MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO: 538
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN NO: 8

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

KONSTRÜKSİYONDA MUKAVEMET

Doç. Dr. Osman Yazıcıoğlu
Makina Yüksek Mühendisi (İ.T.Ü.)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO: 538
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN NO: 8

KONSTRÜKSİYONDA MUKAVEMET

Doç. Dr. Osman Yazıcıoğlu
Makina Yüksek Mühendisi (İ.T.Ü.)

İstanbul 1993

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ISBN : 975-400-092-1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ
DÖNER SERMAYE İŞLETMESİ
MATBAA BİRİMİNDE BASILMIŞTIR.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖNSÖZ

Konstrüksiyonda Mukavemet kitabı birkaç temel kavramın anlaşılmasını ve basitleştirilmiş modellerin kullanılmasını hedeflemektedir. Mühendislik yapılarının ve makina elemanlarının tasarımı ve incelenmesi için güvenilir durumların açıkça belirtilebilmesi, gerekli bağıntıların mantıklı bir biçimde geliştirilmesi gerekli olmaktadır. Her bölümde verilen örnek ve problemlerle temel esasların geliştirilmesine gayret edilmektedir. Son yıllarda bu konuda önem kazanan sonlu elemanlar yöntemi kısaca tanıtılmakta ve tek numaralı problemlerin cevapları kitabın sonunda verilmektedir.

Marmara Üniversitesi Yayın Kurulu'nun sayın başkan ve üyelerine, başkanı bulunduğum Mekanik ve Makina Elemanları Anabilim Dalı elemanları Yrd.Doç.Dr. Mustafa Kurt ve Arş.Gör. Uğur Y. Çetinkaya'ya Matbaa Birimi başkanı Dr. Aşkın Çelik, Arş.Gör. Semiha Yavuz, dizgi elemanı Meva Kocaaslan ile emeği geçen herkese burada teşekkür ederim. Sevgili anneme ve eşime sabırlı ve anlayışlı davranışlarından dolayı minnettarım.

Doç.Dr. Osman Yazıcıoğlu

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ 1

2. GERİLME 3
2.1 İç Kuvvetler 3
2.2 Normal ve Kayma Gerilmeleri 6
2.3 Yatak Gerilmeleri 8
2.4 Emniyet Gerilmesi ve Emniyet Katsayısı 9
PROBLEMLER 11

3. ŞEKİL DEĞİŞTİRME 19
3.1 Normal Şekil Değiştirme 20
3.2 Kayma Şekil Değiştirmesi 20
3.3 Şekil Değiştirme – Yer Değiştirme Bağıntıları 21
3.4 Termik Şekil Değiştirmeleri 23
PROBLEMLER 24

4. MEKANİK ÖZELLİKLER 27
4.1 Hooke Kanunu 27
4.2 İdealleştirilmiş Gerilme – Şekil Değiştirme Diyagramları 29
4.3 Poisson Oranı 29
4.4 Termik Şekil Değiştirme ve Gerilme 31
PROBLEMLER 34

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5. ENERJİ KAVRAMI 37
5.1 Şekil Değiştirme Enerjisi Yoğunluğu 37
5.2 Castigliano Teoremleri 39
5.3 Karşıt Teoremler 41
PROBLEMLER 42

6. GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRME DÖNÜŞÜMLERİ 45
6.1 Tek Eksenli Gerilme Dönüşümleri 45
6.2 İki Eksenli Gerilme Dönüşümleri 47
6.3 Düzlem Gerilme Dönüşümleri 48
6.4 Şekil Değiştirme Dönüşümleri ve Rozetler 49
PROBLEMLER 52

7. BURULMA 55
7.1 Giriş 55
7.2 Temel Kabuller 55
7.3 Burulma Deformasyonları 58
7.4 Şekil Değiştirme Enerjisi 60
7.5 Lineer ve Elastik Olmayan Davranış 60
7.6 İçi Dolu Dikdörtgen Kesitli Elemanlar 65
7.7 İnce Cidarlı Açık Kesitler 66
7.7 İnce Cidarlı Kapalı Kesitler 68
PROBLEMLER 70

8. KİRİŞLER 77
8.1 Giriş 77
8.2 Temel Kabuller 77
8.3 Elastik Eğilme 79
8.4 Keyfi Eksenlere Göre Eğilme 81
8.5 Kirişlerin Elastik Olmayan Eğilmesi 84

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8.6 Kompozit Kirişler 86
8.7 Yük, Kesme Kuvveti ve Eğilme Momenti 90
8.8 Kirişlerde Kayma Gerilmeleri 90
8.9 Kayma Merkezi 94
8.9 Eğrilik, Kesme Kuvveti ve Eğilme Momenti Diyagramları 97
8.11 Kirişlerde Şekil Değiştirme Enerjisi ve Deformasyon 100
8.12 Statikçe Belirsiz Kirişler 102
8.13 Eğri Eksenli Kirişler 103
PROBLEMLER 107

9. BURKULMA 111
9.1 Elastik Burkulma 111
9.2 Eksantrik Yükleme 114
PROBLEMLER 116

10. KIRILMA TEORİLERİ 119
10.1 Azami Normal Gerilme Teorisi 120
10.2 Azami Kayma Gerilmesi Teorisi 120
10.3 Azami Çarpılma Enerjisi Teorisi 121
PROBLEMLER 124

11. GERİLME YIĞILMASI 127
PROBLEMLER 130

12. GERİLME ANALİZİNDE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ 131
12.1 Giriş 131
12.2 Modelleme 132
12.3 Koordinatlar ve Şekil Fonksiyonları 135

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

12.4 Potansiyel Enerji Yaklaşımı 139
12.5 Glarkin Yaklaşımı 144
12.6 Global Katılık Matrisinin ve Yük Vektörünün Montajı 147
12.7 Global Katılık Matrisinin Özellikleri 150
12.8 Sınır Şartlarının Değerlendirilmesi 151
PROBLEMLER 157

EK 1 KİRİŞLERİN SEHİM VE EĞİMLERİ 159
EK 2 BURULMA SABİTLERİ 162
EK 3 BAZI EĞRİ EKSENLİ KİRİŞLERDE SENTROİDAL (R) VE TARAFSIZ (r_n) EKSENLERİN YERLERİ 165
EK 4 AMERİKAN ÇELİK PROFİLLERİ 167
EK 5 BAZI MALZEMELERİN TİPİK ÖZELLİKLERİ 174
EK 6 TEK NUMARALI PROBLEMLERİN CEVAPLARI 175
KAYNAKLAR 179
İNDEKS 180

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1. GİRİŞ

Mukavemet bir temel mühendislik bilimidir. Her çeşit yapı, makina ve ekipmanın uygun mukavemete göre tasarımında kullanılır. Mukavemetin uygulaması bina, köprü, depolama tankı, otomobil, basınçlı kap, gemi, uçak, uzay taşıtı, fabrika makinası, elektrik motoru ve jeneratör, konstrüksiyon ekipmanı, ulaştırma kulesi, ulaştırma anteni, takım tezgâhı, golf kulübü, tenis raketi ve birçok başka konuda görülmektedir. Bir makina veya binanın tasarımı, bunların maruz kaldığı dış yüklere karşı yeterli mukavemette olmasını sağlamayı hedefler.

Gerilme analizi ve malzemelerin mekanik özellikleri mukavemetin ana konularıdır.

Büyük Doğu Medeniyetinin etkisini batıda göstermesiyle ortaya çıkan Rönesansla birlikte mukavemet biliminde büyük gelişmeler olmuştur. Leonardo Da Vinci (1452 - 1519) elamanlara etki eden kuvvetlerin ve cisimlerin mukavemetinin tayini araştırmalarını yaptı. Daha sonra 17. asırda İtalya, İngiltere, Fransa, Almanya ve Rusya'da Milli Bilim Akademileri (NAS) kuruldu. Bunlar diğer bilimler yanında mukavemetin de gelişmesini sağladı. Galileo, Hooke, Mariotte, John ve Jacob Bernoulli kirişlerin, kolonların ve çubukların davranışı ile ilgili temelleri geliştirdiler ve malzemelerin mukavemeti ile ilgili diğer özellikleri araştırdılar. Aynı zamanda Issac Newton (1642–1727) cisimlerin mukavemetinde anahtar rolü oynayan Newton mekaniğinin kavramlarını geliştirdi.

18. asırda bir önceki asırdaki çalışmalar genişletildi ve daha ileri pratik durumlara uygulandı. Askeri mühendislik ve inşaat mühendisliği alanları gelişti, ilk mühendislik okulları kuruldu ve ilk inşaat mühendisliği kitapları yayınlandı.

Birçok inşaat malzemesinin ahşap, taş, çelik ve pirinç gibi mekanik özellikleri test edildi ve istinat duvarları ve kemerlerin teorileri geliştirildi. Fransa'da 1795 de ünlü Ecole Polytechnic, ders ve laboratuvar

sistemli ilk okul olarak kurularak; matematik, fizik ve kimya gibi temel çalışma konuları da okutuldu. Bu okul Poinsot, Biot, Poisson, Cauchy ve Navier gibi birçok ünlü bilim adamı yetiştirdi. 19. asırda mukavemetin önemli ilerlemesi, bu bilim adamları sayesinde gerçekleşti. Modern mukavemetin teorik temellerindeki gelişmelerin çoğu 19. asrın sonlarında oldu. 18. asrın sonlarında başlayan ve halen devam etmekte olan sanayi inkılabı, mukavemete yeni uygulama alanları sağladı. Çelik köprülerin gelişmesi, gemi mühendisliği, makina ve uçak tasarımı bunlara birkaç örnektir. Sunulan bu uygulama alanlarındaki yeni problem ve tecrübelerle şimdiki mukavemet bilgisine önceki asırlardakinden daha çok katkı sağlandı. Günümüzde mimarlık, inşaat, makina ve uzay mühendisliği müfredatında mukavemet dersi yer almaktadır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

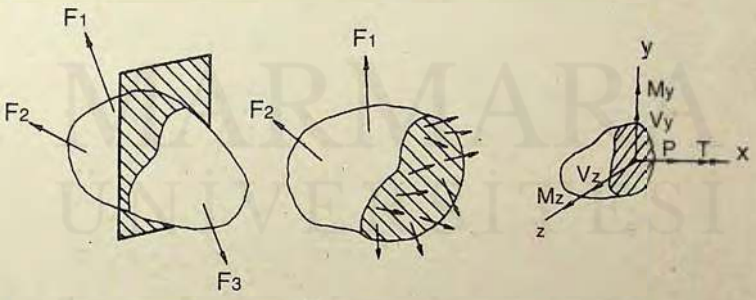
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2. GERİLME

2.1 İç Kuvvetler

Kesit tesirleri ve gerilmeler, cismin iç kuvvetleriyle bağlantılı temel büyüklüklerdir. Bir cisim dış kuvvetlerin etkisi altında kaldığında iç kuvvetler ortaya çıkar.

Cisimdeki iç kuvvetler, malzemenin atom ve molekülleri arasındaki etkileşme kuvvetleri olarak incelenebilir. Yüklü bir cismin hayali bir düzlemle ikiye ayrıldığında ortaya çıkan iç kuvvetler Şekil 2.1 de temsil edilmektedir. İç kuvvetler, hayali düzlemle elde edilen kesit üzerinde dağılmış kuvvet vektörleriyle gösterilmektedir. Genellikle bunlar farklı şiddet ve yönlerdedir.



Şekil 2.1 Hayali bir düzlemle kesilen cisim üzerindeki iç kuvvetler.

MUKAVEMET

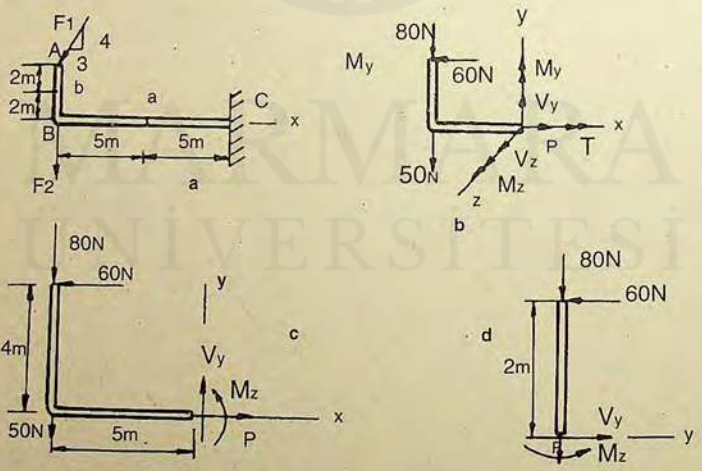
Bir iç kuvvet sistemi, bir kuvvet ile bir momentten oluşan statikçe eşdeğer sisteme indirgenebilmektedir. Şekil 2.1 de cismin kesilen yüzeyi üzerindeki iç bileşke kuvvet bileşenlerine kesit tesirleri adı verilmektedir. P normal kuvveti şekildeki gibiyse çekme, aksi yöndeyse basma kuvveti adını alır. V_y ve V_z kesme kuvvetinin bileşenleridir. T burulma momentini, M_y ve M_z ise eğilme momenti bileşenlerini göstermektedir.

Bir cismin çeşitli kesme düzlemleri üzerindeki kesit tesirlerinin hesabı her türlü yapı ve makina elemanının incelemesinde temel bir işlemdir. Uzayda bir cisim için statik denge denklemleri aşağıdaki gibi yazalabilir:

$$\Sigma F_x=0,\ \Sigma F_y=0,\ \Sigma F_z=0,\ \Sigma M_x=0,\ \Sigma M_y=0 \text{ ve } \Sigma M_z=0 \quad 2.1$$

Doğru çizilen serbest cisim diyagramı ve denge denklemlerinin doğru uygulanması kesit tesirlerinin bulunması için gereklidir.

ÖRNEK 2.1 Yuvarlak kesitli ABC çubuğu C ucunda ankastre mesnetlidir (Şekil 2.2). xy düzleminde F_1=100 N ve y ekseni boyunca F_2=50 N kuvvetleri ile yüklü sistemde a ve b deki kesit tesirlerini hesaplayınız.



Şekil 2.2

Çözüm: F_1 kuvveti x ve y bileşenlerine ayrılır, a kesiti üzerinde kesit tesirleri yerleştirilir. Denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

$\Sigma X=0$: P–60=0 veya P=60 N (Çekme)

$\Sigma Y=0$: V_y–80=0 veya V_y=130 N

$\Sigma Z=0$: V_z=0

$\Sigma M_x=0$: T=0

$\Sigma M_y=0$: M_y=0

$\Sigma M_z=0$: M_z+60*4+80*5+50*5=0 veya M_z=–890 Nm

Yukardaki kesit tesirleri çubuğun a kesitinin sağındaki kısmın serbest cisim diyagramından da hesaplanabilirdi. Ancak öncelikle cismin bütününün dengesinden C deki reaksiyonların bulunması gerekecekti.

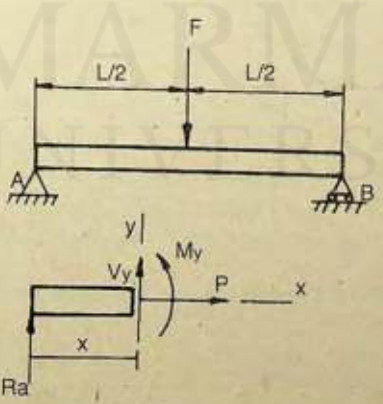
b kesininin üst kısmının serbest cisim diyagramı çizilir ve denge denklemleri kullanılırsa kesit tesirleri bulunur:

$\Sigma X=0$: P=– 80 N (basma)

$\Sigma Y=0$: V_y=60 N

$\Sigma M_z=0$: M_z=–60*2=–120 Nm

ÖRNEK 2.2 Şekil 2.3 deki basit mesnetli kiriş orta noktasında F kuvveti ile yüklüdür. Kirişin boyuna eksenine dik herhangi bir düzlem üzerindeki kesit tesirlerini bulunuz.



Şekil 2.3

Çözüm: Kirişin tamamının serbest cisim diyagramından A mesnedindeki dış reaksiyon $R_a=F/2$ olarak bulunur. $0<x<L/2$ değişken mesafesindeki herhangi bir hayali kesit alınarak kirişin sol tarafı izole edilir ve serbest cisim diyagramından denge denklemleri yazılarak kesit tesirleri bulunur.

$\Sigma X=0$: $P=0$

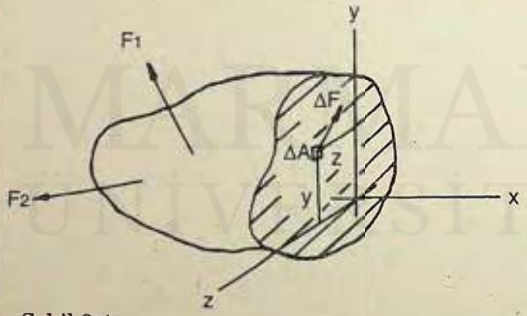
$\Sigma X=0$: $V_y=-F/2$

$\Sigma M_z=0$: $M_z=F\,x/2$

Bu sonuçlar P ve V_y nin $0<x<L/2$ bölgesinde sabit olduğunu M_z nin ise kirişin sol tarafından olan mesafe ile lineer olarak arttığını göstermektedir.

2.2 Normal ve Kayma Gerilmeleri

Herhangi bir kesitin farklı noktalarındaki iç kuvvetlerin bilinmesi önemlidir. Bir yapı veya makina elemanının yük taşıma kapasitesi bu kuvvetlerin en büyüğüne bağlı olabilir. Bununla birlikte sayısız noktalar üzerindeki bu kuvvetlerin incelenmesi uygun değildir. Bunun yerine gerilme adı verilen herhangi bir kesitteki birim alana etki eden kuvvetin şiddeti kullanılır (Şekil 2.4).



Şekil 2.4

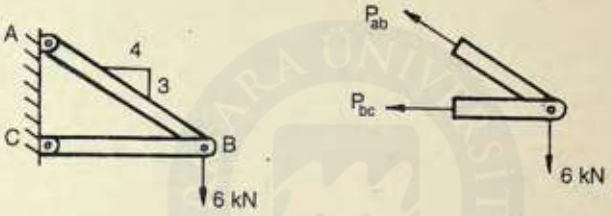
Normal gerilme σ_x, kayma gerilmeleri τ_{xy} ve τ_{xz} ile gösterilebilir:

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} = \frac{dF_x}{dA}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} = \frac{dFy}{dA}$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} = \frac{d F_z}{d A}$$

Örnek 2.3 Şekil 2.5 teki AB ve BC elemanlarındaki normal gerilmeleri bulunuz. Elemanların çapları birbirine eşit ve 20 mm dir.



Şekil 2.5

Çözüm: Çubuk eksenine dik düzlemlerle kesilerek izole edilen kısmın serbest cisim diyagramından çubuk kuvvetleri bulunabilir:

$\Sigma F_y=0$: $3P_{ab}/5-6000=0$ $P_{ab}=10$ kN (çekme)

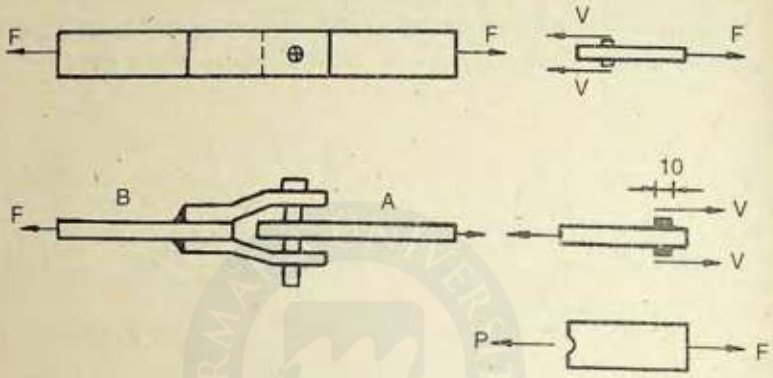
$\Sigma F_y=0$: $-P_{ac}-4P_{bc}/5=0$ veya $P_{bc}=-8$ kN (basma)

Kesit alanı $A = \pi d^2 / 4 = 314.16$ mm^2 olduğundan,

$\sigma_{ab}=31.83$ MPa ve $\sigma_{bc}=-25.46$ MPa bulunur.

Örnek 2.4 Şekil 2.6 da 10 mm kalınlık ve 50 mm genişlikteki lamalardan meydana gelen konstrüksiyonda pim çapı 23 mm, delik çapı 25 mm ve uygulanan kuvvet F=20 kN olarak verilmektedir. Pim ve kaynaktaki kayma gerilmesi ile A lamasındaki normal gerilmeyi bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 2.6

Çözüm: Serbest cisim diyagramından V=F / 2= 10 kN bulunur.

τ=V / A= 24 .1 MPa pimdeki kayma gerilmesi olur.

Kaynak dikişlerinden birine gelen kuvvet V=F/2=10 kN dur. Kaynak dikişinin kalınlığı hesaplanırken pratikte 10 mm değil 0.7*10=7 mm alınır ve kesit 7*50=350 mm^2 bulunur. Böylece kaynak dikişindeki kayma gerilmesi τ=28.6 MPa olur.

A lamasındaki kuvvet 20 kN ve net kesit alanı A=(50–25) 10=250 mm^2 olduğundan normal gerilme σ=80.0 MPa olarak bulunur.

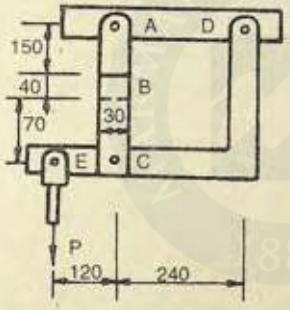
2.3 Yatak Gerilmesi

Cıvata, pim ve perçin bağlandığı elemanlarda yatak veya temas yüzeyi boyunca bir gerilme meydana getirir. Şekil 2.7 deki pim A levhası üzerindeki F kuvvetine eşit ve zıt bir P kuvveti oluşturur. P kuvveti, pimin d çapında ve t levha kalınlığındaki yarım silindirin iç yüzeyi üzerindeki yayılı elemanter kuvvetlerin bileşkesini temsil etmektedir. P kuvvetinin perçinin levha üzerindeki izdüşümü alanına oranı, uygulamada yatak gerilmesi olarak adlandırılır ve σ_b ile gösterilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sigma_b = \frac{P}{td} \qquad 2.3$$

ÖRNEK 2.5. Şekil 2.7 deki ABC askısının üst kısmı 9 mm alt kısımları ise 6 mm kalınlığındaki levhalardan oluşmaktadır. Epoxy reçinesi kullanılarak B de yapıştırma bağlantısı yapılmıştır. A daki pimin çapı 9 mm, C dekinin ise 8.5 mm dir. A daki pimde ortaya çıkan kayma gerilmesini, C deki pimde kayma gerilmesini, ABC kolundaki en büyük normal gerilmeyi, B yapıştırılan yüzeyindeki kayma gerilmesini ve C deki yatak gerilmesini hesaplayınız. P=1 kN dur.



Şekil 2.7

Çözüm: Bütün askının serbest cisim diyagramından denge denklemleri yardımıyla,

$\Sigma Md=0$: $1000*0.36-F_{ac}*0.24=0$ veya $F_{ac}=1500$ N bulunur.

A daki pimde kayma gerilmesi, $\tau_a=F_{ac}/A=23.6$ MPa olur.

C deki pimde kayma gerilmesi, $\tau_c=F_{ac}/2A=26.4$ MPa dır.

ABC kolundaki normal gerilme, $\sigma_a=F_{ac}/A=7.94$ MPa olur.

Yapıştırma yüzeyinde kayma gerilmesi, $\tau=750/1200=0.625$ MPa ve C deki yatak gerilmesi, $\sigma_b=750/51=14.71$ MPa bulunur.

2.4. Emniyet Gerilmesi ve Emniyet Katsayısı

Uygulamada gerilmenin bilinmesi mühendise aşağıdaki görevlerde yardımcı olur:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1. Belirli yük altında bulunan yapı ve makinaların davranışlarının incelenmesi.

2. Belirli fonksiyonu sağlayan emniyetli ve ekonomik yeni yapı ve makinaların tasarımı.

Bu görevleri yerine getirmek için belirli yük şartları altında hangi malzemelerin kullanılacağının bilinmesi gerekir.

Malzemenin çekmedeki kopma yükü P_u ise kopma mukavemeti,

$$\sigma_u = P_u / A$$

olur. Bir yapı veya makina elemanı normal kullanma şartlarında izin verilen yükten daha büyük bir yüke göre tasarlanmalıdır. Bu daha küçük yüke; müsaade edilebilir yük, çalışma yükü veya tasarım yükü adı verilir. Kopma yükünün müsaade edilebilir yüke oranına emniyet katsayısı denir:

$$n = \frac{\text{Kopma yükü}}{\text{Müsaade edilebilir yük}} \qquad 2.4$$

Uzay mühendisliğinde emniyet katsayısı yerine emniyet marjı n–1 kullanılmaktadır.

Birçok uygulamada yük ile gerilme arasında lineer bir ilişki bulunduğundan emniyet katsayısı aşağıdaki gibi de tarif edilmektedir:

$$n = \frac{\text{Çökme gerilmesi}}{\text{Müsaade edilebilir gerilme}} \qquad 2.5$$

Emniyet katsayısının belirlenmesi en önemli mühendislik işlerinden biridir. Eğer emniyet katsayısı çok küçük seçilirse kırılma ihtimali kabul edilmeyecek kadar büyük olur. Diğer taraftan gerekli olmayacak derecede büyük seçilirse sonuç ekonomik olmayabilir veya tasarım fonksiyonel bulunmayabilir.

Verilen bir tasarım uygulamasında uygun emniyet katsayısının seçimi aşağıdaki gibi birçok incelemeye dayanan mühendislik muhakemesini gerektirir:

1. Malzeme özelliklerindeki değişmeler. Malzemenin kompozisyonu, mukavemeti ve boyutları imalat sırasında küçük değişmelere tabidir. Malzemenin depolanması, taşınması veya konstrüksiyonu sı-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

rasında deformasyon veya ısınma sonucu kalıcı gerilmeler olabilir veya özellikler değişebilir.

2. Yapı veya makinanın ömrü boyunca beklenen yükleme sayısı. Çoğu malzemenin kopma gerilmesi, uygulanan yük sayısının artmasıyla azalır. Bu olay yorulma olarak bilinir ve eğer ihmal edilirse sonuçta ani kırılma olabilir.

3. Planlanan veya ilerde vuku bulabilecek yükleme durumu. Çok az yükleme durumu tam doğru olarak bilinir ve çoğu tasarım yüklemeleri mühendislik tahminine dayanır. Ayrıca gelecekteki değişmeler hakiki yük durumunu da değiştirebilir. Yükün dinamik, titreşimli veya darbeli olması daha büyük emniyet katsayısı gerektirir.

4. Muhtemel kırılma çeşitleri. Gevrek malzemeler aniden kırılır ve genellikle önceden bir belirti göstermez. Diğer taraftan inşaat çeliği gibi sünek malzemeler, kırılmadan önce akma adı verilen büyük deformasyon gösterir ve aşırı yük hakkında uyarıda bulunarlar. Bununla birlikte çoğu burkulma veya stabilite kırılması, malzeme ister gevrek isterse sünek olsun aniden meydana gelir. Ani kırılma ihtimali varsa emniyet katsayısı daha büyük seçilir.

5. İnceleme usullerindeki belirsizlik. Tüm tasarım usulleri belirli basitleştirme kabullerine dayanır ve bu yüzden hesaplanan gerilmeler yaklaşık olur.

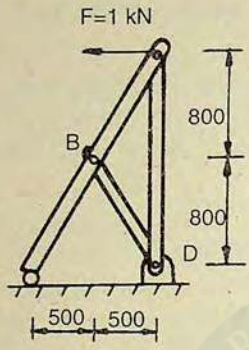
6. İyi olmayan bakım veya önlenemez tabii hadiseler sebebiyle gelecekte olabilecek fenalaşma. Kontrolü ve tespiti zor olan paslanma ve çürüme şartları olan bölgelerde daha büyük emniyet katsayısı gerekli olur.

7. Yapının bütünlüğü içinde elemanın önem derecesi. Birinci derecede olan elemanlarda ikinci derecede olanlara göre daha yüksek emniyet katsayısı kullanılır.

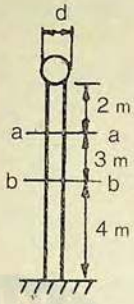
PROBLEMLER

2.1 Şekil 2.8 deki yapı üç çubuğun pimlerle birleştirilmesiyle elde edilmiştir. BD elemanındaki iç kuvvetleri bulunuz.

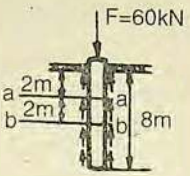
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 2.8



Şekil 2.9



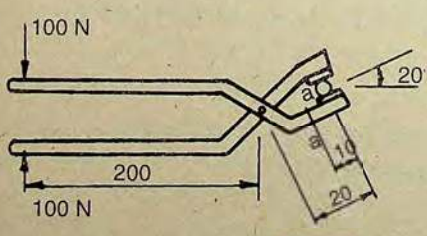
Şekil 2.10

2.2 Küre şeklindeki bir su tankı Şekil 2.9 daki gibi bir kolon üzerine yerleştirilmiştir. Tank ve suyun kütlesi 100 tondur. Kolonun birim uzunluğunun kütlesi 1.1 ton/m dir. Taşıyıcı kolonun a–a, b–b ve taban kesitlerinde iç kuvvetleri hesaplayınız.

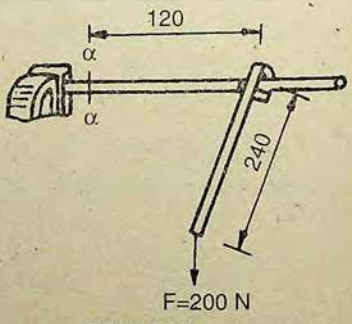
2.3 Bir temel kazığı toprağa 8 m çakılmaktadır (Şekil 2.10). Kazığa uygulanan dış yük 60 kN dur. Kazık boyunca üniform dağılan birim uzunluğa gelen f (kN/m) sürtünme kuvvetinin kazığı dengede tuttuğu kabul edilmektedir. a–a ve b–b kesitlerindeki iç kuvvetleri bulunuz. Kazıktaki azami iç kuvvet nedir?

2.4 Uzunluğu 10 m olan 10 mm çapındaki bir çelik çubuk kendi ağırlığı altındadır. Üstten asılan çubuğun 5 m aşağısında ve yatayla 60 derece açı yapan bir düzlemdeki iç kuvvetleri hesaplayınız. Özgül ağırlığı 77 N/dm^3 alınız.

2.5. Şekil 2.11 deki pensenin alt çenesinin a–a kesitindeki kesit tesirlerini bulunuz.



Şekil 2.11



Şekil 2.12

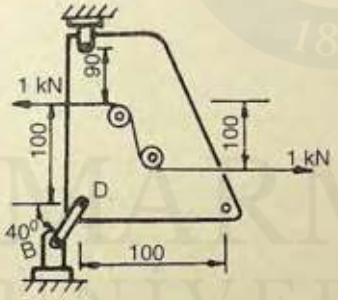
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.6. Şekil 2.12 de mengenede sıkılan bir boruya bir boru anahtarıyla 200 N şiddetinde bir kuvvet uygulanmaktadır. Borunun aa kesitindeki kesit tesirlerini bulunuz.

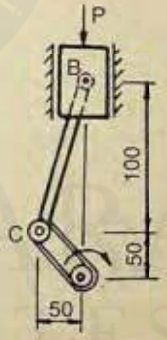
2.7 Çapı 10 mm olan alüminyumdan bir perçin 20 kN kesme kuvveti iletmektedir. Perçindeki kayma gerilmesi nedir? Perçin çift kesilmeye çalışsaydı 40 MPa kayma gerilmesine sebep olacak kesme kuvveti ne olurdu?

2.8 Çapı 30 mm olan bir cıvata dişsiz kısmıyla 100 kN luk bir kesme kuvveti iletmektedir. Cıvatadaki kayma gerilmesini bulunuz. Cıvata çift kesilmeye çalışsaydı kayma gerilmesi 60 MPa değerini geçmeyecek şekilde çapı en az ne olmalıydı? (Cıvataların ilke olarak çekmeye çalıştırıldığını hatırlayınız.)

2.9 Şekil 2.13 teki BD kolunun kesiti 15 mm^2 dir.Kolun ortasındaki normal gerilmeyi bulunuz.



Şekil 2.13



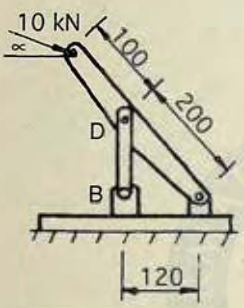
Şekil 2.14

2.10 Bir motorda krank miline 1 kNm şiddetinde bir moment uygulanmaktadır. Şekil 2.14 deki konumda sistemi dengede tutmak için gerekli P kuvvetini bulunuz ve kesiti 500 mm^2 olan BC biyelindeki normal gerilmeyi hesaplayınız.

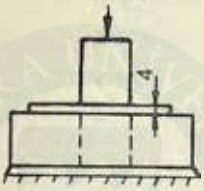
2.11 Şekil 2.15 teki BD kolu 50 mm genişlik ve 10 mm kalınlık ölçülerindedir. Pimlerin çapları 12 mm olduğuna göre α=0, 45 ve 90 derece için koldaki normal gerilme nedir?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

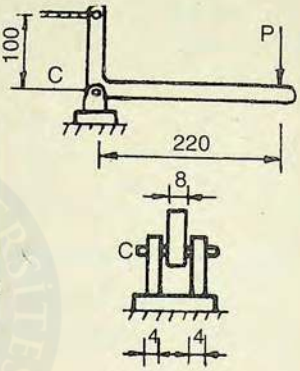
2.12 Kalınlığı 4 mm olan alüminyum bir levhada 30 mm çapında bir delik açmak için gerekli pres kuvveti 60 kN dur (Şekil 2.16). Alüminyum levhanın kırılması için gerekli kayma gerilmesini bulunuz.



