.960x0.1 = 0.196 cm bulunur. Bunun anlamı, aritmetik ortalamanın gerçek değere 0.196 cm kadar yakın olma olasılığı %95 dir. Başka bir anlatımla, bu ölçmede mutlak hata %95 olasılıkla : $\Delta X \leq 0.196$ cm dir.



Örnek 5.6

Bir ölçme işleminde σ = 0.01 g dır. Ortalamanın gerçek değere %99 olasılıkla ; 0.01 g yakın olabilmesi (Mutlak hatanın %99 olasılıkla 0.01g dan büyük olmaması) için kaç ölçüm alınmalıdır.

Çizelge 5.2 den %99 olasılık için k = 2.576 dır.

$$k\sigma_m = \bar{x} - \mu \; ; \; \sigma_m = \frac{x-\mu}{k} \; ; \; \bar{x} - \mu = 0.01 \; ; \; k = 2.576$$

değeri bilindiğinden ;

$$\sigma_m = \frac{0.01}{2.576} = 3.882 \times 10^{-3}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

n yi bulabilmek için

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad n = \frac{\sigma^2}{\sigma_m^2} = \left(\frac{0.01}{3.882 \times 10^{-3}}\right)^2 \simeq 6.6$$

veya n=7 elde edilir.

Örnek 5.7

Bir cismin kütlesi 5 kez tartılarak : g cinsinden, 12.40 ; 12.46 ; 12.42 ; 12.41 ; 12.41 ölçümleri bulunuyor. Sonucu %95 güven aralığı ile bulunuz.

Örnek 4.2 de gösterildiği şekilde ya da hesap makinası ile :

$$\bar{x} = 12.42 \; ; \; \sigma_{n-1} = 0.023 \; ; \; \sigma_m = 0.010$$

%95 güven aralığı için k=1.96 ve mutlak hata ;

$$\Delta x = k\sigma_m = 1.96 \times 0.010 = 0.0196 \text{ g}$$

ölçme sonucu m = (12.42 ± 0.0196) g ölçümlerde yalnız son rakam (% 1 ler basamağı) şüpheli ve bundan sonrakiler anlamsız olduğundan hata faktörü 1 anlamlı değere yuvarlatılarak ;

$$m = (12.42 \pm 0.02)\text{ g}$$

bulunur. Bunun anlamı gerçek kütle, %95 olasılıkla

$$12.40 \leq m \leq 12.44 \text{ g}$$

arasında bulunmaktadır.

6. BİLEŞİK BİR SONUCUN HATASININ BULUNMASI

6.1 DOLAYLI ÖLÇME

Uzunluk, kütle, sıcaklık gibi fiziksel büyüklükler doğrudan ölçülebilen büyüklüklerdir. Fizik, kimya ve mühendislik dallarında karşılaşılan çoğu büyüklükler, doğrudan ölçülebilen büyüklüklerden birinin ya da birden fazlasının kullanıldığı bir bağntı ile bulunur. Bu şekilde yapılan ölçmeye **dolaylı ölçme** denir. Bir telin boyca yoğunluğu (kütle/uzunluk) ölçülecekse, telin kütlesinin ve boyunun ölçülmesi gerekir. Bu iki ölçmenin her ikisinde hata terimi bulunacaktır. Bu hataların, dolaylı ölçülmüş olan boyca yoğunluğun hatasına nasıl etki edeceğinin bilinmesi gerekir.

Doğrudan ölçülebilen x, y, z büyüklüklerine bağlı bir

$$U = f(x, y, z) \qquad (6.1)$$

büyüklüğünü ele alalım. Hatalar kuramına göre; x, y, z deki hataların ve kullanılacak bağıntının, bileşik sonucun hatasına etkisi incelenmiş ve U bileşik sonucundaki hatanın ;

$$dU = \frac{\delta U}{\delta x} dx + \frac{\delta U}{\delta y} dy + \frac{\delta U}{\delta z} dz \qquad (6.2)$$

bağıntısı ile bulunabileceği gösterilmiştir. Burada $\delta U / \delta x$, $\delta U / \delta y$, $\delta U / \delta z$; U fonksiyonunun sırasıyla x, y, z değişkenlerine göre kısmi türevinin alınacağını gösterir. Kısmi türev alınırken; hangi değişkene göre alınıyorsa öteki değişkenler sabit kabul edilir. Bağıntıdaki dx, dy, dz; sırasıyla x, y, z büyüklüklerindeki hata faktörlerinden birini gösterir. Sonuçta U için de aynı hata faktörü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6.2 BİLEŞİK SONUCUN MAKSİMUM HATASI

Bileşik sonuçta yer alan ve doğrudan ölçülebilen x, y, z büyüklüklerinden her biri birer ölçme ile bulunmuşlarsa, hata faktörü olarak bu büyüklükleri ölçen aracın belirsizlikleri alınacağından U için de aynı hata faktörü bulunacaktır. Doğrudan ölçülen bu büyüklüklerin belirsizlikleri sırasıyla Δx, Δy, Δz olmak üzere Denklem (6.2) ye göre bileşik sonucun hatası (belirsizliği),

$$\Delta U \leq \left| \frac{\delta U}{\delta x} \Delta x \right| + \left| \frac{\delta U}{\delta y} \Delta y \right| + \left| \frac{\delta U}{\delta z} \Delta z \right| \qquad (6.3)$$

olur. Türevlerden gelecek işaretler negatif olsa bile ; Δx, Δy, Δz hatalarının işaretleri bilinmediğinden, terimler arasındaki işaret daima pozitif alınır. Aksi halde, sırf matematiksel işlemler nedeniyle iki büyüklüğün hatası birbirini götürerek sonuç hatasızmış gibi bir yanılgıya düşülür. Böylece ölçülen büyüklüklere ait hatalar aynı yönde kabul edileceğinden; ΔU, U büyüklüğünün maksimum hatası olacaktır. Bu nedenle Denklem (6.3) ile verilen hataya, **bileşik sonucun maksimum hatası** adi verilir.

Bazı bağıntılara (6.3) denkleminin uygulanması ile bulunacak maksimum hata ifadesi karmaşık olabilir. Bu nedenle genellikle bileşik sonuçlara ait maksimum hata yerine maksimum bağıl hata ifadesi bulunur. Çizelge 6.1 de en çok karşılaşılan bazı bağıntılar için, maksimum bağıl hata ifadeleri verilmiştir. Bunlar verilen bağıntıya (6.3) denkleminin uygulanması ile elde edilmişlerdir. Çizelgedeki sonuçlar üç yönüyle dikkati çekmektedir:

i. Bileşik sonuç çok değişkenden oluşuyorsa, tüm hatalar üst üste bindiğinden sonucun hatası da büyük olur.

ii. Katsayılar hata hesabında etkisiz eleman durumundadır.

iii. Üs, hata faktörünün çarpanı durumundadır. Bu sonuç bize **üslü büyüklüklerin daha duyarlı araçlarla ölçülmesi gerektiğini** gösterir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çizelge 6.1 Bazı bileşik sonuçların maksimum bağıl hata denklemleri. Burada x, y, z doğrudan ölçülen büyüklükleri; k, m, n katsayıları gösterir.

U	ΔU/U (Maksimum Bağıl Hata)
$k\,x\,y/z$	$\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$
$k\,x^m/y^n$	$m\,\frac{\Delta x}{x} + n\,\frac{\Delta y}{y}$
$x + y - z$	$\frac{\Delta x + \Delta y + \Delta z}{x + y - z}$
$k\,e^{\pm m x}$	$m\,\Delta x$

Örnek 6.1

Bir R büyüklüğü ; R = (x + y) z / u v bağıntısı ile veriliyor. x, y, z, u, v doğrudan ölçülebiliyor. R nin maksimum bağıl hatasını veren bağıntıyı bulunuz.

Denklem 6.3 ün verilen bağıntıya uygulanmasından,

$$\Delta R \leq \left|\frac{\delta R}{\delta x}\right| \Delta x + \left|\frac{\delta R}{\delta y}\right| \Delta y + \left|\frac{\delta R}{\delta z}\right| \Delta z + \left|\frac{\delta R}{\delta u}\right| \Delta u + \left|\frac{\delta R}{\delta v}\right| \Delta v$$

$$\frac{\delta R}{\delta X} = \frac{z}{uv}\,,\quad \frac{\delta R}{\delta y} = \frac{z}{uv}\,,\quad \frac{\delta R}{\delta z} = \frac{x+y}{uv}\,,\quad \frac{\delta R}{\delta u} = \frac{-(x+y)\,z}{u^2 v}\,,\quad \frac{\delta R}{\delta v} = \frac{-(x+y)\,z}{uv^2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu değerler yukarıdaki denklemde yerine yazılarak ;

$$\Delta R \leq \frac{z}{uv}\Delta x + \frac{z}{uv}\Delta y + \frac{x+y}{uv}\Delta z + \frac{(x+y)\,z}{u^2v} + \frac{(x+y)\,z}{uv^2}$$

R yerine verilen değeri yazılıp kısaltmalar yapılarak maksimum bağıl hata,

$$\frac{\Delta R}{R} \leq \frac{\Delta x+\Delta y}{x+y} + \frac{\Delta z}{z} + \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v}$$

bulunur. Çizelge 6.1 de verilen ifadelere ait maksimum bağıl hata denklemleri, aynı yoldan gidilerek okuyucu tarafından türetilebilir.

6.3 BİLEŞİK SONUCUN STANDART SAPMASI

Bileşik sonuçta yer alan ve doğrudan ölçülebilen x, y, z büyüklükleri tekrarlanan ölçmelerle bulunmuşlarsa, her büyüklüğün standart sapması hesaplanabileceğinden Denklem 6.2 deki dx, dy, dz hata faktörleri yerine sırasıyla σ_x, σ_y, σ_z standart sapmaları alınabilir. Böylece bileşik sonuç için de aynı hata faktörü bulunur.

$$\sigma_u = \frac{\delta u}{\delta x}\sigma_x + \frac{\delta u}{\delta y}\sigma_y + \frac{\delta u}{\delta z}\sigma_z$$

Hata faktörlerinin – bilinmeyen işaretinin etkisinden kurtulmak için eşitliğin her iki tarafının karesi alınır ve çok küçük terimler önemsenmezse ;

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right) \sigma_y^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2 \sigma_z^2$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2 \sigma_z^2} \qquad (6.4)$$

bulunur. Bu bağıntı, bileşik sonucun standart sapmasını verdiğinden önemli bir bağıntıdır. Ölçülen büyüklüklerin standart sapması yerine, bunların ortalama değerdeki standart sapmaları (σ_m) alınırsa, bileşik sonucun ortalama değerdeki standart sapması bulunacaktır. Çizelge 6.2 de en çok karşılaşılan bazı bağıntılar için bağıl standart sapma ifadeleri verilmiştir. Bunlar verilen bağıntıya (6.3) denkleminin uygulanması ile elde edilmişlerdir. Örnek 6.2 deki yoldan gidilerek bu sonuçların doğruluğunun gerçeklenmesi okuyucuya bırakılmıştır.

Çizelge 6.2 Bazı bileşik sonuçların standart bağıl hata denklemleri (x, y, z doğrudan ölçülebilir büyüklükler; k. m. n katsayılardır)

U	σ_u/U (Standart Bağıl Hata)
$k\,x\,y/y$	$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{z}\right)^2}$
$k\,x^m/y^n$	$\sqrt{\left(m\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(n\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$x + y - z$	$\frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}}{x + y - z}$
$k\,e^{\pm m x}$	$m\,\sigma_x$

Örnek 6.2

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

R = (ax – b) / z şeklindeki denklemle verilen R bileşik sonucunun, standart ve bağıl standart hatalarını bulunuz.

Denklem 6.4 verilen denkleme uygulanarak ;

$$\sigma_R^2 = \left(\frac{\delta R}{\delta x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\delta R}{\delta z}\right)^2 \sigma_z^2$$

bulunur.

$$\frac{\delta R}{\delta x} = \frac{a}{z} \; ; \; \frac{\delta R}{\delta y} = \frac{-b}{z} \; ; \; \frac{\delta R}{\delta z} = \frac{ax - by}{z^2}$$

Bunlar yukarıdaki denklemde yerine yazılarak ;

$$\sigma_R^2 = \left(\frac{a}{z}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{-b}{z}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{ax - by}{z^2}\right)^2 \sigma_z^2$$

veya bağıl standart sapma ;

$$\frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{a}{ax - by}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{-b}{ax - by}\right)^2 \sigma_y^2 + \frac{1}{z^2} \sigma_z^2}$$

bulunur.

Fiziksel ölçme sonuçlarının gösterilmesiyle ilgili bu bölümde ve bundan önceki bölümlerde verilen bilgileri özet olarak bir arada vermekte yarar görüyoruz.

Uzunluk, kütle, sıcaklık gibi doğrudan ölçülebilen büyüklükler bir kez ölçme ile bulunmuşlarsa ölçme sonucu;

$$x = x_i \pm \Delta x \qquad (6.5)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şekilde gösterilir. Burada x_i ölçülen değer, Δx ölçü aracının belirsizliğidir. Bölüm 5 de belirtildiği gibi, ölçülen büyüklüğün gerçek değerinin, Denklem (6.5) ile verilen aralıkta olduğu kesin değildir ve raslantı hataları nedeniyle, bir tek ölçümün güvenirliği yoktur. Bu nedenle aynı büyüklük n kez ölçülmelidir. Tekrarlanan ölçme denilen bu yöntemde ölçme sonucu ;

$$\bar{x} = x \pm k\sigma_m \qquad (6.6)$$

şeklinde yazılır. Burada $\bar{x}_i$ ölçümlerin aritmetik ortalamasını, σ_m ortalamanın standart sapmasını gösterir. k genellikle $0 \leq k \leq 3$ arasında olan bir güvenlik katsayısıdır. Burada ;

$$\Delta x = k\ \sigma_m \qquad (6.7)$$

denklemine ölçmenin mutlak hatası gözüyle bakılabilir. Tekrarlanan ölçmede, gerçek değerin (6.6) denklemi ile belirtilen aralıkta bulunma olasılığı, k ya bağlı olmakta ve bu olasılık hesaplanabilmektedir. Daha çok olasılığın %68 (k=1) veya %95 (k=1.96) olduğu güven aralıkları kullanılmaktadır.

Yukarıdaki hallerin hepsinden hata faktörü bulunduktan sonra ölçme sonucu yazılırken şu iki noktaya dikkat edilmelidir;

• Ölçme sonucunun yalnız sağdaki ilk rakamı belirsizlik taşıdığından, hata faktörü bir anlamlı rakama yuvarlatılmalıdır. Örneğin ; x=12.4, σ_m = 0.18 bulunmuşsa ; σ_m = 0.2 yapılarak sonuç x = 12.4 ± 0.2 şeklinde gösterilir.

• Ölçme sonucunun belirsizlik taşıyan rakamı ve hata faktörünün anlamlı rakamı aynı basamakta olmalıdır. Bunların aynı basamakta olmadığı sonuçlarla karşılaşılabilir. Bu durumda yapılacak işlemler aşağıdaki örneklerde açıklanmıştır.

i. x = 5.26 ± 0.1 Bu sonuçta hata 0.1 ler basamağında olduğundan sonuç, ölçüm iki anlamlı değere yuvarlatılarak ; x = 5.3 ± 0.1 şeklinde yazılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ii. $x = 5.26 \pm 0.008$ Bu sonuçta belirsizlik 0.01 ler basamağında, hata 0.001 ler basamağında olduğundan hata 0.01 ler basamağına yuvarlatılarak sonuç $x = 5.26 \pm 0.01$ şeklinde yazılır.

iii. $x = 5.26 \pm 0.002$ Bu sonuçta ise belirsizlik 0.01 ler basamağında, hata 0.001 ler basamağında fakat 0.01 ler basamağına yuvarlatılamayacak kadar küçük olduğundan sonuç ; $x = 5.260 \pm 0.002$ şeklinde gösterilir.

Örnek 6.3

Bir dikdörtgenin kenarları sırasıyla 12.0 cm ve 8.5 cm olarak ölçülüyor. Kullanılan cetvelin belirsizliği 1 mm dir. Dikdörtgenin çevresini ve alanını, maksimum hatası ile birlikte bulunuz.