Şekil 2.15



Şekil 2.16

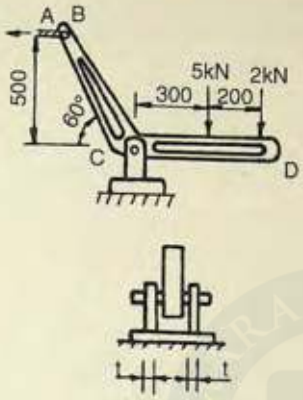


Şekil 2.17

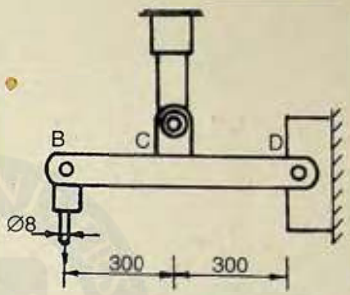
2.13. Şekil 2.17 deki pedala P=500 N kuvveti uygulanmaktadır. Kayma gerilmesi 60 MPa olan C deki pimin çapını, C deki pedalde ortaya çıkan yatak gerilmesini ve C deki mesnette ortaya çıkan yatak gerilmesini tayin ediniz.

2.14. Şekil 2.18 deki BCD elemanına iki kuvvet uygulanmaktadır. a. AB kontrol çubuğunun akma mukavemeti 500 MPa ve emniyet katsayısı 2.5 olduğuna göre çapı ne olmalıdır? b. C deki pimde kayma akma mukavemeti 250 MPa ve emniyet katsayısı 2.5 verilmektedir. Pimin çapını tayin ediniz. c. C deki mesnetlerde emniyet gerilmesi 200 MPa dır. t kalınlığını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 2.18



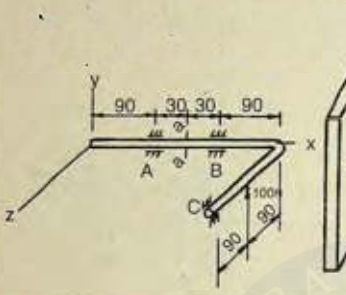
Şekil 2.19

2.15 Şekil 2.19 daki BCD rijit kirişi pimlerle B deki kontrol çubuğuna ve C deki hidrolik silindiri ile D deki mesnetlere bağlıdır. B ve D deki pimlerin çapları birbirine eşit ve 10 mm, C dekinin çapı ise 14 mm dir. Bütün pimler çift kesilmeye çalışmakta, malzeme için normal emniyet gerilmesi 60 MPa ve kayma emniyet gerilmesi 40 MPa olarak verilmektedir. Hidrolik silindire uygulanacak kuvvet en çok ne olabilir?

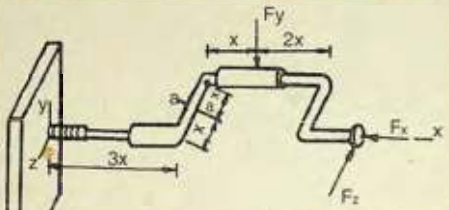
2.16 Cidar kalınlığı 6 mm olan levhadan kaynaklı konstrüksiyonla dış çapı 200 mm olan bir boru imal edilmiştir. Kaynak dikişi borunun boyuna ekseniyle 20 derece açı yapmaktadır. Boruya ekseni boyunca 100 kN değerinde basma kuvveti uygulandığında kaynak dikişinde ortaya çıkacak normal ve kayma gerilmelerini tayin ediniz.

2.17 Şekil 2.20 de A, B ve C yatakları üzerinde mesnetli çubuğun aa kesitindeki kesit tesirlerini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



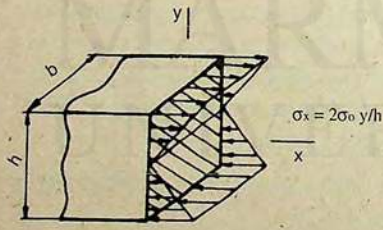
Şekil 2.20



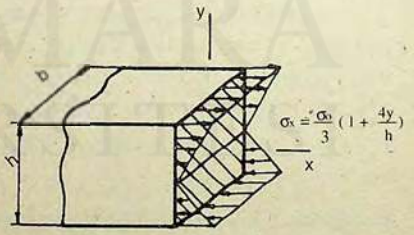
Şekil 2.21

2.18. Şekil 2.21 deki matkapta F_x=–200 N, F_y=–100 N, F_z=–50 N ve x=100 mm dir. Matkap ucunun O ve matkabın aa daki kesitlerinde kesit tesirlerini hesaplayınız.

2.19 – 2.20 Şekil 2.22 ve 2.23 de verilen gerilme dağılımları için kesitin sentroidine etki eden bileşkeleri bulunuz.



Şekil 2.22

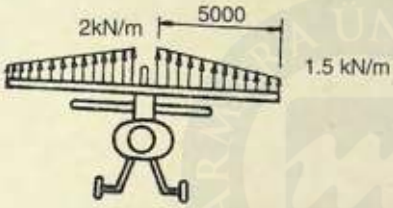


Şekil 2.23

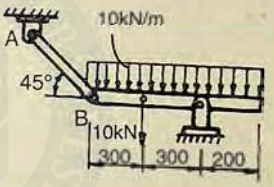
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.21 Küçük bir uçağın kanatlarının yük durumu, Şekil 2.24 de gösterildiği gibi kabul edilmektedir. Kanatlardaki en büyük eğilme momenti ile kesme kuvvetini bulunuz.

2.22. Şekil 2.25 deki AB kolunun yapıldığı malzeme için akma mukavemeti 1270 MPa olan 382 ^{0}C de su verilmiş ve temperlenmiş AISI 1045 çeliğidir. Emniyet katsıyısını 2.5 alarak AB kolunun kesitini tayin ediniz.



Şekil 2.24



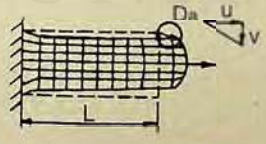
Şekil 2.25

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

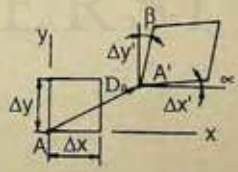
MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

3. ŞEKİL DEĞİŞTİRME

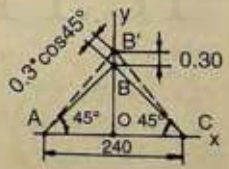
Dış yükler altında bulunan bir cisim genel olarak onun noktalarının konumlarını değiştirir. Noktaların konumlarının değişmesine yer değiştirme adı verilmektedir. Cismin farklı noktaları arasındaki mesafeler değişmiyorsa cismin rijit cisim hareketi yaptığı söylenir. Cismin noktaları arasındaki mesafenin değişmesi cismin şekil değiştirmesine sebep olmaktadır. Bu olaya deformasyon denir. Şekil 3.1 de bir levhanın deformasyon sonundaki durumu görülmektedir. Yüzey üzerindeki önce kare biçimli olan ızgaralar deformasyondan sonra değişmektedir. Sol taraftaki kenar boyunca levha mesnetlendiğinden burada yer değiştirme olmamaktadır. Bu kısıtlama levhanın rijit cisim hareketi yapmasını önlemektedir. Şekildeki deformasyon şiddeti abartılmıştır ve çoğu gerçek durumda anlaşılamayacak kadar küçüktür. Levhanın A köşesinin yer değiştirme vektörü D_a ile gösterilmiştir. Yer değiştirmenin x ve y bileşenleri u ve v ile gösterilmiştir. Bu bileşenler levhada x ve y koordinatlarına bağlı olarak bir noktadan diğerine değişmektedir. Elemanların çarpılmaları da bir elemandan diğerine değişme göstermektedir. Bir cisimdeki deformasyon, yer değiştirmesi ve çarpılma olmak üzere iki büyüklük tarafından temsil edilmektedir.



Şekil 3.1



Şekil 3.2



Şekil 3.3

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.1 Normal Şekil Değiştirme

Şekil 3.2 deki iki boyutlu cismin A noktasından itibaren Δx ve Δy uzunluklarını göz önüne alalım. Bunlar iki komşu kenarı göstersin. Cisim şekil değiştirmeye uğradıktan sonra $\Delta x'$, $\Delta y'$ ve A' ile gösterilmiştir. A noktası D_a yer değiştirmesiyle A' noktasına gitmekte, kenarlar uzama veya kısalma sonucu yeni uzunluklarına gelirken α ve β kadar da dönmektedir. $\Delta x'$ ve $\Delta y'$ kenarları gerçekte eğri şeklinde de olabilir ancak yeteri kadar küçük olduğundan doğru gibi kabul edilmektedir. Normal şekil değiştirme aşağıdaki gibi tarif edilmektedir:

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{dx' - dx}{dx} \qquad 3.1$$

$$\varepsilon_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y' - \Delta_y}{\Delta y} = \frac{dy' - dy}{dy}$$

Deformasyonun orijinal uzunluğa oranı olarak verilen bu şekil değiştirmeye, mühendislik şekil değiştirmesi adı verilir. Diğer doğrultularda da benzer tarif yapılabilir ve bir noktada sonsuz sayıda farklı normal şekil değiştirme bulunur. Uzma varsa işaret pozitif kısalmada ise negatiftir.

3.2 Kayma Şekil Değiştirmesi

Kayma şekil değiştirmesi, dik açıdaki küçülmeyi göstermekte ve aşağıdaki gibi tarif edilmektedir (Şekil 3.2):

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta \qquad 3.2$$

Kayma şekil değiştirmesi radyan birimi ile ölçülmektedir. Dik açı azalıyorsa pozitif, artıyorsa negatif işaretli olmaktadır. Deforme olmuş cisimdeki herhangi bir noktada sonsuz sayıda kayma şekil değiştirmesi vardır.

ÖRNEK 3.1. Uzunluğu 1000 mm olan bir çubuk boyuna uygulanan bir kuvvetle 0.5 mm uzamaktadır. Çubuk boyunca normal şekil değiştirmeyi hesaplayınız.

Çözüm: Çubuğun Δx uzunluğunda küçük parçalara ayrıldığını düşünelim. Şekil değiştirme çubuk boyunca sabit kabul edilerek, $\varepsilon = 0.5/1000 = 500\ \mu$ bulunur.

ÖRNEK 3.2. Bir ikizkenar dik üçgende Şekil 3.3 teki gibi kesikli çizgilerle gösterilen şekil değiştirme olmakta ve B köşesi B' ye hareket etmektedir. Levhanı OB ve AB boyunca normal şekil değiştirmeleri ile AB ve BC arasındaki kayma şekil değiştirmesini hesaplayınız.

Çözüm: Şekilden OB=240/2=120 mm, AB=120$\sqrt{2}$=169.706 mm ve AB'=169.918 mm bulunur.

$\Delta OB/OB=0.3/120=0.0025$ ve $\varepsilon_{ab}=0.001249$ olur. Yaklaşık olarak $\Delta AB/AB=0.001250$ şeklinde de bulunabilirdi. Aradaki farkın çok küçük olduğu görülmektedir.

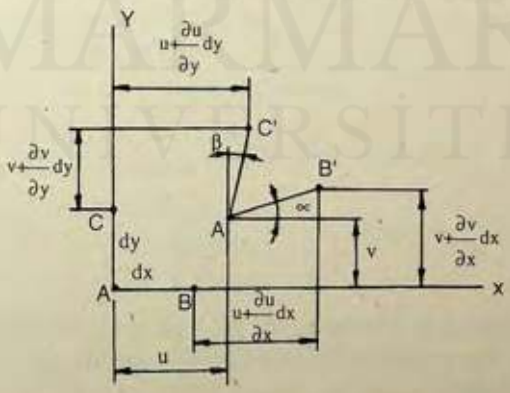
Şekilden AB'C açısı = 89.857 derece bulunur. Kayma şekil değiştirmesi =0.00250 rad olur. Açı azaldığından işareti pozitiftir.

ÖRNEK 3.3. Yarıçapı 200 mm olan ince bir halkanın yarıçapı, şekil değiştirmeden sonra 0.2 mm artmaktadır. Halkanın çevre boyunca şekil değiştirmesini bulunuz.

Çözüm: ds=r dθ uzunluğunda bir halka parçası alalım. Halkanın yeni boyu ds'= (r+Δr) dθ olur. Böylece normal şekil değiştirme $\varepsilon=(ds'-ds)/ds=\Delta r/r=0.001$ olarak bulunur.

3.3 Şekil Değiştirme -Yer Değiştirme Bağıntıları

İki boyutlu bir cisimdeki AB ve AC elemanter kenarları deformasyondan sonra A'B' ve A'C' halini aldığında A noktasının yer değiştirmesi,



Şekil 3.4

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

u ve v bileşenleri ile gösterilebilir (Şekil 3.4). B noktasının yer değiştirmesi A noktasının yer değiştirmeleri cinsinden,

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad ve \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

olur. Benzer şekilde C noktasının yer değiştirmeleri,

$$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad ve \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

olarak bulunur.

AB ve AC nin dönmeleri küçük olduğundan $\cos\alpha \approx 1$ ve $\cos\beta \approx 1$ yazılabilir. Böylece,

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \approx \frac{dx + u + (\partial u/\partial x)dx - u - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{bulunur.}$$

Kayma şekil değiştirmesi için $A'B' = dx' = \varepsilon_x dx + dx$, $A'C' = \varepsilon_y dy$, $\sin\alpha \approx \alpha$ ve $\sin\beta \approx \beta$ olduğu gözönünde tutularak,

$$\gamma_{xy} = a + \beta \approx \frac{v + (\partial v/\partial x)\, dx - v}{\varepsilon_x dx + dx} + \frac{u + (\partial u/\partial y)\, dy - u}{\varepsilon_y dy + dy} \quad \text{veya}$$

ε_x ve ε_y değerleri 1 in yanında ihmal edilerek,

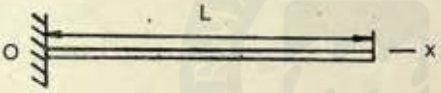
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{bulunur.}$$

Yapılan kabuller pratikteki çoğu durumda geçerli olmaktadır. Üç boyutlu halde benzer şekilde aşağıdaki şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları bulunabilir:

$\varepsilon_x = \partial u/\partial x,\ \varepsilon_y = \partial v/\partial y,\ \varepsilon_z = \partial w/\partial z$

$\gamma_{xy} = \partial u/\partial y + \partial v/\partial x,\ \gamma_{yz} = \partial v/\partial z + \partial w/y,\ \gamma_{zx} = \partial w/\partial x + \partial u/\partial z$ 3.3

ÖRNEK 3.4 Uzunluğu L olan ince bir çubuk bir ucundan ankastre mesnetlidir (Şekil 3.5) . x eksenini çubuk boyunca, orijini mesnette seçerek: a. $\varepsilon_x = x^2 / (600\ L)$ ise ε_x in azami değerini bulunuz.
b. $\varepsilon_x = 0.001 \cos [\pi x/ (2L)]$ için çubuğun boyundaki değişmeyi hesaplayınız.



Şekil 3.5

Çözüm:

a. $\Delta L = U_{x=L} = L/600$ olur. $\varepsilon_x = \partial u/\partial x = x/(300L)$ bulunur.

Şekil değiştirme x=0 da ε_x=0 dan x=L de azami değere lineer değişerek ulaşmakta ve $\varepsilon_x = 0.0033$ azami değerini almaktadır. b. $\varepsilon_x * dx = du$ yazılıp integral alınarak,

$u = (0.001*2L/\pi) \sin (\pi x/2L) + C$ bulunur.

Sınır şartı x=0 için u=0 olduğundan, C=0 elde edilir. Böylece çubuğun boyuna yer değiştirmesi,

$u = (0.002L/\pi) \sin (\pi x/2L)$ olur. x=L için çubuğun boyundaki değişme, ΔL= 0.000637 L olarak hesaplanır.

3.4 Termik Şekil Değiştirmeler

Cisimler dış yükler altında olduğu gibi sıcaklık değişmesinden dolayı da şekil değiştirirler. Sıcaklık farkı sebebiyle izotropik serbest bir elemanda aşağıdaki şekil değiştirmeler meydana gelmektedir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

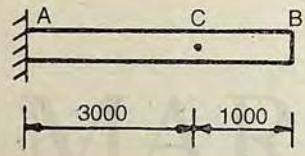
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha\Delta T \qquad 3.4$$

Burada α malzemenin termik genleşme katsayısı ve ΔT sıcaklık farkı olmaktadır. Bir bardağın hızlı ısıtılması sırasında kırılması termik gerilmeden dolayı olmaktadır. Sıcaklığın çok sayıda değişmesi yorulma kırılmasına yol açmaktadır.

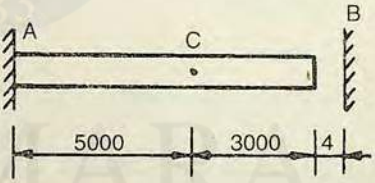
Mühendislik tasarımında türbin, jet motoru ve mükleer reaktör gibi alanlarda böyle gerilmeler önem kazanmaktadır. Rendering tesisi gibi sıcaklığın değişme gösterdiği yerlerde mil yataklarının termik şekil değiştirmeye imkan verecek şekilde tasarlanması ile aşırı yüklerden korunulabilmektedir.

PROBLEMLER

3.1. Şekil 3.6 daki konsol kirişin B ucu sağa doğru 2 mm yer değiştirmektedir. Çubuktaki ortalama şekil değiştirmeyi bulunuz. Şekil değiştirme çubuk boyunca üniform ise C noktasının yer değiştirmesi ne olur?



Şekil 3.6

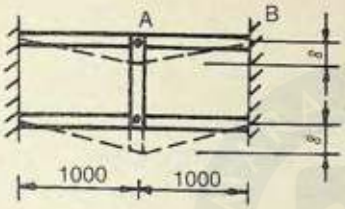


Şekil 3.7

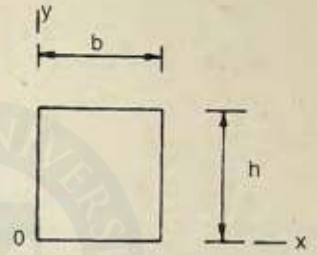
3.2 Şekil 3.7 deki kirişin C noktası 4 mm sağa doğru yer değiştirmektedir. AC ve CB kısımları için ortalama şekil değiştirmeleri hesaplayınız.

3.3 Cidar kalınlığı iç çapının 1/40 ından daha büyük borulara kalın cidarlı boru adı verilir. İç çapı 100 mm cidar kalınlığı 10 mm olan böyle bir borunun yarıçapının iç kısmındaki A noktası ile dış kısmındaki B noktası dışarıya doğru sırasıyla 2.00 mm ve 1.20 mm yer değiştirmektedir. A ve B noktaları arasında ortalama şekil değiştirmeyi hesaplayınız.

3.4 Şekil 3.8 deki panel ve çerçeve kesikli çizilerle gösterildiği gibi yer değiştirmektedir. Her paneldeki kayma şekil değiştirmesini ve AB çerçeve elemanındaki normal şekil değiştirmeyi bulunuz.



Şekil 3.8



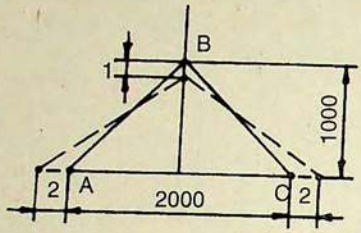
Şekil 3.9

3.5 Şekil 3.9 daki dikdörtgen levhanın yer değiştirmeleri u=by / (100h) ve v=xy/ (100h) ile verilmektedir. Levhanın şekil değiştirmiş şeklini çiziniz ve ε_x, ε_y, γ_{xy} için azami değerleri bulunuz.

3.6 Şekil 3.10 daki ABC levhasının deforme hali kesik çizgilerle gösterilmiştir. Levhadaki ε_x, ε_y, γ_{xy} ve AB-BC arasındaki kayma şekil değiştirmesini bulunuz.

3.7. Merkezinde 500 mm çaplı delik bulunan 1500 mm çaplı bir levhanın ilk sıcaklığı 20 C dir. Sıcaklığın 70 C ye yükselmesi durumunda levhanın iç çevresinde ve dış çapında meydana gelecek değişmeleri α=15E–6 [1/C] alarak bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 3.10

3.8. Şekil 3.9 daki dikdörtgen levha T=100 x/b [C] ile verilen üniform olmayan sıcaklık değişimine maruzdur. ε_x, ε_y, ve γ_{xy} değerlerini bulunuz ve deforme şekli çiziniz. α=20E–6 [1/C] alınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

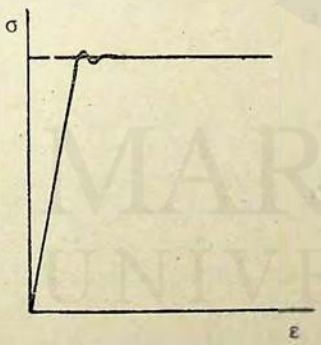
4. MEKANİK ÖZELLİKLER

4.1 Hooke Kanunu

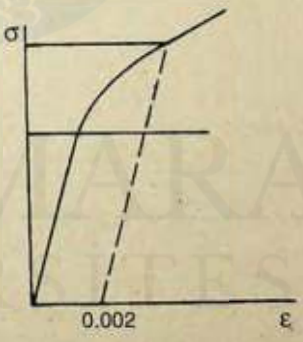
Gerilme - şekil değiştirme diyagramlarından, malzemenin önemli mekanik özellikleri bulunmaktadır. Diyagramın lineer kısmı özellikle önemlidir. Şekil 4.1 de az karbonlu bir çelik için verilen diyagramın lineer kısmı cebrik olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad 4.1$$

Buradaki E orantı sabitine elastiklik modülü denilmektedir. yukardaki denklem Hooke Kanunu olarak bilinmektedir.



Şekil 4.1



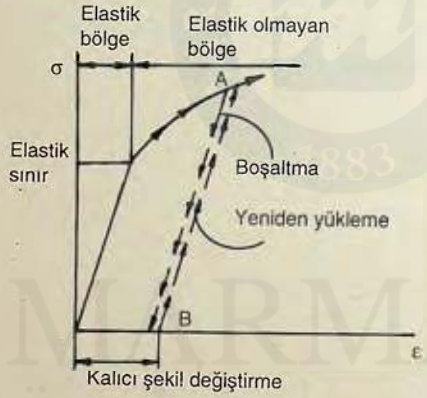
Şekil 4.2

Az karbonlu çelikte açıkça belirlenebilen akma mukavemeti, yatay kısmı olmayan malzemeler için Şekil 4.2 deki gibi %0.2 kalıcı deformasyona karşılık gelen değer olarak alınmaktadır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Diğer bir mekanik özellik orantılılık sınırıdır. Akma mukavemeti iki sebepten dolayı orantılılık sınırı yerine kullanılır: a. Çoğu malzeme için %0.2 kalıcı gerilme metoduyla akma mukavemetinin ölçülmesi kolaydır. b. Çoğu durumda ortaya çıkan hata ihmal edilebilir büyüklüktedir. Gerilmenin kaldırılmasıyla cisim ilk şeklini alıyorsa malzemenin elastik olduğu söylenir. Genellikle malzemeler yeteri kadar küçük gerilmelerde elastik, büyük gerilmeler altında ise elastik olmayan davranış göstermektedir.

Malzemenin yükleme–boşaltma halindeki davranışı önemlidir. Elastik sınırdan (Şekil 4.3) mesela A noktasından sonra tedricen yük kaldırılırsa diyagram ilkine paralel fakat yer değiştirmiş bir şekil alır. B noktası kalıcı gerilmeyi göstermektedir.



Şekil 4.3

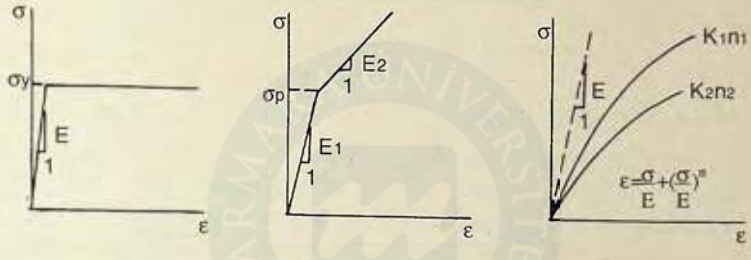
Eğer numunenin yükü boşaltıldıktan sonra tekrar yükleme yapılırsa durum Şekil 4.3 teki gibi olur. Bu akma mukavemetinin yükselmesi, şekil değiştirme sertleşmesi olarak bilinmektedir.

Elastik sınırın ötesindeki şekil değiştirmeler, yükün boşaltılması ile kalıcı şekil değiştirmeye yol açmakta ve buna elastik olmayan veya plastik şekil değiştirme adı verilmektedir. Kırılmadan önce izafi olarak büyük plastik şekil değiştirme gösteren malzemelere sünek malzeme ve aksine davranışlı malzemelere ise gevrek malzeme adı verilmektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.2 İdealleştirilmiş Gerilme-Şekil Değiştirme Diyagramları

Çeşitli gayeler için idealleştirilmiş diyagramlar kullanılmaktadır. Şekil 4.4a az karbonlu çeliğin akma öncesi ve sonrası idealleştirilmiş davranışını göstermektedir. Bu diyagram, yaklaşık olarak akma noktasındaki şekil değiştirmenin 15-20 katına kadar kullanılabilir.



a. Elastik, mükemmel plastik mazeme

b. Elastik, lineer sertleşen malzeme

c. Ramberg-Osgood diyagramları

Şekil 4.4

Bu diyagramın kullanılabileceği malzemelere elastik-mükemmel plastik denir. Şekil 4.4b deki diyagramda ilk lineer bölgeyi, azalmış eğimli ikinci lineer bölge izlenmektedir. Bu diyagram bazı çeliklerle başka malzemelere uygulanabilmektedir. Şekil 4.4c deki diyagram yaklaşık lineer bir kısmı takip eden lineer olmayan eğrileri göstermektedir. Verilen denklemler Ramberg ve Osgood tarafından geliştirilmiştir. Buradaki K, n ve E sabitleri eğrinin şeklini belirlemektedir.

4.3 Poisson Oranı

Tek eksenli çekme veya basmaya maruz bir deney numunesinde boyuna olduğu gibi enine şekil değiştirme de ortaya çıkar. Boyuna çekme için çapta kısalma veya basma için uzama olmaktadır.

Lineer elastik malzemeler tek eksenli olarak yüklendiğinde ortaya çıkan enine şekil değiştirmeler, boyuna olanlar ile orantılıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

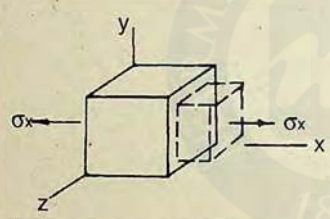
Tek eksenli halde,

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_{enine}}{\varepsilon_{boyuna}} \right| \qquad 4.2$$

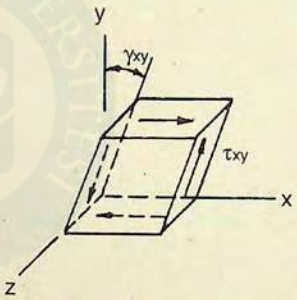
değerine Poisson oranı adı verilir. Malzeme homojen ve izotropik ise,

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad 4.3$$

yazılabilir (Şekil 4.5).



Şekil 4.5



Şekil 4.6

Kayma gerilmesi ile kayma şekil değiştirmesi arasında lineer elastik özellik olan malzeme için aşağadaki bağıntı vardır:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \qquad 4.4$$

Buradaki G kayma elastiklik modülüdür (Şekil 4.6). Normal ve kayma gerilmelerinin meydana getirdiği şekil değiştirmeler genelleştirilmiş Hooke Kanunu ile aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_x) \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad 4.5$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.4. Termik Gerilme ve Şekil Değiştirme

Sıcaklıkta ΔT değişmesi olduğunda normal şekil değiştirmeler,

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \alpha \Delta T \qquad 4.6$$

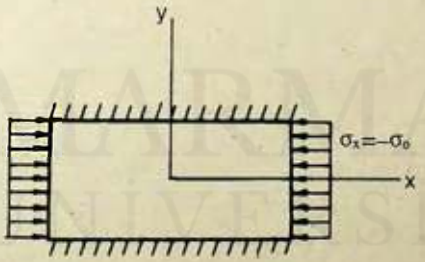
olur. Eğer eleman ayrıca gerilmeye de maruz ise toplam şekil değiştirmeler,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha \Delta T \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad 4.7$$

olur. Diğer bileşenler daire permütasyonu ile bulunabilir.

ÖRNEK 4.1. a. İnce bir levha $\sigma_x = -\sigma_o$ gerilmesiyle yüklenmektedir (Şekil 4.7). Levha, y yönünde genişlemesine veya daralmasına engel olunacak şekilde sınırlanmakta fakat x ve z yönlerinde serbest bırakılmaktadır. Levhanın yüzeyleri gerilmeden aridir ve dolayısıyla $\sigma_z = 0$ dır. Bu levha için σ_y, ε_x ve ε_z değerlerini bulunuz.

b. Ayrıca sıcaklıkta ΔT değişmesi de varsa yukardaki sorunun cevabı ne olur?



Şekil 4.7

Çözüm: a. y yönünde sınırlama olduğundan $\varepsilon_y=0$ dır.

$$0=\frac{1}{E}(\nu\sigma_o+\sigma_y) \text{ veya } \sigma_y=-\nu\sigma_o \text{ olur.}$$

$$\varepsilon_x=-\frac{\sigma_o}{E}-\frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_o)=-\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_o \text{ ve}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\nu}{E}\sigma_o-\frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_o)=\frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_o$$

bulunur.

b. T ye bağlı olmadan ε_x gerilmesi $-\sigma_o$ gerilmesine eşit olur ve sınır şartından $\varepsilon_y=0$ yazılır. Hooke Kanunu kullanılarak,

$$0=\frac{-\nu(-\sigma_o)}{E}+\frac{\sigma_y}{E}+\alpha\Delta T \text{ veya}$$

$\sigma_y=-\nu\sigma_o-E\,\alpha\,\Delta T$ bulunur. Şekil değiştirmeler ise,

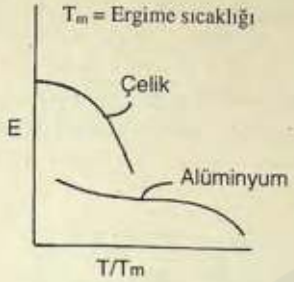
$$\varepsilon_x=-\frac{\sigma_x}{E}-\frac{\nu}{E}(-\nu\sigma_o-E\,\alpha\,\Delta T)+\alpha\,\Delta T=-\frac{1-\nu^2}{E}\sigma_o+(1+\nu)\,\alpha\,\Delta T$$

$$\varepsilon_z=\frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_o+(1+\nu)\,\alpha\,\Delta T$$

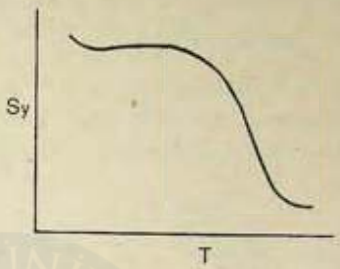
olarak elde edilir.

Sıcaklığa bağlı olarak genellikle malzemenin elastiklik modülü, akma ve kopma mukavemetleri değişmektedir. Şekil 4.8 de çelik ve alüminyum için T/T_m - E grafiği verilmektedir. Şekil 4.9 da bir çelik için akma mukavemetinin sıcaklıkla değişimi gösterilmektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

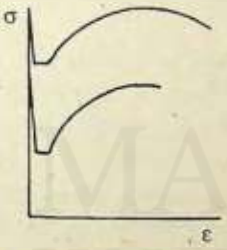


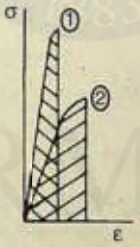
Şekil 4.8

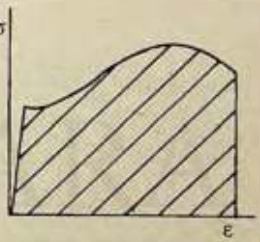


Şekil 4.9

Şekil 4.10 da hızlı yüklemede akma ve kopma mukavemetlerinin daha yüksek olduğu görülmektedir. Diğer taraftan daha düşük sıcaklıklarda ve/veya malzeme içinde kusurların bulunması durumunda hızlı yükleme daha düşük gerilmede gevrek kırılma vermektedir. Kusur mevcut olduğunda tedrici yük altında bile böyle gevrek kırılma olmaktadır.







Şekil 1.10

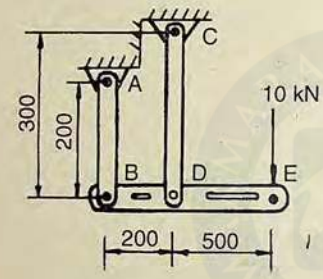
Şekil 4.11

Çarpma yüküne karşı malzemenin direnci mekanik enerji birimi ile ifade edildiğinde kırılmadan önce absorbe edilecek enerji miktarına tokluk adı verilmektedir. Gerilme-şekil değiştirme diyagramının altındaki alana tokluk modülü denir. Şekil 4.11 de görüldüğü gibi gevrek mazeme, kopma mukavemeti büyük de olsa, sünek malzemeden daha az enerji absorbe etmektedir. Tokluk çentiksiz numunelerde ölçülür. Kusurlu elemanlarda gevrek kırılma için çentik tokluğu temel öneme sahiptir. Çarpma yükü direnci için rezilans terimi kullanılır. Rezilans, plastik

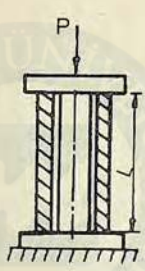
şekil değiştirme olmadan malzemenin absorbe edebileceği enerjiyi göstermektedir. Elastik bölgenin alanına rezilans modülü denir.