Dikdörtgenin çevresi, $L = 2\,(a+b) = 2\,(12.0+8.5) = 41.0$ cm
çevrede yapılan maksimum bağıl hata (Çizelge 6.1 den) ;

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b}$$

$$\Delta L = L \cdot \frac{(\Delta a + \Delta b)}{a+b} = 41.0\,(0.1+0.1)/20.5$$

$$\Delta L = 0.1$$

$$L = (41.0 \pm 0.1)\ \text{cm}$$

Dikdörtgenin alanı, $A = a \times b = 12.0 \times 8.5 = 102\ \text{cm}^2$

Alanda yapılan maksimum hata ;

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\Delta A = A\,(\Delta a / a + \Delta b / b) = 102\,(0.1/12.0 + 0.1/8.5) = 2.05$$

Bu değer 1 anlamlı değere yuvarlatılarak, sonuç ;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$A = (102 \pm 2)\ cm^2$$

bulunur.

Örnek 6.4

Bir koninin yüksekliği h = (15.2 ± 0.2) cm, taban yarıçapı r = 5.0 ± 0.1 cm olarak ölçülmüştür. Hacmini maksimum hatası ile birlikte yazınız.

Koninin hacmi : $V = \pi r^2 h / 3$ olduğundan hacmindeki maksimum bağıl hata (Çizelge 6.1 den yararlanarak)

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}$$

$r = 5.0$; $h = 15.2$; $\Delta h = 0.2$ ve $\Delta r = 0.1$ değerlerini kullanarak ;

$$V = \pi (5.0)^2 \times 15.2 / 3 = 4.0 \times 10^2\ cm^3$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{0.1}{5.0} + \frac{0.2}{15.2} = 0.053$$

$$\Delta V = 400 \times 0.053 = 21\ cm^3$$

Bu değer 1 anlamlı rakama yuvarlatılarak ;

$$V = (4.0 \pm 0.2) \times 10^2\ cm^3$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 6.5

Bir metal borunun iç ve dış çapları ve borunun boyu 5 er kez ölçülerek ortalama değerler sırasıyla ; $R_1 = 2.10$ cm ; $R_2 = 3.20$ cm ; $h = 1.00$ m olarak hesaplanıyor. Bu ölçmelerdeki standart sapmalar sırasıyla $\sigma_1 = 0.02$ cm, $\sigma_2 = 0.03$ cm ve $\sigma_h = 0.01$ m olduğuna göre, borunun hacmini, %68 güvenlik derecesine göre yazınız.

Borunun hacmi ;

$$V = (\pi\frac{R_2^2}{4} - \pi\frac{R_1^2}{4})\, h = \frac{\pi}{4}\,(R_2^2 - R_1^2)\, h$$

Denklem 6.4 den yararlanarak ;

$$\sigma_v^2 = (\frac{2\pi}{4} h)^2\, \sigma_2^2 + (-\frac{2\pi}{4} h)^2\, \sigma_1^2 + [\frac{\pi}{4}(R_2^2 - R_1^2)]^2\, \sigma_h^2$$

$$\frac{\sigma_v^2}{V^2} = \frac{4}{(R_2^2 - R_1^2)^2}(-\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + (\frac{\sigma h}{h})^2$$

$\sigma_v = V.\ 0.03$; $\overline{V} = \pi/4\ h\ (\overline{R_2}^2 - \overline{R_1}^2) = 458\ cm^3$; $\sigma_v = 13.7\ cm^3$

%68 güvenlik derecesi için (k=1) sonuç ;

$$V = \overline{V} \pm \sigma_v = (458 \pm 13.7)\ cm^3$$

Bu kesimde belirtilen sonuçlara uygun olarak aranan hacim;

$$V = (460 \pm 10)\ cm^3$$

şeklinde yazılmalıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 6.6

Bir telin özdirenci;

$$\rho = \pi V r^2 / IL$$

bağıntısından hesaplanabilir. Burada, V tele uygulanan gerilim, I telden geçen akım, r kesit yarıçapıdır. Yapılan bir ölçmede bu değişkenlere ait ortalama değerler standart sapmalarıyla birlikte,

$$V = (6.0 \pm 0.2)\ V\ ;\ (I = 1.5 \pm 0.1)\ A\ ;\ L = (60 \pm 0.1).10^{-2}\ m\ ;\ r = (1.2 \pm 0.1).^{-3}\ m$$

olarak bulunuyor. Standart hatayı bularak sonucu %95 güven derecesi ile belirtiniz.

Çizelge 6.2 den ;

$$\sigma_\rho/\rho = \sqrt{(\sigma_V / V)^2 + (\sigma_L / L)^2 + (\sigma_I / I)^2 + 2(\sigma_r / r)^2}$$

Verilen değerler yerine yazılarak ;

$$\sigma\rho / \rho = 0.0125 = 0.12$$

Öte yandan;

$$\rho = V\pi r^2 / I\ L = 6.0 \text{x} 3.14\ (1.2 \text{x} 10^{-3})^2\ /\ 1.5\ \text{x} 0.60 = 3.02 \text{x} 10^{-5}$$

$$\sigma\rho = 3.02 \text{x} 10^{-5} \text{x} 0.12 = 3.62 \text{x} 10^{-6}\ \text{ohm.m}$$

sonuç;

$$\rho = \rho \pm k\ \sigma_\rho$$

%95 güven derecesi için k=1.96 olduğundan hata faktörü ;

$$1.96 \text{x} 3.62 \text{x} 10^{-6} = 7.1 \text{x} 10^{-6}\ \text{ohm. m}$$

Buradan;

$$\rho = (30.2 \pm 7.1).10^{-6}$$

Veya daha anlamlı olarak ;

$$\rho = (3.0 \pm 0.7).10^{-5} \text{ ohm. m}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 6.7

Bir metalin kütlesi ve hacmi 5 kez ölçülerek aşağıdaki ölçümler bulunuyor. a) İlk ölçümü kullanarak, metalin yoğunluğunu maksimum hatasıyla birlikte ifade ediniz. b) Yoğunluktaki standart hatayı bularak sonucu %95 güvenlik aralığına göre yazınız.

Kütle (g)	*5.20*	*5.25*	*5.01*	*5.24*	*5.19*
Hacim (cm^3)	*1.92*	*1.94*	*1.90*	*1.95*	*1.90*

Kütle ve hacim ölçümündeki belirsizlik sırasıyla 0.02 g ve 0.05 cm^3 tür.

a) Yoğunluk ve yoğunluktaki maksimm hata;

$$\rho = m/v \quad ; \quad \Delta\rho/\rho = \Delta m/m + \Delta v/v$$

1. Ölçüm değerleri kullanılarak;

$$\rho = 5.20g / 1.92cm^3 = 2.71 \text{ g/cm}^3$$

$$\Delta\rho = \rho (\Delta m / m + \Delta v / v) = 2.71 \ (0.02 / 5.20 + 0.05 / 1.92) = 0.081$$

O halde sonuç;

$$\rho = (2.71 \pm 0.08) \text{ g/cm}^3$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Ölçümlerin aritmetik ortalaması ve yoğunluğun ortalama değeri;

$$m = 5.18\ g \quad ; \quad V = 1.92\ cm^3 \quad ; \quad \rho = m / V = 2.70\ g/cm^3$$

Ortalama değerdeki standart sapmalar;

$$\sigma_m = 0.044 \qquad \sigma_v = 0.010$$

Yoğunluktaki standart sapma;

$$\sigma_\rho/\rho = \sqrt{(\sigma_m / m)^2 + (\sigma_v / V)^2} = 2.70\ \sqrt{(0.044/5.18)^2 + (0.01/1.92)^2} = 0.03$$

%95 güven aralığı için k=1.96 alınarak aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\rho = \rho \pm k\sigma = (2.70 \pm 0.06)\ g/cm^3$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

7.GRAFİK ANALİZİ VE DENEYSEL BAĞINTILAR

7.1 GRAFİK ve ÖNEMİ

Fizik kanunları ve denklemleri, kuramsal ve deneysel olmak üzere iki yoldan elde edilir. Kuramsal yöntemde varsayımlardan yola çıkılır, beklenen sonuçların deneyle uygunluğu araştırılır. Bunlar deneyle gerçeklenmedikçe bir fizik kanunu olarak kabul edilmez. Deneysel yöntemde kanun veya bağıntı tamamen deneye dayanır. Bunlar kuramsal olarak elde edilmese bile doğrulukları kesindir.

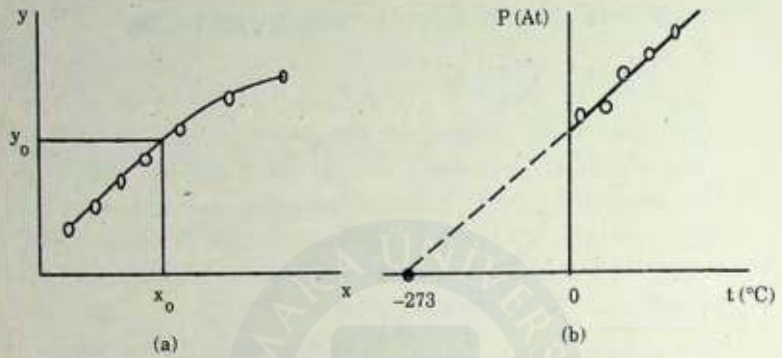
Deneysel yöntemde genellikle iki değişkenle ilgilenilir. Bunlardan biri deneyi yapan kişi tarafından değiştirilerek bunun ikinci değişkene etkisi araştırılır. Bunlardan birincisine **serbest değişken**, ikincisine **bağlı değişken** adı verilir. Örneğin bir esnek yayın ucuna asılan W_1 , W_2, ... ağırlıkları ile yay x_1, x_2, ... kadar uzayacaktır. Bunlardan W serbest, x bağlı değişken durumundadır. Değişkenler arasında bağıntı bulmanın en pratik yolu, bu değişkenler arasında grafik çizmek ve bundan yararlanarak varsa, matematiksel bağıntıyı bulmaktır. Deney verilerine dayanılarak bulunan bu bağıntıya **deneysel (ampirik) bağıntı** bu yöntemle bağıntı bulma işlemine de **eğri uydurma** adı verilir.

Bu bölümde, deney verilerinin grafiğinin nasıl çizileceği, grafikten analitik bağıntının ve bağıntıdaki katsayıların nasıl bulunacağı incelenecektir. Fizik kanunları basit denklemler şeklinde olduğundan, bu incelemede, kuramsal ayrıntılara girilmeyecektir.

7.2 GRAFİK ve YARARLARI

Deneysel olarak elde edilen verilere göre çizilen grafiğin fiziksel anlamını araştırma işlemine **grafik analizi** denir. Grafik analizinin önemli yararları şunlardır ;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 7.1 (a) İnterpolasyonla $x=x_0$ için $y=y_0$ in bulunması (b) Ekstrapolasyonla p=0 için t= -273 °C nin bulunması

• Grafik, ölçülen büyüklükler arasında bir bağıntının bulunup bulunmadığını gösterir. Veri çizelgesinden bunu doğrudan görmek mümkün değildir.

• Ölçülen büyüklükler arasında bir bağıntı varsa, grafik yardımıyla bu büyüklükler arasındaki matematiksel bağıntı elde edilebilir.

• Değişkenler arasındaki bağıntı bulunmasa bile, grafik yardımıyla, değişkenlerin ölçülmeyen, değerleri bulunabilir. Bulunan değer ölçülenler arasında ise bu işleme **interpolasyon** (içten değer bulma), ölçülenler dışında ise **ektrapolasyon** (dıştan değer bulma) denir. Şekil 7.1 de interpolasyon ve ekxtrapolasyon işlemleri gösterilmiştir.

7.3 GRAFİK ÇİZİLMESİ

Grafikten beklenen yararların sağlanabilmesi için grafik çiziminde aşağıdaki hususların dikkate alınması gerekir. Bu yapılmadığında grafikten yanlış bir bağıntı bulunabileceği gibi, çizenin dışındakiler grafiği yorumlayamayabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Grafik Çiziminde Başlıca Kurallar

1. Koordinat Eksenlerinin seçimi ve İşaretlenmesi

Serbest değişken yatay eksene (apsis), bağlı değişken düşey eksene (ordinat) yerleştirilir. Değişkenlerin adı ve parantez içinde birimleri yazılır.

2. Ölçek Seçimi

Yatay ve düşey eksende 1 birim (1 cm) uzunluğun gösterdiği değere, **fonksiyon ölçeği** ya da **ölçek** denir. Ölçek seçimi keyfi olmakla birlikte bu seçim ; eğri, grafik kağıdında en büyük alana yayılacak şekilde yapılmalıdır. Bunu sağlamak için ölçek ve değişkenlerin başlangıç noktasının seçiminde aşağıdaki kurallara uyulmalıdır.

a– Ölçek, ölçülen büyüklüğün 1, 2, 4, 5, ..., 10, ... gibi değerlerini göstermeli fakat 3, 6, 7, 9, ... gibi değerlerini göstermemelidir. Bu kurala uyulmadığında, hem verilerin işaretlenmesinde hem de grafikten değer okunmasında güçlük çekilir.

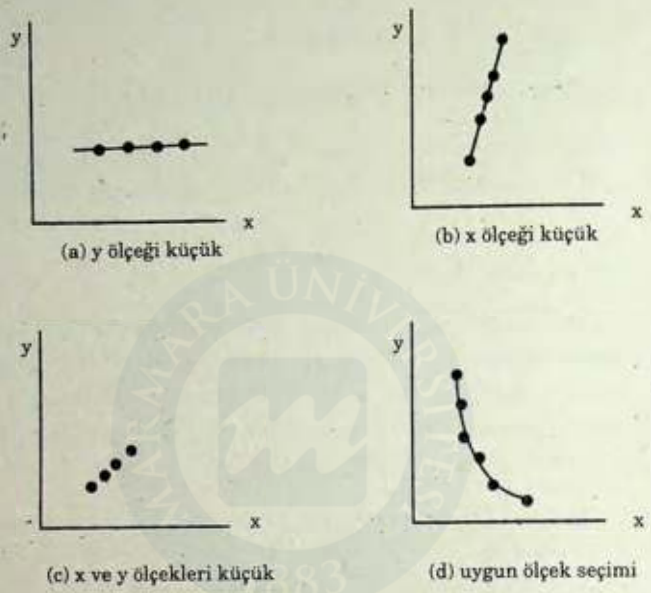
b– Veriler çok büyük ya da çok küçük sayılardan oluşuyorsa önce bunlar 10' un kuvvetleri şeklinde yazılırlar ve ölçek seçimi bundan sonra yapılır. Adi grafik kağıdında üslü çarpan, parantez içerisinde büyüklüğün birimi ile birlikte yazılır.

c– Karşılaşılan verilere bağlı olarak x ve y eksenlerine ait ölçek birimleri eşit olmayabilir.

d– Serbest ve bağlı değişkenlerin sıfır değerleri grafiğin orijininde bulunabileceği gibi genellikle değişkenlerden birinin ya da her ikisinin sıfır değeri orjinde bulunmayabilir.

Şekil 7.2 de (c) ve (d) kurallarına uyulmadan çizilen grafikler gösterilmiştir. Bu tür grafiklerde eğirinin şekli ve grafikten bulunacak bağıntı konusunda yanılgıya düşülebilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



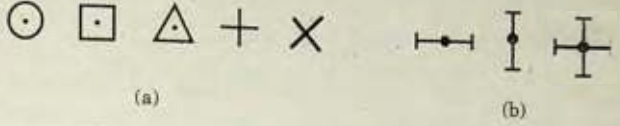
Şekil 7.2 Grafik çiziminde hatalı ölçek seçimi (a, b, c) ve uygun ölçek seçimi (d)

3. Verilerin İşaretlenmesi

Verilerin yerleri kendilerine ait eksenlerden bulunur ve bu noktalardan eksenlere çıkılan dikmelerin kesim noktaları Şekil 7.3 (a) daki sembollerden biri ile işaretlenir. Veri değerleri kesinlikle koordinatlara yazılmamalıdır. Aynı grafik kağıdına birden fazla grafik çizilecekse her bir eğri için ayrı bir sembol kullanılmalıdır.

Veriler ölçülen büyüklüğün gerçek değeri olmayıp ona en yakın ortalama değerlerdir. Dolayısıyla bir hata içerirler. Bu yüzden bir veri çiftinin yeri işaretlenirken onun hatası da gösterilebilir. Hata faktörü standart sapma veya maksimum hata gibi değişkenlerden birinin ya da ikisinin hatalı ölçülmüş olmasına bağlı olarak şekil 7.3 (b) deki sembollerden biri ile gösterilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

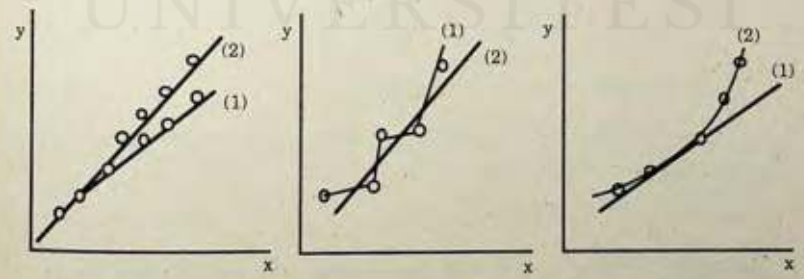


Şekil 7.3 Grafik çiziminde kullanılan işaretler; a) Verilerin işaretlenmesinde, b) Hata faktörlerinin gösterilmesinde.

Δx ve Δy; x ve y değişkenlerindeki hata faktörü ise hata çizgisinin boyu $2\Delta x$ ve $2\Delta y$ kadar alınır ve bu çizgiler grafiğe, ortası ölçülen değeri gösterecek şekilde yerleştirilir.

4. Eğrinin Çizilmesi

Grafik analizinde, veri çiftlerinin eksenlere yerleştirilmesi ile oluşan eğrinin şekli ile ilgilenilir. Burada eğri sözcüğü, hem doğru hem eğri çizgi anlamında kullanılmaktadır. Eğriyi çizmeden önce işaretlenen veri çiftlerinin genel karakterine bakılır. Bu bölümün başında da belirtildiği gibi, fizik kanunları ve bağıntıları basit denklemler şeklindedir. Bu nedenle veri çiftlerini gösteren noktalar ya bir doğru ya da düzgün bir eğri oluştururlar. Veriler hata içereceğinden, tüm noktalar eğri üzerinde bulunmayabilir. Raslantı hatalarının pozitif ve negatif olma olasılıkları eşit olduğundan, eğri; mümkün olduğu kadar çok sayıda noktadan geçecek ve noktaları ortalayacak şekilde çizilmelidir. Şekil 7.4 te eğrinin nasıl çizileceği bazı tipik örnekler üzerinde açıklanmıştır.



Şekil 7.4 Grafikte eğri çizimi. (1), yanlış çizimi, (2) doğru çizimi göstermektedir.

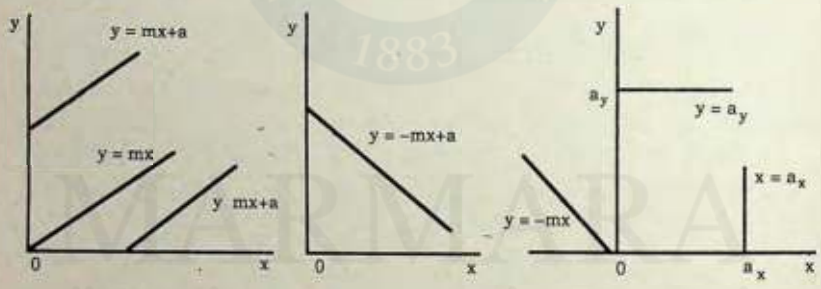
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7.4 GRAFİKLERİN SINIFLANDIRILMASI

Grafikler analitik bir denklemi temsil ederler. Bu denklemler; bir, iki veya çok katsayılı olabilirler. Bu nedenle grafikleri katsayı miktarına göre sınıflandırmak mümkündür. Bu bölümde yalnız bir ve iki katsayılı denklemleri gösteren grafikler inceleneceğinden, grafiklerin sınıflandırılması katsayı miktarı yerine eğrinin tipine göre yapılacaktır. Eğri tipine göre grafikler ;

- Doğrusal grafikler,
- Kuvvet fonksiyonu grafikleri,
- Üstel fonksiyon grafikleri

olmak üzere üçe ayrılırlar. Bundan sonraki kesimlerde bu üç grafik türü ile bunların analizi incelenecektir.



Şekil 7.5 Doğrusal grafiklerde başlıca eğri türleri

7.4.1 Doğrusal (Lineer) Grafikler

Doğrusal grafikte, veri çiftlerini gösteren noktalar bir doğru oluştururlar. Doğrunun analitik denklemi

$$y = mx + a \qquad (7.1)$$

şeklindedir. Burada m ve a ya **denklem sabitleri** denir. Bu sabitler pozitif, negatif veya sıfır gibi herhangibir reel sayı olabilirler. Doğrunun koordinat eksenlerine göre konumu m ve a denklem sabitlerinin işaretleri-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ne ve değerlerine bağlıdır. Uygulamada en çok karşılaşılan bazı örnekler Şekil 7.5 te gösterilmiştir.

Doğrusal Grafiklerden Denklem Sabitlerinin Bulunması

Lineer grafiklerin m ve a denklem sabitlerini bulmak için doğru üzerinde birbirinden uzak $P_1\ (x_1, y_1)$ ve $P_2\ (x_2, y_2)$ noktalarını seçelim. Bu iki noktanın koordinatları (7.1) denklemini gerçekleyeceğinden,

$$y_1 = mx_1 + a \ ; \ y_2 = mx_2 + a \qquad (7.2)$$

yazılabilir.

Bu iki denklemden m katsayısı ;

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (7.3)$$

bulunur. Bu katsayıya grafiğin **fiziksel eğimi** denir. Fiziksel büyüklükleri gösteren x ve y değerleri boyutlu olduğundan (7.3) denklemi ile tanımlanan fiziksel eğim boyutludur. Bunu, boyutsuz olan ve

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (7.4)$$

şeklinde tanımlanan geometrik eğimle karıştırmamak gerekir. Örneğin bir grafiğin eğimi 10^3 N/m bulunmuşsa, bu eğimin karşılığı olan bir α açısından söz edilemez. Başka bir deyişle, eğimin 10^3 N/m olduğu grafikte, doğrunun x ekseni ile yaptığı açının ; $\alpha = \text{arctg } 10^3 \simeq 90°$ olması söz konusu edilemez. Geometrik eğimde $\tan \alpha = 1.00$ bulunmuşsa

$$\alpha = \text{Arctg } 1.00 = 45° \text{ olur.}$$

Sadece x ve y eksenlerindeki ölçek birimlerinin uzunlukça eşit olduğu özel halde, fiziksel eğim sayıca geometrik eğime eşittir. Bu bölümde eğim denildiğinde, yalnız fiziksel eğimden söz edildiği anlaşılmalıdır.

Çizilen bir grafikten eğimin, dolayısıyla m denklem sabitinin, bulunuşu Şekil 7.6 da gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi, eğimin bulunmasında; $P_1\ (x_1, y_1)$; $P_2\ (x_2, y_2)$ noktaları seçilirken bunların mutlaka

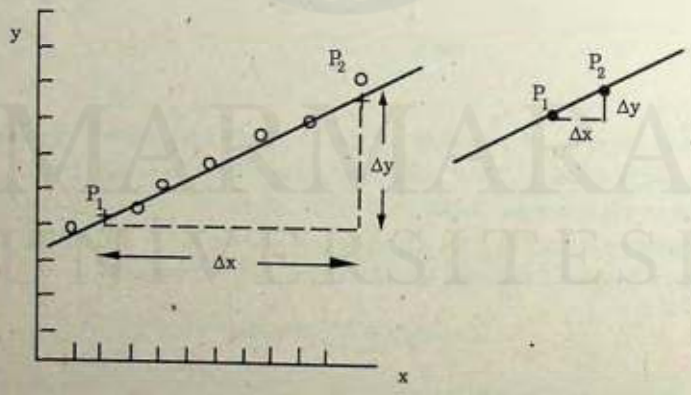
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

doğru üzerinde bulunmasına, birbirinden olabildiği kadar uzakta ve grafikten kolayca okunabilecek değerler olmasına dikkat edilmelidir. Eğimin hesabında, değişkenlerin birimlerine ve varsa birimin yanındaki üs çarpanına dikkat edilmelidir. Bu çarpan unutulduğunda eğim (dolayısıyla m katsayısı) yanlış hesaplanacaktır. Şekil 7.6 daki ekte görüldüğü gibi, P_1 ve P_2 noktalarının yakın seçilmesi, eğimdeki hatanın büyük olmasına neden olur. Eğimin bulunmasıyla diğer denklem sabiti a denklem (7.2) den

$$a = y_1 - mx_1 \quad \text{veya} \quad a = y_2 - mx_2$$

bağıntılarından biriyle bulunabilir.

Şekil 7.6 da verilen örnekte olduğu gibi şayet serbest değişkenin sıfır değeri orijinde ise, x=0 için $y = y_o = a$ olacaktır. Başka bir deyişle, serbest değişkenin sıfır değeri orijinde ise, grafiğin y eksenini kestiği noktanın ordinatı a denklem sabitine eşit olur.



Şekil 7.6 Eğim bulunması

7.4.2 Kuvvet Fonksiyonu Grafikleri

Kuvvet fonksiyonu grafikleri genel olarak

$$y = k\,x^m \tag{7.5}$$

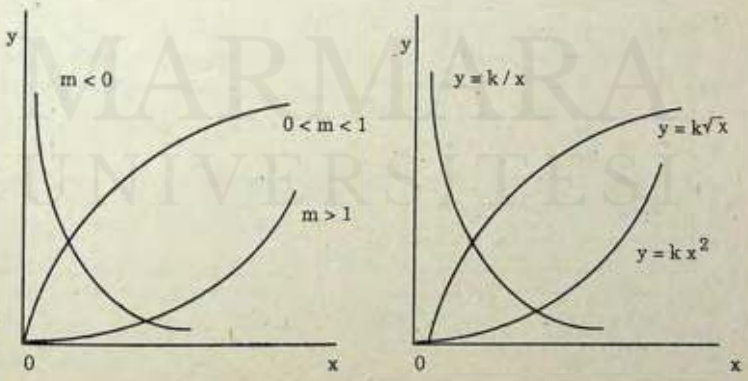
denklemi ile gösterilirler. Burada k ve m denklem sabitleri sıfırdan farklı herhangibir reel sayı olabilir. Eğrinin tipi, m nin işaretine ve değerine bağlıdır. Uygulamada en çok karşılaşılan genel eğri tipleri Şekil 7.7 de gösterilmiştir.

Doğrusal grafiklerden denklem sabitleri bulunabileceği halde eğrisel grafiklerden, grafiğin karşılığı olan analitik bağıntıyı yazmak ve denklem sabitlerini bulmak mümkün değildir. Bu nedenle eğrisel grafiklerin önce doğrusal hale dönüştürülmesi gerekir.

Denklem 7.5 teki kuvvet fonksiyonunu, lineer fonksiyon haline getirmek için her iki tarafın logaritması alınırsa ;

$$\log y = \log k + m \log x \tag{7.6}$$

bulunur.



Şekil 7.7 Kuvvet fonksiyonu grafikleri

ANKARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

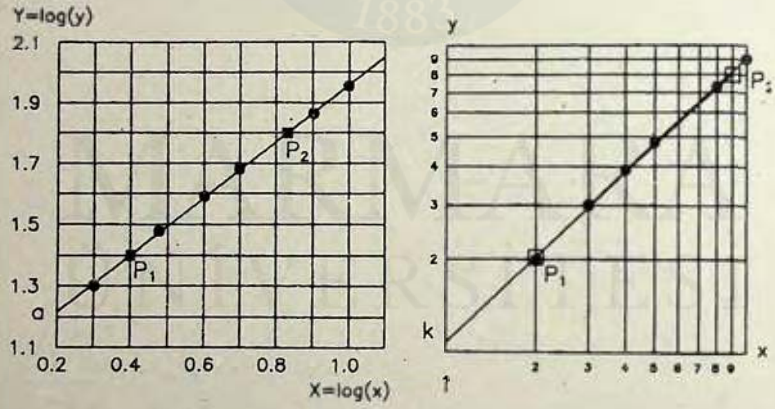
log y = Y ; logx = X ; logk = a ile gösterilirse Denklem 7.6 ;

$$y = mX + a \qquad (7.7)$$

.bir doğru denklemine dönüşür.

Kuvvet fonksiyonu grafiklerinin doğrusal hale getirilmesinde adi (lineer) grafik kağıdı kullanılabilir. Bu durumda grafiğin yatay ekseni, X = logx ; düşey ekseni Y = logy değerlerini gösterir ve Y = f (X) grafiği lineer olur (Şekil 7.8).

Kuvvet fonksiyonu grafiklerinin lineer hale dönüştürülmesinde kullanılan ikinci yöntem, tam logaritmik (log–log) grafik kağıdı kullanmaktadır. Tam logaritmik grafik kağıdında eksenler logaritmik olarak bölmelendirilmiştir. Bu özelliği nedeniyle veriler, logaritmaları alınmadan eksenlere yerleştirilir. Özellikle çok verisi olan deneylerde logaritma alma işlemi zaman kaybına yol açacağından log–log grafik kağıdı amaca ulaşmada daha pratik olmaktadır.



Şekil 7.8 Kuvvet fonksiyonu grafiklerinin, (a) adi grafik kağıdında, (b) tam logaritmik grafik kağıdında lineer hale getirilmesi.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Adi veya tam logaritmik grafik kağıdı kullanılarak lineer hale getirilen grafiklerden denklem sabitleri, bir önceki kesimde açıklanan yoldan gidilerek bulunabilir. Lineer grafik üzerinde $P_1 (X_1, Y_1)$; $P_2 (X_2, Y_2)$ noktalarını seçelim. Denklem (7.7) den ;

$$Y_1 = m X_1 + a \; ; \; Y_2 = m X_2 + a$$

Bu iki denklemden ;

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\log Y_2 - \log Y_1}{\log X_2 - \log X_1} \qquad (7.8)$$

bulunur.

Gerek lineer gerekse logaritmik grafik kağıdanda eğim bulmada (7.8) bağıntısı kullanılır. Yatay ve düşey eksenlerindeki logaritmik bölmeleri eşit olan log–log grafik kağıdı için ;

$$m = \frac{\log Y_2 - \log Y_1}{\log X_2 - \log X_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Serbest değişken X in sıfır değeri orijinde ise, adi grafik kağıdında doğrunun Y = log y eksenini kestiği noktanın ordinatı a değerini verir. Burada k ;

$$a = \log k \; ; \; k = 10^a$$

olur. log–log grafik kağıdında ise, doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı, doğrudan k sabitini verir (Şekil 7.8 i inceleyiniz). m sabitinin yukarıda açıklanan yöntemle bulunmasıyla, k sabiti ; adi grafik kağıdına çizilen y = f(x) eğrisel grafiğinden ya da log–log grafik kağıdına çizilen grafikten bulunabilir. Eğri üzerinde herhangibir $P_o (X_o, Y_o)$ noktası seçelim. Denklem (7.5) ten

$$k = Y_o / X_o^m \qquad (7.9)$$

yazılabilir. k nın bu yöntemle bulunmasında x = 0 ın orijinde bulunma zorunluluğu yoktur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7.4.3 Üstel Fonksiyon Grafikleri

Üstel fonksiyon grafikleri genel olarak ,

$$y = k\, b^{mx} \tag{7.10}$$

fonksiyonu ile gösterilirler. Burada b tabanı sabit bir sayıdır. Fizikte bu tabanın e (2.718...) ya da 10 olduğu denklemlerle karşılaşılır. Önce b tabanının e olduğunu düşünelim. Böylece Denklem 7.10

$$y = k\, e^{mx} \tag{7.11}$$

olur.

Kuvvet fonksiyon grafiklerinde olduğu gibi üstel fonksiyon grafiklerinde de k ve m denklem sabitlerini bulabilmek için grafiğin doğrusal hale getirilmesi gerekir. Denklem 7.11' in e tabanına göre logaritması alınırsa

$$\ln y = \ln k + mx \tag{7.12}$$

bulunur. $\ln y = Y$; $\ln k = a$ ile gösterilirse Denklem 7.12

$$Y = mx + a \tag{7.13}$$

şeklinde bir doğru denklemine dönüşür.

Üstel fonksiyon grafiklerinin lineer hale getirilmesinde adi grafik kağıdı ya da yarılogaritmik grafik kağıdı kullanılır. Adi grafik kağıdı kullanılırsa, yatay eksen x, düşey eksen $Y = \ln y$ değerlerini gösterir. Yarılogaritmik grafik kağıdında ise yatay eksen lineer, düşey eksen logaritmik olarak bölmelendirilmiştir (Şekil 7.9 b). Bu nedenle y değerleri logaritmaları alınmadan yazılabilir.