PROBLEMLER

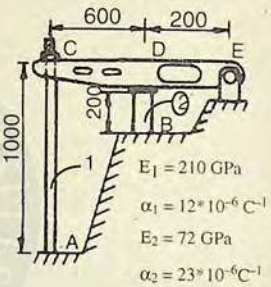
4.1. Şekil 4.12 deki BDE çubuğu AB ve CD kollarıyla asılmıştır. AB kolu alüminyum (E=70 GPa) ve kesiti 300 mm^2, CD kolu çelik (E=200 GPa) ve kesiti 400 mm^2 dir. B, D ve E noktalarının sehimlerini bulunuz.



Şekil 4.12



Şekil 4.13



Şekil 4.14

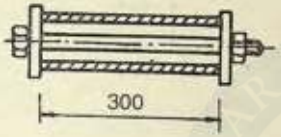
4.2 Uzunluğu L kesiti A_1 ve elastiklik modülü E_1 olan bir çubuk aynı uzunlukta fakat A_2, E_2 özelliklerinde bir borunun içine yerleştirilmiştir (Şekil 4.13). P kuveti üstteki plakaya uygulandığında çubuk ve boruya etki edecek kuvvetleri hesaplayınız.

4.3. CDE rijit çubuğu, çapı 40 mm olan BD alüminyum silindiri ve 20 mm çaplı AC çelik çubuğu ile Şekil 4.14 deki konstrüksiyon elde edilmiştir. Çelik çubuğun somunu boşluksuz olarak takılmıştır. Sistemde ilk sıcaklık 20 C dir. Sonradan silindirin sıcaklığı 70 C ye yükseltilirken çubuk ilk sıcaklığında sabit tutulmaktadır. Sıcaklık değişmeden önce gerilme mevcut olmadığını kabul ederek silindirdeki gerilmeyi bulunuz.

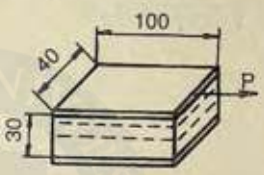
4.4. Kesiti 12.5 cm^2 olan bir pirinç borunun içine kesiti 4.52 cm^2 ve hatvesi 3 mm olan bir M24 cıvatası (Şekil 4.15) yerleştirilmiştir. Somun boşluksuz sıkıldıktan sonra bir çeyrek daha aynı yönde döndürüldüğünde cıvata ve boruda meydana gelen gerilmeleri tayin ediniz. Pirinç ve çelik için elastiklik modülleri sırasıyla 105 GPa ve 210 GPa dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.5. Dikdörtgenler prizması şeklindeki bir blok (G=600 MPa) Şekil 4.16 daki gibi iki adet yatay ve rijit levhaya yapıştırıcı ile bağlanmaktadır. Alt levha sabit tutulurken üst levha P yatay kuvveti ile 0.5 mm hareket ettirilmektedir. Malzemedeki kayma şekil değiştirmesi ile P kuvvetini hesaplayınız.



Şekil 4.15

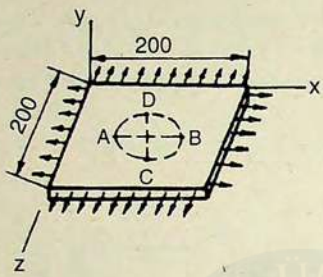


Şekil 4.16

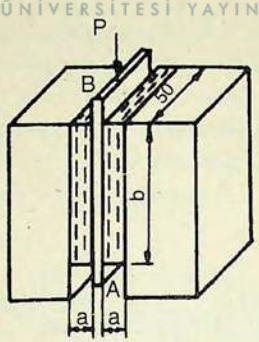
4.6. Çapı 100 mm olan bir çember, 10 mm kalınlığındaki gerilmesiz bir levhaya çizilmiştir (Şekil 4.17). Levhaya uygulanan kuvvetler σ_x= 50 MPa ve σ_z=100 MPa gerilmelerini meydana getirirse AB, CD çapları ile levha kalınlığında ve levhanın hacminde meydana gelecek değişmeler ne olur?

4.7. Bir titreşim izolatörü iki sert kauçuk blokun AB levhasına ve rijit mesnetlere Şekil 4.18 deki gibi yapıştırılmasından oluşmuştur. Kullanılan kauçuk için kayma emniyet gerilmesi 1.2 MPa ve kayma elastiklik modülü 18 MPa dır. Düşey uygulanan merkezi P kuvveti 30 kN olduğunda AB levhasında 3 mm düşey sehim meydana gelmektedir. a ve b için en küçük değeri hesaplayınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 4.17



Şekil 4.18

4.8 Yarıçapı 100 mm olan bir çelik küre okyanusda 8000 m derinliğe indiğinde hacmi ne kadar azalır? Elastiklik modülünü 210 GPa ve Poisson oranını 0.3 olarak alınız.

5. ENERJİ KAVRAMI

Cisimlerdeki yer değiştirmeleri ve bilinmeyen kuvvetleri doğrudan bulmak ve yapı sistemlerinin incelenmesi için bazı kavramları geliştirmek için enerji prensipleri gerekli olmaktadır. Enerji iş yapabilme yeteneğidir.

5.1. Şekil Değiştirme Enerjisi Yoğunluğu

Bir cisme etki eden kuvvet ile kuvvetin yönündeki yer değiştirmenin çarpımı yapılan işi vermektedir. Benzer şekilde M momentinin yaptığı iş, ∅ dönme açısına bağlıdır. Böylece,

$$W = P\ \delta \text{ veya } W = M\ \varnothing \qquad 5.1$$

yazılabilir. P kuvveti veya M momenti sıfırdan itibaren tedrici olarak uygulandığında yapılan işin yukarda verilenlerin yarısı kadar olacağı açıktır.

Birden fazla dış moment ve kuvvet tedrici olarak bir cisme uygulandığında toplam iş,

$$W = \frac{1}{2}(\Sigma P_i\Delta_i + \Sigma M_i \varnothing_i) \qquad 5.2$$

olur. Dış tesirler sebebiyle cisimde iç kuvvetler ve deformasyonlar meydana gelir. İç iş,

$$W_i = \frac{1}{2}\Sigma P_j \Delta_j \qquad 5.3$$

olur. Burada P_j ve Δ_j sırasıyla iç kuvveti ve bunun yönündeki yer değiştirmeyi gösterir. İç iş negatiftir ve enerjinin depo edildiğini gösterir.

Termodinamiğin 1. Kanunu, yükleme sırasında ısı alışverişi olmadığında yüklerin dış işinin enerjiye dönüştüğünü ifade eder. Elastik bir sistemde dış yüklerin etkisiyle enerjinin değişimi, kinetik enerji ile şekil değiştirme enerjisinden ibarettir. Sistem tedrici yükleniyorsa ki-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

netik enerji ihmal edilebilir ve dış iş, şekil değiştirme enerjisine eşit olur. Şekil değiştirme enerjisi negatif olduğundan,

$$W + W_i = 0 \qquad 5.4$$

bulunur. Birim hacimde depolanan şekil değiştirme enerjisine, şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu (u) adı verilir. Toplam şekil değiştirme enerjisi,

$$U = \int_V u \, dV \qquad 5.5$$

olur.

Lineer elastik davranış gösteren malzemeler için şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu,

$$u = \sigma \varepsilon / 2 \qquad 5.6$$

olur. Boyuna P yükü ile yüklü, L boyunda, A kesitinde ve E elastiklik modülüne sahip bir çubuk için toplam enerji,

$$U = P^2 L / (2EA) \qquad 5.7$$

olarak bulunur.

Bir cisimde depolanan enerji geri kazanılabiliyorsa elastik şekil değiştirme enerjisi adını alır. ε ile eğri arasında kalan alan şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunu gösterirken σ ile eğri arasındaki alan da u* tamamlayan şekil değiştirme enerjisi yoğunluğunu göstermektedir. Lineer elastik halde, W=W* ve U=U* olarak enerjilerin tamamlayan enerjilere eşitliği yazılabilir.

Üç eksenli halde şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu,

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i=x,y,z} \sigma_i \varepsilon_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=x,y,z \\ j=y,z,x}} \tau_{ij} \gamma_{ij}$$

olur. Hooke Kanunu yardımıyla,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

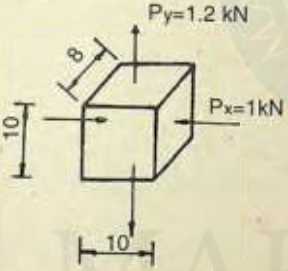
$$u=\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2}{2E}-\frac{\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)}{E}+\frac{\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2}{2G} \qquad 5.9$$

şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu bulunur.

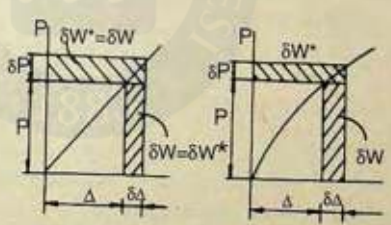
ÖRNEK 5.1 Şekil 5.1 deki alüminyum blok için elastiklik modülü 70 GPa ve Poisson oranı 0.3 olarak verilmektedir. Şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu ile şekil değiştirme enerjisini bulunuz.

Çözüm: Normal gerilmenin x, y ve z bileşenleri kuvvetler alanlara bölünerek sırasıyla – 12.5 MPa, 15 MPa ve 0 bulunur. Denklem 5.9 dan şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu, 1234 J/m^3 olarak bulunur.

Blokun hacmi ile çarpılarak, 0.494 J şekil değiştirme enerjisi elde edilir.



Şekil 5.1



Şekil 5.2

5.2 Castigliano Teoremleri

Tek eksenli olarak yüklenen bir çubukta P yük δP kadar arttığında sehim δΔ kadar artar ve buna karşılık gelen şekil değiştirme ve tamamlayan enerjiler sırasıyla δW ve δW * olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şekil 5.2a dan,

$$\delta W = P\,\delta\Delta \text{ ve } \delta W^* = \Delta\delta P \qquad 5.10$$

yazılabilir. W=U ve W*=U* olduğundan,

$$P = \delta W / \delta\Delta = \delta U / \delta\Delta \text{ ve } \Delta = \delta W^* / \delta P = \delta U^* / \delta P \qquad 5.11$$

bulunur. Genel halde P_1, P_2,.. ve/veya M_1, M_2,.. dış yüklerine maruz elastik bir cisimde, herhangi bir Δ sehimine veya Φ dönme açısına göre şekil değiştirme enerjisinin kısmi türevi ile,

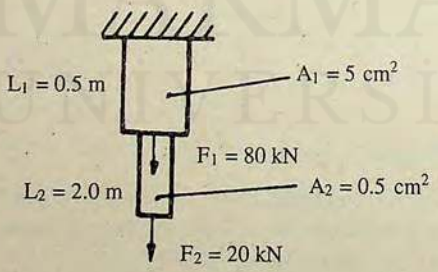
$$P_i = \partial U/\partial\Delta_i \text{ ve } M_i = \partial U/\partial\Phi_i \qquad 5.12$$

bulunur. Buna Castigliano'nun birinci teoremi denir ve lineer ve lineer olmayan elastik malzemelere uygulanabilir. Elastik bir sistemde tamamlayan şekil değiştirme enerjisinin seçilen bir P_i kuvvetine veya M_i momentine göre kısmi türevi ise Δ_i veya Φ_i ye eşittir ve Castigliano'nun ikinci teoremi adını alır:

$$\Delta_i = \partial U^*/\partial P_i \text{ ve } \Phi_i = \partial U^*/\partial M_i \qquad 5.13$$

Lineer elastik sistemde U=U* olduğu bilinmektedir.

ÖRNEK 5.1 Şekil 5.3 teki çubuğun toplam sehimini Castigliano'nun birinci teoremini kullanarak bulunuz. E=210 GPa dır. Çözümü ikinci teoremle tekrarlayınız.



Şekil 5.3

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm: a. Şekil değiştirme enerjisi; kesiti A, boyu L ve elastiklik modülü E olan bir çubuk için,

$$U = \frac{1}{2}\int_v \sigma \varepsilon \, dV = \frac{1}{2}\int_0^L \sigma \varepsilon A \, dx = \frac{E\Delta^2}{2L} \text{ olur.}$$

Serbest cisim diyagramından üst kısma etki eden kuvvet 80+20=100 kN olarak bulunur.

$dU/d\Delta_i$ = 100 000 N olduğundan Δ_1 = 2.38 mm elde edilir. Alt kısma tesir eden kuvvet 20 kN alınarak Δ_2 = 3.81 mm bulunur. Böylece toplam sehim 2.38+3.81=6.19 mm olur.

$U = \frac{P^2 L}{2EA}$ yazılabilir. Çubuk farklı kesitlerde olduğundan,

P_1 ve P_2 ye göre kısmi türevlerin toplamı,

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P_1} + \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{P_1 L_1}{E A_1} + \frac{P_2 L_2}{E A_2} = 6.19 \text{ mm sehimini verir.}$$

b. Denklem 5.7 den,

5.3. Karşıt Teoremler

Lineer elastik bir sistemde bir i bölgesindeki sehim aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Delta_i = \delta_{i1} P_1 + \delta_{i2} P_2 + \delta_{i3} P_3 + \ldots \qquad 5.14$$

Benzer şekilde,

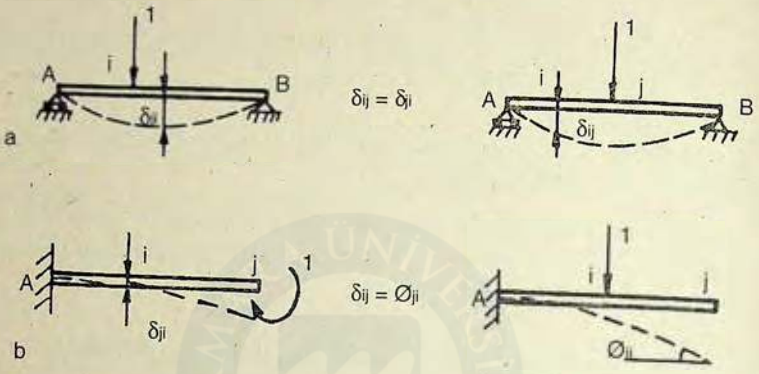
$$\Delta_j = \delta_{j1} P_1 + \delta_{j2} P_2 + \delta_{j3} P_3 + \ldots \qquad 5.15$$

olur. Castigliano'nun ikinci teoreminden kuvvete göre kısmi türev alınarak sehim bulunabilir:

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial P_j} = \delta_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} \text{ ve } \frac{\partial \Delta_j}{\partial P_i} = \delta_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j} \qquad 5.16$$

Yukardaki denklemden $\delta_{ij}=\delta_{ji}$ olduğu görülebilir. Buna Maxwell'in Karşıt Sehimler Kanunu adı verilir. Herhangi bir i noktasının başka bir j noktasındaki bir birimlik kuvvetten olan δ_{ij} sehimi, i noktasındaki bir birim kuvvetten P_i yönünde j noktasındaki δ_{ij} sehimine eşittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 5.4

Mesela Şekil 5.4 teki kirişler için denklem 14 ve 15 den,

$$\Delta_i = \delta_{ii} P_i + \delta_{ij} M_j \text{ ve } \varnothing_j = \varnothing_{ji} P_i + \varnothing_{jj} M_j$$

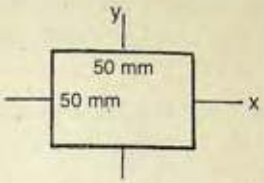
yazılabilir. Şekil 5.4b deki $\delta_{ij} = \varnothing_{ji}$ yanlış gibi görünmektedir. Ancak incelendiğinde ikisinin de boyutunun 1/kuvvet olduğu, dolayısıyla uyumsuzluk bulunmadığı anlışılır.

PROBLEMLER

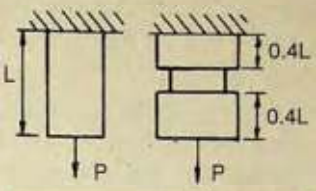
5.1 Kalınlığı 20 mm olan Şekil 5.5 teki levhaya x, y ve z yönünde sırasıyla +100 kN, +200 kN ve −100 kN kuvvetleri uygulanmaktadır. Elastiklik modülü 70 GPa ve Poisson oranı 0.3 tür. Şekil değiştirme enerjisi ile şekil değiştirme enejisi yoğunluğunu bulunuz.

5.2 Çapı 10 mm ve uzunluğu 1000 mm olan bir çelik çubuğun uçlarına P=20 kN yükü uygulanmaktadır. Yükün 40 kN değerine yükselmesi durumunda şekil değiştirme enerjisinde meydana gelecek değişmeyi bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 5.5



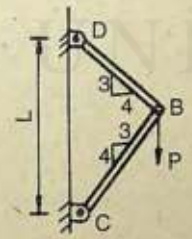
Şekil 5.6

5.3 Şekil 5.6 da verilen aynı malzemeden yapılmış iki çubukta depolanan şekil değiştirme enerjilerini mukayese ediniz. Her iki çubuk da aynı boyda olup aynı P yükünü taşımaktadır. İlk çubuk üniform d çapına sahiptir. İkinci çubuğun çapı 2d fakat orta kısmında 0.2 L uzunluğundaki kısım d çapındadır.

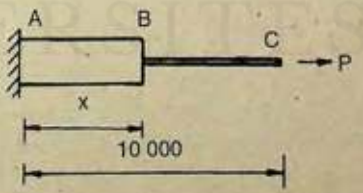
5.4. Castigliano'nun birinci teoremini kullanarak P=20 kN kuvveti sebebiyle çubuğun toplam uzamasını Problem 5.2 için bulunuz.

5.5. Problem 5.1 de x yönündeki toplam uzamayı Castigliano'nun ikinci teoremini kullanarak bulunuz.

5.6. Şekil 5.7 de B noktasının P yükü sebebiyle yatay ve düşey sehimi ne olur? BC ve BD çubuklarının kesitleri A ve elastiklik modülleri E dir.



Şekil 5.7



Şekil 5.8

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5.7 Şekil 5.8 deki çubuk için akma mukavemeti 400 MPa ve elastiklik modülü 210 GPa dır. Çubuğun AB kısmının çapı 12 mm ve BC kısmının çapı 8 mm dir. Kalıcı şekil değiştirme olmaksızın en büyük şekil değiştirme enerjisini x=3 m ve x=6 m için bulunuz.

5.8. Bir m kütlesi L uzunluğunda ince bir kola bağlanmış olup yatay düzlemde ve sürtünmesiz düşey bir eksen etrafında ω açısal hızıyla dönmektedir. Emniyet gerilmesini σ alarak ve kolun kendi ağırlığını ihmal ederek kol için gerekli kesiti bulunuz.

5.9. Kolun ağırlığı ihmal edilmeseydi problem 5.8 in cevabı ne olurdu?

5.10. Uzun bir tel kendi ağırlığının tesiri altında düşey olarak asılmıştır. Telin kopma mukavemeti 2070 MPa olan çelik ve 565 MPa olan alüminyumdan yapılması durumunda kopma olmaksızın en büyük uzunluğu ne olur? Çelik ve alüminyum için yoğunluk sırasıyla 7860 kg/m^3 ve 2710 kg/m^3 tür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

6. GERİLME VE ŞEKİL DEĞİŞTİRME DÖNÜŞÜMLERİ

6.1. Tek Eksenli Gerilme Dönüşümü

Tek eksenli gerilmeye maruz bir çubuğun eğik bir düzlemle kesildiği düşünülsün (Şekil 6.1). Eğik düzleme dik bir normal gerilme ile paralel bir kayma gerilmesi yerleştirilir ve denge denklemleri yazılırsa (Şekil 6.2),

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A}\cos^2\theta \text{ ve } \tau_\theta = -\frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta \qquad 6.1$$

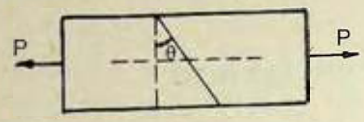
bulunur. İşaret kabulü olarak, normal gerilme yüzeyden dışa doğru ise ve kayma gerilmesi saatin aksi yönünde olduğunda (Şekil 6.3) pozitif alınır. Denklemlere sin 2θ, cos 2θ ve σ=P/A ithal edilir ve düzenleme yapılırsa,

$$(\sigma_\theta - \frac{\sigma}{2})^2 + \tau_\theta^2 = (\frac{\sigma}{2})^2 \qquad 6.2$$

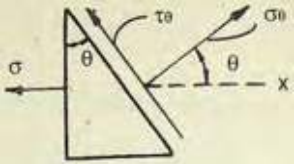
elde edilir. Bu denklem Mohr çemberini gösterir. σ–τ koordinatlarında çizildiğinde herhangi bir eğik düzlemdeki normal ve kayma gerilmeleri Mohr çemberinden bulunabilir. Burada θ açısının 2θ olduğu ve dönüş yönünün aksi olduğu hatırda tutulmalıdır.

ÖRNEK 6.1. Şekil 6.1 deki çubukta P=10 kN ve kesit 10 cm^2 ise θ=30 derece olan eğik düzlem üzerindeki gerilmeler ne olur? Mohr çemberini çizip üzerinde gösteriniz.

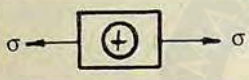
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

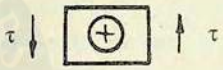


Şekil 6.1



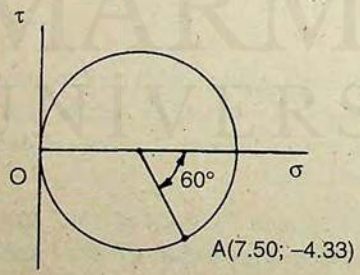
Şekil 6.2





Şekil 6.3

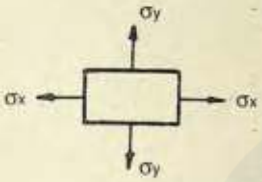
Çözüm: Denklem 6.1 den, σ_θ = 7.50 MPa ve τ_θ = –4.33 MPa bulunur. Normal gerilme yüzeyden dışa doğru olduğundan pozitif ve kayma gerilmesi saatin yönünde olduğundan negatif işaretlidir. Ayrıca açı 2θ=60 derece olarak alınıp Mohr çemberi çizilebilir (Şekil 6.4.). Eğik düzlem üzerindeki gerilmeleri çemberin A noktası temsil etmektedir.



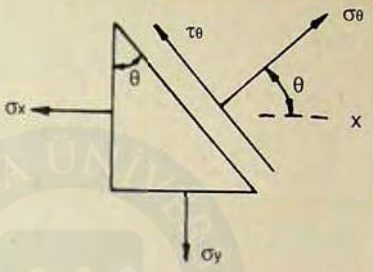
Şekil 6.4

6.2. İki Eksenli Gerilme Dönüşümü

İçinde basınçlı gaz bulunan ince cidarlı bir silindirin yüzeyinden alınan bir eleman Şekil 6.5 te gösterilmiştir.



Şekil 6.5



Şekil 6.6

Eleman üzerinde x ve y yönünde normal gerilmeler bulunmaktadır. Böyle bir gerilme haline iki eksenli gerilme hali adı verilir. Eğer ayrıca kayma gerilmeleri de varsa düzlem gerilme hali söz konusu olur. Elemanda θ açısı ile tarif edilen eğik bir düzlem üzerindeki gerilme bileşenleri denge denklemleri yazılıp,

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta \text{ ve } \tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta \qquad 6.3$$

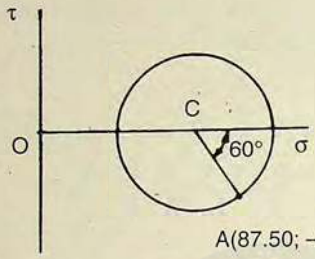
olarak bulunur. Tek eksenli gerilme halinde olduğu gibi düzenleme yapılarak Mohr çemberinin denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[\sigma_\theta - (\sigma_x + \sigma_y)/2]^2 + \tau_\theta^2 = [(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 \qquad 6.4$$

ÖRNEK 6.2. Şekilde 6.6 daki iki eksenli gerilmeye maruz prizmatik elemanın θ=30 derece olan eğik düzlemi üzerindeki gerilmeleri bulunuz ve Mohr çemberinde gösteriniz. x ve y yönündeki gerilmeler sırasıyla 100 MPa ve 50 MPa dır.

Çözüm: Denklem 6.3 kullanılarak $\sigma_\theta = 87.50$ MPa ve $\tau_\theta = -21.65$ MPa bulunur. Kayma gerilmesi saatin yönünde olduğunda negatiftir. Eğik düzlem üzerindeki gerilmeleri Mohr çemberinde A noktası temsil etmektedir (Şekil 6.7).

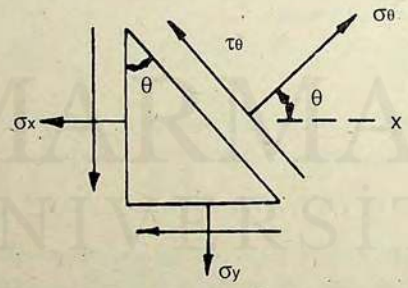
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 6.7

6.3. Düzlem Gerilme Dönüşümü

Şekil 6.8 deki elemanın yüzeyleri üzerinde normal gerilme yanında kayma gerilmesi de bulunmaktadır. Düzlem gerilme halindeki bu elemanın dengesi yazılarak,



Şekil 6.8

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\,\tau_{xy} \sin\theta \cos\theta \text{ ve}$$

$$\tau_\theta = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad 6.5$$

bulunur. Benzer şekilde Mohr çemberinin denklemi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$[\sigma_\theta - (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \tau_\theta^2 = [(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2 \qquad 6.6$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Asal Gerilmeler

Normal gerilmenin azami ve asgari değerlerini bulmak için düzlem gerilme halinde verilen ifadenin θ ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir. Böylece,

$$\tan 2\theta = 2\,\tau_{xy} /(\sigma_x - \sigma_y) \qquad 6.7$$

bulunur. Bulunan bu değer 6.5 denkleminde yazılarak,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \qquad 6.8$$

elde edilir. Bu gerilmelere asal gerilmeler denir. Kayma gerilmesinin azami ve asgari değerleri de benzer şekilde bulunabilir. Böylece düzlem ve gerilmelerin denklemleri,

$$\tan 2\theta = -(\sigma_x - \sigma_y)/(2\,\tau_{xy}) \text{ ve} \qquad 6.9$$

$$\tau_{\substack{az \\ as}} = \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \qquad 6.10$$

olarak bulunur.

6.4. Şekil Değiştirme Dönüşümleri ve Rozetler

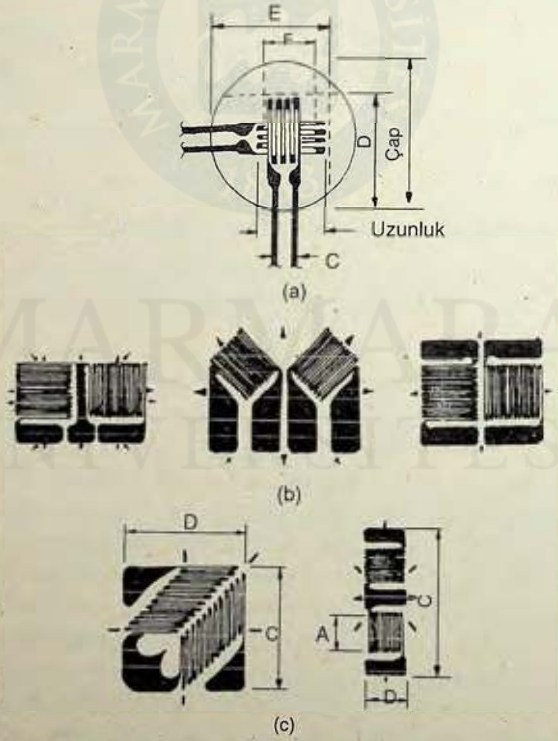
Denklem 6.5 te $\sigma = \varepsilon$ ve $\tau = \gamma/2$ yazılarak şekil değiştirme dönüşüm denklemleri bulunabilir. Asal şekil değiştirmeler de bu benzerlik kullanılarak elde edilebilir.

Uygulamada ölçülebilen büyüklükler kuvvet, uzunluk ve zamandır. Gerilme veya şekil değiştirmenin doğrudan ölçülmesi mümkün değildir. Deney yoluyla gerilmelerin bulunmasında mekanik, optik, elektrik ve akustik medodlar söz konusudur. Bir iletkenin gerilme altında boyunun uzaması ile kesiti daralmakta ve dolayısıyla direnci artmaktadır. Dirençteki değişmenin uzunluktaki değişmeye oranı bilindiğinde herhangi bir yapı veya makina elemanında ortaya çıkan şekil değiştirme bulunabilir. Şekil değiştirme bulunduktan sonra gerilme şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak gerilmeler belirlenebilmektedir. Bir gaz türbininin kanadında, bir dişli çarkta veya bir baraj gövdesinde gerilmenin bu şekilde tayin edilmesi büyük yarar sağlamaktadır. Advance=Constantan, Karma gibi malzemelerden imal edilen levha tipi uzama telleri uygulamada yaygın olarak kullanılmaktadır.

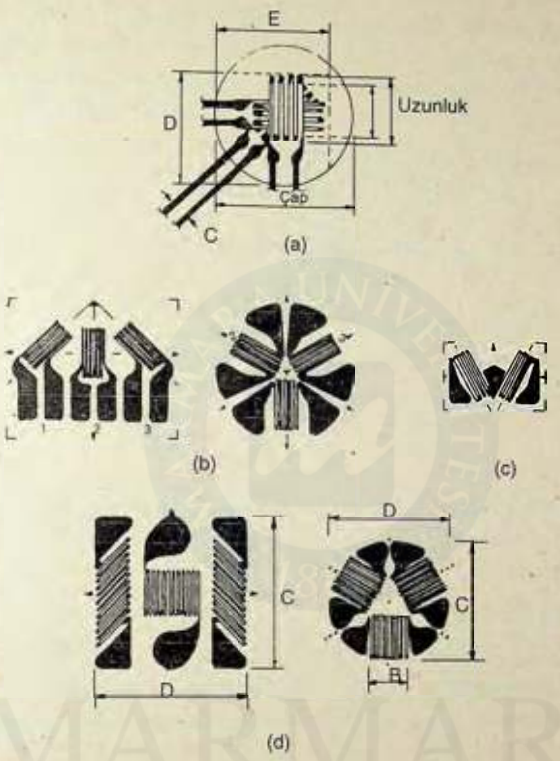
Bir noktadaki şekil değiştirme bileşenleri ε_x, ε_y ve γ_{xy} herhangi üç doğrultuda yapılacak normal şekil değiştirme ölçmeleri ile bulunabilmektedir. θ_1, θ_2 ve θ_3 açıları ile yerleştirilen üç elemandan elde edilen şekil değiştirmeler denklem 6.5 den bulunan aşağıdaki ifadede yazılabilir:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_x \cos^2 \theta_i + \varepsilon_y \sin^2 \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \cos \theta_i \qquad 6.11$$

Burada i=1, 2 ve 3 olmaktadır. İki veya üç elemandan oluşan uzama tellerine rozet adı verilmektedir. Asal doğrultular bulunduğunda iki elemanlı, bilinmediğinde ise üç elemanlı rozet kullanılmaktadır. Şekil 6.9 de bazı rotetler görülmektedir.



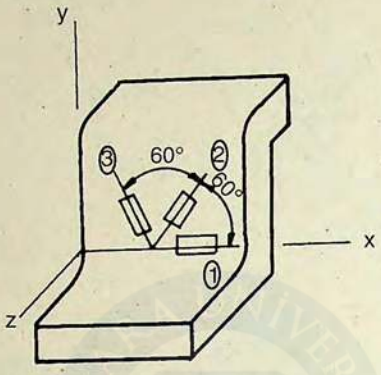
Şekil 6.9(a) İki elemanlı bazı rozetler.



Şekil6.9(b) Üç elemanlı bazı rozetler.

ÖRNEK 6.3. Bir makinanın gövdesinde (Şekil 6.10) 60 derecelik bir rozet kullanılarak $\varepsilon_1 = 20\ \mu$, $\varepsilon_2 = 490\ \mu$ ve $\varepsilon_3 = 165\ \mu$ uzamaları tespit edilmektedir. ε_x, ε_y ve γ_{xy} şekil değiştirmelerini hesaplayınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

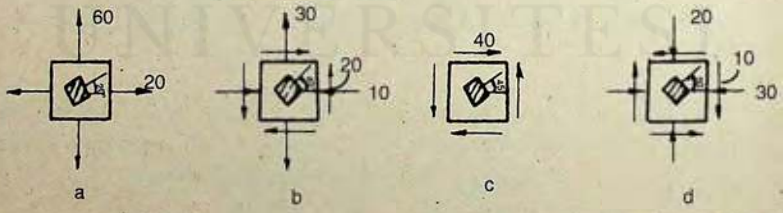


Şekil 6.10

Çözüm: Denklem 6.11 de θ=0, 60 ve 120 derece yazılarak üç bilinmeyenli üç denklemden ε_x=20 μ, ε_y=430 μ ve γ_{xy}=375 μ bulunur. Asal şekil değiştirmeler ε_1=−53 μ ve ε_2 =+503 μ olur.