Adi ya da yarılogaritmik grafik kağıdı kullanılarak lineer hale getirilen grafiklerden m denklem sabiti ;

$$m = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1} \tag{7.14}$$

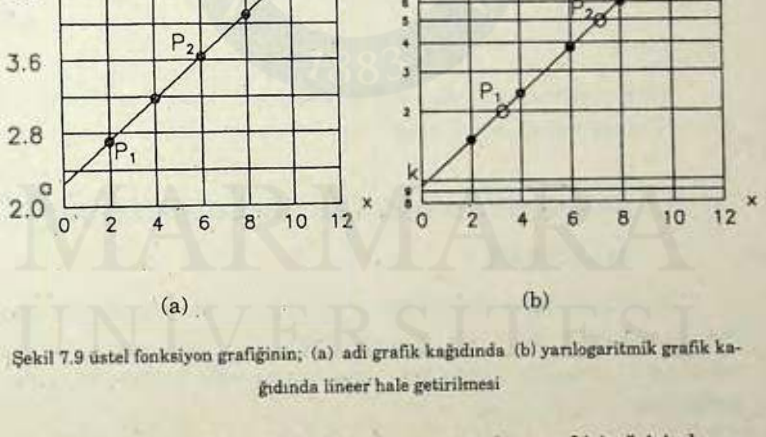
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olur. Burada (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) adi ya da yarılogaritmik grafik kağıdında lineer hale getirilen doğru üzerindeki P_1 ve P_2 noktalarının koordinatlarıdır.

Serbest değişken x in sıfır değeri orijinde ise ; adi grafik kağıdında doğrunun Y (=lny) eksenini kestiği noktanın ordinatı a değerini verir. Buradan ikinci denklem sabiti k,

$$a = \ln k \; ; \; k = e^a \qquad (7.15)$$

denkleminden bulunur. Yarılogaritmik grafik kağıdında ise, doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı, doğrudan k sabitini verir (Şekil 7.9 u inceleyiniz).



Şekil 7.9 üstel fonksiyon grafiğinin; (a) adi grafik kağıdında (b) yarılogaritmik grafik kağıdında lineer hale getirilmesi

Denklem sabiti k, adi grafik kağıdına çizilen $y = f(x)$ eğrisinden ya da yarılogaritmik kağıda çizilen grafikten de bulunabilir. $P_o (x_o, Y_o)$ noktası, her iki durumda eğri üzerinde alınan bir nokta olmak üzere Denklem 7.11 den

$$k = Y_o / e^{mx_o} \qquad (7.16)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. k nın bu yöntemle bulunmasında, x=0 ın, grafiğin orijininde bulunma zorunluluğu yoktur.

Üstel fonksiyon grafiklerinin çizimi ve analizi ile ilgili yukarıda yapılan açıklama, tabanın e olduğu varsayımına göre yapılmıştır. Taban e yerine 10 olduğunda lny yerine logy alınmak üzere tüm bağıntılar yine geçerlidir. Bu durumda yalnız m katsayısının hesabında farklılık olur.

$$y = k\,m^{mx} \quad ; \quad \log y = \log k + mx \log b$$

$$\log y = Y \quad ; \quad \log k = a \quad ; \quad m \log b = m' \text{ alınarak}$$

$$Y = m'x + a \qquad (7.17)$$

bulunur. Burada m', grafiğin eğimini göstermektedir. Denklem sabiti m ;

$$m = \frac{m'}{\log b} \qquad (7.18)$$

olur.

İkinci denklem sabiti olan k için ; e yerine b alınmak şartıyla (7.15) ve (7.16) denklemleri aynen geçerli olur.

7.5 GRAFİK YÖNTEMİ İLE DENEYSEL DENKLEMLERİN BULUNMASI

Bundan önceki kesimde, karşılaşılabilecek belli başlı denklem türleri ve bunların grafiklerinin analizi ile ilgilendik. Grafik yoluyla, ölçülen büyüklükler arasındaki bağıntının nasıl bulunacağını özetlemekte yarar görüyoruz.

Deneysel olarak ölçülen verilerin hangi tip bağıntıya uyduğu konusunda önceden hiçbir bilgimiz olmayabilir. Bu durumda veri çiftleri, doğrusal grafik elde edilene kadar, sırasıyla adi (lineer), tam logaritmik (log–log) ve yarılogaritmik (s–log) grafik kağıdına yerleştirilerek grafik çizilir. Bu işlem sonucunda üç olasılık bulunmaktadır:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

i. x_i y_i ölçümleri adi grafik kağıdında doğru oluşturuyorlarsa aranan deneysel bağıntı ;

$$y = mx + a$$

şeklinde bir doğru denklemidir.

ii. x_i y_i ölçümleri log–log grafik kağıdında, ya da $\log x_i$, $\log y_i$ değerleri adi grafik kağıdında, doğru oluşturuyorlarsa aranan deneysel bağıntı ;

$$y = kx^m$$

şeklinde bir eğri denklemidir.

iii. x_i y_i ölçümleri, yarılogaritmik grafik kağıdında, ya da x_i, $\log y_i$ değerleri adi grafik kağıdında doğru oluşturuyorlarsa aranan deneysel bağıntı ;

$$y = kb^{mx}$$

olur.

Çizelge 7.1 Başlıca denklem türleri ve bunların lineer hale getirilmesi. (X_o, Y_o), (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) eğri üzerinde alınan noktaların koordinatlarını göstermektedir.

X_1, Y_1 ölçümlerini lineer veren grafik kağıdı	Aranan bağıntı	Denklem Sabitleri
Adi (lineer)	$y = mx + a$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $a = y_o - mx_o$
log–log Adi ($\log y_i$–$\log x_i$)	$y = kx^m$	$m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$, $k = \frac{y_o}{x_o^m}$
	$y = ke^{mx}$	$m = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$, $k = \frac{y_o}{e^{mx_o}}$
S–log Adi (x_i.$\ln y_i$ / $\log y_i$)	$y = kb^{mx}$	$m = \frac{\log y_2 - \log y_1}{(x_2 - x_1)\log b}$, $k = \frac{y_o}{x^{mx_o}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde bir üstel ifadedir. Burada b tabanı daha çok e ya da 10 olmaktadır. Denklem sabitleri m, a ve k nın bulunuşu Kesim 7.4.1 de açıklandığından burada tekrarlanmayacaktır. Çizelge 7.1 de yukarıdaki açıklamalar toplu olarak gösterilmiştir.

Kuvvet fonksiyonu ve üstey fonksiyon grafiklerine genel olarak eğrisel grafikler de denilmektedir. Eğrisel grafikler, deneme yoluyla, adi grafik kağıdında lineer hale getirilerek denklem sabitleri bulunabilir. Pratikte çok kullanılan bu yöntemle, 3 sabitli deneysel denklemlerin analizi de yapılabilir. Deneme yönteminde grafiğin eğrilik konumuna göre m ye çeşitli değerler verilir. Bu işleme, grafik lineer oluncaya kadar devam edilir. Şekil 7.10 da uygulamada ençok karşılaşılan bazı eğri tipleri ve bunları doğrusallaştırmak için x in denenecek üsleri gösterilmiştir.

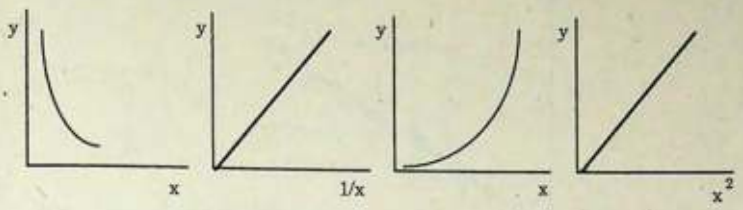
7.6 DENKLEM SABİTLERİNDEKİ HATANIN BULUNMASI

Denklem sabitlerindeki hatanın nasıl bulunacağını doğrusal grafik üzerinde açıklayalım. Deneysel yolla bulunan x_i, y_i verileri hata içerebileceğinden bu verileri kullanarak bulunacak m ve a sabitleri de sırasıyla Δm ve Δa kadar hatalı bulunacaktır. Denklem sabitlerindeki hatayı grafik yöntemle hesaplayabilmek için veriler grafiğe Δx, Δy hata faktörleri ile birlikte işaretlenir. Şekil 7.11 de görüldüğü gibi ölçümlerin belirlediği en uygun doğru $y=mx+a$ en kötümser doğru da $y=m' x+a'$ olsun. Böylece denklem sabitlerindeki hatalar;

$$\Delta m = (m-m') \qquad \Delta a = (a-a') \qquad (7.19)$$

olur. Burada x büyüklüğünün hatasız daha doğrusu önemsenmeyecek basamakta hata ile ölçüldüğü varsayılmıştır.

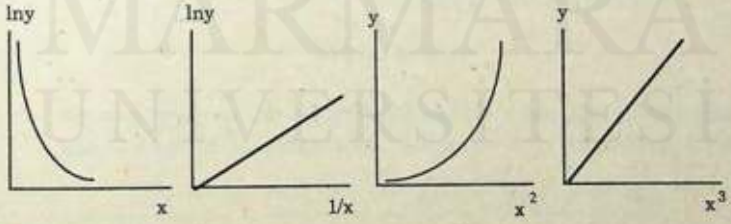
Grafik yöntemle denklem sabitlerinin bulunmasında çizim hataları, hatta kalem kalınlığı bile, sonuca etki eder. Ölçülerdeki hata faktörü grafikte gösterilemeyecek kadar küçükse bu durumda doğrunun m ve a katsayılarını n kez (5,6...) buluruz. Bunlardaki farklılık istatistik hata kaynaklı olduğundan sabitlerdeki dağılım ölçüleri Bölüm 5 ve



(a) $y = kx$ (b) $y = kx^2$



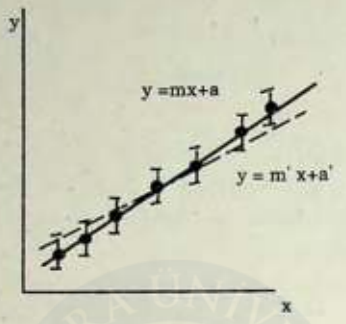
(c) $y = k\sqrt{x} - a$ (d) $y = kx^3 + a$



(e) $y = ke^{m/x} \rightarrow \ln y = m/x$ (f) $y = kx^3$

Şekil 7.10 Eğrisel grafiklerin, deneme ile lineer hale getirilmesi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 7.11 Denklem katsayılarındaki hataların grafikle bulunması.

Bölüm 6 da açıklandığı şekilde;

$$\sigma_{n-1}(m) = \sqrt{\frac{\Sigma (m_i - \bar{m})^2}{n(n-1)}} \qquad \sigma_{n-1}(a) = \sqrt{\frac{\Sigma (a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}} \qquad (7.20)$$

denklemlerinden bulunur.

Örnek 7.1

R ve S değişkenleri arasında ;

$$R = A + B / \sqrt{S}$$

şeklinde bir bağıntının olduğu biliniyor. Bu değişkenlerin çizelgede verilen değerlerinden yararlanarak A ve B denklem sabitlerini bulunuz.

S	1	2	3	4	5
$1/\sqrt{S}$	1	0.71	0.58	0.50	0.45
R	5.20	3.74	3.08	2.70	2.44

Aranan denklem 3 sabitlidir. Bunlardan biri (S^n, n = 1/2) bilindiğinden diğer ikisi A ve B, bilinen yoldan gidilerek bulunabilir. Bu neden-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

le $R = f(S^{-1/2})$ grafiği çizilmelidir (Şekil 7.12). Görüldüğü gibi grafik lineerdir. Denklem sabitleri B ve A ;

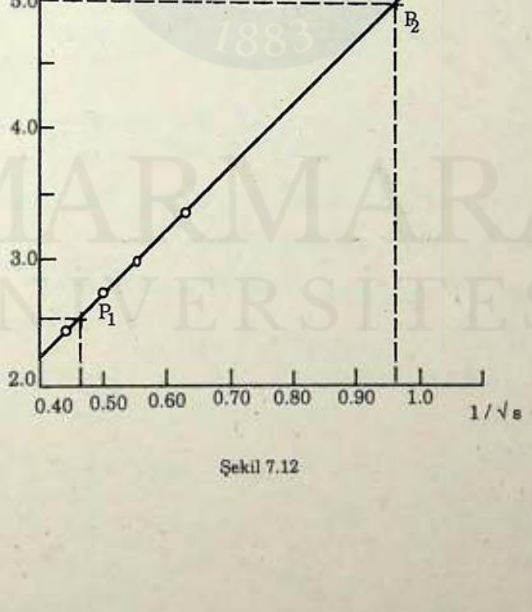
$$B = \frac{R_2 - R_1}{S_2^{-1/2} - S_1^{-1/2}} = \frac{5.0 - 2.5}{0.965 - 0.46} = 5.0$$

P_2 (0.96,5) noktasından ; $5.0 = A + 5.0 / 0.96 \rightarrow A = -0.2$

bulunur. Böylece aranan bağıntı ;

$$R = -0.2 + 5.0 / \sqrt{s}$$

dır.



Şekil 7.12

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 7.2

Bir yarı iletkenin iletkenliği (G) ile sıcaklığı (T) arasında

$$G = G_0 e^{-E/RT}$$

şeklinde üstel bir bağıntının olduğu biliniyor. Burada G_0 yarıiletkene bağlı bir sabit, E yarı iletkenin aktivasyon enerjisi, k Boltzman sabitidir. G ve T değişkenleri için çizelgede verilen ölçümleri kullanarak E ve G_0 sabitlerini bulunuz.

T(K)	275	280	285	290	295	300	305	310	315	320	325	330
$G(\Omega^{-1}x10^{-7})$	1.0	1.6	2.5	3.8	5.7	8.5	12	18	27	36	51	70

Yarılogaritmik grafik kağıdına çizilen G–1/T grafiğinin eğiminden, (Şek. 7.13)

$$m = -\frac{E}{k} = \frac{\ln 1.9x10^{-7} - \ln 3x10^{-6}}{(3.55 - 3.15).10^{-3}} = -7.02x10^{2}$$

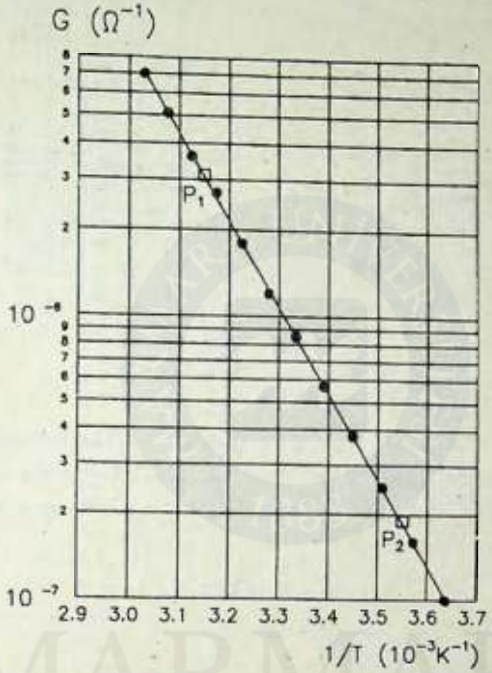
$$E = -k\,m = 1.38x10^{-23}\ J \frac{1}{1.6x10^{-19}\ J/eV} 7.02x10^{2} = 0.61\ eV$$

bulunur. İkinci denklem sabiti G_0 ı bulmak üzere eğri üzerinde P ($3.15x10^{-3}$, $3.0x10^{-6}$) noktasını seçelim.

$$G_0 = G_1 e^{E/kt} = 3x10^{-6}\, e^{0.61\,.\,1,6x10^{-19}/1.38\,.\,10^{-23}.\,0,00315}$$

$$= 1.6x10^{5}\ (\Omega^{-1})$$

bulunur.



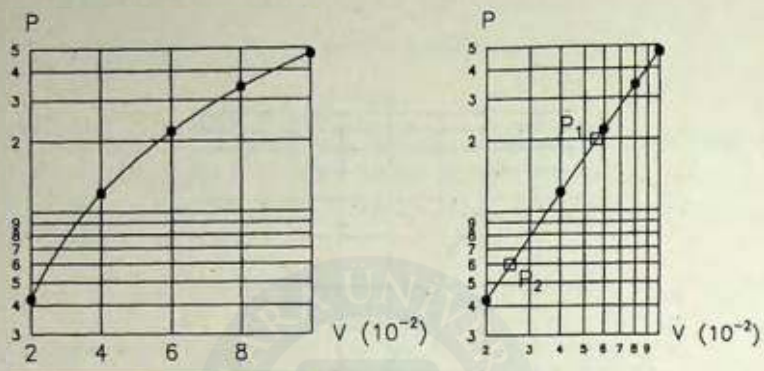
Şekil 7.13

Örnek 7.3

V ve P değişkenleri için, çizelgedeki ölçümler bulunuyor. Değişkenler arasındaki bağıntıyı ve denklem sabitlerini bulunuz.