PROBLEMLER

6.1. Şekil 6.11 de düzlem gerilme halindeki elemanlara tesir eden gerilemeler MPa olarak verlimektedir. Taralı alanla gösterilen elemanlar üzerindeki gerilmeleri hesaplayınız ve Mohr çemberi üzerinde gösteriniz.



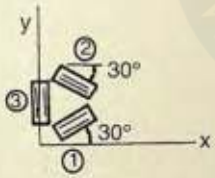
Şekil 6.11

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6.2. Silindirik ince cidarlı bir basınçlı kaba ekseniyle 30 derece açı yapan bir uzama teli yapıştırılarak ε=500 μ bulunmuştur. Kap içindeki akışkanın basıncını bulunuz. Silindirin yarıçapı 400 mm, cidar kalınlığı 5 mm, elastiklik modülü 210 GPa ve Poisson oranı 0.3 tür.

6.3. Bir silindire iki elemanlı bir rozet yapıştırılmaktadır.Eksen doğrultusunda ve ona dik doğrultuda sırasıyla 120 μ ve 510 μ okunmaktadır . Silindir içindeki basıncı, asal gerilmeleri ve azami kayma gerilmesini hesaplayınız. Kayma elastiklik modülü 80 GPa, cidar kalınlığı 10 mm ve iç çapı 300 mm olarak verilmektedir.

6.4. Bir kren kancasının denenmesi sırasında Şekil 6.12 deki rozet kullanılarak ε_1=700 μ, ε_2=500 μ, ve ε_3=–100 μ, şekil değiştirmeleri bulunmuştur. Asal şekil değiştirmeler ile azami kayma şekil değiştirmesini bulunuz.



Şekil 6.12



Şekil 6.13

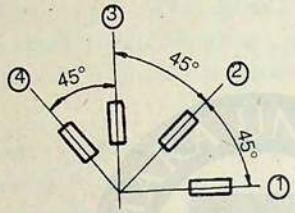
6.5. Şekil 6.13 teki rozet kullanılarak ε_1=240 μ, ε_2=–60 μ ve ε_3=40 μ şekil değiştirmeleri bulunmuştur. ε_x şekil değiştirmesini hesaplayınız.

6.6. İnce bir levhanın yüzyindeki bir noktada aşağıdaki şekil değiştirmeler μ olarak, ölçülmüştür. Poisson oranını 0.3 alarak a, b, c ve d halleri için asal şekil değiştirmeleri ve azami kayma şekil değiştirmesini hesaplayınız.

	ε_x	ε_y	γ_{xy}		ε_x	ε_y	δ_{xy}
a	-300	-200	175	b	60	1140	1440
c	100	-300	375	d	-325	-75	600

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6.7. Bir güç iletim milinin yüzeyinde Şekil 6.14 teki rozet yardımıyla $\varepsilon_1=250\ \mu$, $\varepsilon_2=-40\ \mu$, ve $\varepsilon_4=105\ \mu$ bulunmuştur. 3 numaralı uzama telinde okunan değer ne olmalıdır? Asal şekil değiştirmeler ile azami kayma şekil değiştirmesini hesaplayınız.



Şekil 6.14

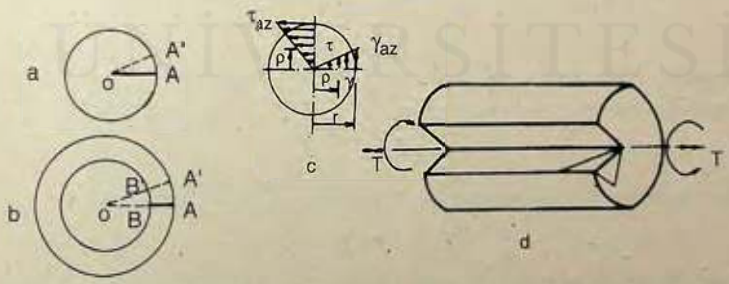
7. BURULMA

7.1 Giriş

Burulma momenti ile yüklenen elemanların mühendislikte birçok uygulama alanı bulunmaktadır. Güç ileten miller en yaygın alanlardan biridir. Buhar türbininden elektrik jeneratörüne, motordan takım tezgâhına veya otomobilde motordan tekerleğe güç iletiminde içi boş veya dolu silindirik miller kullanılmaktadır.

7.2 Temel Kabuller

Burulma momentine maruz kalan bir elemanda elemanın boyuna eksenine dik kesitler genellikle düzlem olarak kalmaz. Bu olaya çarpılma adı verilmektedir. Kapalı dairesel kesitler deformasyondan sonra düzlem kalırken diğer tüm kesitlerde böyle olmamaktadır. Eğer mesnet şartları çarpılmaya yol açacak şekilde kısıtlanırsa çarpılma gerilmeleri ortaya çıkar. Burada bu gerilmelerin kapalı daire kesitli elemanlardaki gibi mevcut olmadığı veya ihmal edilebilir bulunduğu kabul edilmektedir. Elastisite veya yapı tasarımı kitaplarında bilgi bulunabilir.



Şekil 7.1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Kapalı daire kesitli elemanlarda düzlem kesitlerin deformasyondan sonra düzlem kaldığı ve ayrıca deney sonuçlarına göre radyal doğruların da radyalliğini koruduğu kabul edilebilir (Şekil 7.1a ve b). Bunun sonucu olarak Şekil c'deki gibi kayma şekil değiştirmeleri lineer değişir. Lineer elastik davranış için Hooke kanunu aşağıdaki bağıntıyı verir.

$$\gamma = \tau / G \qquad 7.1$$

Şekilden kayma gerilmelerinin de lineer değiştiği görülmektedir. Lineer ve elastik olmayan davranış için bu kabulün yapılamayacağı açıktır.

Şekilden,

$$\gamma = \rho\, \gamma_{az} / r \qquad 7.2$$

ve lineer elastik hal için,

$$\tau = \rho\, \tau_{az} / r \qquad 7.3$$

yazılabilir. Şekilde görüldüğü gibi radyal kayma gerilmeleri boyuna gerilmelerle birlikte ortaya çıkmaktadır. Mesela, Şekil 7.2a'daki milin dış yüzeyinden alınan abcd eğri yüzeyi burulmadan sonra b'deki şekli almaktadır. Her diferansiyel elemanla çarpılan iç gerilmeler oradaki teğet kuvveti verecektir. Teğet kuvvetlerin moment kolu ile çarpımları toplamı T'ye eşit olmalıdır. Böylece,

$$T = \int_A \underbrace{\tau}_{\text{Gerilme}}\ \underbrace{dA}_{\text{Alan}}\ \underbrace{\rho}_{\text{Kol}} = \tau_{az} / r \int_A \rho^2 dA \qquad 7.4$$

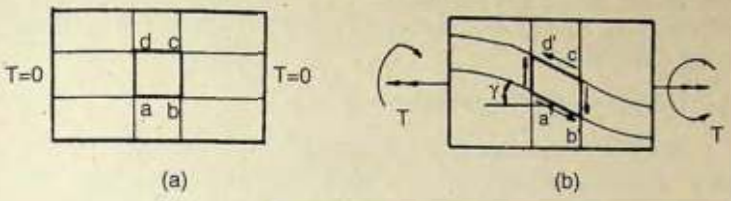
bulunur. Sağ taraftaki kesitin polar atalet momenti J ile gösterilerek aşağıdaki bağıntı bulunabilir:

$$\tau_{az} = Tr / J \qquad 7.5$$

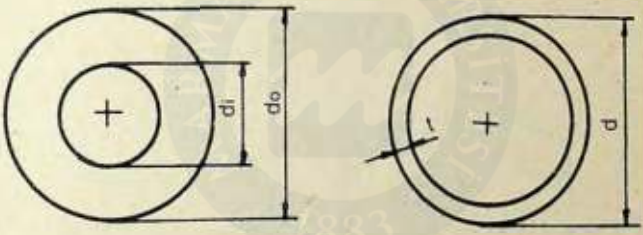
Kesitin ekseninden herhangi bir mesafedeki kayma gerilmesi ise,

$$\tau = T\rho / J \qquad 7.6$$

olur. İçi boş daire kesitli bir mil için $J=\pi(d_0^4 - d_i^4) / 32$ ve ince cidarlı bir boru için yaklaşık olarak $J=\pi\, d^3\, t / 4$ yazılabilir (Şekil 7.3).

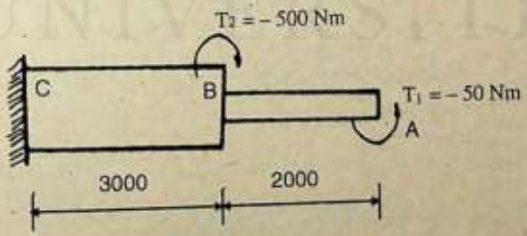


Şekil 7.2



Şekil 7.3

ÖRNEK 7.1. Şekil 7.4 teki mil 50 Nm ve -500 Nm burulma momentlerine maruz bulunmaktadır. İçi boş BC milinin dış ve iç tarafları ile içi dolu AB milinin dış tarafındaki kayma gerilmelerini bulunuz. Dolu kısmın çapı 30 mm, içi boş kısmın çapları 30 mm ve 40 mm dir.



Şekil 7.4

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm: İçi dolu mil için J=7.95 cm^4, T=50 Nm ve içi boş mil için J=17.18 cm^4, T=-450 Nm olduğundan, $\tau = T\ r / J$ yazılarak, içi dolu milde τ = 9.43 MPa, içi boş milin iç tarafında τ = 39.3 MPa ve dış tarafında τ = 52.4 MPa bulunur.

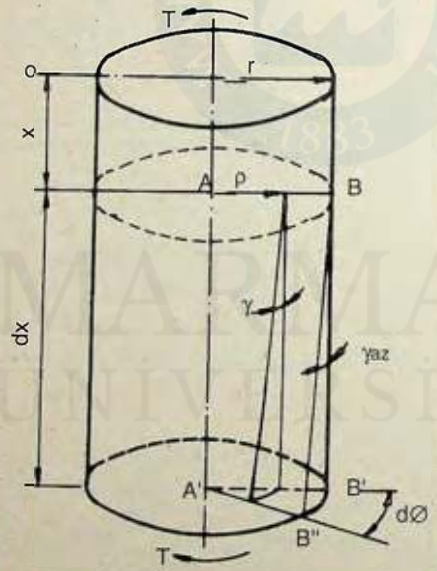
7.3. Burulma Deformasyonları

Daire kesitli bir milde dx uzunluğunda ve T torkuna maruz bir kısmı inceleyelim (Şekil 7.5). Eğer milin x'de dönmesi engellenirse birim uzunluktaki dönme $d\varnothing / dx$ olur.

Şekilden,

$$B'B'' = r\, d\varnothing \approx \gamma_{az}\, dx \text{ veya } d\varnothing / dx = \gamma_{az} / r = \gamma / \rho \qquad 7.7$$

bulunur.



Şekil 7.5

Lineer elastik halde Hooke kanunu kullanılarak,

$$d\varnothing / dx = T / (GJ) \qquad 7.8$$

elde edilir. Toplam dönme açısı A ve B arasında yapılan integrasyonla

aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varnothing_{AB} = \int_A^B T\,dx / (GJ) \qquad 7.9$$

T ve J sabit ise,

$$\varnothing_{AB} = \frac{TL}{GJ} \qquad 7.10$$

olur.

ÖRNEK 7.2. Yukardaki örnekte G=85 GPa ise dönme açısı ne olur?

Çözüm:

$\varnothing_{AB} = \frac{TL}{GJ} = 0.0148$ rad, $\varnothing_{BC} = -0.0925$ rad olduğundan,
$\varnothing_{AC} = -0.0777$ rad $= -4.5^\circ$ bulunur.

Milin yayılı t (N/m) torkuna maruz bulunması halinde denge denkleminden G ve J sabit kabul edilerek,

$$t\,dx + dT = 0 \quad \text{veya} \quad dT/dx = GJ\,\frac{d^2\varnothing}{dx^2} = -t \qquad 7.11$$

bulunur.

ÖRNEK 7.3. Bir mil lineer değişen t = kx torkuna maruzdur. T=500 N.m, d=50 mm ve G=80 GPa alarak dönme açısını bulunuz.

Çözüm : $T = \int_0^2 k\,x\,dx = 2k = 500$ N.m olduğundan k = 250 N/m

ve t = -250x bulunur. 7.11 denklemi iki defa integre edilerek,

$G\varnothing = 125\,x^3/3 + A\,x + B$ bulunur. Sınır şartlarından x=0 için $d\varnothing/dx=0$ ve A=0 olur. x=0 için $\varnothing=0$ veya B=0 olur.

$G\varnothing = 125\,x^3/3$ yazılabilir. J=61.36 cm^4 olduğundan,
$\varnothing_{AB} = 0.0068$ rad = 0.39 derece bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7.4. Şekil Değiştirme Enerjisi

Sadece burulma momentine maruz yani tam kayma halindeki daire kesitli bir elemanda şekil değiştirme enerjisi,

$$U = \frac{1}{2}\int_V \tau\,\gamma\,dV \quad \text{veya} \quad U = \frac{1}{2}\int_V \tau^2\,dV/G \qquad 7.12$$

olur. Kayma gerilmesi yerine karşılığı yazılırsa,

$$U = \int \frac{T^2 dx}{2GJ} \qquad 7.15$$

bulunur.

7.5. Lineer ve Elastik Olmayan Davranış

Mükemmel elastoplastik malzemelerde kayma akma mukavemeti aşılmadıkça yukarda türetilen denklemler geçerli olarak kalır (Şekil 7.6a). Azami kayma gerilmesi akma mukavemetine ulaşıncaya kadar lineer gerilme-uzama ilişkisi geçerli olur. İlk akmanın olduğu tork,

$$T_y = \tau_y\,J/r \qquad 7.16$$

olur. Döndürme momenti daha çok artarsa, ideal elastoplastik davranış ve lineer şekil değiştirme için,

$$T = \tau_y\,J/\rho + \int_\rho^r \tau_y\,2\pi\,\rho\,d\rho\,\rho$$

veya

$$T = T_{elastik} + T_{plastik} = T_{elastik} + 2\pi\frac{r^3 - \rho^3}{3}\tau_y \qquad 7.17$$

bulunur.

Milin dönmesi, elastik çekirdeğinin dönmesiyle belirlenir:

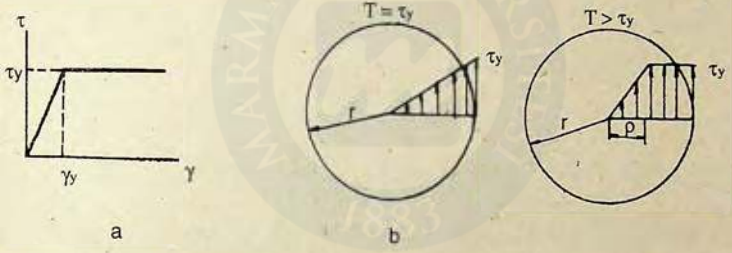
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{d\emptyset}{dx} = \frac{T_{elastik}}{GJ} \qquad 7.18$$

Şekil değiştirmenin azami değerini hesaplamak için aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$\gamma_{az} = r\, d\emptyset / dx = r\ \gamma_y / \rho \qquad 7.19$$

Eğer $\rho = r/2$ ise $\gamma_{az} = 2\,\gamma_y$ bulunur.



Şekil 7.6

Tam plastik akmada elastik çekirdek artık kalmaz ve aşağıdaki bağıntı yazılabilir:

$$T_p = 2\pi\, r^3\, \tau_y / 3 \qquad 7.20$$

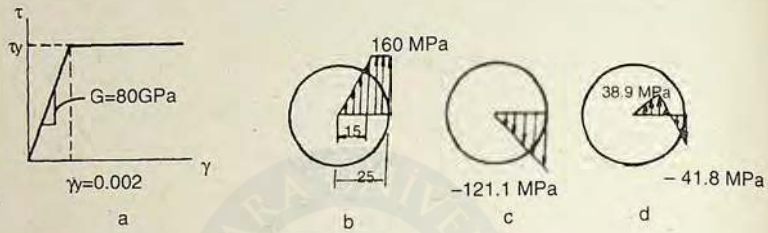
Denklem 7.16 ve atalet momenti kullanılarak tam plastik akma torkunun ilk akmadaki torka oranının, $T_p/T_y = 1.333$ olduğu görülebilir. Teorik olarak tam plastik akmada 7.19 denklemine göre azami kayma şekil değiştirmesi sonsuz olur.

ÖRNEK 7.4. Çapı 50 mm ve boyu 2000 mm olan bir mil burulma momentine maruzdur. Gerilme–şekil değiştirme diyagramı Şekil 7.7a daki gibidir.

a. Milin dış yüzeyinden itibaren 10 mm derinliğe kadar akma olması için gerekli torku tayin ediniz.

b. Bu tork uygulandığındaki dönme ve azami kayma gerilmesini bulunuz.

c. Milin yükünün kaldırılması durumunda kalıcı gerilmeleri ve dönme açısını tayin edeniz.



Şekil 7.7

Çözüm:

a. $T = T_e + 2\pi \frac{r^3 - \rho^3}{3}$ denklemindeρ=15 mm yazılır. $J_e = 5.301$ cm^4

$T_e = \frac{\tau_y J_e}{\rho} = 848.2$ Nm, $T_p = 4105$ Nm ve T = 4953.2 Nm bulunur.

b. $\theta = TL/(GJ) = 0.267$ rad, $\gamma_{az} = \frac{25}{15} 2*10^{-3} = 0.00333$ rad olur.

c. Yükün boşaltılması durumunda gerilmedeki azami azalma,

$\tau_{az} = \frac{-Tr}{J} = -201.8$ MPa olur.

ρ = 15 mm için $\tau = \frac{15}{25}(-201.8) = 121.1$ MPa olur.

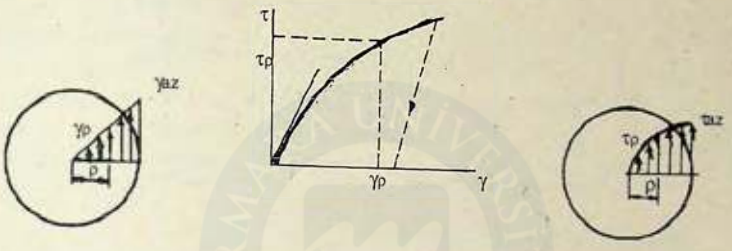
Nihai gerilmeler Şekil 7.7d deki gibidir. Kalıcı dönmeyi bulmak için önce t= –4953.2 Nm yazılarak elastik geriye dönüş = – 0.202 rad olarak hesaplanır. Kalıcı dönme 0.267–0.202=0.065 rad olur.

Mükemmel elastoplastik olmayan diyagramlar için kayma şekil değiştirmesi dağılımı eğer bunlar merkezden mesafe ile lineer değişiyorsa şekil değiştirmelerden türetilebilir (Şekil 7.8). Gerilme belirlendikten sonra toplam tork,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$T = \int_0^r \tau_\rho \, 2\pi\rho \, d\rho \, \rho \qquad 7.21$$

denkleminden bulunabilir.

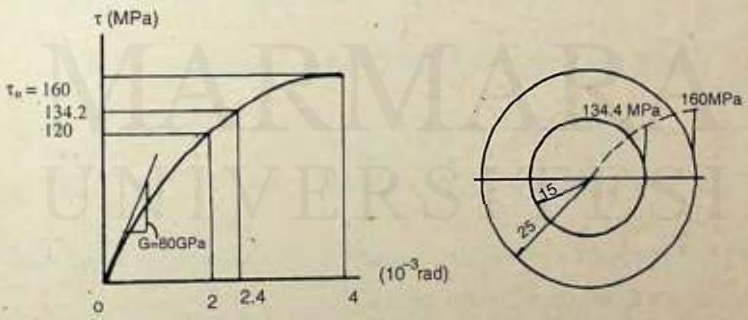


Şekil 7.8

ÖRNEK 7.5. Şekil 7.9 daki içi boş mil için gerilme–şekil değiştirme bağıntısı $\tau = 80\,\gamma - 10\,000\,\gamma^2$ [GPa] ve $\gamma_{az}=0.004$ verilmektedir.

a. Kopma momenti kapasitesi T_u ve buna tekabül eden gerilme dağılımı,

b. $0.5\,T_u$ için gerilme dağılımı ve dönme ne olur?



Şekil 7.9

Çözüm:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\gamma_\rho = \frac{\rho}{0.025}\gamma_{az} = 0.16\rho \text{ ve } \tau_\rho = 12800\rho - 256000\rho^2 [\text{MPa}]$$

bulunur.

7.21 denklemi kullanılarak,

$$T_u = \int_{0.015}^{0.025} 2\pi\rho^2(12800\rho - 256000\rho^2)\,d\rho \text{ veya } 3938.8 \text{ Nm}$$

bulunur.

Yarıçapı 15 mm olduğundaki kayma şekil değiştirmesi,

$\gamma_{1.5} = \frac{15}{25} 0.004 = 0.0024$ rad olur.

$\tau_{1.5} = 134$ MPa bulunur. $\tau_{2.5} = 160$ MPa olur.
T=3938.8/2=1969.4 Nm olduğundan,

$$1969.4 = 10^6 \int_{0.0015}^{0.0025} 2\pi(80\gamma - 10\,000\gamma^2)\rho^2\,d\rho\,10^3 \text{ bulunur.}$$

Kayma şekil değiştirmesi merkezden ρ mesafede $\gamma_\rho = \frac{\rho\,\gamma_0}{0.0025}$ olur.

Buradaki γ_0 dış taraftaki şekil değiştirmedir. Böylece,

$$\tau = \frac{80000\,\rho}{0.025}\gamma_0 - 10^7 \frac{\rho^2}{2.5^2 0.0001}\gamma_0^2 \text{ veya}$$

$$1969=2\,\pi(32*8.5\,\gamma_0 - 1.6*1000*4.0833\quad \gamma_0^2)10^3 \text{ bulunur.}$$

Bu ikinci derece denklemin çözümüyle $\gamma_0 = 0.001186$ rad elde edilir.

0.5 T_u için dış taraftaki gerilme,

$\tau_0 = 8000 * 0.001186 - 10^7 * 1.186^2 * 10^{-6} = 80.8$ MPa olur.

İç kısımdaki şekil değiştirme 0.001186 *15/25=0.000712 ve gerilme $\tau_i = 51.9$ MPa olarak bulunur.

Dönme 0.5 T_u için aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d\emptyset}{dx} = \frac{\gamma_0}{r} = 0.047 \text{ rad/m}$$

7.6. İçi Dolu Dikdörtgen Kesitli Elemanlar

Daire kesitli elemanlardaki temel kabuller diğer kesit şekillerinde geçerli olmamaktadır. Kayma şekil değiştirmeleri merkezden mesafe ile artık lineer değişmez ve genellikle çarpılma söz konusu olur. Çarpılma kısıtları yoksa kayma gerilmelerinin dağılımı dikdörtgen kesitli bir elemanda Şekil 7.10 daki gibi olur. Gerilme – köşeler hariç – kenarlar boyunca hemen hemen sabittir ve azami değeri uzun kenarın ortasında olur:

$$\tau_{az} = \frac{T\,n\,t}{J} \quad \text{ve} \quad J = \frac{b\,t^3}{3} - 2\,m\,t^4 \qquad 7.22$$

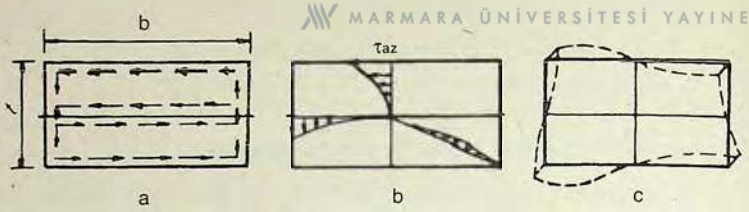
Buradaki m ve n sabitleri b/t oranına bağlıdır (Cetvel 7.1). Bu oran 4 değerine yaklaşırken τ_{az} ve J aşağıdaki gibi olur:

$$\tau_{az} = \frac{T\,t}{J} \quad \text{ve} \quad J \Rightarrow \frac{bt^3}{3} - 0.21\,t^4 \qquad 7.23$$

Cetvel 7.1 Burulmaya çalışan dikdörtgen kesitli elemanlarda m, n, ve p sabitleri.

b/t	m	n	p
1.0	0.1928	0.6753	0.141
1.2	0.2006	0.7578	0.165
1.4	0.2050	0.8222	0.187
1.6	0.2074	0.8695	0.204
1.8	0.2086	0.9044	0.218
2.0	0.2093	0.9300	0.229
2.5	0.2099	0.9681	0.250
3.0	0.2101	0.9855	0.263
4.0	0.2101	0.9970	0.281
∞	0.2101	1.0000	0.333

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 7.10. Dikdörtgen kesitli bir elemanda kayma gerilmelerinin yönü (a), dağılımı (b) ve çarpılma (c).

İnce dikdörtgen kesit için $J=bt^3/3$ olur. J ve T sabit olduğunda çubuğun birim dönme açısı,

$$\frac{d\varnothing}{dx} = \frac{T}{Gpbt} \qquad 7.24$$

olur.

ÖRNEK 7.6. 10 mm x 10 mm kesitinde 100 mm boyunda bir çelik çubuk 100 Nm torkuna maruz kalmaktadır. G=80 GPa alarak azami kayma gerilmesi ile iki uç arasındaki dönme açısını hesaplayınız.

Çözüm: Denklem 7.22 ve 7.24 kullanılarak,

$\tau_{az} = T\ n\ t\ /J$ veya $\tau_{az} = 480.5$ MPa azami kayma gerilmesi ve $\varnothing_{az} = T\ L\ /\ (\ G\ p\ b\ t^3)$ veya $\varnothing_{az} = 0.08865$ rad $= 5.1^{\circ}$ azami dönme açısı olarak bulunur.

7.7. İnce Cidarlı Açık Kesitler

Açık kesitler (Şekil 7.11) bir seri dikdörtgen eleman gibi davranır ve,

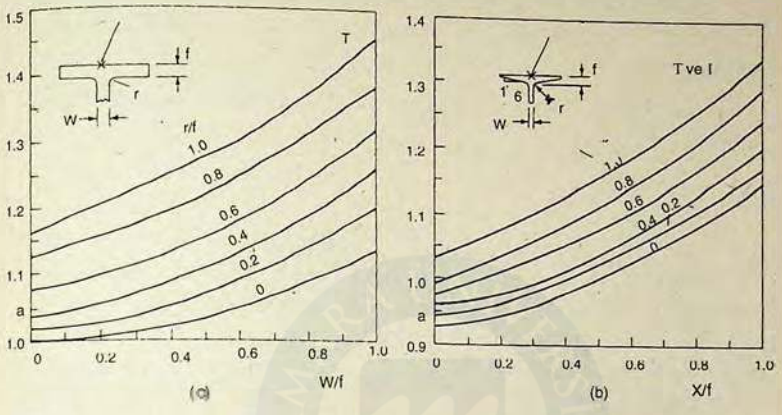
$$J = \sum_i \frac{b_i\ t_i^3}{3} \qquad 7.25$$

yazılabilir. Açık kesitte azami kayma gerilmesi yaklaşık olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

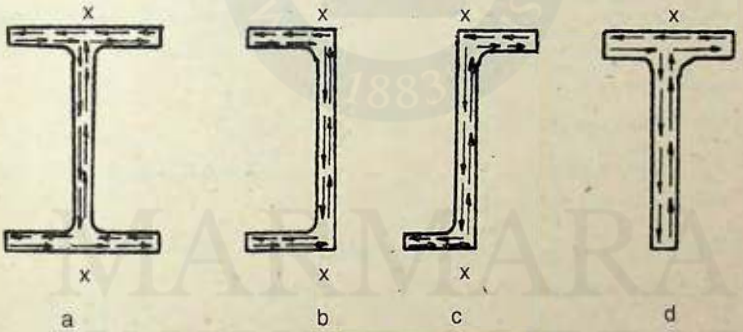
$$\tau_{az} = \frac{T\ a\ f}{J} \qquad 7.26$$

Denklemdeki f flanş kalınlığı ve a ise w/f ve r/f oranlarına bağlı gerilme katsayısıdır (Şekil 7.12 –13). Burada w perde genişliğini ve r yuvarlatma yarıçapını göstermektedir.

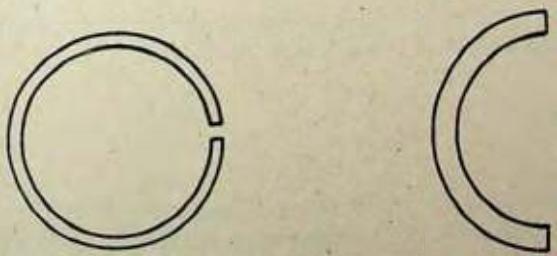
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 7.12



Şekil 7.13 Bazı açık kesitler. x azami kayma gerilmesinin yerini göstermektedir.



Şekil 7.14

Şekil 7.14 de gösterilen diğer açık kesit çeşitleri için 7.22 den 7.25 e kadar olan denklemler t kalınlık ve b merkez hattı uzunluğu alınarak kullanılabilir.

İnce kesitler için p=1/3 alınabilir ve 7.24 denklemi yaklaşık olarak aşağıdaki gibi olur:

$$\frac{d\emptyset}{dx} = \frac{T}{GJ} \qquad 7.27$$

ÖRNEK 7.7. Kalınlığı 10 mm olan bir saç levha iç çapı 190 mm olacak bir boru şekline getirilmiştir. Levhanın uçları arasında çok küçük bir boşluk bulunmaktadır. Bu kesit 1000 Nm değerinde bir burulma momentine maruz bırakılmaktadır. G=80 GPa alarak kayma gerilmesini ve birim dönme açısını hesaplayınız.

Çözüm: Denklem 7.25 den burulma sabiti, orta hat uzunluğu b=π200 mm ve t= 10 mm yazılarak J=20.94 cm^4 bulunur. Denklem 7.23 kullanılarak $\tau_{az}=Tt/J=47.75$ MPa azami kayma gerilmesi bulunur. Denklem 7.27 yardımıyla dØ/dx=T/(GJ)=0.06 rad/m birim dönme açısı elde edilir.

7.8. İnce Cidarlı Kapalı Kesitler

Şekil 7.15 teki gibi ince cidarlı bir kapalı kesitten alınan ABCD elemanının denge durumunu inceleyelim. Burada,

$$F_{CB}=F_{AD} \text{ ve } F_{AB}=F_{CD} \text{ veya } F_{CB}=\tau_B t_2 dx \text{ ve } F_{AD}=\tau_A t_1 dx \qquad 7.28$$

yazılabilir. Böylece $\tau_B\tau_2=\tau_A t_1$ veya genel olarak,

$$q = \tau\ t = \text{sabit} \qquad 7.29$$

bulunur. Buradaki q kayma akışı olarak adlandırılır. Bir ds uzunluğu için kuvvet dF=q ds olur.

Keyfi bir O noktasına göre dF kuvetinin momenti r dF dir. Burada r kuvvete dik mesafedir. Kesitin ilettiği toplam T torku,

$$T = \oint r\rho\, ds$$

olur. Buradaki integrasyon, çevrenin orta hattı boyunca yapılacaktır. Diferansiyel üçgenin alanı dA=r ds/2 olduğundan yukardaki denklemden,

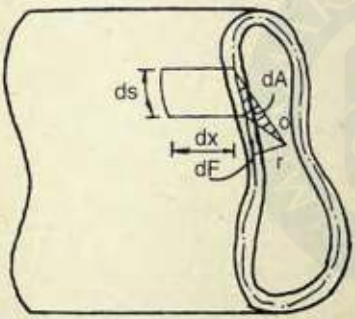
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

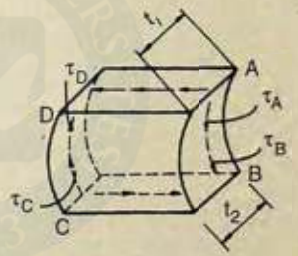
$$T = 2 A q \qquad 7.31$$

bulunur. Burada A orta hatla çevrili alan olmaktadır. Böylece denklem 7.29 dan,

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2At} \qquad 7.32$$

herhangi bir noktadaki kayma gerilmesi olarak bulunur.





Şekil 7.15

Birim dönme açısını hesaplamak için denklem 7.12 den,

$$U = \frac{1}{2}\int_V \tau^2 \, dV/G = \oint \frac{\tau^2 t \, ds}{2G} = \frac{T^2}{8 A^2 G} \oint \frac{ds}{t} \qquad 7.33$$

olarak kayma şekil değiştirmesi bulunur. Birim boy için T torkunun yaptığı dış iş,

$$W_e = \frac{1}{2} T \frac{d\Phi}{dx} \qquad 7.34$$

olur. $W_e = U$ yazılarak,

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{T}{4A^2G} \oint \frac{ds}{t} \qquad 7.35$$

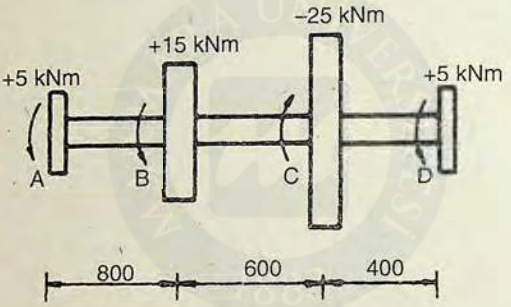
bulunur.

PROBLEMLER

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7.1. İç çapı 50 mm, dış çapı 70 mm olan bir mile kayma gerilmesi 40 MPa değerini geçmeyecek şekilde uygulanabilecek azami tork nedir? Mildeki en küçük kayma gerilmesi ne olur?