V	*0.02*	*0.04*	*0.06*	*0.08*	*0.10*
P	*4.24*	*12*	*22*	*34*	*47*

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 7.14

Ölçülen V, P değerleri ; adi, yarılogaritmik ve tam logartmik grafik kağıdına yerleştirildiğinde tam logaritmik grafik kağıdında en uygun doğrunun elde edildiği, Şekil 7.14 den görülebilir. O halde aranan bağıntı

$$P = k\ V^m$$

şeklinde olmalıdır. Şekil 7.14. b den

İkinci denklem sabiti k için ;

$$m = \frac{\log P_2 - \log P_1}{\log V_2 - \log V_1} = \frac{\log 20 - \log 6}{\log 0.056 - \log 0.025} = 1.5$$

$$m = \frac{P_2}{V_2^m} = \frac{20}{(5.6 \times 10^{-2})^{1.5}} = 1500$$

Böylece aranan bağıntı,

$$P = 1500\ V^{1,5}$$

olur.

Örnek 7.4

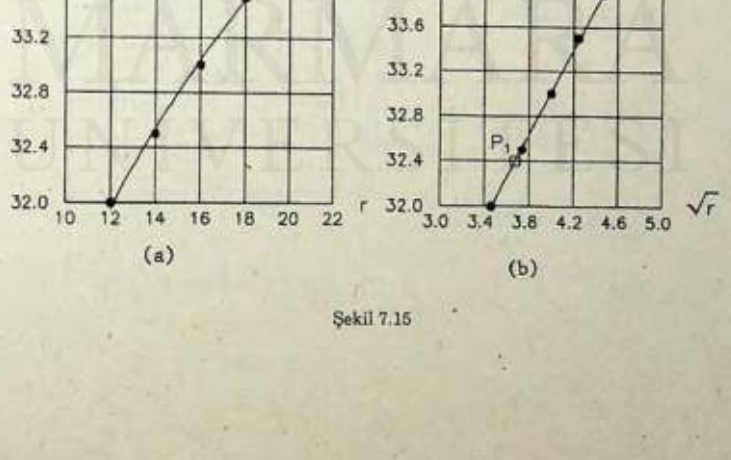
P ve r değişkenleri için,

r	12.0	14.0	16.0	18.0	20.0
P	32.0	32.5	33.0	33.5	33.9

Ölçümleri bulunuyor. Bu iki değişken arasındaki bağıntıyı ve denklem sabitlerini bulunuz.

Ölçümler adi grafik kağıdına yerleştirildiğinde, iki değişken arasındaki bağıntının, $P \propto \sqrt{r}$ şeklinde olabileceği sezilmektedir (Şekil 7.15 a). Buna göre P ile $\sqrt{r}$ arasında bir grafik çizilmelidir. Şekil 7.15 b den,

$$P = a + m\sqrt{r}$$



Şekil 7.15

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Grafiğin eğiminden m denklem sabiti,

$$m = \frac{P_2 - P_1}{r_2^{1/2} - r_1^{1/2}} = \frac{34.0 - 32.4}{4.44 - 3.68} = 2.1 \simeq 2$$

Diğer denklem sabiti a,

$$a = P_2 - m\,r_2^{1/2} = 34.0 - 2.1 \times 4.44 = 24.7 \simeq 25$$

ve aranan bağıntı,

$$P = 25 + 2\sqrt{r}$$

olur.

Örnek 7.5

Şekil 7.16 da gösterilen veriler arasındaki ampirik denklemi ve denklem sabitlerini bulunuz.

Veriler tam logaritmik grafik kağıdında bir doğru üzerinde bulunduklarına göre aranan bağıntı,

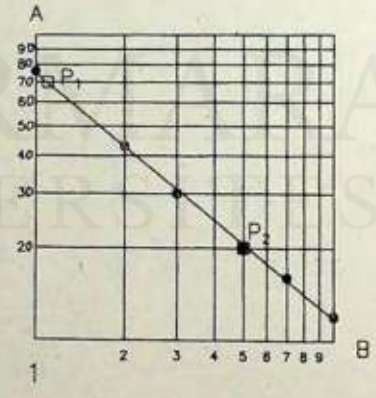
$$A = k\,B^n$$

şeklinde olmalıdır.
Grafiğin eğiminden,

$$n = \frac{\log A_1 - \log A_2}{\log B_1 - \log B_2}$$

$$= \frac{\log 70 - \log 20}{\log 1.2 - \log 5.0}$$

$$= -0.88$$



Şekil 7.16

bulunur. P (A_1,B_1) noktası için grafikten okunan değerler yukarıdaki denklemde yerine yazılarak,

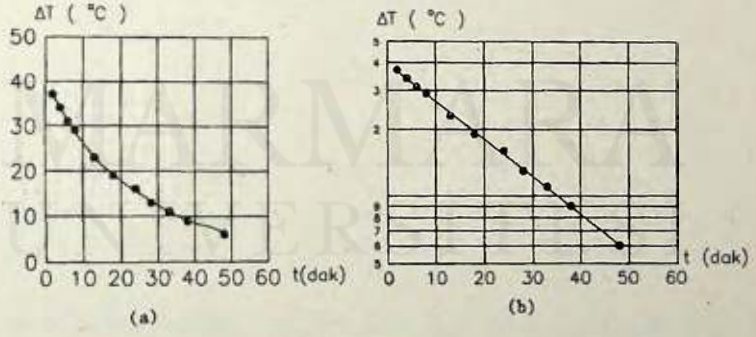
$$k = \frac{A_1}{B_1^n} = \frac{70}{1.2^{-0.88}} = 82$$

bulunur.

Örnek 7.6

Bir kaptaki suyun sıcaklığının zamana göre değişimi için çizelgedeki ölçümler bulunuyor. Burada ΔT suyun herhangibir andaki sıcaklığı ile oda sıcaklığı arasındaki farkı, t soğuma zamanını göstermektedir. ΔT ile t arasındaki matematiksel bağıntıyı bulunuz.

t(dak)	2	4	6	8	13	18	24	28	33	38	48
ΔT(°C)	37	34	31	29	23	19	16	13	11	9	6



Şekil 7.17

Veriler sırasıyla adi ve tam logaritmik grafik kağıdına yerleştirildiğinde Şekil 7.17 a, b elde edilir. log–log grafik kağıdında doğru elde edildiğinden aranan bağıntı

$$\Delta T = k.10^{mt}$$

şeklindedir. Denklem sabitleri; Örnek 7.5 deki yoldan,

$$m = -1.7 \times 10^{-2} \quad k = 45$$

bulunur.

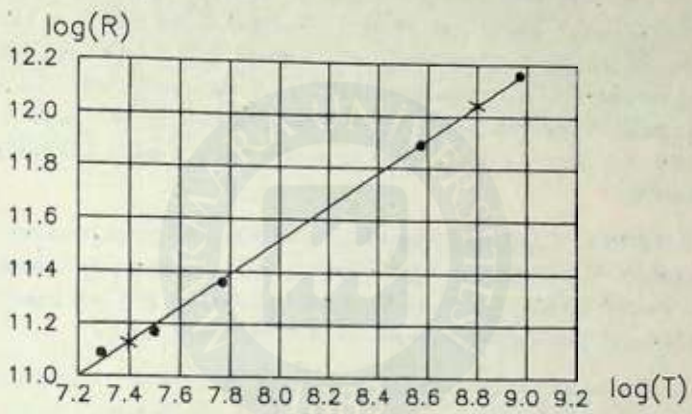
Örnek 7.7

Aşağıdaki çizelge, güneş sistemindeki bazı gezegenlerin periyotlarını ve ortalama yörünge yarıçaplarını göstermektedir. Yörünge yarıçapı ile peryot arasındaki matematiksel bağıntıyı bulunuz.

Gezegen	R(10^{11}m)	T(10^7s)	logR	logT
Venüs	1.08	1.94	11.09	7.29
Dünya	1.49	3.16	11.17	7.50
Mars	2.28	5.94	11.36	7.77
Jüpiter	7.78	37.4	11.89	8.57
Satürn	14.3	93.0	12.16	8.97

Verilerden, aranan bağıntının bir kuvvet bağıntısı olduğu anlaşılmaktadır. Bu kez log–log grafik kağıdı yerine, verilerin logaritmalarını alarak adi grafik kağıdı kullanalım. Şekil 7.18 den görüldüğü gibi grafik lineer olup aranan denklem,

şeklinde olmalıdır. Örnek 7.5 de izlenen yoldan gidilerek $n = 0.67$ ve $k = 1.4 \times 10^6$ değerleri bulunur.



Şekil 7.18

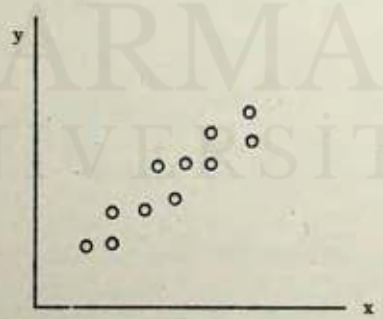
MARMARA ÜNİVERSİTESİ

8. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

Grafik yöntemi ile bulunan deneysel denklem sabitleri genellikle işlemi yapan kişinin yargısına hatta kullanılan kalemin ince ya da kalın uçlu oluşuna göre farklı olabilmektedir. Örneğin Şekil 8.1 deki gibi bulunan veri çiftlerini dikkate alalım. Beş ayrı kişi noktalardan geçen doğruyu çizdiğinde bunların birbirleriyle çakışacağını söyleyemeyiz. Başka bir deyişle beş öğrenci aynı deneysel verilerden beş ayrı sabit çiftleri elde edecektir.

Bu kusuru nedeniyle özellikle bilimsel araştırmalarda, denklem sabitleri grafik yöntemi yerine **en küçük kareler yöntemi** ile bulunur. Bu kesimde göreceğimiz gibi en küçük kareler yöntemi; aynı veri kümeleri ile uygulayana bağlı olmaksızın aynı denklem sabitlerini verir.

En küçük kareler yöntemi ile denklem sabitlerinin hesaplanacağı bağıntılar, değişkenlerden birinin ya da her ikisinin hatalı ölçülmesine göre farklı olmaktadır. Bunu her iki durum için inceleyelim.



Şekil 8.1 Aynı veri kümesinden farklı eğri elde edilmesi

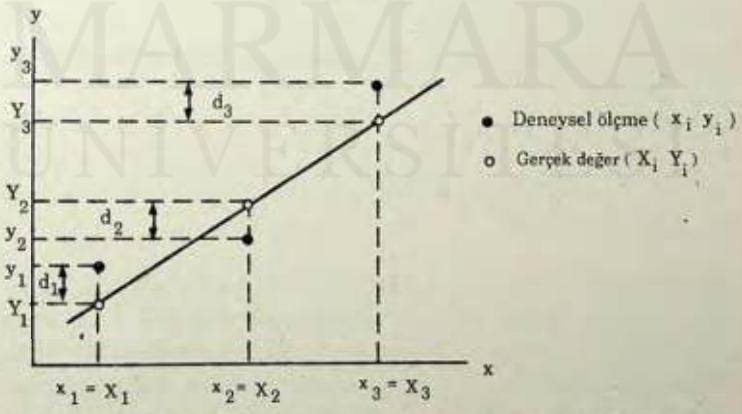
8.1 DEĞİŞKENLERDEN BİRİNİN HATALI ÖLÇÜLMESİ DURUMU

Esnek bir yayın ucuna asılan W_1, W_2, W_3, ... ağırlıkları ile bu ağırlıkların yayda oluşturdukları X_1, X_2, X_3, ... uzamaları arasındaki ölçmeleri dikkate alalım. Bu ölçmede serbest değişken olan W_1, W_2, W_3, ... ağırlıkları standart ağırlıklar olup deneysel hata içermezler. Bağıl belisizlikleri, ölçerek bulunacak olan X_i uzama miktarındakine göre önemsenmeyecek basamaktadır. Bunun gibi, denklemi ;

$$y = mx + a \qquad (8.1)$$

şeklinde olan x, y büyüklüklerinden serbest değişken olan x hatasız (daha doğrusu y deki hataya göre önemsenmeyecek basamakta hatalı) olarak ölçülmüş olsun. X_i, Y_i gerçek x_i, y_i ölçülen değerler olsun. X hatasız olduğundan $x_i = X_i$ fakat $y_i \neq Y_i$ olduğuna dikkat edilirse Şekil 8.2 den görüldüğü gibi birinci ölçme için hata (sapma) ; $d_1 = y_1 - Y_1$ dir. (x_1, Y_1) doğru üzerinde bulunduğundan doğrunun denklemini sağlayacaktır. Dolayısıyla;

$$Y_1 = mx_1 + a$$



Şekil 8.2 Serbest değişkenin (x) hatasız, bağlı değişkenin (y) hatalı olması durumunda en uygun eğrinin çizilmesi. Burada (x_i, y_i) deneysel değerleri, (X_i, Y_i) gerçek değerleri göstermektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yazılabilir.

Buradan d_1 sapması ;

$$d_1 = y_1 - mx_1 - a$$

olur. Aynı şekilde diğer ölçmelere ait sapmalar;

$$d_2 = y_2 - mx_2 - a$$

$$d_3 = y_3 - mx_3 - a$$

Veya bir i ölçümü için sapma

$$d_i = y_i - mx_i - a \qquad (8.2)$$

olur.

Laplace kuramsal olarak göstermiştir ki m ve a denklem sabitlerinin en olası değerleri; d_1, d_2. ... d_i sapmalarının kareleri toplamının sıfır olduğu doğrudur. Yönteme en küçük kareler yöntemi denilmesi, yukarıda özetlenen **Laplace kuramı** ile ilişkisinden ileri gelir. Buna göre minimum olması istenen ifade ;

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \qquad (8.3)$$

olup bunu minimum yapan m ve a değerleri bu denklemin minimum olma şartı olan ;

$$\frac{\delta \Sigma d_i^2}{\delta m} = 0 \; ; \; \frac{\delta \Sigma d_i^2}{\delta a} = 0 \qquad (8.4)$$

bağıntılarından bulunabilir. Verilen bağıntıda ikiden fazla denklem sabiti olması halinde her sabit için (8.4) denklemindeki gibi kısmi türev alınıp sıfıra eşitlenerek sabit sayısı kadar denklem elde edilebilir ve bu denklemlerden bilinmeyen denklem sabitleri bulunur. Sabitlerin hesaplanmasına yarayan bu denklemlere **normal denklemler** adı verilir. İncelediğimiz iki sabitli doğru denklemindeki m ve a sabitlerini bulmak

için (8.2) denklemindeki ifade (8.4) denkleminde yerine yazılıp türev alınırsa* ;

$$\frac{\delta\Sigma\,(y_i - mx_i - a)^2}{\delta a} = 0 \;;\; -2\Sigma x_i\,(y_i - mx_i - a) = 0$$

veya daha kısa olarak ;

$$m\Sigma\, x_i^2 + a\Sigma x_i = \Sigma x_i\, y_i \;;\; m\Sigma\, x_i + na = \Sigma y_i \qquad (8.5)$$

bulunur. Bu denklemlerden aranan m ve a sabitleri ;

$$a = \frac{\Sigma y_i - m\Sigma x_i}{n} \;;\; m = \frac{n\Sigma x_i\, y_i - \Sigma x_i\, \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} \qquad (8.6)$$

bulunur. Çoğu zaman m ve a nın hesaplanmasından Denklem (8.6) yerine Denklem (8.5) tercih edilir.

Örnek 8.1

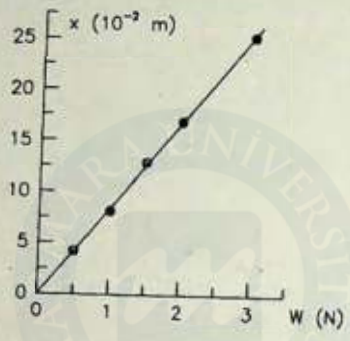
Bir yayın ucuna çeşitli W_i yükleri asılarak x_i uzamaları ölçülüyor. W_i değerleri standart olup bunlardaki hata önemsenmeyecek basamaktadır. Çizelgede verilen değerlere göre bu iki büyüklük arasındaki bağıntıyı ve denklem sabitlerini bulunuz.

W (N)	0.50	1.0	1.5	2.0	3.0
x (10^{-2}m)	4.2	8.1	12.8	16.8	25.0

* : $y = (ax+b)^2$ ise $y' = dy/dx = 2a\,(ax+b)$ olduğunu hatırlayınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Önce iki değişken arasındaki grafiği çizip buna göre aranan bağıntıyı bulalım. Şekil 8.3 e göre aranan bağıntı X = mW dir. Denklem sabiti m grafiğin eğiminden ;



Şekil 8.3

$$m = 8.0 \times 10^{-2}\ m / N$$

bulunur. Aynı sabiti en küçük kareler yöntemi ile bulalım X=mW olduğundan

$$d_i = x_i - X = x_i - mW_i ;$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - mW_i)^2$$

$$\frac{\delta \Sigma d_i^2}{\delta m} = -2\Sigma W_i\ (x_i - mW_i) = 0$$

Buradan ;

$$\Sigma W_i x_i - m\Sigma W_i^2 = 0 \; ; \; m = \frac{\Sigma W_i x_i}{\Sigma W_i^2}$$

m' nin hesabı için aşağıdaki gibi bir çizelge hazırlayalım.

	Wi	$X_i \cdot 10^{-2}$	W_i^2	$W_i x_i \cdot 10^{-2}$
	0.50	4.2	0.25	2.1
	1.0	8.1	1.0	8.1
	1.5	12.8	2.25	19.2
	2.0	16.8	4.0	33.6
	3.0	25.0	9.0	75.0
Σ	8.0	66.9×10^{-2}	16.5	138×10^{-2}

$$m = \frac{1.38}{16.5} \frac{N.m}{N^2} \; ; \; m = 0{,}084 \; m/N \; ; \; x = 0.084 \; W$$

$m = 8.4 \times 10^{-2}$ m / N Bu değerin k yay sabitinin tersi olduğuna dikkat ediniz. O halde,

$$k = \frac{1}{m} = \frac{1}{8.4 \times 10^{-2}} = 11.95 \; N/m \simeq 12 \; N/m$$ olarak bulunur.

Örnek 8.2

θ ve t değişkenleri arasında $\theta = \theta_0 e^{-kt}$ şeklinde bir bağıntının olduğu biliniyor . İki değişkenden t önemsenmeyecek basamakta hata ile ölçüldüğüne göre aşağıdaki çizelgede bulunan değerlerden yararlanarak θ_0 ve k denklem sabitlerini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	t(dak)	θ(°C)	$y_i = \ln\theta$	x_i^2	$x_i . y_i$
	0	50.0	3.91	0	0
	10	35.4	3.57	100	35.7
	20	28.4	3.35	400	67.0
	30	21.0	3.04	900	91.2
	40	14.2	2.65	1600	100
	50	11.0	2.40	2500	120
Σ	150	--	18.92	5500	420

Verilen denklemi lineer hale getirelim :

$$\ln\theta = \ln\theta - kt$$

$\ln\theta = y$; $\ln\theta o = a$; $-k = m$ diyelim. Bu durumda verilen bağıntı $y=mx+a$ şeklinde (8.1) bağıntısına dönüştürülür. Yeni değişkenler y ve x için veriler hesaplanarak m ve a sabitleri Denklem (8.5) den ;

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - a\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \qquad 420 - 5500m - 150a = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i - na = 0 \qquad 18.92 - 150m - 6a = 0 \qquad (2)$$

Denklem 1 ve 2 den

$a=3.91$ $m=-0.03$ $\theta o = e^a = 49.98 \simeq 50$ $k=-m=+0.03$ bulunur.

Örnek 8.3

Bir sarkacın periyodu ve boyu arasındaki bağıntının $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ *olduğu bilinmektedir. Sarkacın L boyunun hatasız ölçüldüğünü kabul ederek g yerçekim ivmesini bulabileceğiniz denklemi türetiniz.*

Verilen denklemi lineer doğru denklemine dönüştürelim.

$$T^2 = 4\pi^2 L/g$$

$T^2 = y$, $L = x$, $m = 4\pi^2/g$ olmak üzere ;

$$y = mx$$

yazılabilir. a denklem sabiti sıfır olduğundan ; Denklem (8.5) den yararlanarak ;

$$m = \frac{\Sigma y_i}{\Sigma x_i}$$

Buradan ;

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{\Sigma T_i^2}{\Sigma L_i}$$

ve

$$g = 4\pi^2 \frac{\Sigma L_i}{\Sigma T_i^2}$$

bulunur.

Yukarıdaki örneklerden görüldüğü gibi verilen bir bağıntı çoğu zaman bilinen bir doğrunun denklemi şeklinde olmayabilir ya da hatasız ölçülen büyüklük serbest değişken olmayabilir. Bu durumda denklem sabitlerini bulmak için izlenecek işlem sırası aşağıda özetlenmiştir.

i. Verilen denklem hatasız ölçülen büyüklük serbest değişken olacak şekilde, gerekirse logaritma alınarak y=mx+a şeklindeki doğru denk-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

lemine dönüştürülür.

ii. Verilerden, yeni denklemin x_i, y_i değerleri bulunarak çizelge 8.1 düzenlenir. Burada P_i, r_i deneysel verilerdir.

iii. (8.4) bağıntısı ile m ve n sabitleri, bunların bulunmasıyla da verilen denklemin sabitleri bulunur.

iv. Bulunan denklemin sağlaması yapılır. Bunun için değişkenlerden birinin deneysel birkaç değeri denklemde yerine konularak diğer değişkenin değerleri hesaplanır. Bulunan bu değerler ölçümle bulunan değerleri vermeseler de ona yakın değerler vermelidir.

Çizelge 8.1 Denklem sabitlerinin en küçük kareler yöntemi ile hesaplanmasında gerekli işlem listesi. Burada P_i, r_i doğrudan elde edilen ölçümlerdir.

P_i	r_i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..
Σ --	--	--	--	--	--

8.2 DENKLEM SABİTLERİNİN HESAP MAKİNASI İLE BULUNMASI

Özellikle veri sayısının çok olması halinde denklem sabitlerinin en küçük kareler yönteminden yukarıda açıklanan yöntemle bulunması zaman alıcı ve usandırıcıdır. Günümüzde bu işlemler bilgisayarlarla veya onların küçük modelleri olan programlanabilir küçük cep hesap makinaları ile kolayca yapılabilmektedir. Şimdi CASIO FX–3600P hesap makinasının bu amaç için nasl kullanılacağını kısaca açıklayalım. Kullanılan yöntem denklem türüne bağlı olduğundan işlemler her denklem türü için ayrı ayrı açıklanacaktır.

Doğrusal Grafiklerin Sabitleri

Hatırlanacağı gibi doğrusal grafiğin denklemi ;

$$y=mx+a$$

Denklem sabitleri ;

$$a = \frac{\Sigma y_i - m\Sigma x_i}{n} \; ; \; m = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

dır. Bu sabitler ve denklemle ilgili diğer bilgileri bulmak üzere sırasıyla şu işlemler yapılır.

İşlem Türü	İşlem	Okunan
Programa hazırlık	MODE → 2	(0 veya eski program)
	INV AC	LR–0
Bilgilerin Verilmesi	1 x_1 x_D y_D	x_1
	2 y_1 DATA	y_1
	3 x_2 x_D y_D	x_2
	4 y_2 DATA	y_2
	. .. ..	..
	. .. ..	..
	. .. ..	..
	n x_n x_D y_D	x_n
	n y_n DATA	y_n
Sonuçlar	INV A	a
	INV B	m
İnterpolasyon ve Extrapolasyon	x_i y	y_i
	y_i INV x	x_i

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 8.4

P ve V büyüklükleri arasında

$$P=A-BV$$

şeklinde bir bağıntının olduğu biliniyor. Ölçülen P ve V değerlerine göre A ve B denklem sabitlerini bulunuz.

V	1	2	3	4	5
P	20	17	12	10	5

İşlem Türü	İşlem	Okunan
Programa hazırlık	MODE → → 2	
	INV AC	LR–0
Bilgilerin verilmesi	1 x_D y_D	1
	20 DATA	20
	2 x_D y_D	2
	17 DATA	17
	3 x_D y_D	3
	12 DATA	12
	4 x_D y_D	4
	10 DATA	10
	5 x_D y_D	5
	5 DATA	5
Sonuçlar	INV A	23.9 (=A)
	INV B	–3.7 (=B)

Doğrusal Olmayan Grafiklerin Sabitleri

Doğrusal olmayan grafiklerin denklemleri logaritma alınarak, lineer denklemlere dönüştürülebilir. Lineer hale dönüştürülen bu denklemlerin sabitleri, yukarıda açıklandığı şekilde hesaplanır. İşlemler, örnekler üzerinde gösterilecektir.

Örnek 8.5

x ve y değişkenleri arasında

$$y=ke^{mx}$$

şeklinde üstel bir bağıntının olduğu biliniyor. Verilen (x_i, y_i) değerlerine göre k ve m denklem sabitlerini bulunuz.

x	2	3	4	5	6
y	7.5	9.1	11.2	13.6	17.0

Verilen denklemden ;

$$\ln y = \ln k + mx$$

$$Y_i = a + mX_i$$

Yeni değişkenler,

$$Y_i = \ln y_i \;\; ; \;\; a = \ln k \;\; (k=e^a) \;\; ; \;\; X_i = x_i$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İşlem Türü	İşlem	Okunan
Programa hazırlık	MODE → → 2	
	INV AC	LR–0
Bilgilerin Verilmesi	2 x_D y_D	2
	7.5 Ln DATA	2.015
	3 x_D y_D	3
	9.1 Ln DATA	2.308
	.. ..	..
	.. ..	..
	.. ..	..
Sonuçlar	INV A	16
	INV e^x	5.0
	INV B	0.02

O halde aranan denklem sabitleri ;

$$k=5.0 \; ; \; m=0.020$$

olur.

8.4 HER İKİ DEĞİŞKENİN HATALI ÖLÇÜLMESİ DURUMU

Her iki değişkenin hatalı ölçülmesi halinde hem x_i hem y_i ölçümleri, bu değerleri temsil eden y=mx+a doğrusundan, sırasıyla dx_i ve dy_i kadar sapma gösterecektir.

En küçük kareler yöntemine göre doğru; bu sapmaların kareleri toplamının minimum olacağı şekilde çizilmelidir. Bu da $P_1, P_2, \ldots, P_i (x_i, y_i)$ noktalarının doğruya olan uzaklıkları toplamının minimum olması demektir.

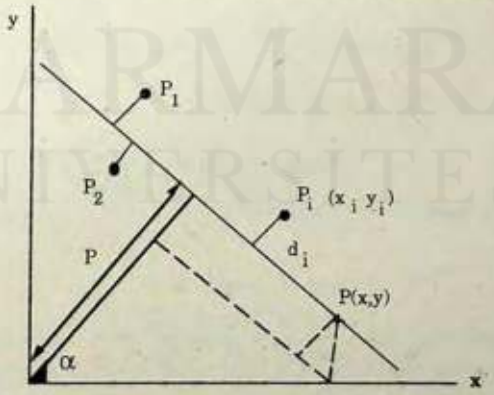
Şekil 8.3 den, bir $P_i (x_i, y_i)$ noktasının y=mx+a doğrusuna olan uzaklığı ;

$$d_i = X_i \text{Cos}\alpha + y_i \text{Sin}\alpha - P \qquad (8.6)$$

doğrunun orjine olan P uzaklığı ;

$$P = x\text{Cos}\alpha + y\text{Sin}\alpha \qquad (8.7)$$

olarak bulunur. Burada x_i, y_i ölçülen veri çiftini x, y doğru üzerindeki P noktasının koordinatlarını, α doğrunun y ekseni ile yaptığı açıyı göstermektedir. (Şekil 8.4 de hem noktaların hem de doğrunun orijine olan uzaklığının aynı harfle P ile gösterilmesinde herhangibir amaç yoktur.)



Şekil 8.4 İki değişkenin hatalı ölçülmesi durumunda ideal doğru ve sapmalar. Burada pi (xi, yi) ölçülen değerleri p (x, y) doğru üzerindeki bir noktayı göstermektedir.(Kaynak 9 dan alınmıştır.)

Minimum olması istenen ifade :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - P)^2$$

dir. Bir önceki kesimde açıklandığı gibi bu ifadenin α ve P sabitlerine göre kısmi türevleri sıfıra eşitlenerek aranan sabitler bulunabilir.

$$\frac{\delta \Sigma (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - P)^2}{\delta P} = 0$$

Buradan ;

$$\sum_{i=1}^{n} 2 (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - P) (-1) = 0$$

veya

$$(\cos \alpha) \Sigma x_i + (\sin \alpha) \Sigma y_i - np = 0$$

Her iki taraf n ile bölünerek ;

$$\frac{\Sigma x_i}{n} \cdot \cos \alpha + \frac{\Sigma y_i}{n} \cdot \sin \alpha - p = 0$$

$\Sigma x_i / n = \bar{x}$; $\Sigma y_i / n = \bar{y}$ olduğundan

$$\bar{x} \cos\alpha + \bar{y} \sin\alpha - p = 0 \qquad (8.9)$$

bulunur. Bu ifade (8.7) den çıkarılırsa

$$\begin{array}{r} x \cos\alpha + \bar{y} \sin\alpha = P \\ \bar{x} \cos\alpha + \bar{y} \sin\alpha = P \\ \hline (x-\bar{x}) \cos\alpha + (y-\bar{y}) \sin\alpha = 0 \end{array}$$

veya

$$y = -x\text{Cot}\alpha + (\bar{y} + \bar{x}\text{Cot}\alpha) \qquad (8.10)$$

bulunur. O halde incelediğimiz y=mx+a şeklindeki doğru denkleminin aranan sabitleri ;

$$m = -\text{Cot}\alpha \; ; \; a = \bar{y} + \bar{x}\text{Cot}\alpha \qquad (8.11)$$

olur. Bu ifadelerdeki α yı bulmak üzere ;

$$\frac{\delta\Sigma\,(x_i \cos\alpha + y_i \sin\alpha)^2}{\delta\alpha} = 0$$

Buradan

$$\Sigma 2\,(x_i\cos\alpha + y_i\sin\alpha - P)\,(-x_i\sin\alpha + y_i\cos\alpha) = 0 \qquad (8.12)$$

$x_i = \bar{x} + dx_i$; $y_i = \bar{y} + dy_i$ değerleri (8.12) de yerine yazılırsa ;

$$\Sigma(dx_i\cos\alpha + dy_i\sin\alpha)\,(dx_i\sin\alpha - dy_i\cos\alpha + \bar{x}\sin\alpha - \bar{y}\cos\alpha) = 0$$

Buradan

$$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,\Sigma\, dx_i dy_i = \sin\alpha\cos\alpha\Sigma\,(dx_i^2 - dy_i^2)$$

veya

$$\tan 2\alpha = \frac{2\Sigma dx_i\, dy_i}{\Sigma\,(dx_i^2 - dy_i^2)} \qquad (8.13)$$

bulunur.

Denklem (8.11) ve (8.13) denklemleri birlikte kullanılarak aranan gerçek sabitler olan m ve α bulunur. Denklem (8.13) ün çözümü iki ayrı α verir. Bunlardan hangisinin uygun olduğu eğimin pozitif veya negatif oluşuna göre değişkenler arasında çizilecek grafikten veya verilmişse bağıntıdan kolayca görülebilir (Örnek 8.6 yı inceleyiniz).

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 8.6

V, I değerleri arasında V=R.I + Vo şeklinde bir bağıntının olduğu biliniyor. Her iki değişken hatalı ölçüldüğüne göre çizelgedeki verilerden R ve Vo sabitlerini bulunuz.

I	0.80	1.00	1.20	1.50
V	6.6	7.1	7.4	7.9

Hesaplamalar için aşağıdaki çizelgeyi hazırlayalım.

	I_i	V_i	$dI_i=I_i-\bar{I}$	$dV_i=V_i-\bar{V}$	dI_i^2	dV_i^2	$dI_i.dV_i$
	0.80	6.6	-0.325	-0.65	0.106	0.423	0.211
	1.00	7.1	-0.125	-0.15	0.0156	0.023	0.019
	1.20	7.4	0.075	0.15	0.00563	0.023	0.0113
	1.50	7.9	0.375	0.65	0.141	0.423	0.244
Σ	4.5	29.0	0	0	0.268	0.89	0.485

$\bar{I} = 1.125$; $\bar{V} = 7.25$

Denklem 8.13 den

$$\tan\alpha = \frac{2x0.485}{0.268 - 0.892} = -1.55$$

$2\alpha = -57.2°$ veya $180-57.2 = 122.8°$

$\alpha = -28.6°$ veya $61.4°$

x=I ; y=V alınarak Denklem 8.10 ve 8.11 den,

$$V = -I\text{Cot}\alpha + (\bar{V} + \bar{I}\,\text{Cot}\alpha)$$

$$R = -\text{Cot}\alpha \quad , \quad V_o = (\bar{V} + \bar{I}\,\text{Cot}\alpha)$$

olduğu kolayca görülebilir. Verilen denkleme göre R pozitif olduğundan –Cotα; pozitif alınmalıdır. Bu da hesaplanan açılardan –28.6° nin alınmasını gerektirir. Böylece sabitler ;

$$R = -\text{Cot}\,(-28.6) = 1.8 \text{ ve } V_o = 7.25 + 1.125\ \text{Cot}\,(-28.6) = 5.2$$

bulunur.