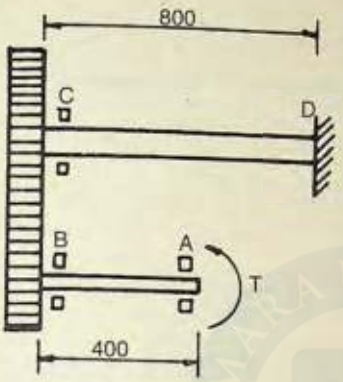
7.2. Şekil 7.16 daki BC milinin iç ve dış çapları sırasıyla 100 mm ve 120 mm dir. AB ve CD milleri içi dolu olup d çapındadır. a. BC milindeki kayma gerilmesinin azami ve asgari değerlerini hesaplayınız. b. Kayma emniyet gerilmesini 40 MPa alarak d çapını bulunuz.



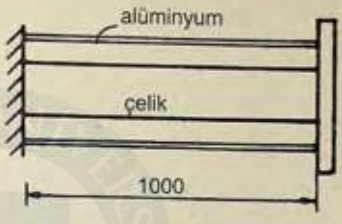
Şekil 7.16

7.3. Bil milin ön tasarımı için iç ve dış çaplar 100 mm ve 120 mm, milin boyu 2000 mm alınmaktadır. Malzemenin kayma emniyet gerilmesi 75 MPa ise milin iletebileceği azami T torku ne olur? Mil aynı ağırlıkta fakat içi dolu yapılsaydı azami T torku ne olurdu? Mil aynı ağırlıkta fakat 200 mm dış çapında olsaydı azami T torku ne olurdu?

7.4. İki mil kayma emniyet gerilmesi 40 MPa ve G=80 GPa olan malzemeden imal edilmiştir (Şekil 7.17). AB milinin çapı 20 mm, uzunluğu 400 mm ve CD milinin çapı 30 mm, uzunluğu 800 mm dir. B ve C dişli çarklarının taksimat dairelerinin çapları sırasıyla 30 mm ve 60 mm olduğuna göre A ucuna uygulanabilecek en büyük T torkunu ve A ucunun dönmesini hesaplayınız.



Şekil 7.17



Şekil 7.18

7.5. Cidar kalınlığı 10 mm, dış çapı 80 mm olan alüminyum bir boru ile çapı 50 mm olan çelik bir mil bir ucundan ankastre mesnetli olup diğer ucundan rijit bir diske bağlıdır (Şekil 7.18). İlk halde gerilme olmadığına göre diske uygulanabilecek T torku en çok ne olabilir? Çelik ve alüminyum için kayma emniyet gerilmesi sırasıyla 50 MPa ve 25 MPa dır. Kayma elastiklik modülü de çelikte 80 GPa ve alüminyumda 27 GPa olarak verilmektedir.

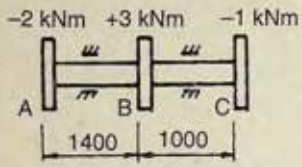
7.6. Bir petrol kuyusu 1500 m derinlikte açılmakta iken dış çapı 200 mm olan çelik delme borusunun, matkap ucunun dönmeye başlamadan önce 2 tam dönüş yaptığı gözlenmiştir. G=80 GPa kullanarak boruda burulmanın sebep olduğu en büyük kayma gerilmesini bulunuz.

7.7. Üç kasnak taşıyan çelik bir milin A kasnağının B ve C kasnaklarına göre dönme açılarını AB ve BC deki mil çaplarını sırasıyla 50 mm ve 40 mm alarak hesaplayınız (Şekil 7. 19). G=80 GPa dır.

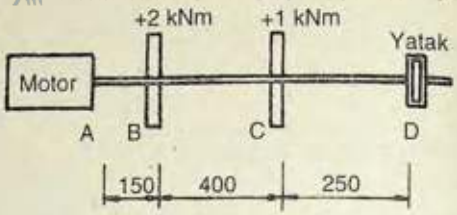
7.8. Şekil 7.20 deki elektrik motoru 3 kNm torkunu ABCD çelik miline sabit hızda uygulamaktadır. Milin çapını AB de 60 mm, BC ve CD de 50 mm, kayma elastiklik modülünü 80 GPa alarak A ve D arasında milde oluşan dönmeyi bulunuz.

7.9. İki çelik mil Şekil 7.21 deki gibi 2 dişli çarka bağlanmıştır. A daki tork 1000 Nm olduğunda A ucunun dönme açısını hesaplayınız. G=80 GPa dır.

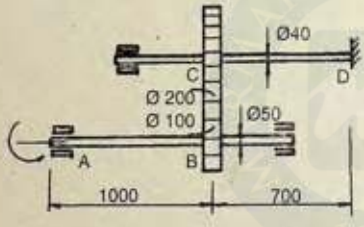
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



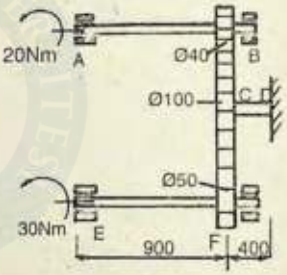
Şekil 7.19



Şekil 7.20



Şekil 7.21



Şekil 7.22

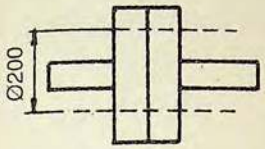
7.10. Şekil 7.22 deki miller 20 mm çapındadır. A ve E uçlarının dönme açılarını hesaplayınız. G=27 GPa.

7.11. Gücü 100 kW olan bir motor miline bağlı 100 mm çapındaki pinyon 1453 d/d ile dönmektedir. Pinyonla eş çalışan 200 mm çapındaki bir dişli çarka bağlı milin çapını kayma emniyet gerilmesini 40 MPa alarak bulunuz. Dişli çarkın çapı 400 mm olsaydı çapı ne olurdu?

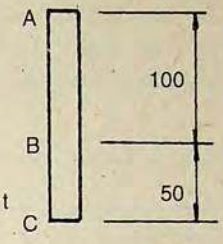
7.12. Çapı 50 mm ve boyu 1000 mm olan bir milin kayma emniyet gerilmesi 40 MPa ve dönme açısı 0.3 derece değerlerini geçmemesi için uygulanacak torkun en büyük değeri ne olabilir?

7.13. Şekil 7.23 deki kaplin 50 kW gücünü 120 d/d ile bir milden diğerine iletmektedir. Flanşlar üzerine 6 adet M20 cıvatası 200 mm çaplı çevre boyunca yerleştirilmiştir. a. Cıvatalardaki kesme kuvveti ne olur? b. Milin kayma emniyet gerilmesi 40 MPa ise mil çapı ne olmalıdır?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



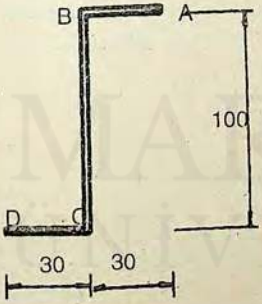
Şekil 7.23



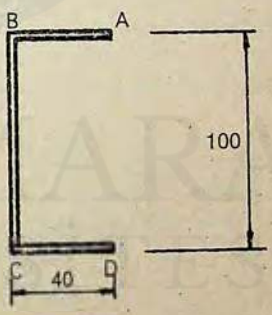
Şekil 7.24

7.14. Bir matkap ucu dönerken ucu boyunca sabit t Nm/m sürtünme torkuna maruz kalmaktadır (Şekil 7.24). Azami kayma gerilmesi 75 MPa, çapı 10 mm ve kayma elastiklik modülü 80 GPa olarak verilmektedir. T torkunun azami değeri ile dönme açısını hesaplayınız.

7.15. Şekil 7.25 deki kesite 10 Nm torku uygulandığında ortaya çıkan azami kayma gerilmesini ve birim dönme açısını hesaplayınız. 30 mm lik kısımlar 4 mm ve 100 mm lik kısım 2 mm kalınlığındadır. G=80 GPa dır. Ek 2 ye bakınız.



Şekil 7.25

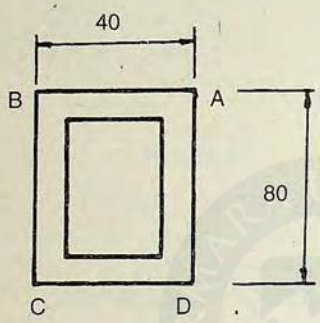


Şekil 7.26

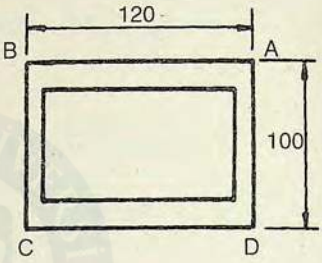
7.16. Şekil 7.26 daki kesite 10 Nm torku uygulanmaktadır. Azami kayma gerilmesi ile birim dönme açısını hesaplayınız. 40 mm lik kısımlar 4 mm ve 100 mm lik kısım 2 mm kalınlığındadır. G=80 GPa dır.

7.17. Şekil 7.27 de ekstrüzyonla elde edilen alüminyum bir çubuğun kesiti gösterilmiştir. Cidar kalınlığını 5 mm ve torku 2 kNm alarak azami kayma gerilmesini ve birim dönme açısını bulunuz. Elastiklik modülü 70 GPa ve Poisson oranı 0.35 dir.

7.18. Şekil 7.28 de ekstrüzyonla elde edilen bir çubuğun kesiti gösterilmiştir. Kesitin üst ve alt kısımlarının cidar kalınlığı 6 mm ve yan kısımlarının cidar kalınığı 4 mm, uygulanan tork 2500 Nm ve G=27 GPa dır. Azami kayma gerilmesi ile birim dönme açısını hesaplayınız.

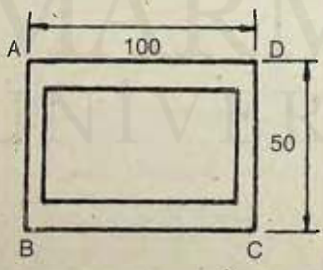


Şekil 7.27



Şekil 7.28

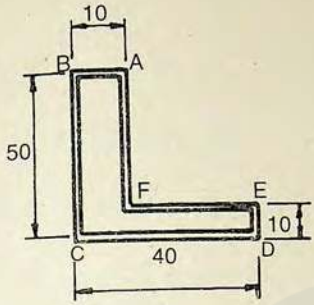
7.19. Dikdörtgen kesitli bir alüminyum boru 4 mm cidar kalınlığındadır (Şekil 7.29). 1000 Nm lik bir torka maruz kalan bu borunun cidarlarındaki kayma gerilmelerini hesaplayınız. Eğer imalat hatasından dolayı üst ve sol kenarların cidar kalınlıkları 3 mm ve alt ve sağ kenarlarınki 5 mm olsaydı kayma gerilmeleri ne olurdu?



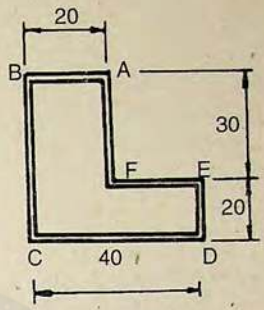
Şekil 7.29

7.20. Şekil 7.30 da 1 mm kalınlığındaki saç levhadan yapılan profilde kayma gerilmesinin 2 MPa değerini geçmemesi için elemana uygulanacak tork en çok ne olabilir?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



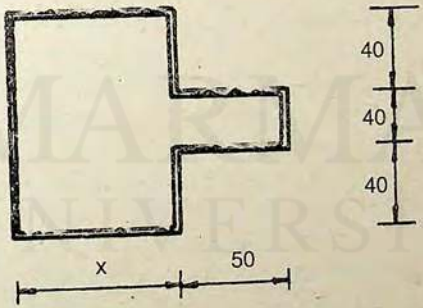
Şekil 7.30



Şekil 7.31

7.21. Şekil 7.31 de 1 mm kalınlığındaki saç levhadan yapılan profilde kayma gerilmesinin 2 MPa değerini geçmemesi için elemana uygulanacak tork en çok ne olabilir?

7.22. Şekil 7.32 de kesiti verilen eleman 3 mm kalınlıktaki saçtan imal edilmiştir. Kayma gerilmesi 3.5 MPa değerini geçmeyecek şekilde x mesafesi en az ne olabilir? Uygulanan tork 300 Nm dir.



Şekil 7.32

7.23. İki ince cidarlı boru, kalınlığı t olan saçtan r yarıçapında kıvrılarak imal edilmektedir. Borulardan biri ekseni boyunca kaynak edilirken diğeri henüz kaynak edilmeden her iki boru da eşit T burulma momentlerine maruz bırakılmaktadır. Kaynaksız borudaki kayma gerilmesinin kaynaklı borudakine oranını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8. KİRİŞLER

8.1 Giriş

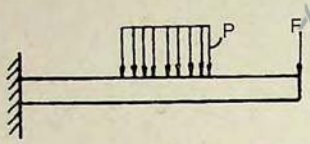
Kirişler tam eğilmeye çalıştıkları gibi kesme kuvveti, eksenel kuvvet ve burulma momenti kombinasyonuna da maruz kalabilirler.

Tam eğilmede elemana etki eden dış yük bir momentten ibarettir. Kirişin eksenine dik bir dış kuvvet bulunduğunda kesme kuvveti ve eğilme momenti ortaya çıkar. Kirişin ekseni doğru şeklinde değilse eğri eksenli kiriş söz konusu olur. Kiriş farklı malzemelerden imal edilmişse kompozit kiriş adını alır. Konsol kiriş, basit mesnetli kiriş, çıkmalı kriş, mütemadi kiriş, iki ucu ankastre kiriş ve bir ucu ankastre diğer ucu basit mesnetli kiriş sınıflaması mesnet şekillerine göre yapılmaktadır (Şekil 8.1).

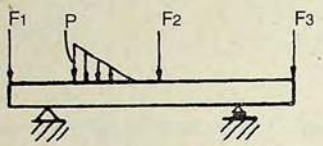
8.2 Temel Kabuller

Sabit kesitli, düz eksenli kirişlere uygulanan eğilme momentinin simetri düzlemi içinde kaldığı kabul edilir (Şekil 8.2a). Kirişin boyuna eksenine dik düzlemlerin eğilme momenti uygulandığında düzlem ve dik kaldığı kabulü önemlidir. Böylece AC ve BD düzlemleri birbirine göre dönebilir fakat eğri biçimini alan boyuna eksene dik kalır (Şekil 8.2b). Boyuna ε_x şekil değiştirmeleri kirişin yüksekliği boyunca lineer değişir, CD de en küçük (negatif) ve AB de en büyük (pozitif) değeri alır (Şekil 8.2c). Şekil değiştirme EF liflerinde sıfır olur ve tarafsız düzlemden söz edilir. Tarafsız düzlemle düşey eğilme düzleminin arakesitine tarafsız eksen adı verilir. M momentinin etkisiyle xy düzleminde sadece normal gerilmeler ortaya çıkar.

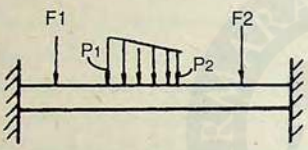
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



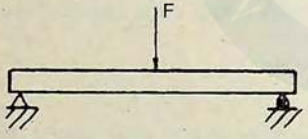
Konsol kiriş



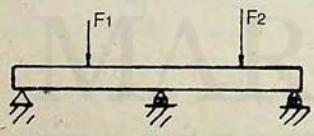
Çıkmalı Kiriş



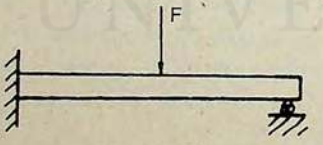
İki ucu ankastre kiriş



Basit mesnetli kiriş



Mütemadi kiriş

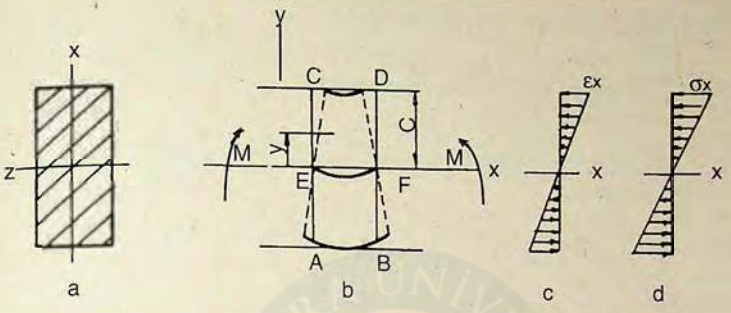


Bir ucu basit mesnetli konsol kiriş

Şekil 8.1

y ve z doğrultusunda $-\nu\,\sigma_x/E$ gerilmeleri meydana gelir. Bu etki sebebiyle tarafsız düzlem iki yönde eğilir fakat sadece xy düzleminde eğildiği ve z yönünde düzlem kaldığı kabul edilmektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.2

Klasik kiriş teorisinin ikinci temel kabulü, kiriş malzemesinin lineer elastik davranmasıdır. Yani gerilmeler şekil değiştirmelerle doğru orantılıdır (Şekil 8.2d). Tam eğilme için yapılan bu temel kabuller eğilme ile birlikte kesme kuvvetinin de bulunduğu hallerde uygun düşmez. Bununla birlikte kirişlerde kayma şekil değiştirmeleri eğilmeye yol açanlar yanında ihmal edilebilir. Çok yüksek, çok kısa kirişlerde büyük kesme kuvveti uygulanması gibi istisnai hallerde, kayma şekil değiştirmeleri önemli rol oynar.

8.3 Elastik Eğilme

Normal gerilmeler lineer değiştiğinden,

$$\sigma_x = \frac{y}{c}\,\sigma_m \qquad 8.1$$

yazılabilir. Tarafsız eksen ile incelenen lif ve en dış lif arasındaki mesafeler sırasıyla y ve c dir. En dış lifteki gerilme σ_m olmaktadır. Şekildeki gibi bir moment uygulandığında denge şartından dolayı x yönünde uygulanan kuvvetlerin toplamı sıfır olur ve böylece,

$$P = \int_A \sigma_x\, dA = 0 \text{ veya } \frac{\sigma_m}{c}\int_A y\, dA = 0 \qquad 8.2$$

bulunur. Buradan $\int_A y\, dA = 0$ yazılabilir. Buna göre tarafsız eksenle

kesitin sentroidal ekseni çakışmaktadır. Yatay kuvvetlerin dengesine ilaveten moment dengesi de sağlanmalıdır:

$$M_z = -\int_A \frac{y\,\sigma_m}{c}\,dA\,y = -\frac{\sigma_m}{c}\int_A y^2 dA \qquad 8.3$$

En sağdaki integral kesitin z eksenine göre atalet momenti olarak I ile gösterilirse,

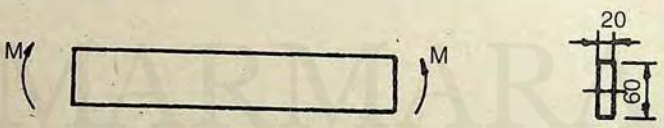
$$\sigma_m = -\frac{M\,c}{I} \qquad 8.4$$

bulunur. Kirişin iç kısmındaki gerilme için c=y yazılabilir. Mukavemet momenti S=I/c, tarifi kullanılır ve çekme veya basma durumuna göre işaretin değiştiği hatırda tutulursa,

$$\sigma_m = M/S \qquad 8.5$$

olur. Mukavemet momenti bulunurken tarafsız eksenden en üst veya en alt life olan mesafe gözönüne alınır.

ÖRNEK 8.1. Şekil 3'teki kesiti 20 mm x 60 mm olan kirişe 3 kNm momenti uygulanmaktadır. Eğilme gerilmelerini bulunuz.



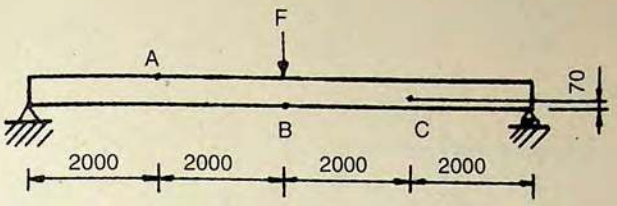
Şekil 8.3

Çözüm: Tarafsız eksen dikdörtgen kesitin ortasından geçer ve c=30 mm olur. Tarafsız eksene göre atalet momenti $I=bh^3/12=36\ cm^4$ bulunur.

$\sigma = Mc/I = 250$ MPa elde edilir. Kirişin üst kısmında negatif alt kısmında ise pozitif olacaktır.

ÖRNEK 8.2. Şekil 8.4 deki ahşap kirişin üstündeki A, altındaki B ve alttan 70 mm yukardaki C noktalarında ortaya çıkan gerilmeleri tayin ediniz. Kirişin genişliği 150 mm, yüksekliği 300 mm ve F=10 kN dur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.4

Çözüm: A ve C deki kesitlerde momentler 10 kNm ve B deki kesitte moment 20 kNm dir. Kesitin mukavemet momenti $S=bh^2/6$ olduğundan, $\sigma = M/S$ denklemi kullanılarak;

A da –4.44 MPa (basma), B de 8.89 MPa (çekme) ve C de 2.37 MPa (çekme) gerilmeleri bulunur

Eğilme momentinin simetri düzleminde tesir etmesi durumunda elde edilen $\sigma=M/S$ formülü momentlerin asal düzlem içinde etki etmesi halinde de geçerlidir. Böyle düzlemler kiriş kesitinin asal eksenlerinden geçer. Her kesit böyle iki eksene sahiptir ve bu eksenler daima birbirine diktir. Bu eksenlere göre atalet momentleri maksimum ve minimumken çarpım atalet momenti sıfıra eşittir.

İki asal eksene göre eğilme için boyuna gerilme aşağıdaki gibi verilmektedir:

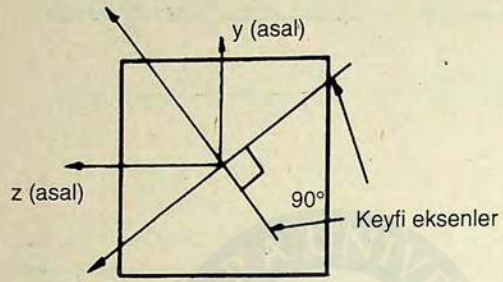
$$\sigma_X = -\frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y} \qquad 8.6$$

8.4 Keyfi Eksenlere Göre Eğilme

Asal eksen olmayan keyfi seçilmiş eksenlere göre eğilmede yukardaki denklem, moment asal bileşenlerine ayrılarak kullanılabilir veya çarpım atalet momentlerinin yer alacağı bir formülden faydalanılabilir. Böyle eğilme hallerine simetrik olmayan eğilme veya eğik eğilme adı verilir. Keyfi iki eksene göre eğilme için (Şekil 8.5) aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\sigma_x = -\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}} z \qquad 8.7$$

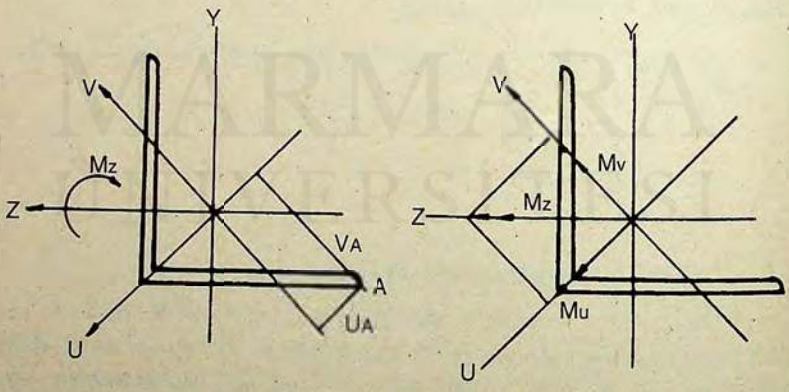
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.5

Asal eksenlere göre eğilmede çarpım atalet momenti sıfır olduğundan bu denklem 8.6 denklemine dönüşür.

ÖRNEK 8.3. Şekil 8.6 daki köşebent M momentine maruz bulunmaktadır. A noktasındaki gerilmeyi bulunuz.



Şekil 8.6

Çözüm: M momentinin asal eksenler boyunca bileşenleri, $M_u = M_v = M_z/\sqrt{2}$ olur. A noktasındaki gerilme,

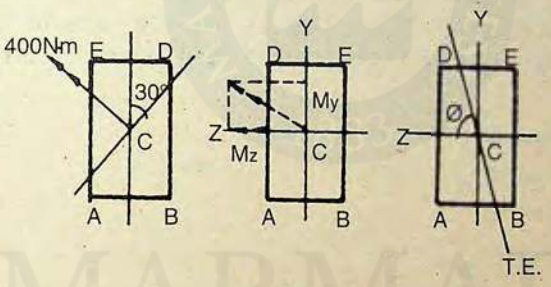
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sigma_A = -\frac{M_u V_A}{I_U} + \frac{M_v U_A}{I_V} = -\frac{M_z V_A}{\sqrt{2}\, I_U} + \frac{M_z U_A}{\sqrt{2}\, I_V} \qquad 8.8$$

olarak bulunur. A noktasının koordinatlarının negatif olduğu açıktır.

Simetrik olmayan eğilmeye eğik bir yükün sebep oduğu durumlarda önce kuvvet kesitin asal eksenlerine paralel bileşenlerine ayrılır. Sonra bu bileşenler eğilme momentlerinin tayininde kullanılır.

ÖRNEK 8.4. Ahşap bir kirişe 400 Nm eğilme momenti düşeyle 30 derece yapan bir düzlem içinde uygulanıyor (Şekil 8.7). Kirişin genişliği 40 mm ve yüksekliği 90 mm dir. Kirişte meydana gelen gerilmenin azami değerini ve tarafsız düzlemle yatay düzlem arasındaki açıyı bulunuz.



Şekil 8.7

Momentin y ve z bileşenleri sırasıyla 200 Nm ve 346. 4 Nm olur. Atalet momentleri y ve z eksenlerine göre sırasıyla 48, cm^4 ve 243 cm^4 bulunur.

AD boyunca en büyük çekme gerilmesi M_y momentinden dolayı,

$$\sigma_a = + \frac{M_y z}{I_y} = 8.34 \text{ MPa}$$

AB boyunca en büyük çekme gerilmesi M_z momentinden dolayı,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sigma_b = + \frac{M_z y}{I_z} = 6.42 \text{ MPa}$$

olur. A noktasında azami gerilme 8.34 + 6.42 = 14.76 MPa olarak bulunur. En büyük basma gerilmesi aynı şiddette ve E de ortaya çıkar.

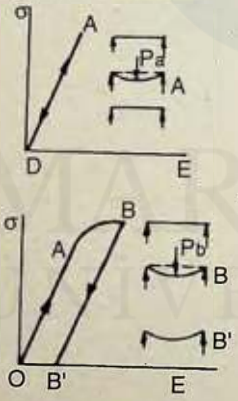
Denklem 8.6 da gerilme yerine sıfır yazılırsa tarafsız düzlem şartı yerine gelir. $M_z = M \cos \theta$ ve $M_y = M \sin \theta$ olduğundan, $\tan \varnothing = I_z \tan \theta / I_y$ bulunur.

Değerler yerine yazılırsa;

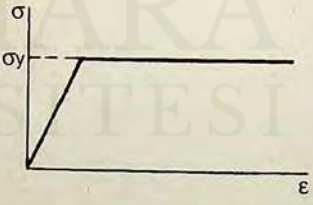
$$\tan \varnothing = \frac{243}{48} \tan 30 = 2.92 \text{ veya } \varnothing = 71^0 \text{ bulunur.}$$

8.5 Kirişlerin Elastik Olmayan Eğilmesi

Kiriş malzemesi elastik davrandığında yükün kaldırılmasıyla kiriş ilk halini alır. Eğer yük elastik olmayan davranışa sebep olmuşsa yükün kaldırılmasıyla kiriş ilk halini almaz (Şekil 8.8). Plastik analiz, mükemmel elastoplastik davranışa sahip malzemelerden (Şekil 8.9) kirişleri konu alır.

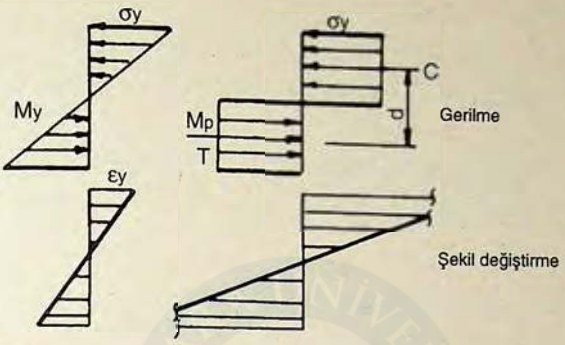


Şekil 8.8



Şekil 8.9

Bir kiriş yük altında eğilmeye başladığında akma ilk defa en dış liflerde başlar. Akmanın ilk görüldüğü momente akma momenti adı verilir. Moment artırıldığında akma iç kısımlara doğru gelişir ve kesitin tamamen akmasına kadar devam eder (Şekil 8.10). Bu noktada C basma ve T çekme iç kuvvetleri, $C = \sigma_y A_c$ ve $T = \sigma_y A_t$ olur.



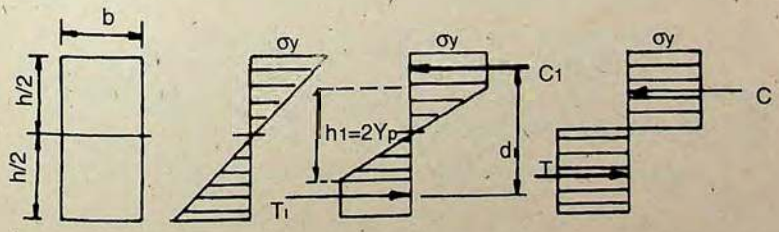
Şekil 8.10

Buradaki basma ve çekme kesitlerinin alanları yalnız eğilme momenti bulunduğunda C=T olacağından birbirine eşit olur. Kesitin tamamının aktığı momente plastik moment denir. Plastik momentin akma momentine oranına şekil katsayısı (f) adı verilir. Akmanın tamamlandığı duruma karşılık gelen mukavemet momentine plastik mukavemet momenti denir ve Z ile gösterilir. Böylece şekil katsayısı,

$$f=Z/S \qquad 8.9$$

olur.

ÖRNEK 8.5. Dikdörtgen kesitli bir kiriş pozitif bir eğilme momentine maruzdur. Kısmi plastik moment $M = 1.25\ M_y$ ise plastik bölgenin yüksekliğini ve şekil katsayısını hesaplayınız.



Şekil 8.11

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm:

$$M = M_e + M_p = (bh^2_1 / 6)\sigma_y + [(h-h_1)\, b\, \sigma_y/2]\,(h_1+h)/2$$

yazılabilir. Şekil 8.15 de köşeli parantezin içi C_1 ve yanındaki d_1 ile gösterilmiştir.

Tam plastik akmada $C=bh\sigma_y/2$ ve $d=h/2$ olduğundan,

$$M_p = Cd = bh^2\sigma_y/4$$

bulunur. $f = Z/S$,

$Z=bh^2/4$ ve $S=bh^2/6$ alınarak şekil katsayısı $f=1.5$ bulunur.

8.6 Kompozit Kirişler

Elastiklik modülü farklı malzemeler kullanılarak imal edilen kirişlere kompozit kiriş adı verilir.

Şekil 8.12 de $E_1 < E_2$ olan malzemelerden oluşan bir kompozit kiriş görülmektedir. Elastiklik modülleri oranı,

$$n = E_2 / E_1 \qquad 8.10$$

olur. Kirişin boyuna eksenine dik olan düzlem kesitler yine düzlem kalır kabulü ile şekil değiştirmeler lineer değişir. a-a kesitinde şekil değiştirmeler eşit olur:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \qquad 8.11$$

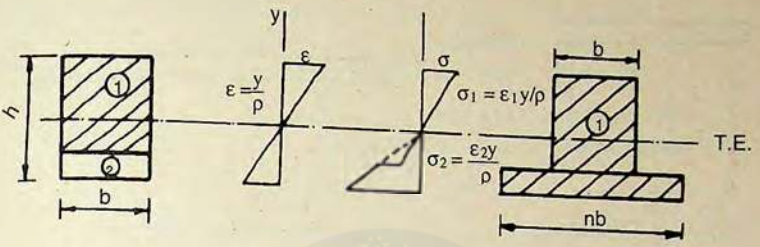
a–a kesitinde lineer elastik malzeme için,

$$\sigma_1 / E_1 = \sigma_2 / E_2 \qquad 8.12$$

yazılabilir. Denklem 8.10 dan,

$$\sigma_2 = n\,\sigma_1$$

olur. Gerilme dağılımı da şekildeki gibi olur. 2 numaralı malzemenin genişliğini n ile çarparak kesiti 1 numaralı malzemeye dönüştürmek veya benzer şekilde diğer malzemeye dönüştürmek mümkündür. Elde edilen bu kesite dönüştürülmüş kesit denir.



Şekil 8.12

Tarafsız eksen dönüştürülmüş kesitten bulunur. Kesit, 1 numaralı malzemeye dönüştürüldüğünde 2 numaralı malzemenin olduğu kısımda elastiklik modülü daha büyük olduğundan gerilme de o oranda artacaktır. Böylece 1 ve 2 numaralı malzemeler için,

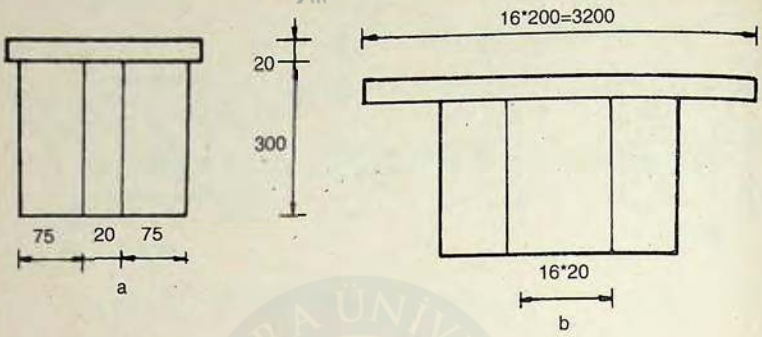
$$\sigma_1 = \frac{M\,c}{I} \quad \text{ve} \quad \sigma_1 = n\frac{M\,c}{I} \qquad 8.13$$

bulunur. Kesit 2 numaralı malzemeye dönüştürülürse benzer şekilde sonuç bulunur.