Örnek 8.7

P ve V değişkenleri arasında çizelgede verilen değerlere göre adi grafik kağıdında P = f (1/V) grafiğinin doğrusal olduğu görülüyor. Bağıntıyı ve sabitleri bulunuz. (V nin önemsenmeyen hata ile ölçüldüğünü varsayınız.)

V	1.0	2.0	4.0	5.0
P	5.20	2.70	1.45	1.20

Adi grafik kağıdında P =f (1/V) grafiği lineer olduğuna göre aranan bağıntı P = m (1/v) + a şeklindedir. Denklem sabitleri m ve a hesap makinası ile,

$$m = 5.0 \text{ ve } a = 0.2$$

bulunur. O halde aranan bağıntı

$$P = 0{,}2 + 5{,}0\ \frac{.1}{V}$$

olur.

Örnek 8.8

P,r değişkenleri arasında çizelgede verilen değerlere göre tam logaritmik grafik kağıdında P = f (r) grafiğinin doğrusal olduğu görülüyor. Değişkenlerden r nin önemsenmeyecek basamakta hata ile ölçüldüğünü varsayarak bu değişkenler arasındaki bağıntıyı ve denklem sabitlerini bulunuz.

r	2.0	2.5	3.0	3.5
P	25.00	12.80	7.41	4.66

Tam logaritmik grafik kağıdında P = f (r) grafiği doğrusal olduğuna göre aranan bağıntı :

$$P = k\, r^m$$

şeklindedir.

$$\log P = \log k + \log r$$

ve

$$\log P = y \;;\; \log r = x \;;\; \log k = a$$

olmak üzere denklem

$$y = a + mx$$

Şeklinde gelir. Denklem sabitleri hesap makinası ile,

$$m = -3 \;;\; a = 2.30 = \log k \;;\; k = 10^{2.30} = 200$$

bulunur. O halde aranan bağıntı

$$P = 200\, r^{-3}$$

olur.

Örnek 8.9

Bir gerçek gazın basıncı ve hacmi arasında $P V^{\gamma} = K$ şeklinde bir bağıntının olduğu bilinmektedir. Çizelgede verilen ölçümlerden yararlanarak γ ve K sabitlerini en küçük kareler yöntemi ile bulunuz. (P değişkenindeki hata önemsenmeyecek basamaktadır.)

P	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
V	1.62	1.00	0.75	0.62	0.52

$$P V^{\gamma} = K$$

$$\log P + \gamma \log V = \log K$$

$$\log V = (1/\gamma) \log K - (1/\gamma) \log P$$

$$\log V = y \; ; \; \log P = x \; ; \; (1/\gamma) \log K = a \; ; \; -1/\gamma = m$$

$$y = a + mx$$

elde edilir.

$$\Sigma xy = m \Sigma x^2 + a \Sigma x \rightarrow -0.26 = 0.37 \; m + 0.57 \; a$$

$$\Sigma y = m \Sigma x + a n \rightarrow -0.41 = 0.57 \; m + 5 \; a$$

Bu iki denklemden ,

$$m = -0.70 \; ; \; a = -1.75 \times 10^{-3}$$

$$a = 1/\gamma \log K \rightarrow K = 10^{a\gamma}$$

$$K = 0.99 \equiv 1.0$$

$$-1/\gamma = -0.70 \rightarrow \gamma = 1.43$$

olur. O halde aranan bağıntı :

$$P V^{1.43} = 1.0$$

şeklindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 8.10

Bir yarı iletkenin direnci ile sıcaklığı arasında $R = Ro\ e^{E/kT}$ *şeklinde bir bağıntının olduğu bilinmektedir. Burada k Boltzman sabiti olup* $1.38x10^{-23}\ JK^{-1}$ *dir. T sıcaklığı önemsenmeyecek bir hata ile ölçülebildiğine göre çizelgedeki verileri kullanarak en küçük kareler yöntemi ile E ve Ro sabitlerini bulunuz.*

T (K)	290	300	310	320	330	340
R ($10^3\ \Omega$)	4.80	2.47	1.32	0.737	0.426	0.254

$$R = Ro\ e^{E/kT}$$

$$\ln R = \ln Ro + (E/k)\ 1/T$$

$$\ln R = y\ ;\ \ln Ro = a\ ;\ 1/T = x\ ;\ E/k = m$$

olmak üzere ;

$$y = a + mx$$

elde edilir. Denklem sabitleri m ve a doğrudan hesap makinası ile,

$$m = 5796.5\ ;\ a = -11.51$$

bulunur. (Değişkenlerin, lnR ve 1/T olduğuna dikkat ediniz.)

$$m = E/k \rightarrow E = m\,k = 5796.5 \times 1.38x10^{-23} = 8.0x10^{-20}$$

$$a = -11.5 = \ln Ro\ ;\ Ro = e^{a} = e^{-11,5} = 1.0x10^{-5}$$

bulunur. O halde aranan sabitler,

$$E = 8.0x10^{-20}\ J\ ;\ Ro = 1.0x10^{-5}\ \Omega$$

olur.

9. KORELASYON

9.1 KORELASYON KATSAYISI

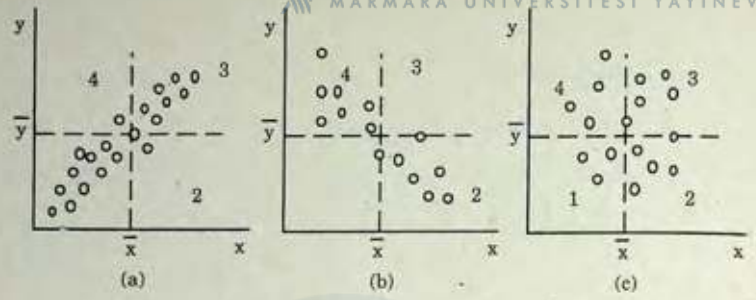
Fiziksel kanunlarla veya deneysel denklemlerle ilgili veriler grafik kağıdına yerleştirildiğinde ölçme hatası (istatistik hata) büyük değilse bulunan noktalar genellikle bir çizgi üzerinde bulunur. Bundan önceki bölümde bu çizgileri lineer hale dönüştürerek değişkenler arasındaki denklemi ve denklem sabitlerini bulmayı öğrendik.

Veriler bir grafik kağıdına yerleştirildiğinde, Şekil 9.1 de görüldüğü gibi bir çizgi üzerinde bulunmayabilirler. Bu durumda bağıntının türü yerine birinci adımda değişkenler arasında bir bağıntının (korelasyonun) bulunup bulunmadığı araştırılır. Bu araştırmaya **korelasyon analizi** değişkenler arasında bir bağıntı varsa bunun tipini bulmaya da **regrasyon analizi** denir.

Bu bölümde y=mx+a şeklinde iki sabitli lineer bağıntıya uyan korelasyon üzerinde durulacaktır. Buna **lineer korelasyon analizi** adı verilir. Cebirsel ve üstel fonksiyonlar lineer denkleme dönüştürülebildiğinden gerçekte bu inceleme, grafik analizinde incelediğimiz üç eğri türünü de kapsamış olacaktır.

İlginç bir örnek olarak bir sınıftaki öğrencilerin Fizik ve Kimya, Fizik ve Türkçe, Fizik ve Resim derslerinden aldıkları notlar arasında bir korelasyon bulunup bulunmadığını araştıralım. Yatay eksen Fizik düşey eksenler sırasıyla Kimya, Türkçe ve Resim derslerinden alınan notları göstersin (Şekil 9.1). Grafiklerde her nokta bir öğrenciyi, noktanın apsisi Fizik notunu ordinatı öteki dersten alınan notu gösterir. Şekil 9.1 den görüldüğü gibi veriler her üç grafikte de bir çizgi üzerinde bulunmamakla birlikte (a) ve (b) de dağılım çizgi oluşturacak görünümdedir. (a) ya göre Fiziği iyi olanın Kimyası da iyi, zayıf olanın kimyası da zayıftır. (b) ye göre bir dersi iyi olan öğrencinin diğer dersi kötüdür. (c) deki grafiğe göre böyle bir ilişki söylenemez.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 9.1 Bir sınıfta, öğrencilerin Fizik notları ile Kimya, Türkçe ve Resim notları arasında korelasyon araştırması x: Fizik notu; y: (a) Kimya (b) Türkçe (c) Resim notu x,y ortalama değerler.

Yukarıdaki örnekte değişkenler arasında bağıntı bulunup bulunmadığını dağılım grafiğine bakarak, nitel olarak söyledik. Değişkenler arasındaki fonksiyonun matematiksel bir ölçüsü olmalıdır. Aynı örnekten yararlanarak bu ölçüyü araştıralım.

Grafik (a) da veriler 1 ve 3 bölgelerinde toplanmıştır. 1 Bölgesindeki noktalar için $(x_i - \bar{x})$ ve $(y_i - \bar{y})$ negatif, 3 bölgedeki noktalar için pozitiftir. Dolayısıyla tüm noktalar için ;

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) \quad (y_i - \bar{y}) \qquad (9.1)$$

toplamı, pozitif büyük bir sayıdır. Aynı işlem grafik (b) için düşünülürse 2 bölgesindeki noktalar için $(x_i - \bar{x})$ pozitif. $(y_i - \bar{y})$ negatif ; 4 bölgesindeki noktalar için $(x_i - \bar{x})$ negatif, $(y_i - \bar{y})$ pozitiftir. Dolayısıyla bu noktalar için (9.1) denklemi ile verilen toplam, –negatif büyük bir sayıdır–. Şimdi değişkenler arasında bir korelasyonun görülmediği grafik (c) yi dikkate alalım. Burada ortalama değerler $(\bar{x}, \bar{y})$ noktalar kümesini simetrik olarak böldüğünden, tüm noktalar için (9.1) denklemi ile verilen toplam, sıfır ya da çok küçük bir sayı olacaktır. Bu inceleme bize, (9.1) denklemi ile verilen ifadenin, değişkenler arasında bir korelasyon bulunup bulunmadığı konusunda bilgi verebileceğini göstermektedir. Ancak bu ifadeyi, veri sayısına ve her iki değişkenin ortalama değerlerinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ İLAHİYAT

sapmalarına (standart sapma) bağımlı olmaktan kurtarmak yani – standardize etmek– gerekir. Bu da (9.1) denklemini sırasıyla n, σ_x, σ_y ye bölerek yapılır. O halde ;

$$r = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y})}{n\ \sigma_x\ \sigma_y} \qquad (9.2)$$

bağıntısı, lineer **korelasyon katsayısı** olarak kullanılabilir. Burada n ölçme sayısını,σ_x, ve σ_y sırasıyla x ve y değişkenleri için standart sapmayı gösterir. Şekil 9.1 (a) daki örnek için r, pozitif ; Şekil 9.1 (b) deki örnek için r, negatif bir sayıdır. Bu sonuç bize r nin işaretinin doğrunun eğimi ile ilgili olduğunu gösterir.

Korelasyon katsayısının hesabında (9.2) denklemi pratik olmayabilir. Bunu daha pratik hale getirmek için :

$$\Sigma (x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y}) = \Sigma x_i y_i - y\Sigma x_i - x\Sigma y_i + \Sigma \bar{x}\,\bar{y}$$

$$= \Sigma x_i y_i - \bar{y} n\bar{x} - \bar{x} n\bar{y} - n\bar{x}\,\bar{y}$$

$$= \Sigma x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}$$

$$\sigma_x^2 = 1/n\ \Sigma (x_i - \bar{x})^2 = 1/n\ [\Sigma x_i^2 - 2x\Sigma x_i + \Sigma \bar{x}^2]$$

$$= 1/n\ [\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2]$$

$$\sigma_y^2 = 1/n\ \Sigma (y_i - \bar{y})^2 = 1/n\ [\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2]$$

Buradan r için ;

$$r = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{[(\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2)\ (\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2)]^{1/2}} \qquad (9.3)$$

bulunur. Korelasyon katsayısı r, bu denklemden hesaplanabileceği gibi doğrudan, programlanabilen cep hesap makinalarıyla da hesaplanabilir. Bu işlem örnek 9.2 de gösterilecektir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Lineer korelasyon katsayısı r nin daima (–1) ile (+1) arasında olacağı gösterilebilir. r=±1 ise değişkenler arasında tam bir korelasyon olduğu ; r=0 ise değişkenler arasında bir korelasyon olmadığı anlaşılır. Fakat genellikle değişkenlerin ölçülmesinde istatistik hata ile karşılaşılacağından 0<r<1 durumu ile karşılaşılır. Bu durumda bulunan r değerini yorumlayabilmek için **karar noktası** denilen **r*** değerlerinden yararlanılır. Karar noktası değerleri n (ölçme sayısı) ye bağlı olup çizelge 9.1 de n nin bazı değerleri için **r*** değerleri verilmiştir. Bu değerlerin elde edilmesi; r nin bir raslantı sonucu artaya çıkma olasılığı 1/20 den küçük ise değişkenler arasında bir korelasyon olduğu varsayımına dayanır. Çizelgeden görüldüğü gibi, n ölçme sayısı arttıkça karar noktası 1 den 0 a doğru kaymaktadır. Bunun anlamı, diyelim ki bir olayda r=0.560 bulunmuş olsun n=6 ise değişkenler arasında bir korelasyon yok n=15 ise korelasyon var demektir. Şu noktayı belirtmekte yarar görüyoruz. Korelasyon katsayısı r nin çizelge 9.1 deki değerleri, değişkenler arasında bir korelasyonun kesin bir göstergesi değildir. Başka bir deyişle r > r* olması, incelenen değişkenler arasında mutlaka bir bağıntının olmasını gerektirmez. Öte yandan, r≥r* olması da değişkenler arasında bir korelasyon olmadığını değil, sadece lineer korelasyon olmadığın gösterir.

Çizelge 9.1 Karar noktasının n ölçme sayısı ile değişimi

n	r*
5	0.878
10	0.632
15	0.514
20	0.444
30	0.361
40	0.312
50	0.279
100	0.196

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 9.1

y = 5x + 2 bağıntısı için değişkenler arasındaki korelasyon katsayısının +1 olduğunu gösteriniz.

x değişkenine keyfi değerler vererek y yi hesaplayalım. Değişkenler bir deney sonucunda elde edilmediklerinden hata içermeyecekler, dolayısıyla r korelasyon katsayısı +1 (eğim pozitif) bulunacaktır. Önce aşağıdaki çizelgeyi hazırlayalım.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_i, y_i
	1	7	1	49	7
	2	12	4	144	24
	3	17	9	289	51
	4	22	16	484	88
Σ	10	58	30	966	170

$$\bar{x} = 2.5 \; ; \; \bar{y} = 14.5 \; ; \; n=4$$

Denklem (9.3) den

$$r = \frac{170 - 4x2.5x14.5}{[\,(30 - 4x2.5^2)\;\;(58 - 4x14.5^2\,)\,]^{1/2}} = +1$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 9.2

(2,40) ; (4,35) ; (6,20) ; (8,30) ; (10,10) veri kümesi için lineer korelasyon bulunup bulunmadığını araştırınız.

Aşağıdaki çizelgeyi hazırlayalım.

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i . y_i$
	2	40	4	1600	80
	4	35	16	1225	140
	6	20	36	400	120
	8	20	64	400	160
	10	10	100	100	100
Σ	30	125	220	3725	600

$$\bar{x} = 6 \; ; \; \bar{y} = 25 \; ; \; n=5$$

Denklem (9.3) den

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{[\,(\Sigma x^2 - n\,\bar{x}^2)\;(\Sigma y^2 - n\,\bar{y}^2)\,]^{1/2}}$$

$$= \frac{600 - 5x6x25}{[\,(220 - 5x36)\;(3725 - 5x625)\,]^{1/2}} = -0.97$$

n=5 için r*=0.878 olduğundan değişkenler arasında lineer korelasyon vardır.

Aynı sonuç hesap makinasıyla aşağıdaki işlem sırasıyla bulunabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İşlem Türü	İşlem		Okunan
Program hazırlık	MODE	2	
	INV	AC	LR 0
Ölçümlerin verilmesi	2	X_DY_D	
	40	DATA	40
	4	X_DY_D	
	35	DATA	35
	..	..	..
	..	..	..
	..	..	..
	10	X_DY_D	
	10	DATA	10
Sonuç	INV	r	–0.97

Örnek 9.3

10 öğrenci üzerinde yapılan araştırmada bu öğrencilere uygulanan test sınavında G.Y (Genel Yetenek), M (Matematik), Y (Yabancı dil) puanları çizelgedeki gibi bulunmuştur. GY–M ; GY–Y ve M–Y başarıları arasında bir lineer koresalyon olup olmadığını araştırınız. (n=10 için r=0.632)*

GY	80	40	35	72	84	25	50	90	38	88
M	70	30	40	54	90	10	50	40	48	79
Y	60	65	80	30	95	40	100	95	72	32

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 9.2 deki yol izlenerek, hesap makinası yardımıyla,

GY–M için r=0.75 ; GY–Y için r=0.03 ; M–Y için r=0.09

bulunur. Buna göre öğrencilerden genel yetenek ve matematik notları arasında bir korelasyon var demektir. Başka bir deyişle genel yeteneği iyi olanların matematikten de başarılı olduğu söyleneblir.

9.2 REGRASYON ANALİZİ

Bölüm 8 de denklemi, y=mx+a şeklinde olan doğrunun m ve a katsayılarını en küçük kareler yöntemi ile bulmayı öğrenmiş ve değişkenlerden yalnız y nin hata içermesi halinde bu katsayıların

$$m\Sigma x_i^2 + a\Sigma x_i - \Sigma x_i , y_i = 0$$

$$m\Sigma x_i + a.n - \Sigma y_i = 0$$

denklemleri ile hesaplanacağını göstermiştik. Bu denklemlerden

$$m = \frac{n\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i \ \Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$= \frac{n\Sigma x_i y_i - (n\bar{x})\ (n\bar{y})}{n\Sigma x_i^2 - (n\bar{x})^2}$$

$$= \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$= \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y})}{n\sigma_x}$$

$$= \frac{P}{\sigma_x^2} \qquad (9.4)$$

olur. Burada P,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$P = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y})}{n}$$

ifadesini göstermektedir. y = mx+a doğrusu, (x, y) noktasından geçeceği için

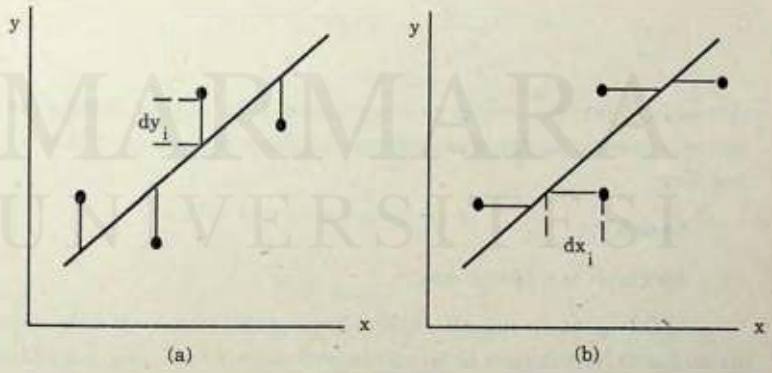
$$y - \bar{y} = \frac{P}{\sigma_x^2}\ (x - \bar{x}) \qquad (9.5)$$

yazılabilir. Denklemini bulduğumuz bu doğruyu y nin x e göre **regrasyon çizgisi** ve P/σ_x^2 ye;y' nin x e göre regrasyon katsayısı adı verilir.

Değişkenlerden y nin doğru, x in hatalı ölçülmesi halini de inceleyebiliriz. Bu durumda (9.5) denklemindeki y nin yerini x alacağından :

$$x - \bar{x} = \frac{P}{\sigma_y^2}\ (y - \bar{y}) \qquad (9.6)$$

bulunur. Denklemini bulduğumuz bu doğruya x in y ye göre regrasyon çizgisi. P/σ_y^2 ye;x' in y ye göre regrasyon katsayısı denir. Şekil 9.4 de (9.5) ve (9.6) denklemlerinin karşılığı olan çizgiler gösterilmiştir.



Şekil 9.4 (a) y nin x e göre regrasyon çizgisi (b) x in y ye göre regrasyon çizgisi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şekil 9.4 (a) da yalnız y hatalı olduğundan sapmalar düşey, (b) de yalnız x hatalı olduğundan sapmalar yataydır. Her iki grafikte regrasyon çizgisi, bu sapmaların kareleri toplamını minimum yapacak şekilde çizilmelidir.

Değişkenler arasında tam bir korelasyon varsa (9.5) ve (9.6) denklemleri aynı doğruyu göstereceklerdir. Dolayısıyla (9.5) ve (9.6) dan ;

$$y = \frac{P}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

$$= \frac{\sigma_y^2}{P}(x - \bar{x}) + \bar{y}$$

bulunur. İki regrasyon çizgisi çakışacağından eğimler de eşit olacaktır. Böylece

$$\frac{P}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_y^2}{P}$$

Veya

$$\frac{P^2}{\sigma_x^2\ \sigma_y^2} = 1$$

elde edilir. $(P/\sigma x\ \sigma y) = r$ olduğu kolayca görülebilir. Böylece değişkenler arasında tam bir korelasyonun bulunması halinde $r=\pm 1$ olduğu kanıtlanmış olur.

Örnek 9.4

Aşağıdaki veri kümesi için :

a) İki regrasyon çizgisini; b) Korelasyon katsayısını, c) Her iki verinin de hatalı ölçüldüğünü kabul ederek verileri temsil eden doğru denklemini bulunuz.

x	10	8	5	2	0
y	4	3	1	–2	–5

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki çizelgeyi hazırlayalım

	x_i	y_i	x_i, y_i	x_i^2	y_i^2
	10	4	40	100	10
	8	3	24	64	9
	5	1	5	25	1
	2	–2	–4	4	4
	0	–5	0	0	25
Σ	25	1	65	193	55

$$\bar{x} = 5 \quad , \quad \bar{y} = 0.2$$

(a)

$$P = 1/n \; \Sigma \; (x_i - \bar{x}) - (x_i - \bar{y}) = 1/n \; \Sigma \, x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$P = (1/5) \; 65 - 5x0.2 = 12$$

$$\sigma_x^2 = 1/n \; \Sigma \, x_i^2 - \bar{x}^2 = (1/5) \; 193 - 25 = 13.6 \; ; \; \sigma_x = 3.69$$

$$\sigma_y^2 = 1/n \; \Sigma \, y_i^2 - \bar{y}^2 = (1/5) \; 55 - 0.04 = 10.95 \; ; \; \sigma_y = 3.31$$

y' nin x' e göre regrasyon çizgisi ;

$$y - \bar{y} = \frac{P}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$$

$$y - 0.2 = \frac{12}{13.6} (x - 5)$$

$$y = 0.882x - 4.21$$

x' in y' ye göre regrasyon çizgisi ;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x - \bar{x} = \frac{P}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})$$

$$(x - 5 = \frac{12}{10.96}(y - 0.2)$$

$$x = 1.09y + 4.78$$

bulunur.

$$r = \frac{P}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{12}{3.69 \times 3.31} = 0.98$$

(b)

n = 5 için $r^* = 0.878$ olduğundan bulunan sonuca göre değişkenler arasında kuvvetli bir korelasyon vardır.

(c)

$$y = -x\text{Cot}\alpha + (\bar{y} + \bar{x}\text{Cot}\alpha)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \Sigma\, dx_i d\, y_i}{\Sigma\, (dx_i^2\ d_{yi}^2)}$$

$$= \frac{2 \Sigma\, (x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y})}{\Sigma\, (x_i - \bar{x})^2 - \Sigma (y_i - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{2P}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}$$

$$= \frac{2x12}{13.6 - 10.96} = 9.091$$

Her iki değişkenin hata içermesi halinde aranan doğru denklemi :

$2\alpha = 83.72 = 83\ 43'$ veya $180 + 83°\ 43' = 263°\ 43'$

$\alpha = 41.86 = 41°\ 52'$ veya $90° + 41°\ 52 = 131°\ 52'$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Grafiğin eğimi pozitif olduğundan (çizilerek görüleblir.) ; bulunan açılardan $\alpha = 131° 52'$ seçilmelidir.

$$\text{Cot } (131° 52') = -0.896$$

$$y = -x(-0.896) + 0.2 + 5(-0.896)$$

$$y = 0.896x - 4.28$$

bulunur.

Örnek 9.5

Aşağıdaki ölçümlere göre x, y arasında bir korelasyon olup olmadığını, korelasyon varsa bağıntının türünü, serbest değişkenin hatasız ölçüldüğünü kabul ederek denklem sabitlerini bulunuz.

x	1	2	3	4	5
y	$6.8\text{x}10^{-1}$	$9.2\text{x}10^{-2}$	$1.2\text{x}10^{-2}$	$1.7\text{x}10^{-3}$	$2.37\text{x}10^{-4}$

Problem hiç grafik kağıdı kullanmadan, bir hesap makinası yardımıyla çözülecektir. Bağıntı hakkında hiç bilgimiz olmadığından aranan bağıntının, sırasıyla ;

$$(1)\ y = mx + a\ ;\ (2)\ y = k\,x^m\ ;\ (3)\ y = k\,e^{mx}$$

olabileceğini düşünerek her durum için korelasyon katsayısı bulunmalıdır. Korelasyon katsayısının en büyük olduğu durum aranan denklemin türü olur. İkinci adımda ise denklem sabitleri bulunur. Hesap makinası ile

$$r(1) = -0.778\ ;\ r(2) = 0.97\ ;\ r(3) = -0.999$$

bulunur. $n = 5$ için $r^* = 0.878$ olduğu hatırlanırsa (çizelge 9.3), aranan korelasyonun,

$$y = k\,e^{mx}$$

şeklinde üstel bir denklem olduğu sonucuna varılabilir. Denklem sabitleri k ve m' yi bulmak için ;

$$\ln y = \ln k + mx\ ;$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ve

$$Y_i = \ln y_i \; ; \; X_i = x_i \; ; \; a = \ln k$$

olarak işlem yapıldığında ;

$$m = -2.0 \; ; \; a = 1.61 \; ; \; k = e^{1.61} = 5.0$$

bulunur. Aynı işlemin bir kısmı (denklem bulunması) ya da tamamı, grafik yöntemle de bulunabilir. Bunun için ilk adım sırasıyla lineer, logaritmik ve yarı logaritmik grafiklerin çizilmesidir. İkinci adımda ise lineer olan grafikten bağıntının yazılması ve denklem sabitlerinin bulunmasıdır (Bölüm 7 deki örnekleri inceleyiniz).

Örnek 9.6

Bir grup çocuğun ve onların babalarının boyları için aşağıdaki veriler bulunuyor. Babaları ile onların çocuklarının boyları arasında lineer bir korelasyonun bulunup bulunmadığını araştırınız. (n=5 için r^*=0.878 dir)

x(m)	1.10	1.14	1.20	1.30	1.50
y(m)	1.60	1.60	1.70	1.80	1.50

Örnek 9.2 deki yol izlenerek hesap makinasından,

$$r = -0.280$$

bulunur.

$$r = 0.280 < r^* = 0.878$$

olduğundan, bu iki değişken arasında bir korelasyonun olduğu söylenemez.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

EK 1

STANDART NORMAL DAĞILIM ÇİZELGESİ

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2}\, dt$$

t	.00	.02	.04	.06	.08
0.0	.0000	.0080	.0160	.0239	.0319
0.1	.0398	.0478	.0557	.0636	.0714
0.2	.0793	.0871	.0948	.1026	.1103
0.3	.1179	.1255	.1331	.1406	.1480
0.4	.1554	.1628	.1700	.1772	.1844
0.5	.1915	.1985	.2054	.2121	.2190
0.6	.2257	.2324	.2389	.2454	.2517
0.7	.2580	.2642	.2703	.2764	.2823
0.8	.2881	.2939	.2995	.3051	.3106
0.9	.3159	.3212	.3264	.3315	.3365
1.0	.3413	.3461	.3508	.3554	.3599
1.1	.3643	.3686	.3729	.3770	.3810
1.2	.3849	.3888	.3925	.3962	.3997
1.3	.4032	.4066	.4099	.4131	.4162
1.4	.4192	.4222	.4251	.4279	.4306
1.5	.4332	.4357	.4382	.4406	.4429
1.6	.4452	.4474	.4495	.4515	.4535
1.7	.4554	.4573	.4591	.4608	.4625
1.8	.4641	.4656	.4671	.4686	.4699
1.9	.4713	.4726	.4738	.4750	.4761
2.0	.4772	.4781	.4791	.4803	.4812
2.1	.4821	.4830	.4838	.4846	.4854
2.2	.4861	.4868	.4875	.4881	.4887
2.3	.4893	.4898	.4904	.4909	.4913
2.4	.4918	.4922	.4927	.4931	.4934
2.5	.4938	.4941	.4945	.4948	.4951
2.6	.4953	.4956	.4959	.4961	.4963
2.7	.4965	.4967	.4969	.4971	.4973
2.8	.4974	.4976	.4977	.4979	.4980
2.9	.4981	.4982	.4984	.4985	.4986

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

KAYNAKLAR

1. Wilhelm H. , Westphal F. , Physikalisches Praktikum, Braunschweig, 1963
2. Mack C. , Essentials of Statistics For Scientists and Technologists, Heinemann Educational Books Ltd. , London, 1966
3. Blaedel, W. J. , Meloche V. W. , Elemantary Quantitative Analysis Second Ed. , Honper and Row Publishers, Newyork, 1963
4. Yersel. M. , Experiments in Physics, Boğaziçi University Publications 441, İstanbul, 1979
5. Ersoy, Y. , Mert, M. , Boyut Analizi ve Fiziksel Ölçmeler, ODTU, Ankara 1977
6. User, F. , Ölçü hatalarının Teorik İncelemesi, Y. Ü. , İstanbul, 1978
7. Şenvar C. , Pratik Hesap, A. Ü. , Fen Fak. Yayınları, Ankara, 1961
8. Akdeniz F. , Olasılık ve İstatistik, Ankara, 1981
9. Arthur B. , Advanced Mathematics in Physics and Engineering Mc Graw–Hill, Newyork, 1953
10. Hacınlıyan A. , Veri Analizi ve Minimizasyon Yöntemleri, Çağdaş Fizik, 9,27 – 30, İstanbul, 1980
11. Preston D., W., The Art of Experimental Physics, John Wiley and Sons: New York, 1991
12. Vermillion Robert E., The Practice of Physics, Macmillan Publishing Company, New York, 1990
13. Squires G. L., Practical Physics, Mc Graw–Hill, London, 1968.

İNDEKS

Anlamlı rakam, 7
Aritmetik ortalama, 25

Bağıl belirsizlik, 5
Bağlı değişken, 69
Belirsizlik, 2
Birim, 3

Chanvenet Kriteri, 51

Dağılım ölçüsü, 28
Değer bölgesi, 28
Deka, 11
Doğruluk, 23
Dolaylı ölçme, 56
Duyarlık, 5–23

Ekstrapolasyon, 70
En küçük kareler yöntemi, 96

Fiziksel eğim, 75
Frekans poligonu, 15
Frekans eğrisi, 15
Frekans diyagramı, 15

Gauss dağılımı, 40
Giga, 11
Girişim hatası, 21
Grafik analizi, 69
Güvenlik katsayısı, 46
Güven aralığı, 52

Hata, 20
Hekto, 11
Histogram, 16

İnterpolasyon, 70
İstatistik hata, 22

Kilo, 11
Korelasyon, 117
Korelasyon katsayısı, 119
Korelasyon analizi, 71
Kuvvet fonksiyonu, 77

Laplace kuramı, 98

Maksimum hata, 57
Mutlak belirsizlik, 2

Normal dağılım, 40
Normal denklemler, 98

Olası hata, 47
Ortalamalar standart sapması, 32

Ölçme, 1
Ölçme sayısı, 3
Ölçme hatası, 3
Ölçek birimi, 1
Ön takı, 11

Paralaks hatası, 22
Personel hatası, 21

Raslantı değişkeni, 22
Raslantı hatası, 22
Regrasyon analizi, 117

Sabit sapma, 28
Sapma, 28
Serbest değişken, 69
Sistematik hata, 21
Standart sapma, 29
Standart normal dağılım, 43

Tera, 11

Üstel fonksiyon, 80

Varyans, 30

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

ISBN : 975-400-093-x

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ
DÖNER SERMAYE İŞLETMESİ
MATBAA BİRİMİNDE BASILMIŞTIR.