ÖRNEK 8.6. Şekil 8.13 teki T şeklindeki bir çelik kiriş meşe kerestesi ile yanlarından cıvatalarla birleştirilerek kuvvetlendirilmiştir. Kompozit kirişe uygulanan eğilme momenti xy düzleminde 100 kNm olduğuna göre ahşap ve çelikteki gerilmeleri bulunuz. Çelik ve liflere paralel meşe için alastiklik modülleri sırasıyla 200 GPa ve 12.5 GPa dır.

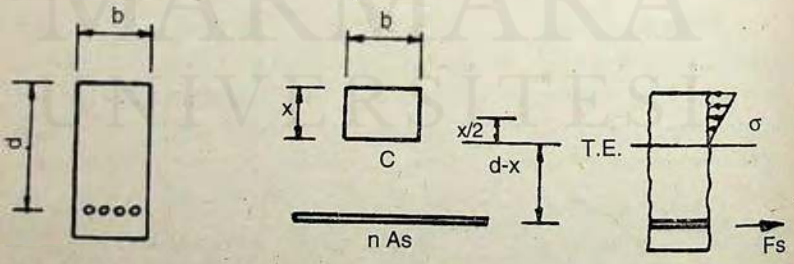
Çözüm: Kesiti ahşapa dönüştürmek için n=200/12.45=16 ile çelik malzemenin genişliği çarpılır. Tarafsız eksenin y koordinatı 50 mm bulunur. Tarafsız eksene göre atalet momenti paralel eksen teoremi yardımıyla I=219 000 cm^4 olarak bulunabilir. σ= Mc/I formülü ile ahşap için 9.13 MPa ve çelik için 16*5.479 = 87.67 MPa gerilmeleri elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.13

Kompozit kirişlere önemli bir örnek betonarme kirişlerdir. Beton tarif olarak, portlant çimentosu, iri agrega, ince agrega ve su karışımıdır. Beton çekmede zayıf ve gevrek malzeme olup çekme mukavemeti basma mukavemetinin 1/10 kadardır. Betonarmede çelik çubuklar kirişin altına yakın yerleştirilir (Şekil 8.14). Beton çekmede çok zayıf olduğundan tarafsız düzlemin altında çatlayacak ve çelik çubuklar bütün çekme yükünü taşırken beton kiriş basma yükünü taşıyacak şekilde kabul yapılır.



Şekil 8.14

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

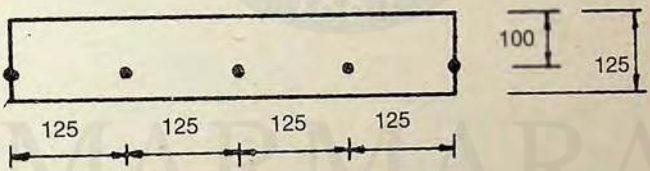
Dönüştürülmüş kirişi elde etmek için çelik çubukların kesit alanı yerine nA_s alalım. Burada n çelik ve betonun elastiklik modülleri oranıdır. Betonun yalnızca basma yükünü taşıdığı düşünüldüğünden dönüştürülmüş kesitte sadece tarafsız eksenin üstündeki alan bulunur.

Kirişin üst kısmından tarafsız eksene olan x mesafesi, tarafsız eksene göre kesitin statik momentinin sıfır olması şartı yazılarak bulunur:

$$bx\,x/2 - nA_s(d-x) = 0 \text{ veya } bx^2/2 + nA_s x - nA_s d = 0$$

İkinci dereceden bu denklem çözülerek kompozit kirişin tarafsız ekseni bulunur. Basma gerilmelerinin dağılımı ve bileşke çekme kuvveti şekilde gösterilmiştir.

ÖRNEK 8.7. Beton bir tablada (Şekil 8.15) alttan 25 mm mesafede 125 mm aralıklarla 16 mm çaplı çelik çubuklar bulunmaktadır. Her 1 m genişlik için uygulanan moment 10 kNm dir. Beton ve çelikteki gerilmeleri bulunuz. Beton ve çelik için elastiklik modülleri sırasıyla 20 GPa ve 200 GPa dır.



Şekil 8.15

Çözüm: 1 m genişlikte 8 adet çelik çubuk olduğundan çelik alanı 16.08 cm^2 olur. Basma yükünü sadece beton, çekmeyi ise çelik taşıyacağı için tarafsız eksenin üzerinde beton, altında ise çelik alanları bulunacaktır. Çelik ve betonun elastiklik modülleri oranı 10 olduğundan $nA_s = 160.8\ cm^2$ bulunur.

$100\,x^2/2 - 160.8(100-x) = 0$ veya $x = 4.287$ cm tarafsız eksenin yeri olur.

Dönüştürülmüş kesitin atalet momenti,

$I = \frac{1}{3} 100*4.287^3 + 160.8(100-4.287)^2 = 7875\ cm^4$ olur.

Betondaki gerilme = Mc/I = 5.44 MPa ve

çelikteki gerilme = nMc/I = 10*7.255 = 72.55 MPa olarak bulunur.

8.7 Yük, Kesme Kuvveti Ve Eğilme Momenti

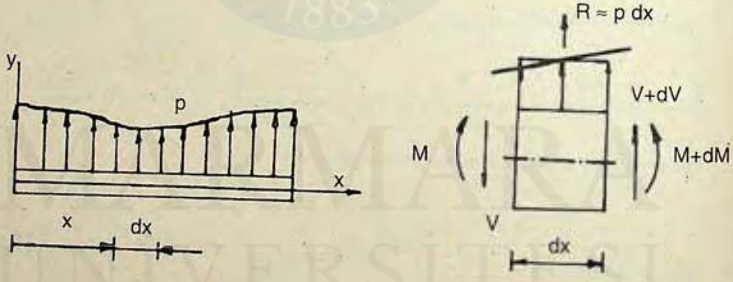
Yayılı yüke maruz bir kirişte dx uzunluğundaki bir elemana etki eden kuvvetlerin dengesinden,

$$V + dV - V + p\,dx = 0 \quad \text{veya} \quad p = -dV/dx \qquad 8.14$$

yazılabilir (Şekil 8.20). A noktasına göre momentten,
$M + dM - M + (V + dV)\,dx + p\,dx\,dx/2 = 0$ yazılır ve yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse,

$$V = -dM/dx \qquad 8.1.$$

bulunur.



Şekil 8.16

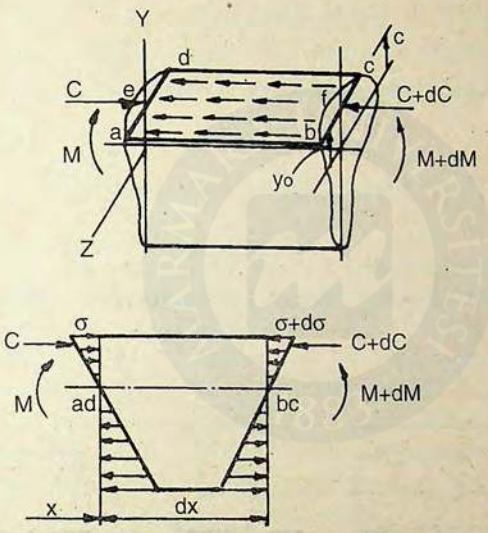
8.8 Kirişlerde Kayma Gerilmeleri

Bir kirişte düşey kesme gerilmesini bulmak için dx uzunluğunda bir elemanı inceleyelim. Elaman Şekil 8.17 de görüldüğü gibi M ve M+dM momentlerine maruzdur. Düşey kesme kuvveti V=-dM/dx dir. Momentin artmasının sonucu olarak normal gerilme σ dan σ + dσ ya değişir. Burada,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sigma = -\frac{My}{I} \quad \text{ve} \quad \sigma + d\sigma = -\frac{(M + dM)\, y}{I} \qquad 8.16$$

olmaktadır.



Şekil 8.17

Şekildeki aed ve bfc alanlarındaki basma kuvvetleri sırasıyla,

$$C = \sigma\, A_{aed} \quad \text{ve} \quad C + dC = (\sigma + d\sigma)\, A_{bfc} \qquad 8.17$$

bulunur. Tarafsız eksenin y_o kadar yukarısındaki abcd iç düzleminde etki eden net yatay kesme kuvveti,

$$dC = d\sigma\, A_{aed} = -\frac{dM\, y}{I} A_{aed}$$

olur. Birim genişlik için yatay kesme kuvvetine kayma akışı adı verilir:

$$q = \frac{dC}{dx} = -\frac{dM}{I\,dx}\, y\, A_{aed} = -\frac{dM}{I\,dx} \int_{y_o}^{c} y\, dA \qquad 8.18$$

abcd düzleminin üzerindeki kısmın statik momenti,

$$Q = \int_{y_o}^{c} y\, dA \text{ olur. } - dM/dx = V \text{ yazılırsa}$$

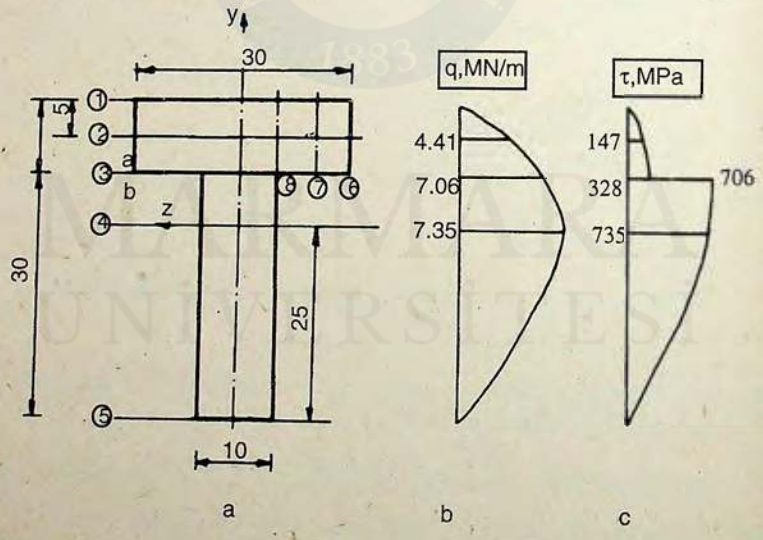
$$q = \frac{V Q}{I} \qquad 8.19$$

bulunur. Şimdi abcd yatay düzlemindeki kayma gerilmesi,

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{VQ}{It} \qquad 8.20$$

olur.

ÖRNEK 8.8. Şekil 8.18 deki T kirişinde kesme kuvveti V= 200 kN verilmektedir. 1, 2, 3 ve 4 seviyelerinde kayma akışını ve kayma gerilmesini hesaplayınız.



Şekil 8.18

Çözüm: Tarafsız eksen üst taraftan 1.5 cm de bulunur ve I=8.5 cm^4 olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1 numaralı kısımda Q=0 olduğundan kayma akışı ve kayma gerilmesi sıfırdır.

2 numaralı düzlem için,

$$q = \frac{VQ}{I} = 4.41 \text{ MN/m ve } \tau = 4.41/0.03 = 147 \text{ MPa bulunur.}$$

3 numaralı seviye için genişlik 3 cm (3a) ve 1 cm (3b) olduğundan sırasıyla 7.06 MN/m, 328 MPa ve 7.06 MN/m, 706 MPa bulunur.

4 numaralı kısım için 7.35 MN/m ve 735 MPa ve benzer şekilde 5 numaralı kısım için sıfır olur.

Dikdörtgen kesit için $\tau = \frac{3V}{2A}$ ve daire kesit için $\tau = \frac{4V}{3A}$ değerlerir azami olduğu kolayca görülebilir.

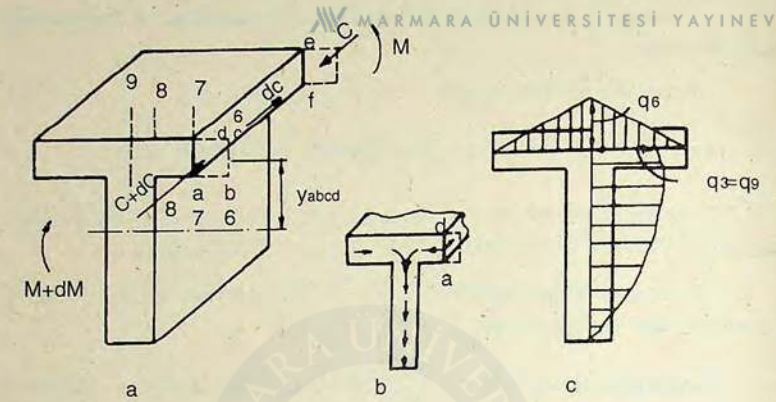
Bazı durumlarda düşey düzlemlerde kayma akışlarını hesaplamak ilginç olur. Mesela 8.19 daki kirişte 6, 7 ve 8 düşey düzlemlerinin sağında kalan kısımların statik momentleri incelenerek kayma akışları bulunabilir. Böylece $q_7 = VQ_7/I$ yazılabilir. Burada Q_7 tarafsız eksene göre abcd alanının statik momenti olur (Şekil 8.19a). Şekle göre afed alanındaki yatay kayma gerilmesi, flanştaki yatay kayma gerilmesine eşittir. Eğer kayma akışı diyagramı çizilirse $q_3 = 2\, q_9$ olduğu görülür (Şekil 8.19c). Flanşların dış tarafında yatayda sıfırdan başlar, iki kenardan flanşın ortasına doğru akar sonra düşey olarak perdenin iç tarafından Şekil 8.19b deki gibi akar. Diğer kesitler için de benzer kayma akışları geliştirilebilir (Şekil 8.20).

C, T, I ve Z profilleri için düşey kayma gerilmesi diyagramları Şekil 8.20d deki gibidir. Buradan açıkça görüldüğü gibi flanşlardaki düşey kayma gerilmeleri perdedekinden önemli ölçüde küçüktür. Pratik tasarım için bu tip kesitlerde azami kayma gerilmesi aşağıdaki gibidir:

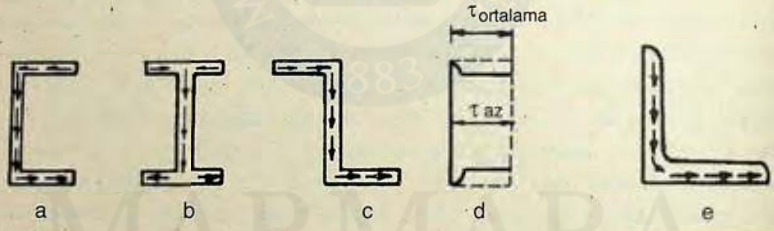
$$\tau = \frac{V}{A_w} \qquad 8.21$$

Burada $A_w = d\, t_w$ perde alanıdır. Gerçek yükseklik yerine d nin alınması çok yakın sonuç verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.19



Şekil 8.20

8.9 Kayma Merkezi

Bir C profili Şekil 8.21 deki gibi yüklendiğinde elemanın burulmasının önlenmesi için yük mutlaka eksantrik uygulanmalıdır. Yükün geçmesi gereken S noktasına kayma merkezi adı verilir. Bunun sebebi şöyle açıklanabilir. Kayma gerilmesi diyagramı çizildiğinde üst ve alt flanşlardaki kesme kuvvetlerinin bileşkesi olan H kuvvetleri birbirine eşit ve zıt yönlüdür. Bunların meydana getirdiği burulma momenti,

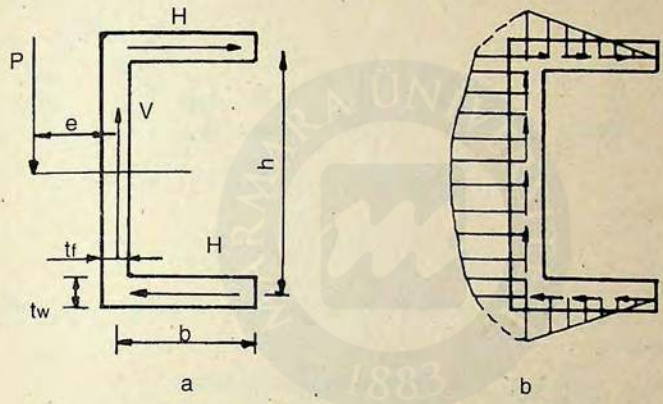
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$T = H\,h \qquad 8.22$$

olur. Bu momenti karşılayacak etki için P yükü mutlaka perde ekseninden bir e mesafeden uygulanmalıdır ve böylece,

$$Pe = Hh \qquad 8.23$$

olur.



Şekil 8.21

Bileşke H kuvvetleri ortalama flanş kayma gerilmesi ile flanş alanının çarpımına eşittir. Ortalama kayma gerilmesi, azami gerilmenin yarısına eşittir ve denklem 8.20 den bulunabilir.

Böylece,

$$Pe = \frac{1}{2}\,\tau b\; t_f h = \frac{1}{2}\,\frac{V b\; t_f h/2}{I\, t_f}\, b\; t_f h = \frac{V b^2 h^2 t_f}{4I}$$

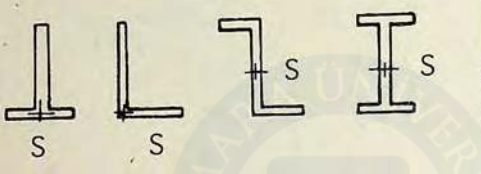
yazılabilir. V=P olduğundan,

$$e = \frac{b^2 h^2 t_f}{4I} \qquad 8.24$$

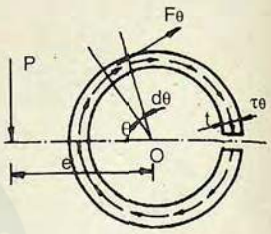
bulunur. z yönündeki yükleme z ekseninden geçen yatay simetri düzleminde bulunmalıdır. Bu düzlemle y eksenine paralel perde merkez çiz-

gisinden e mesafedeki düzlemin arakesiti, burulma olmaması için kiriş kesme yükünün mutlaka geçmesi gereken boyuna eksendir. Şekil 8.22 de bazı kesitlerin kayma merkezleri gösterilmiştir.

Eğer bir eleman burulursa o zaman kayma merkezinden geçen boyuna eksen burulmanın yer aldığı eksen olur.



Şekil 8.22



Şekil 8.23

ÖRNEK 8.9. Şekil 8.23 te kesiti verilen açık boru için kayma merkezini bulunuz.

Çözüm: Herhangi bir θ kesitinde kayma gerilmesi,

$$\tau_\theta = \frac{PQ_\theta}{It} \quad \text{olur.}$$

$$Q_\theta = t\int_0^\pi r\,d\theta\, r\sin\theta = r^2 t\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = r^2(\cos\theta + 1)\,t$$

$$I = 2t\int_0^\pi r\,d\theta\, r^2\sin^2\theta = 2r^3 t\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta = r^3\pi t$$

$$\tau_\theta = \frac{P\,r^2(\cos\theta+1)t}{r^3\pi t^2} = \frac{P(\cos\theta+1)}{\pi r t}$$

$$F_\theta = \tau_\theta\, t\, r\, d\theta$$

O etrafında burulma momenti:

$$T = r F_\theta = tr^2\int_{-\pi}^{\pi}\tau_\theta\,d\theta = 2\frac{P r^2 t}{r t\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos\theta+1)\,d\theta = 2PR \quad \text{olur.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu burulma momentini dengelemek için gerekli eksantrisite, Pe=2Pr yazılarak e=2r olarak bulunur.

8.10 Eğrilik, Kesme Kuvveti Ve Eğilme Momenti Diyagramları

z ekseni etrafında eğilmeye maruz bir kirişin dx uzunluğundaki kısmı Şekil 8.24 de gösterilmiştir. CD, AB ye paralel alınmıştır. Eğrilik yarıçapı ρ dur. ABC ve CDE üçgenleri benzer olduğundan,

$$\frac{\varepsilon_x\, dx}{dx} = \frac{-y}{\rho} \quad \text{veya} \quad \varepsilon_x = -y/\rho \qquad 8.25$$

yazılabilir. Küçük sehimlerde,

Eğrilik = $1/\rho = d^2y/dx^2$ olduğundan,

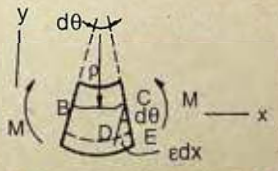
$$\varepsilon_x = \sigma_x/E = \frac{-My}{EI} = \frac{-y}{\rho} = -y\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{veya}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad 8.26$$

bulunur. Bu denklem bir kirişin eğrilik ve deformasyonun bulunmasında önemlidir.

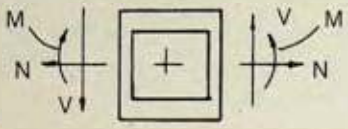
Diyagramda İşaret Kabulü:

Küçük bir elemanın sağ ve sol yüzlerindeki kesit tesirleri Şekil 8.25 deki gibi ise pozitif kabul edilmiştir.

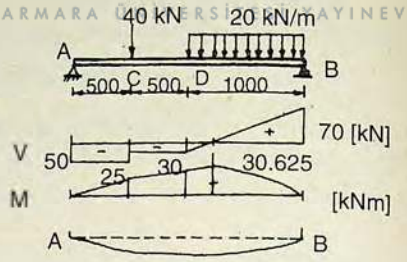


Şekil 8.24

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.25



Şekil 8.26

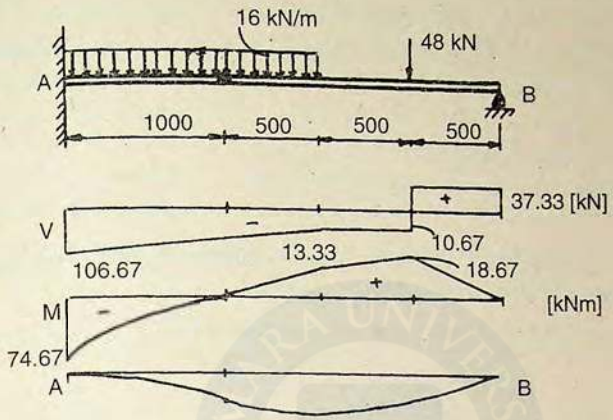
ÖRNEK 8.10. Şekil 8.26 da verilen kiriş için kesme kuvveti, eğilme momenti diyagramları ile elastik eğrinin muhtemel şeklini çiziniz.

Çözüm: A ve B mesnet reaksiyonları 50 kN ve 70 kN bulunur. A veya B ucundan başlanılarak kesme kuvveti diyagramı çizilir. Kiriş için AC, CD ve DB kısımları için ayrı ayrı serbest cisim diyagramları çizilerek V kesme kuvveti ifadeleri bulunduktan sonra diyagram çizilir. Moment diyagramı da benzer şekilde çizilebilir (Şekil 8.26). Normal kuvvet sıfırıdır.

ÖRNEK 8.11. Şekil 8.27 de S noktasında bir mafsal bulunan yayılı ve münferit yüklü kiriş için kesme kuvveti, eğilme momenti diyagramlarını ve muhtemel elastik eğri şeklini çiziniz.

Çözüm: Mesnet reaksiyonlarını bulmak için y yönünde kuvvet ve A noktasına göre moment denge denklemleri ile mafsalda momentin sıfır olması şartı yazılır. Mesela S mafsalının sağı için $6R_b - 48*4 - 2*16*1 = 0$ veya $R_b = 37.33$ kN olur. $R_a = 106.67$ kN ve $M_a = 74.67$ kNm bulunur. Diyagramlar şekilde görüldüğü gibi bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.27

Diyagramlar yukarda verilen eğim metodundan başka toplama usulüyle de çizilebilir. Kesme kuvveti,

$$V_x = -\int_0^x p\,dx + C_1 \qquad 8.27$$

olarak yazılabilir. Bu denklem yük diyagramı alanının negatifini, kesme kuvetinin integrasyon sabiti hariç olmak üzere vermektedir.

Benzer şekilde,

$$M_x = -\int_0^x V_x\,dx + C_2$$

yazılabilir. Moment diyagramı kesme diyagramından kolayca bulunabilir. İntegrasyon sabiti hariç kesme diyagramı alanının negatifi momenti verir.

ÖRNEK 8.12. Şekil 8.26 daki kiriş için kesme kuvveti ve moment diyagramlarını toplama metoduyla çiziniz.

Çözüm: Reaksiyonlar bulunduktan sonra A ve C arasında p=0 ve

bunun sonucu olarak kesme kuvveti sabit = –50 kN olur. C noktasından sonra aşağı doğru 40 kN yük yukarı doğru düşey bir sıçrama gösterir ve kesme -50 kN den -10 kN ye değişir. D den E ye doğru x, D den itibaren yatay mesafe olmak üzere,

$$V_x = -\int_0^x -20\,dx + C_1$$

ve $C_1 = -10$ olduğundan $V_x = 20x - 10$ veya A noktasında 70 kN bulunur ki, R_a ile uyum içindedir.

Moment diyagramı A dan itibaren x=0 için $M_x = 0$ ve $C_2 = 0$ olur. AC arasında,

$$M_x = -\int_0^x -50\,dx + 0 = 50x$$

olur. C de 25 kNm olur. İntegrasyon yerine AC arasındaki alanın negatifi alınır, –(–50)0.5=25 kNm olur.

D noktasında $M_d = M_c + 5 = 30$ kNm bulunur. DB arasında M_b=0 olur.

8.11 Kirişlerde Şekil Değiştirme Enerjisi Ve Deformasyon

Şekil değiştirme enerjisi,

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma\,\varepsilon\,dV = \frac{1}{2}\int_x\int_A \frac{M^2 y^2}{E I^2}\,dA\,dx = \int_x \frac{M^2\,dx}{2EI} \qquad 8.28$$

olmaktadır.

Yayılı yükün şiddeti kesme kuvvetine bağlı olarak, aşağıdaki gibi yazılabilir:

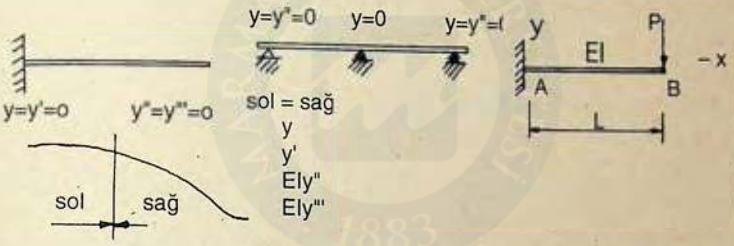
$$p = -\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right) = EI\frac{d^4y}{dx^4} \qquad 8.29$$

Benzer şekilde, $V = -EI\,d^3y/dx^3$ ve $M = EI\,d^2y/dx^2$ 8.30

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Bu denklemler dy/dx eğimini ve y düşey sehimini bulmak için integrasyon yoluyla kullanılabilir. Dört defa yapılacak integrasyonla bulunan 4 sabit sınır şartlarından tayin edilir. Dördüncü mertebeden bir diferansiyel denklemde her tür sınır şartı bulunurken burada geometrik ve kuvvet sınır şartları görülmektedir. Şekil 8.28 de sınır şartları ve süreklilik şartı verilmektedir.

ÖRNEK 8.13. Şekil 8.29 daki konsol kirişin B ucunun dönmesini ve sehimini integrasyon ve enerji metodları ile bulunuz.



Şekil 8.28 Şekil 8.29

Çözüm: Koordinat eksenlerini ve orijini açıkça yerleştirmek çok önemlidir.

$$M = -P(L-x) = EI\frac{d^2y}{dx^2} \text{ veya}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = -P\int_0^L (L-x)dx = P\frac{(L-x)^2}{2} + C_1 \text{ olur. İntegrasyonla,}$$

$$EI\,y = -P\frac{(L-x)^3}{6} + C_1 x + C_2 \text{ bulunur.}$$

Sınır şartlarından x=0 için sehim ve eğim sıfır yazılabilir. Böylece, $y(0)=0$ ve $y'(0)=0$ veya $0=PL^2/2+C_1$ olduğundan $C_1=-PL^2/2$ bulunur. Benzer şekilde $C_2=PL^3/6$ olur.

$EI\,dy/dx = P(L-x)^2/2 - PL^2/2$ bulunur.

B ucunda x=L olduğundan, $y_b = -PL^3/(3EI)$ olur.

B ucunda eğim veya dönme sıfır olduğundan $y'_b = -PL^2/(2EI)$ elde edilir.

Castigliano'nun 2. teoremine göre $\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$ ve $\theta_k = \frac{\partial U}{\partial M_k}$ sehim ve dönme miktarını vermektedir.

Eğilmedeki şekil değiştirme enerjisi $U = \int_0^L M^2\, dx/(2EI)$ yukarda yazılırsa,

$$\Delta_k = \int_0^L \frac{M\, \partial M/\partial P_k}{EI} dx \qquad \theta_k = \int_0^L \frac{M\, \partial M/\partial M_k}{EI} dx \qquad 8.65$$

bulunur. M=–P(L–x) olduğundan,

$$y_b = \Delta_k = \int_0^L \frac{-P(L-x)\,[-(L-x)]}{EI} dx = \frac{PL^3}{3EI} \text{ olur.}$$

Sehim kuvvet yönünde yani aşağı doğrudur.

B ucunun dönmesini bulmak için bu uca saat yönünde fiktif bir moment (M_k) uygulayalım. Böylece $M=-P(L-x)+M_k$ olur.

$y'_b = PL^2 / (2EI)$ bulunur. M_k saat yönündedir.

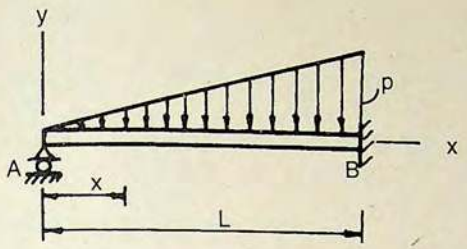
8.12 Statikçe Belirsiz Kirişler

Denge denklemleri sayısının bilinmeyen sayısından az olması durumunda hiperstatik veya statikçe belirsiz hal söz konusu olur. Statikçe belirsizlik derecesi, D=R–N dir. Burada R bilinmeyen reaksiyon sayısı ve N ilgili statik denge denklemi sayısıdır.

Dördüncü mertebeden kiriş denge denklemi veya ikinci mertebeden kiriş moment denklemi statikçe belirsiz kirişlerin analizinde kullanılabilir.

ÖRNEK.8.14 Şekil 8.30 daki kirişte A ucunun dönmesini, sehim ifadesini ve reaksiyonları bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.30

Çözüm: $EIy^{iv} = p = -xp/L$ olur. İntegrasyonla,

$$EIy''' = -\frac{P x^2}{2L} + C_1 \qquad EIy'' = -\frac{P x^3}{6L} + C_1 x + C_2$$

$$EIy' = -\frac{P x^4}{24L} + C_1 x^2/2 + C_2 x + C_3$$

$$EIy = -\frac{P x^5}{120L} + C_1 x^3/6 + C_2 x^2/2 + C_3 x + C_4 \quad \text{elde edilir.}$$

$y(0)=0$, $y''(0)=0$, $y(L)=0$ ve $y'(0)= 0$ sınır şartlarından sabitler $C_4=0$, $C_2=0$, $C_1=p\,L/10$ ve $C_3= -p\,L^3/120$ bulunur.

$$y = -\frac{P x^5}{120EI} + \left(\frac{x^4}{L} - 2L\,x^2 + x^3\right) \text{ sehim ifadesi olur.}$$

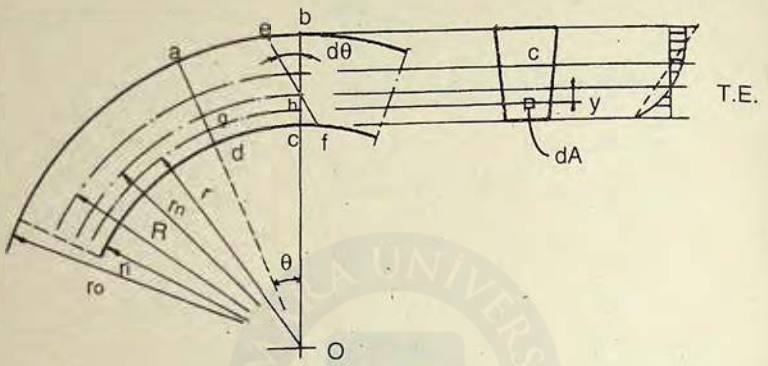
$R_a= p\,L/10$ yukarı doğrudur. $R_b=2p\,L/5$ yukarı doğrudur.

$M_b=-p\,L^2/15$ saat yönünde dönme miktarı olur.

8.13 Eğri Eksenli Kirişler

Eğri eksenli kirişler; kren kancası, delme presi çerçevesi, mengene ve salıncak gibi birçok uygulama alanına sahiptir. Şekil 8.31 deki gibi eğri eksenli bir eleman ele alalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.31

Eğrilik merkezi O dan iç ve diş life mesafeler sırasıyla r_i ve r_o olsun. O ile sentroidal eksen arasındaki mesafe R ile gösterilmiştir. Kirişin eksenine dik kesitler deformasyondan sonra düzlem kalır kabulü yapılır. Böylece merkezî θ açısı ile tarif edilen abcd elemanının bc çizgisi M momenti uygulandıktan sonra ef halini alır. gh gibi bir lifin uzunluğu eğrilik merkezinden olan r mesafesine bağlıdır. Böylece dθ ile tarif edilen liflerin toplam deformasyonu lineer olmasına rağmen birim şekil değiştirme lineer değildir. gh lifinin ilk boyu rθ ve uzaması $(r_n - r)\,d\theta$ olur. Burada r_n tarafsız yüzeyle O arasındaki mesafedir. $\varepsilon = (r_n - r)d\theta/(r\theta)$ olduğundan kesiti dA olan bir eleman üzerindeki gerilme,

$$\sigma = E\,\frac{(r_n - r)d\theta}{r\theta} \qquad 8.31$$

olur. Bu denklem gerilme dağılımını verir. Kesit üzerine etki eden kuvvetlerin toplamı sıfır yazılarak tarafsız eksenin yeri bulunabilir:

$$E\,\frac{(r_n - r)d\theta}{r\theta}\,dA = 0 \text{ veya}$$

$$\frac{E\,d\theta}{\theta}\int_A \frac{(r_n - r)}{r}dA = \frac{E\,d\theta}{\theta}\left[\, r_n \int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA \,\right] = 0$$

olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$r_n = \frac{A}{\int_A dA/r} \qquad 8.32$$

bulunur. Görüldüğü gibi tarafsız eksen sentroidal eksen ile çakışmaz ve eğrilik merkezine yakın olur.

Elemanter kuvvetlerin momentleri toplam dış momente eşit olduğundan,

$$M = \int_A \sigma\, dA\,(r_n - r) = \int_A \frac{E\,(r_n - r)^2\, d\theta}{r\theta}\, dA$$

veya

$$\sigma = \frac{M(r_n - r)}{rA(R - r_n)} \qquad 8.33$$

bulunur. $R - r_n$ = e tarafsız eksenle sentroidal eksen arasıdaki fark olma üzere (Ek 3),

$$\sigma = \frac{M(r_n - r)}{Ae(r_n) - y)} \qquad 8.34$$

olur. Bu denklem, gerilme dağılımının hiperbolik olduğunu göstermektedir. Azami gerilme her zaman kirişin konkav yani iç tarafında olur. $h_i = r_n - r_i$ ve $h_o = r_o - r_n$ olmak üzere,

$$\sigma_i = \frac{Mh_i}{Aer_i} \quad \sigma_o = \frac{Mh_o}{Aer_o} \qquad 8.35$$

sırasıyla iç ve dış lifteki gerilmelerin şiddetleri olur.

ÖRNEK 8.15. Dikdörtgen kesitli bir kirişte b=22 mm, h=80 mm ve M=2.2 kNm olup iç lifte basma gerilmesi oluşmaktadır. Sentroidal eksenin yarıçapını 80 mm, 400 mm ve sonsuz alarak gerilmeleri bulunuz.

Çözüm: Eğrilik yarıçapı 80 mm için:

$$\text{Tarafsız eksen } r_n = \frac{A}{\int_A dA/r} = h/ln\,(r_o/r_i) = \frac{80}{ln(120/40)} \quad \text{veya}$$

72.819 mm mesafede olur. e küçük olduğundan mikron mertebesinde hesaplanmalıdır. e=80–72.819=7.181 mm, h_o =47.181 mm ve h_i =32.819 mm olur.

$$\sigma = \frac{2200*3.2819}{2.2*8.0*0.7181*4.0} = 142.8 \text{ MPa iç lifte basma olur.}$$

Benzer şekilde dış lifte 68.4 MPa çekme gerilmesi ortaya çıkar.

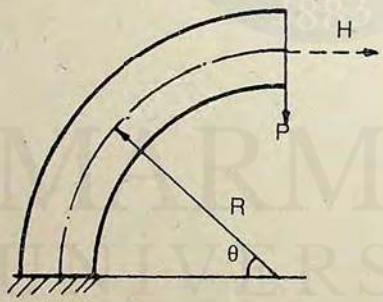
Eğrilik yarıçapı 400 mm için:

Tarafsız eksen $r_n = h/ln(r_o/r_i) = 398.663$ mm de olur.

$e=400-398.663=1.337$ mm bulunur. $h_o=41.337$ mm ve $h_i=38.663$ mm olduğundan iç ve dış liflerden gerilmeler –100.4 ve 87.8 MPa sırasıyla basma ve çekme olur.

Eğrilik yarıçapı sonsuz olduğunda iç ve dış liflerdeki gerilmelerin şiddeti birbirine eşit ve 93.7 MPa bulunur.

ÖRNEK 8.16. Kesme kuvveti ile normal kuvvetin şekil değiştirme enerjisini ihmal ederek şekildeki eğri eksenli kirişin P kuvveti uygulanan ucunun yatay ve düşey sehimlerini bulunuz.



Şekil 8.32

Çözüm: $U = \int_s \frac{M^2\,ds}{2EI} = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2 R\,d\theta}{2EI}$ şekil değiştirme enerjisi olur.

$M=PR\cos\theta$ olduğundan,

$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\pi PR^3}{4EI}$ - aşağı doğru sehim olarak bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

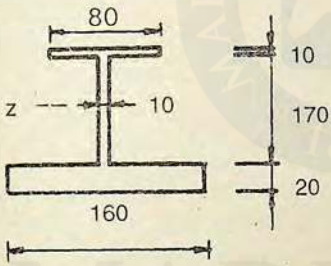
Yatay sehimi bulmak için hayali bir H kuvveti uygulanır. Böylece $M=PR\cos\theta + HR(1-\sin\theta)$ olur.

$\frac{\partial U}{\partial H} = \frac{PR^3}{2EI}$ sağa doğru sehim olarak hesaplanır.

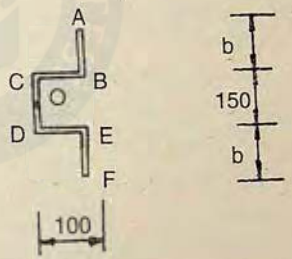
PROBLEMLER

8.1. Şekil 8.33 de kesiti verilen kirişe z ekseni etrafında 40 kNm momenti uygulandığında meydana gelen eğilme gerilmesinin en büyük değerini bulunuz.

8.2. İnce cidarlı üniform kalınlıktaki bir kirişin kesiti Şekil 8.34 de verilmiştir. Kayma merkezinin O noktasında olması için b ne olmalıdır?



Şekil 8.33



Şekil 8.34

8.3. Cidar kalınlığı 6 mm iç çapı 70 mm olan bir çelik borunun eğilmede emniyet gerilmesi 130 MPa dır. Uygulanacak eğilme momenti en çok ne olabilir?

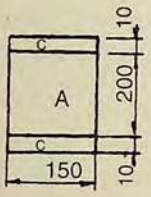
8.4. Kare kesitli lineer elastik malzemeden yapılmış bir kirişte; köşegeni etrafında ve bir kenarı etrafında eğilmeye zorlayan moment aynı olduğu zaman meydana gelecek azami gerilmelerin oranını bulunuz.

8.5. Daire kesitli eğilmeye çalışan bir kirişte üst ve alt kısımlardan yatay düzlemlerle ne kadar kesilip uzaklaştırılırsa kirişin mukavemeti azami değerine ulaşır?

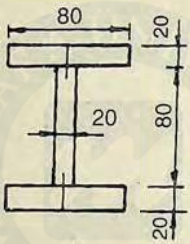
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8.6. Daire kesitli bir tomruktan dikdörtgen kesitli bir kiriş biçilecektir. Eğilme mukavemetinin en büyük olması için kirişin genişliği tomruk çapının ne kadarı olmalıdır?

8.7. Şekil 8.35 a da kesiti gösterilen kompozit kiriş 80 kNm eğilme momentine maruzdur. Çelik ve ahşapta meydana gelen azami gerilmeleri bulunuz. Çelik ve ahşap için elastiklik modülleri sırasıyla 200 GPa ve 10 GPa dır.

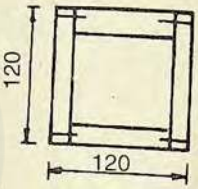


a



b

Şekil 8.35



Şekil 8.36

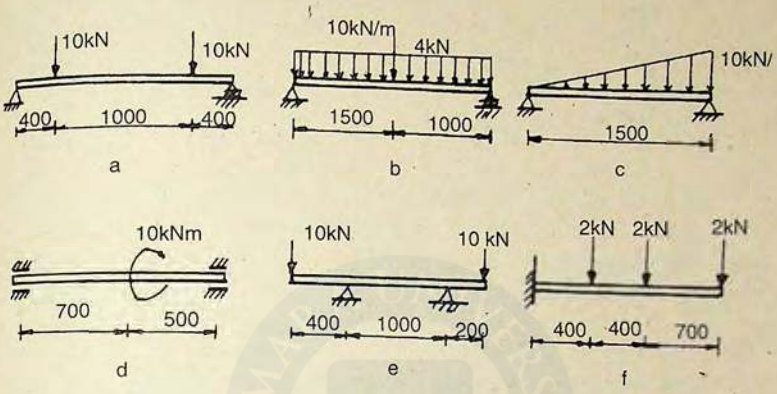
8.8. Kare kesitli (30 mm x 30 mm) alüminyum malzemenin üst ve alt tarafına 5 mm kalınlıkta ve 30 mm genişlikte pirinç şeritler yapıştırılmıştır. Alüminyum ve pirinç için elastiklik modülleri ile emniyet gerilmeleri sırasıyla 70 GPa, 100 MPa ve 105 GPa, 150 MPa dır. Uygulanabilecek en büyük eğilme momentini bulunuz.

8.9. Üç tahta çivilerle birleştirilerek bir kiriş imal edilmiştir (Şekil 8.35b). Çiviler arası mesafe 30 mm ve kirişe gelen düşey yük V=500 N olduğuna göre bir çiviye etki eden kesme kuvveti ne olur?

8.10. Şekil 8.36 daki kutu kiriş iki 20 mm x 80 mm ve iki 20 mmx120 mm kesitli tahtalardan çiviler yardımıyla inşa edilmiştir. Çiviler arası mesafe s=60 mm ve bir çivi için emniyetli kesme kuvveti 300 N olduğuna göre kiriş için azami kesme kuvveti ve kayma gerilmesi ne olur.

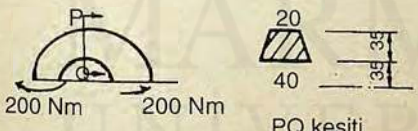
8.11. Şekil 8.37 deki kirişler için, reaksiyonları bulunuz, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramlarını çiziniz ve elastik eğrinin deforme olmuş şeklini gösteriniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

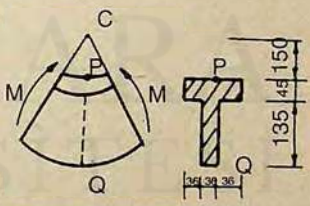


Şekil 8.37

8.12. Çapı 10 mm olan bir çelik çubuk, iç eğrilik yarıçapı 100 mm olacak şekilde bir eğri eksenli kiriş haline getirilmiştir. Malzemenin akma mukavemetini 400 MPa alarak uç kısımlara uygulanabilecek momentin en büyük değerini bulunuz.

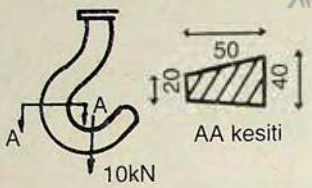


Şekil 8.38



Şekil 8.39

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 8.40

8.13. Şekil 8.38 deki kirişin P ve Q noktalarındaki gerilmeleri bulunuz.

8.14. Çapı 20 mm olan bir çubuktan iç çapı 70 mm olan bir halka yapılmakta ve açık uçlarına 1000 N eksenel kuvveti uygulanmaktadır. Halkanın iç ve dış kısmındaki gerilmeleri bulunuz.

8.15. Şekil 8.39 daki makina elemanı için M=10 kNm alarak P ve Q deki gerilmeleri hesaplayınız.

8.16. Şekil 8.40 da gösterilen kren kancasının iç yüzeyinin eğrilik yarıçapı 50 mm dir. AA kesitindeki en büyük çekme gerilmesi ne olur?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9. BURKULMA

Burkulma, basma yüküne maruz kalan bir elemanın genellikle kararlılığının bozulması sonucunu veren bir kırılma biçimidir. Basınç yükü taşıyan çelik yapıların kolonları, köprü veya çatıların kafesleri, burulma ve/veya basma yüküne maruz uçak gövde veya kanatlarının metal yüzeyleri, denizaltıların tekne kısımları, ince cidarlı burulmaya çalışan borular, kesme kuvvetine maruz perde kalınlığı ince olan I kirişler ve eğilmeli basınç yüküne çalışan ince flanşlı I kirişleri burkulma ile ilgili bazı mühendislik uygulamaları olarak sayılabilir. Burkulma, bu misallerin de gösterdiği gibi basma yükünü nazara vermektedir. Burulma momenti veya kesme kuvveti elemanın bazı kısımlarında burkulmaya yol açacak basma kuvvetleri meydana getirebilmektedir. Burkulmanın ayırt edici özelliği kırılmanın tahripkâr olmasıdır. Bir stadyumdaki taşıyıcı kolonların veya bir çatının çökmesi genellikle manşet olur ve mühendislik ihmali suçlanır. Bir kibrit çöpü, bir T cetveli veya bir jilet kullanılarak burkulmaya şahit olunabilir. Bunlarda elastik veya plastik burkulma olur.

Ezilme sebebiyle çöken kolonlara kısa kolon, burkulma sebebiyle stabilitesini kaybeden kolonlara ise uzun veya narin kolon adı verilmektedir. Kolonların tasarımında en iyi çözüm, burkulmaya sebep olan yükün meydana getireceği gerilmenin malzemenin basınç mukavemetine eşit olmasını sağlar.

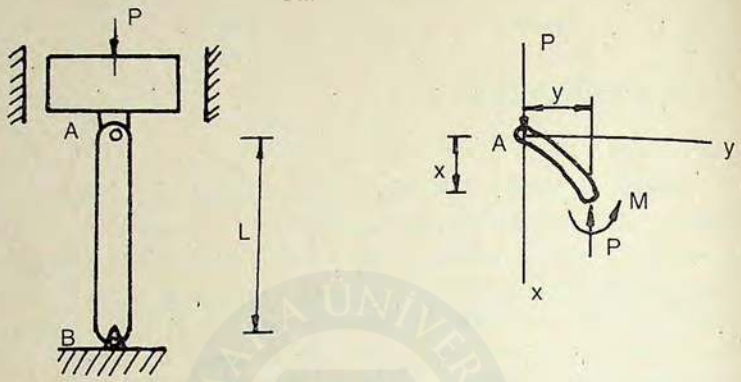
9.1 Elastik Burkulma

İki ucu mafsallı bir kolona P yükü uygulandığında (Şekil 9.1) denge denkleminden,

$$M_x = EI\, y'' = -Py \text{ veya } EI\, y'' + P\, y = 0 \qquad 9.1$$

yazılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 9.1

İkinci mertebeden bu diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = A \sin px + B \cos px \qquad 9.2$$

olur. Burada $p^2 = P/(EI)$ dir. Sınır şartlarından B = 0 ve A sin pL = 0 bulunur. $p = n\pi/L$ ve n=1, 2, .. olduğundan en küçük kök $p=\pi/L$ dir. Buna tekabül eden kiritik yüke Euler yükü denir:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad 9.3$$

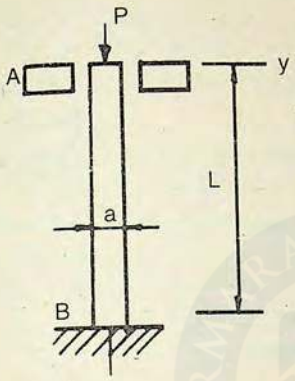
$I=r^2A$ ve $\sigma_{cr} = P/A$ yazılarak,

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \qquad 9.4$$

Euler gerilmesi bulunur. Paydadaki L/r narinlik oranı adını alır. Uçlardan biri ankastre diğeri serbest ise bu ifadede eşdeğer uzunluk olarak $L_e=2L$ kullanılır. Bir ucu ankastre diğer ucu mafsallı kolonlarda $L_e=0.7$ L ve iki ucu da ankastre kolonlarda ise $L_e=0.5$ L alınır.

ÖRNEK 9.1. Şekil 9.2 deki kolon B ucunda ankastre mesnete sahiptir. A ucunun sadece iki yanında sürtünmesiz levhalar bulunmaktadır. Kolonun burkulmaya karşı tasarlanması için optimum a/b oranını bulunuz. Dikdörtgen kesitli kolonun a genişliği ve b derinliğidir.

L=1000 mm, E=70 GPa, P=10 kN ve emniyet katsayısını n=2 alarak kolonu boyutlandırınız.



Şekil 9.2

Çözüm: z eksenini sayfa düzleminden dışarıya doğru alalım. xy düzleminde bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre gibi davranacağından eşdeğer uzunluk L_e=0.7 L olur. Kesitin atalet yarıçapı için I=ba^3/12 ve A=ab yazılarak r_z=a/$\sqrt{12}$ bulunur. Bu düzlemde narinlik oranı L_e/r_z=0.7 L$\sqrt{12}$ /a olur.

xz düzleminde bir ucu serbest diğer ucu ankastre kolon için L_e=2L olduğundan narinlik oranı benzer şekilde, L_e/r_y = 2 L$\sqrt{12}$ /b olur. Optimum tasarım için narinlik oranları eşit olmalıdır. Böylece a/b=0.35 bulunur.

Kiritik yük P_{cr} = n P = 2*10 = 20 kN olur. A=0.35 b^2 olduğundan σ_{cr}=P/A=20 000 / (0.35 b^2) bulunur. Narinlik oranı 6.928 / b aşağıdaki denklemde yazılarak:

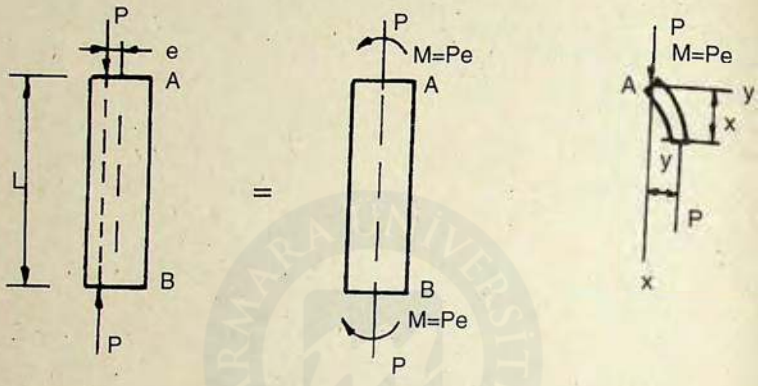
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}$$

b=44.6 mm ve a=15.6 mm bulunur.

9.2 Eksantrik Yükleme

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Kolona uygulanan yükün eksantrik olması sebebiyle kesit üzerine bir M = P e momenti de etki eder (Şekil 9.3).



Şekil 9.3

A noktasından x mesafede eğilme momenti,

$$M = -P\,y - P\,e$$

olur. Diferansiyel denklemde yerine yazılarak,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -\,p^2e \qquad 9.5$$

bulunur. Burada $p^2=P/(EI)$ dir. Denklemin çözümü,

$$y_{az} = e\,[\sec(pL/2) - 1\,] \qquad 9.6$$

azami sehimi verir. sec $\pi/2$ sonsuza gittiğinden kritik yük olur. Azami gerilme,

$$\sigma_{az} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec(pL/2)\right] \qquad 9.7$$

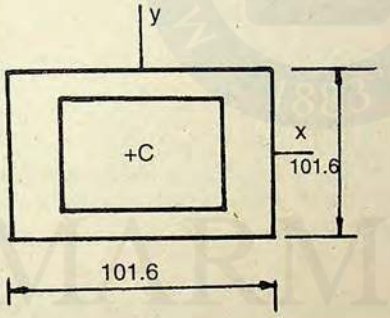
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olarak bulunur. Burada c tarafsız eksenden en dış life olan mesafedir. P/A yalnız bırakılarak Sekant formülü,

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{az}}{1 + \frac{ec}{r^2}\sec(pL/2)} \qquad 9.7$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 9.2. Bir ucu ankastre diğer ucu serbest bir kolon Şekil 9.4 te verilen kesite sahiptir. Kolonun boyu 2 m ve elastiklik modülü 200 GPa dır. Emniyet katsayısını 3 alarak kolonun taşıyacağı yükü ve buna tekabül eden normal gerilmeyi bulunuz. Bulduğunuz bu yükün merkezden itibaren e=20 mm mesafede uygulanması halinde azami sehimi ve azami normal gerilmeyi bulunuz. Profilin kesitinde A=2320 mm^2, I=342 cm^4 ve atalet yarıçapı r=38.4 mm dir.



Şekil 9.4

Çözüm: Eşdeğer uzunluk L=2*2=4 m olur. Euler denkleminden kritik yük P_{cr}=422 kN bulunur. Emniyetli yük P=141 kN olur. Gerilme σ=60.8 MPa olarak bulunur.

Eksantrik yüklemede 9.6 denklemi ile,

$$y_{az} = e\,[\sec(pL/2) - 1\,] = 20[\sec((\frac{141E3}{200E9*342E-8})^{1/2}\frac{4}{2}) - 1]$$

veya 12.5 mm bulunur. Denklem 9.7 de P=141 kN, c=50.8 mm, L=4 m değerleri ile diğer verilenler yazılarak,

$$\sigma = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec(pL/2)\right] = 6.155E7 \text{ Pa} = 61.55 \text{ MPa}$$

bulunur.

Kolonların boyutlandırılması için pratikte doğru, parabolik, Rankine gibi formüller kullanılmaktadır. AISC (Amerikan Çelik Konstrüksiyon Enstitüsü) ve AASHTO (Amerikan Eyalet Çevre Yolları ve Taşıma Cemiyeti) gibi kuruluşlar tarafından burkulma ile ilgili formüller verilmektedir.

PROBLEMLER

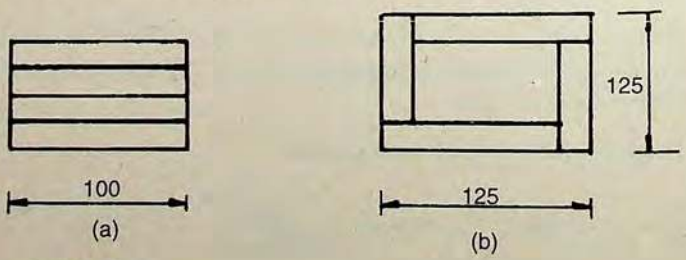
9.1. Bir ahşap çıta 1 m boyunda ve 5 mm x 30 mm kesitindedir. E=12 GPa alarak kritik yükü bulunuz.

9.2. Bir ahşap çıta 75 cm boyunda ve 4 mm x 30 mm kesitindedir. E=12 GPa alarak kritik yükü bulunuz.

9.3 Uzunluğu 1750 mm, dış çapı 20 mm ve cidar kalınlığı 1 mm olan bir alüminyum boru için kritik yükü bulunuz. E=70 GPa dır.

9.4. Eşdeğer uzunluğu 2 m ve çapı 40 mm olan pirinç bir çubuk ağırlığında azalma sağlanması için iç çapı 30 mm ve dış çapı 40 mm olan bir çubukla değiştirilmektedir. Kritik yükte ne kadar azalma olur? Ağırlıkta ne kadar azalma vardır? İçi boş eleman için kritik yük nedir? E=105 GPa dır.

9.5. Şekil 9.5 te kesiti verilen ahşap kolonlar için kritik yükü bulunuz. Kolonlar aynı 4 tahtadan çivilerle inşa edilmiştir. Bir tahtanın kesiti 25 mm x 100 mm, eşdeğer boyu 3000 mm ve E=12.5 GPa dır.



Şekil 9.5

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9.6. Taşıyacağı yük 500 kN olacak 4 m boyundaki bir kolon için uygun bir W profili seçiniz (Ek 4). Kolon iki ucundan mafsalla mesnetlenmiştir.

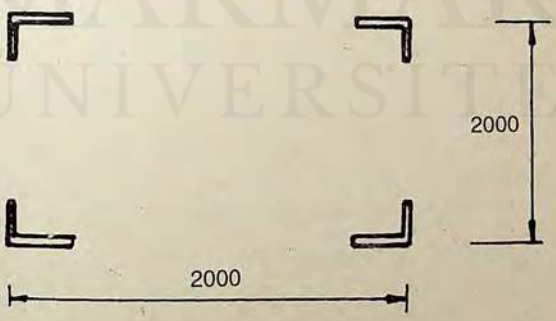
9.7. Kare kesitli ve iki ucu mafsallı 4 m boyundaki bir kolon 100 kN yük taşıyacaktır. E=210 GPa alarak kesiti tayin ediniz.

9.8. Uçlarından mafsallı aynı boy ve kesit alanına sahip iki kolondan biri daire diğeri kare kasitlidir. Malzemeleri de aynı olan kolonların taşıyabileceği yüklerin oranını bulunuz.

9.9. İki ucu ankastre mesnetli bir kolonda burkulmanın meydana geleceği sıcaklık farkını bulunuz. A, E, I, L ve α verilmektedir.

9.10. Bir bisiklet pompasının piston çubuğu 5 mm çapında ve 300 mm uzunluğundadır. E=210 GPa alarak kritik yükü bulunuz.

.9.11. Uzunluğu 30 m olan bir anten direği yatayla 60° açı yapan halatlarla tepesinden yere bağlanmaktadır. Şekil 9.6 da kesiti verilen direk için kritik yükü bulunuz. Halatlara uygulanan yük, emniyet katsayısı 2.5 ise en çok ne olabilir? Şekildeki köşebentler 100x100x10 ölçüsünde ve kesit alanı 1920 mm^2, tarafsız ekseni tabandan 28.2 mm mesafede ve tarafsız eksenine göre atalet momenti $I_x = I_y = 177\ cm^4$ olarak verilmektedir. E=210 GPa dır. Köşebentleri birbirine kaynakla bağlayan parçaların etkisi hesaba katılmayacaktır.



Şekil 9.6

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

10. KIRILMA TEORİLERİ

Kırılma ve akma gözlenebilmekte ve tarif edilebilmekte olmasına rağmen malzemenin kırılmasının kesin sebebi henüz bilinmemektedir. Pratik açıdan mühendis, yapacağı tasarıma temel olacak bir kritere sahip olmak ister. Yani kırılma veya akma için belirli kritik bir miktarın her ne ise ulaşacağı sınır değerin bilinmesini ister. Acaba bu kritik değer ve onun sınırı nedir? Bunlar kırılma teorilerinin cevap bulmaya çalıştığı sorulardır. Gerçekten bir kırılma teorisi kırılmayı tahmin etmek için belirli bir büyüklük tarifi yapmaktadır. Mesela tek eksenli bir yüklemeye maruz bir elemanın kırılması için kritik bir büyüklük nasıl elde edilebilir? Bu halde denemelerden elde edilen bilgiler boyuna gerilme, boyuna şekil değiştirme veya şekil değiştirme enerjisi gibi güvenilir bir kriter sağlayabilir. Eğer plastik şekil değiştirme bir kırılma çeşidi ise akma mukavemeti gerilmenin sınır değeri olarak kullanılabilir. Eğer kopma kırılması söz konusu ise kopma mukavemeti gerilmenin sınır değeri olarak kullanılabilir. Şüphesiz kriterin bir gerilmeye ihtiyacı yoktur. Plastik davranış için elastik şekil değiştirme sınırı ve kırılma için tokluk modülü de kullanılabilir.

Eğer yükleme tek eksenli değil de iki veya üç eksenli ise kritik büyüklük nasıl tayin edilebilir? Gerilmelerin muhtemel bütün bileşimleri için bu halde deneme yapılamayacağı açıktır. Gerçekten bu çok zor ve bazı durumlarda kontrollü üç eksenli gerilme halinin elde edilmesi imkânsızdır. İşte burada herhagi bir keyfi gerilme halinde uygulanabilecek kırılma teorilerine ihtiyaç bulunmaktadır. Çeşitli zamanlarda teklif edilen bazı kırılma teorileri aşağıda verilmektedir:

1. Rankine (1802–1872) tarafından teklif edilen azami normal gerilme teorisi.

2. Coulomb'un 1773 ve Tresca'nın 1868 de teklif ettiği azami kayma gerilmesi teorisi.

3. Huber'in 1904, Von Mises'in 1913 ve Hencky'nin 1925 te teklif

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ettiği azami çarpılma enerjisi teorisi.

4. Saint–Venant (1797–1866) tarafından teklif edilen azami normal şekil değiştirme enerjisi teorisi.

5. Mohr (1835–1918) ve Coulomb (1736—1806) tarafından teklif edilen iç sürtünme teorisi.

6. Beltrami'nin 1885 te teklif ettiği azami şekil değiştirme enerjisi teorisi.

7. Von Mises ve Hencky tarafından teklif edilen oktahedral kayma gerilmesi teorisi.

10.1 Azami Normal Gerilme Teorisi

Azami normal gerilme teorisine göre herhangi bir gerilme hali için kırılma, azami normal gerilmenin kritik değere ulaşması ile olur.

$$\sigma_{az} = \sigma_1 \text{ veya } \sigma_{az} = |\sigma_3| \qquad 10.1$$

olarak yazılabilir. Kritik değer tek eksenli deneme ile edilmektedir. Bu teori cam, dökme demir gibi gevrek malzemeler için uygundur. Ancak akma kırılmasının kestirilmesinde uygun değildir.

10.2 Azami Kayma Gerilmesi Teorisi

Azami kayma gerilmesi teorisine göre kırılma, azami kayma gerilmesinin kritik bir değere ulaşmasıyla olur. Azami kayma gerilmesinin mutlak değerinin ulaşacağı kritik değer çekme denemesi yapalarak bulunur. Kayma akma mukavemeti normal akma mukavemetinin yarısıdır. Bu teori için,

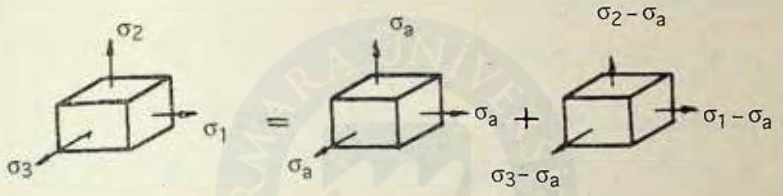
$$|\tau_{az}| = S_{sy} \text{ veya } (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = S_y/2 \qquad 10.2$$

yazılabilir. Burada S_{sy} ve S_y sırasıyla kayma akma ve normal akma mukavemetidir. Bu teori sünek malzemeler için kullanılabilir. Uygulanması kolaydır ve muhafazakâr sonuç verdiğinden ilk tasarım hesaplarında kullanılır. Denemelerden elde edilen diğer bir sonuç hidrostatik basınçla ilgilidir. Bu halde bütün kesit düzlemleri üzerindeki kayma gerilmeleri sıfır olur. Akma olmadan çok yüksek gerilmelere çıkılabilir. Bu halde kayma gerilmesi ve akma olmaması azami kayma gerilmesi teorisini desteklemektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

10.3 Azami Çarpılma Enerjisi Teorisi

Bu teoriye göre malzemenin herhangi bir noktasında birim hacimdeki şekil değiştirme enerjisinin belirli bir kısmının kritik değere ulaşmasıyla kırılma meydana gelir. Şekil 10.1 de üç eksenli gerilmeye maruz bir eleman görülmektedir. Bu elemana gerilmelerin aritmetik



Şekil 10.1

ortalaması olan bir gerilmeyi bir defa ilave edilim ve bir de çıkaralım. Burada,

$$\sigma_a = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) /3 \qquad 10.3$$

olmaktadır. Böylece bir hidrostatik hal elde edilir. Bu kısım hacimde üniform daralma veya genişleme sonucunu verir. İkinci kısım enerji ise elemanın şeklinin çarpılmasına sebep olur. Bu teoriye göre hidrostatik enerji kısmının cismin akmasına hiç bir etkisi yoktur ve kırılma birim hacimdeki çarpılma enerjisinin kritik bir değere ulaşması ile meydana gelir. Kritik değer çekme denemesinden bulunan akma değeridir. Birim hacimde depolanan şekil değiştirme enerjisi,

$$u = (\sigma \varepsilon/2)_1 + (\sigma \varepsilon/2)_2 + (\sigma \varepsilon/2)_3 \qquad 10.4$$

olarak bulunur. Sadece hacimde değişmeye sebep olan enerji denklem 10.3, 10.4 ve Hooke kanunu yardımıyla,

$$u_v = 3 \sigma_a^2 (1 - 2\nu) / (2E) \qquad 10.5$$

olarak bulunur. Çarpılmaya sebep olan enerji bu ikisinin farkı alınarak aşağıdaki gibi bulunabilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_d = u - u_v = \frac{1+\nu}{3E} \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \qquad 10.6$$

Hidrostatik halde çarpılma enerjisinin sıfır olduğu görülebilir. Basit çekme halinde $\sigma_1 = S_y$ ve $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ olduğundan,

$$u_d = \frac{1+\nu}{3E} S_y^2 \qquad 10.7$$

bulunur. Son iki denklemden üç eksenli gerilme hali için,

$$2S_y^2 = (s1 - s2)2 + (s2 - s\ 3)2 + (s3 - s1\ )2 \qquad 10.8$$

olarak akma kırılması için azami çarpılma enerjisi kriteri bulunur.

İki eksenli halde gerilmelerden biri sıfır alınarak ve $\sigma_1 > \sigma_2$ kabul edilerek,

$$S_y^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1\ \sigma_2 + \sigma_2^2 \qquad 10.9$$

elde edilir. Tam kayma halinde $\sigma_2 = -\sigma_1$ olur. Buradan,

$$S_{sy} = S_y / \sqrt{2} \text{ veya } S_{sy} = 0.577\ S_y \qquad 10.10$$

bulunur. Kayma akma mukavemeti akma mukavemetinin 0.577 katı olmaktadır. Eğilme ve burulma birlikte olduğunda eşdeğer gerilme,

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 \qquad 10.11$$

olmaktadır.

ÖRNEK 10.1. SAE 303 paslanmaz çeliğinin akma mukavemeti yaklaşık 200 MPa olarak verilmektedir. Aşağıda verilen gerilme halleri için azami normal gerilme, azami kayma gerilmesi ve azami çarpılma enerjisi teorilerine göre emniyet katsayısını hesaplayıp bir şekil üzerinde gösteriniz.

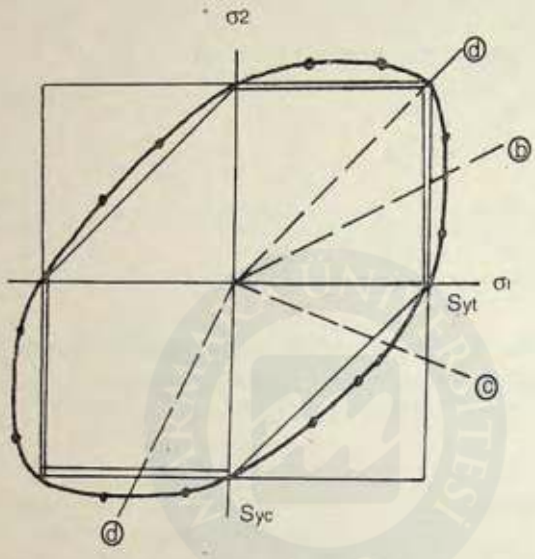
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	σ_1	σ_2	σ_3	[MPa]
a	140	140	0	
b	140	60	0	
c	140	0	–60	
d	0	–60	–140	

Çözüm: Emniyet katsayısı akma mukavemetinin kırılma teorisinden bulunan gerilmeye oranı olarak bulunur. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi olur. Şekil 10.2 de azami çarpılma enerjisi teorisi bir elips ile ifade edilmiştir.

	Emniyet Katsayısı			
Teori	a	b	c	d
Azami normal gerilme	1.4	1.4	1.4	1.4
Azami kayma gerilmesi	1.4	1.4	1.0	1.4
Çarpılma enerjisi	1.4	1.6	1.1	1.6

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 10.2 Burada — azami normal gerilme, –.– azami kayma gerilmesi ve –o– azami çarpılma enerjisi teorisini göstermektedir.

PROBLEMLER

10.1 İnce cidarlı küre şeklindeki bir basınçlı kabın cidar kalınlığı 5 mm ve iç çapı 1000 mm dir. Kabın imal edildiği alüminyum için akma mukavemetini 200 MPa alarak azami kayma gerilmesi ve azami çarpılma enerjisi teorilerine göre akmaya sebep olacak basıncı bulunuz.

10.2. Bir hidrolik silindirin malzemesinin akma mukavemeti 500 MPa, iç çapı 40 mm ve cidar kalınlığı 1 mm dir. Akmaya sebep olacak basıncı azami kayma gerilmesi ve azami çarpılma enerjisi teorilerine göre bulunuz.

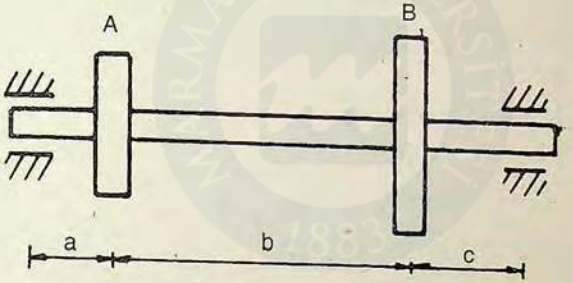
10.3 Burulmaya çalışan dökme demirden bir makina elemanı 24 mm çapında olup 833 Nm burulma momentine maruzdur. Kopma mukavemetini 400 MPa alarak kırılmasına sebep olacak normal çekme yükünü bulunuz. Azami normal gerilme teorisini kullanınız.

10.4. Bir milin 2 kNm eğilme momenti ve 4 kNm burulma momenti taşıyan kesitindeki azami normal gerilmeyi bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

10.5. Çapı 10 mm olan bir çelik çubuğa 30 kN eksenel kuvvet uygulanmaktadır. Çubuğun akma mukavemeti 450 MPa ise buna ilaveten ne kadar eğilme momenti uygulanırsa akma meydana gelir? Azami kayma gerilmesi ve azami çarpılma enerjisi teorilerini kullanınız.

10.6. Şekil 10.3 teki mil 300 d/dak da A kasnağından aldığı 10 kW gücü B kasnağına iletmektedir. Kayış kuvvetlerinin analizinden eğilme momentinin A ve B de sırasıyla 200 Nm ve 300 Nm olduğu bulunmuştur. Milin çapını azami kayma gerilmesi ve azami çarpılma enerjisi teorilerine göre hesaplayınız. Akma mukavemeti 500 MPa ve akmaya göre emniyet katsayısı 5 tir.



Şekil 10.3

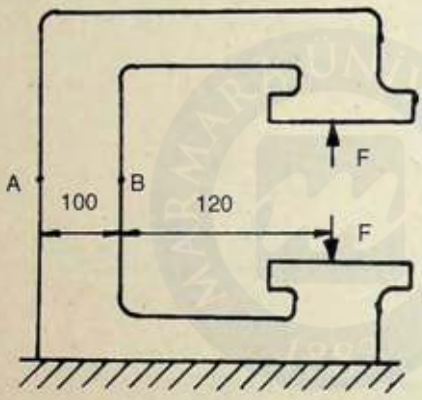
10.7. İç basınca maruz ince cidarlı bir silindirde teğet gerilmenin pr/t ve boyuna gerilmenin bunun yarısı olduğunu gösteriniz. Böyle bir silindir aynı zamanda T burulma momentine maruz bulunuyorsa azami kayma gerilmesi teorisine göre akmanın meydana geleceği basıncı bulunuz. Silindirin iç çapı 100 mm, cidar kalınlığı 2.5 mm, burulma momenti 5000 Nm ve akma mukavemeti 300 MPa dır.

10.8. Bir boru 20 mm iç ve 21 mm dış çapında olup 20 kN eksenel yük ile 50 Nm burulma momenti taşımaktadır. Akma mukavemetini 300 MPa alarak azami kayma gerilmesi teorisine göre emniyetli olup olmadığını bulunuz.

10.9. İçi dolu silindirik bir çubuk 200 Nm burulma ve 300 Nm eğilme momentine maruzdur. Akma mukavemeti 500 MPa ve emniyet katsayısı 2.5 için azami kayma gerilmesi teorisine göre çapını hesaplayınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

10.10. Bir presin gövdesinin kesiti, dış kenarı 100 mm cidar kalınlığı 5 mm olan içi boş kare şeklindedir. Gövdenin dış tarafından 120 mm mesafede düşey yönde uygulanacak F pres kuvveti en çok ne olabilir? Azami kayma gerilmesi teorisini kullanınız. Şekil 10.4 teki A ve B noktaları gözönüne aldığında gövdede 40 MPa çekme ve 100 MPa basma gerilmesinin aşılmaması istenmektedir.



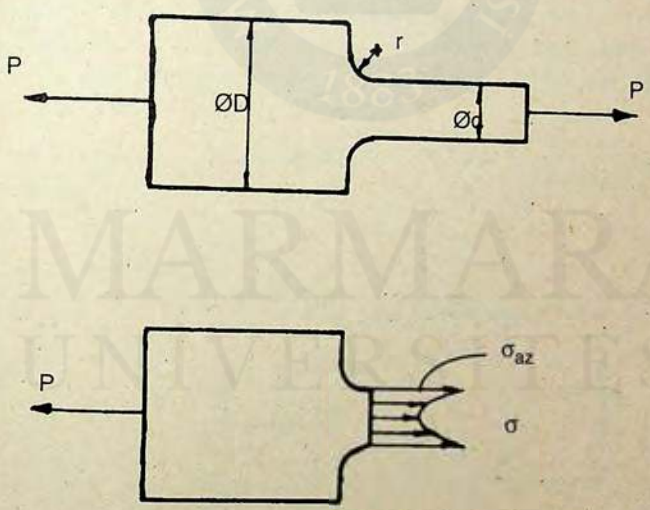
Şekil 10.4

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11. GERİLME YIĞILMASI

Bir yapı veya makina elemanında yükün uygulandığı yere yakın noktalardaki gerilmeler, elemandaki ortalama değerin çok üzerinde olabilmektedir. Elemanda bir delik bulunması veya elemanın kesitinin ani değişmesi gibi bir düzgünsüzlük olması durumunda da elemanda düzgünsüzlük olan kısımda büyük gerilmeler ortaya çıkabilmektedir. Şekil 11.1 de çekme yükü uygulanan kademeli bir çubuğun kesitinin değiştiği kısımdaki gerilme dağılımı verilmektedir.



Şekil 11.1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu sonuçlar fotoelastik denemelerle bulunmaktadır. Tasarım yapmak için gerekli değerler r/d ve D/d oranlarına bağlı olarak grafikler halinde verilmektedir. Gerilme yığılması malzemenin cinsine ve geometrisine bağlı olmaktadır. Teorik gerilme yığılması katsayısı yalnız geometriye bağlıdır. Malzemenin çentik hassasiyet katsayısı adı verilen bir büyüklük kullanılarak gerekli düzeltme yapılabilmektedir. Gerilme yığılması yüzünden azami gerilme,

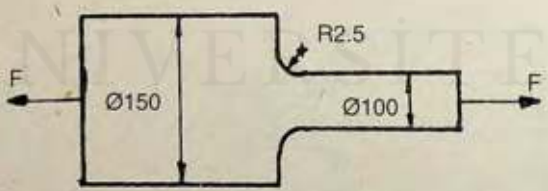
$$\sigma_{az} = K\sigma \qquad 11.1$$

olmaktadır. Burada σ ortalama gerilmeyi ve K gerilme yığılması katsayısını göstermektedir (Şekil 11.2).

ÖRNEK 10.1. Şekil 11.3 deki kademeli çubuk için emniyet gerilmesi 120 MPa dır. Gerilme yığılmasını hesaba katarak çubuğa uygulanacak F kuvvetinin en çok ne olabileceğini bulunuz.

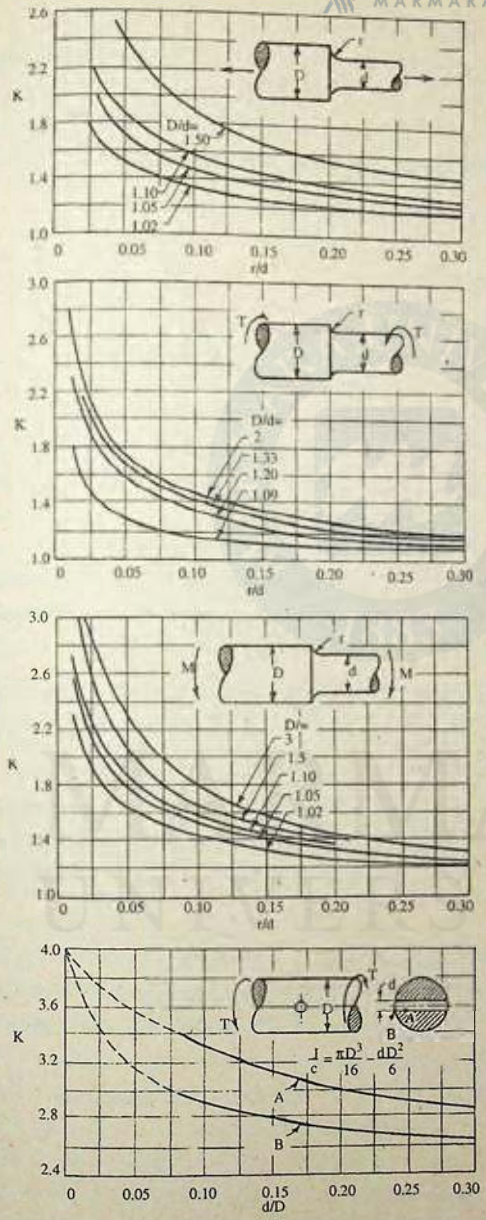
Çözüm: Şekil 11.2 deki çekmeye çalışan kademeli çubuk için verilen gerilme yığılması diyagramından D/d=1.5 ve r/d=0.05 değerlerine göre K=2.4 olarak gerilme yığılması katsayısı bulunur. Kesit değişikliği olan kısımdaki gerilme ortalama gerilmenin 2.4 katı olacak demektir. Buna göre $\sigma = 120/2.4 = 50$ MPa değeri aşılmamalıdır. Böylece,

$$50 = \frac{F}{\pi 100^2/4} \quad \text{veya } F = 393 \text{ kN bulunur.}$$



Şekil 11.3

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

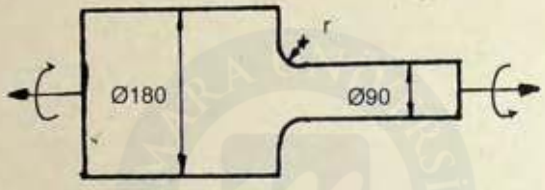


Şekil 11.2 Gerilme yığılması diyagramları.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

PROBLEMLER

11.1. Bir türbinden jeneratöre güç ileten kademeli bir mil Şekil 11.4 de gösterilmiştir. Çelik mil 975 d/dak hızıyla dönmekte ve kayma emniyet gerilmesi 50 MPa olmaktadır. İlk tasarımdaki yuvarlatma yarıçapı 10 mm ye yükseltilmektedir. İlk ve son tasarım için milin ileteceği gücü bulunuz.



Şekil 11.4

11.2. Çapı 40 mm ve 60 mm olan kademeli bir milde yuvarlatma yarıçapının 2 mm ve 4 mm olması durumunda uygulanabilecek burulma momentlerini hesaplayınız. Kayma emniyet gerilmesi 40 MPa dır.

11.3. Kademeli bir milin çapları 80 mm ve 160 mm olup 400 d/dak ile dönmektedir. Yuvarlatma yarıçapı 10 mm ve kayma emniyet gerilmesi 50 MPa ise nakledilen güç ne olabilir?

11.4. Çapı 100 mm olan bir milin kayma emniyet gerilmesini 50 MPa alarak ileteceği momenti hesaplayanız. Bu milin eksenine dik olarak 10 mm çapında bir delik açılırsa iletilecek moment ne kadar azalır?

11.5. Kademeli bir aksın çapları 120 mm ve 80 mm dir. Yuvarlatma yarıçapı 4 mm yerine 8 mm yapılırsa uygulanabilecek eğilme momenti ne kadar değişir? Normal emniyet gerilmesini 150 MPa alınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

12. GERİLME ANALİZİNDE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

12.1 Giriş

Sonlu elemanlar yöntemi, geniş bir grup mühendislik probleminin nümerik çözümünde güçlü bir alet olmaktadır. Uygulama bölgesi; otomotiv, uçak, bina ve köprü inşaatında deformasyon ve gerilme analizinden ısı akışı, akışkan akımı, magnetik akı, sızıntı ve diğer akış problemlerine kadar yayılmaktadır. Bilgisayar teknolojisinde ve bilgisayar destekli tasarım sistemlerindeki ilerlemelerle kompleks problemler oldukça kolay modellenebilmektedir. İlk prototip üretilmeden önce birçok alternatif konfigürasyonlar bilgisayarda denenebilmektedir.Bu durum sonlu elemanlar yönteminin temel teorisinin, modelleme tekniklerinin ve hesaplama konusunun anlaşılmasını gerekli kılmaktadır. Bu yöntemle yapılan incelemede kompleks bir ortam sonlu eleman adı verilen basit geometrik şekillere bölünmektedir. Malzeme özellikleri ve çözüm denklemleri bu elemanlar üzerinde incelemekte ve eleman köşelerinde bilinmeyen değerlerin terimleriyle ifade edilmektedir. Montaj işlemi, yükleme ve kısıtların doğru incelenmesiyle bir denklem takımı bulunmaktadır. Bu denklemlerin çözümü ortamın yaklaşık davranışını vermektedir.

Uçak inşaatının incelenmesindeki ilerlemeler sonlu eleman fikrinin ortaya çıkmasını sağladı. Hrenikoff 1941 yılında çerçeve iş yöntemini kullanarak elestisite problemlerinin çözümünü takdim etti. Courant 1943 de burulma problemi modeli için üçgen alt bölgeler üzerinde parça polinom interpolasyonunu uyguladı. Turner ve arkadaşları 1956 senesinde kafes, kiriş ve diğer elemanlar için katılık matrislerini türettiler. Sonlu eleman terimi ilk defa 1960 da Clough tarafından bulundu ve kullanıladı. 1960 lı yılların başlarında mühendisler tarafından gerilme analizi, akışkanlar mekaniği, ısı transferi ve sair alanlardaki problemlerin çözümünde bu yöntem kullanıldı. Zienkiewicz ve Chung tarafından 1967 de ilk sonlu eleman kitabı yayınlandı. Lineer olmayan problemlerle büyük deformasyonların sonlu elemanlar ile incelenmesi 1960–1970 li yıllarda yapıldı.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Nihayet günümüzde bilgisayarların gelişmesiyle öğrencilerin ve küçük sanayide çalışan mühendislerin sonlu elemanlar yöntemine ulaşması sağlandı.

Bir boyutlu sonlu eleman problemleri için u, σ, ε, T, ve f vektörleri sadece x e bağlı olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$$u = u(x),\ \sigma = \sigma(x),\ \varepsilon = \varepsilon(x),\ T = T(x),\ f = f(x) \qquad 12.1$$

Burada u yer değiştirmeyi, σ gerilmeyi, ε şekil değiştirmeyi, T birim alana uygulanan kuvveti ve f birim hacme yayılı yükü göstermektedir.

Ayrıca gerilme–şekil değiştirme ve şekil değiştirme–yer değiştirme denklemleri ve diferansiyel hacim,

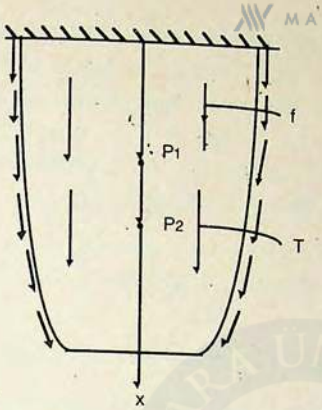
$$\sigma = E\,\varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{du}{dx} \qquad dV = A\,dx \qquad 12.2$$

olur. Yükleme üç çeşitten ibarettir; f cisim kuvveti, T birim alana uygulanan kuvvet ve P_i nokta yükü. Cisim kuvveti cismin her elemanter hacmine etki eden yayılı kuvvettir. Yer çekiminden doğan zati ağırlık, cisim kuvvetine misal olarak verilebilir. Bir boyutlu halde T birim alan yerine birim uzunluğa uygulanan kuvvet olmaktadır ve T ile kesitin çevresinin çarpımı alınarak kuvvetin şiddeti bulunmaktadır. Sürtünme direnci, viskoz sürüklenme kuvveti ve yüzey kesme kuvveti bir boyutlu problemlerde T için misal olarak verilebilir. Bölgeyi kısımlara ayırmak ve bu noktalardaki değerlerin terimleriyle yer değiştirme alanını ifade etmek temel fikirdir. Potansiyel enerji ve Galerkin yaklaşımı kullanılarak katılık ve yük kavramları geliştirilir. Sonra sınır şartları incelenir.

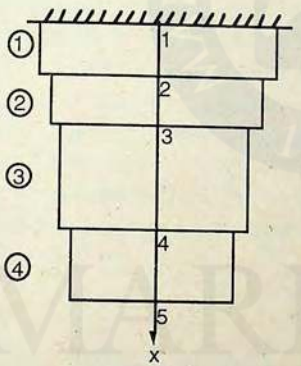
12.2 Modelleme

Şekil 12.1 deki çubuğu inceleyelim. Önce çubuk her biri üniform kesite sahip elemanlardan ibaret bir kademeli mil gibi modellenir. Şekildeki gibi çubuk mesela 4 sonlu elemana bölünebilir. Her bölgede ortalama kesit alanı değerlendirilir ve üniform kesitli bir eleman tarifinde kullanılır. Sonunda 4 elemanlı ve 5 düğüm noktalı sonlu eleman modeli elde edilir (Şekil 12.2). Sonlu eleman modelinde her eleman iki düğüm noktasını birbirine bağlar. Eleman numarası çember içine alınarak düğüm noktası numarasından tefrik edilir. Her eleman içinde cisim kuvveti de sabit olarak değerlendirilir. Eleman sayısı artırılarak daha iyi yaklaşım elde edilebilir. Her nokta yükünün uygulandığı yerde bir düğüm noktasının tarif edilmesi uygun olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



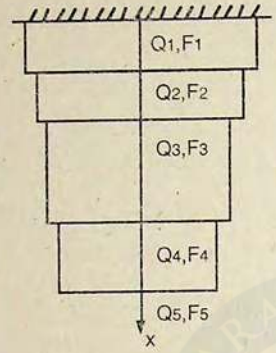
Şekil 12.1



Şekil 12.2

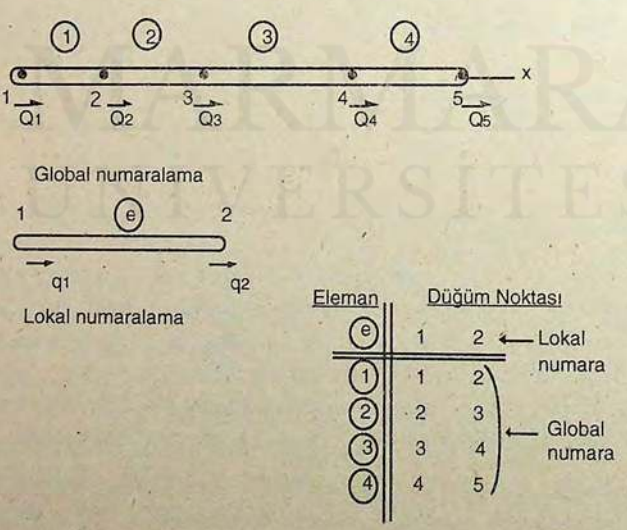
Bir boyutlu problemde her düğüm noktasının yer değiştirmesine sadece ±x yönünde izin verilir. Bu yüzden her düğüm noktasının serbestlik derecesi (SD) 1 dir. Böylece 5 düğüm noktalı bir sonlu eleman modelinin SD değeri 5 olur. Her SD boyunca yer değiştirmeler $Q_1,...,Q_5$ ile gösterilmiştir. $Q=[Q_1,...,Q_5]^T$ sütun vektörüne global yer değiştirme vektörü denir. Global yük vektörü $F=[F_1,...,F_5,]^T$ ile belirtilir (Şekil 12.3).

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 12.3

+x yönünde etki eden bir yer değiştirme veya yük pozitif değerde kabul edilmektedir. Bu safhada sınır şartları verilmektedir. Mesela 1 numaralı düğüm noktası mesnete bağlı olduğundan $Q_1=0$ olur. Bu şartlar daha sonra incelenir. Her eleman 2 düğüm noktasına sahiptir ve elemanlara ait bağlama durumu ve bağlama tablosu Şekil 12.4 deki gibi gösterilebilir.



Şekil 12.4

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bağlama tablosunda 1 ve 2 üst numaraları elemanın düğüm noktasına ait lokal numara ve cisim üzerindeki mütekabil düğüm noktası numaraları ise global numara adını alır. Mesela burada 1 numaralı düğüm noktasının yeri ile eleman numarası e aynıdır ve 2 numaralı düğüm noktasının yeri e+1 olur. Kompleks geometriler için bağlama tablosu gerekli olur. İki ve üç boyutlu problemlerde bu daha açıktır.

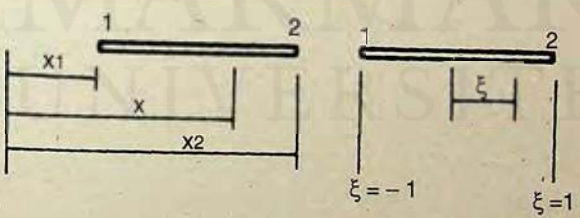
SD, düğüm noktası yer değiştirmesi, düğüm noktası yükü ve eleman bağlama sonlu elemanlar yönteminde iyi anlaşılması gereken kavramlardır.

12.3. Koordinatlar ve Şekil Fonksiyonları

Bir e sonlu elemanında birinci ve ikinci düğüm noktaları 1 ve 2 ile gösterilsin. 1 ve 2 düğüm noktaları $x=x_1$ ve $x=x_2$ koordinatlarına sahip olur. Tabii koordinat sistemi (ξ) aşağıdaki gibi tarif edilmektedir:

$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - 1 \qquad 12.3$$

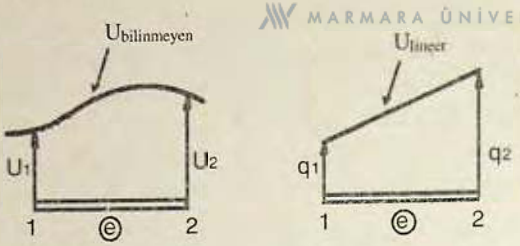
Düğüm noktası 1 için $\xi = -1$ ve 2 için $\xi = 1$ olur (Şekil 12.5). Burada ξ nin değeri -1 ila 1 arasında değişirken elemanın bütün boyu taranır. Bu koordinat sistemi, yer değiştirme alanının interpolasyonu için gerekli olan şekil fonksiyonunun tarifinde kullanılmaktadır.



Şekil 12.5

Şimdi bilinmeyen yer değiştirme alanı için eleman içinde lineer bir dağılımla interpolasyon yapılacaktır (Şekil 12.6).

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 12.6

Modeldeki eleman sayısının artırılmasayıla bu yaklaşımın doğruluğu artırılabilmektedir. Lineer interpolasyonu göstermek için lineer şekil fonksiyonu aşağıdaki gibi tarif edilir:

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \qquad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \qquad 12.4$$

N_1 ve N_2 şekil fonksiyonları Şekil 12.7 de gösterilmiştir.

$\xi = -1$ de $N_1 = 1$ ve $\xi = 1$ de $N_1 = 0$ olup iki nokta arasında bir doğru parçasıdır. N_2 nin grafiği de benzer şekilde bulunabilir. Şekil fonksiyonları tarif edildikten sonra eleman içinde lineer yer değiştirme alanı q_1 ve q_2 düğüm noktalarının yer değiştirmeleri terimleri ile yazılabilir:

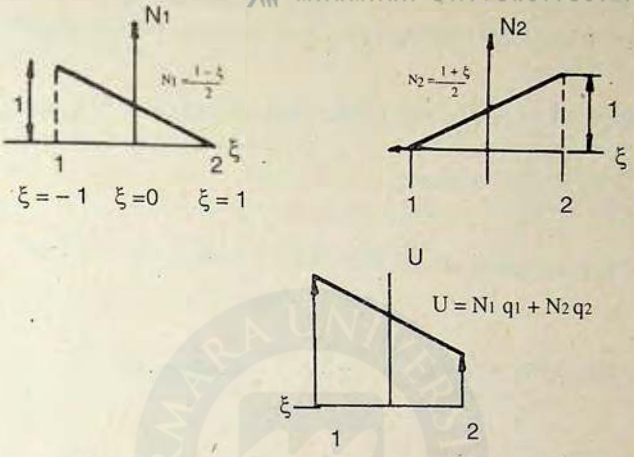
$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 \text{ veya matris notasyonuyla } u = Nq \qquad 12.5$$

Burada $N = [N_1, N_2]$ ve $q = [q_1, q_2]^T$ dir. Buradaki q elemanın yer değiştirme vektörüdür. Yukardaki denklemden 1 numaralı düğüm noktasında $u=q_1$ ve 2 numaralı düğüm noktasında $u=q_2$ olduğu ve u nun lineer değiştiği görülebilir. x den ξ ye dönüşüm N_1 ve N_2 terimleriyle yapılabilir:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 \qquad 12.6$$

Denklem 12.6 ve 12.7 karşılaştırılarak eleman içinde aynı N_1 ve N_2 şekil fonksiyonlarıyla hem u yer değiştirmesi ve hem de x koordinatı için interpolasyon yapılabileceği görülebilir. Buna izoparametrik formülasyon adı verilmektedir. Yukarda lineer şekil fonksiyonları kullanılmakla beraber kuadratik gibi diğer seçimler de mümkündür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 12.7

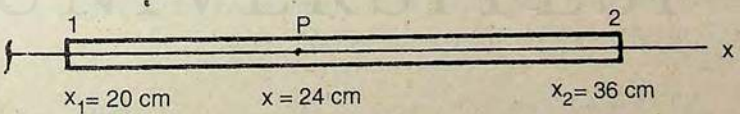
Şekil fonksiyonları genellikle aşağıdakileri gerçekleştirmelidir:

1. Eleman içinde birinci türev sonlu olmalıdır.

2. Eleman sınırları boyunca yer değiştirmeler sürekli olmalıdır.

Eleman içinde rijit cisim hareketli hiçbir gerilme meydana getirmemelidir.

ÖRNEK 12.1 Şekil 12.8 deki elemanın P noktasında ξ, N_1 ve N_2 yi bulunuz. $q_1 = 0.003$ cm ve $q_2 = -0.005$ cm alarak P noktasındaki u_p yer değiştirmesi hesaplayınız.



Şekil 12.8

Çözüm: P noktasının tabii koordinatı denklem 12.3 den

$$\xi = \frac{2}{36 - 20}(24 - 20) = -0.5$$ bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Denklem 12.5 den $N_1 = 0.75$ ve $N_2 = 0.25$ bulunur. Denklem 12.7 den $u_p = 0.75*0.003 + 0.25*(-0.005) = 0.001$ cm olarak P noktasındaki yer değiştirme hesaplanır.

Şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntısından zincir kuralı ile,

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}$$ bulunur.

Tabii koordinatın türevi $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1}$ olur.

$$u = N_1 q_1 + N_2 q_2 = \frac{1-\xi}{2} q_1 + \frac{1+\xi}{2} q_2$$ olduğundan

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{-q_1 + q_2}{2} \qquad 12.7$$

bulunur.

Birim şekil değiştirme,

$$\varepsilon = \frac{-q_1 + q_2}{x_2 - x_1} \qquad 12.8$$

olur.

Yukardaki denklem,

$$\varepsilon = Bq \qquad 12.9$$

olarak yazılabilir. Burada 1x2 lik B, elemanın şekil değiştirme – yer değiştirme matrisi adını alır ve aşağıdaki gibi verilir:

$$B = \frac{1}{x_2 - x_1}[-1 \quad 1] \qquad 12.11$$

Lineer şekil değiştirme fonksiyonlarının kullanılması sabit B matrisini ve böylece eleman içinde sabit şekil değiştirmeyi sonuç verir. Hooke kanunundan gerilme,

$$\sigma = EBq \qquad 12.11$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukardaki denklemle verilen gerilme de eleman içinde sabittir. İnterpolasyon için 12.11 denkleminden elde edilen gerilme, elemanın merkezindeki gerilme olarak incelenebilir.

$u = Nq$, $\varepsilon = Bq$ ve $\sigma = EBq$ denklemleri yer değiştirme, şekil değiştirme ve gerilmeyi düğüm noktasının değerleriyle ifade etmektedir. Elemanın katılık ve yük matrislerinin elde edilmesi için bu ifadeler, çubuğun potansiyel enerji ifadesinde yerine yazılmaktadır.

12.4 Potansiyel Enerji Yaklaşımı

Potansiyel enerjisinin genel ifadesi,

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_L \sigma^T \varepsilon A\, dx - \int_L u^T f A\, dx - \int_L u^T T\, dx - \Sigma\, u_i P_i \qquad 12.12$$

olarak yazılabilir. P_i, i noktasına etki eden kuvvet ve u_i ise bu noktadaki x yer değiştirmesi olmaktadır. $\Sigma\, u_i P_i$ bütün noktaların potansiyel enerjisini vermektedir. Ortam sonlu elemanlara bölündüğünden potansiyel enerji,

$$\Pi = \Sigma \frac{1}{2}\int_e \sigma^T \varepsilon A\, dx - \Sigma \int_e u^T f A\, dx - \Sigma \int_e u^T T\, dx - \Sigma\, Q_i P_i \qquad 12.13$$

olur. Son terim ile P_i münferit yüklerinin düğüm noktalarına etki ettiği kabul edilmektedir. Bu kabul notasyonu basitleştiren alışılmış bir modelleme uygulamasıdır.

Yukardaki denklem,

$$\Pi = \Sigma\, U_e - \Sigma \int_e u^T f A\, dx - \Sigma \int_e u^T dx - \Sigma\, Q_i P_i \qquad 12.14$$

olarak yazılabilir. Burada,

$U_e = \frac{1}{2}\int_e \sigma^T \varepsilon A\, dx$ elemanının şekil değiştirme enerjisi olmaktadır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Eleman Katılık Matrisi

Elemanın şekil değiştirme enerjisi ifadesinde $\sigma = EBq$ ve $\varepsilon = Bq$ yazılarak,

$$U_e = \frac{1}{2}\int_e q^T B^T EBqA\, dx \qquad \text{veya}$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \int_e [B^T EBA\, dx]\, q \qquad 12.15$$

bulunur. Sonlu eleman modelinde e elemanının kesit alanı A_e sabittir. Aynı zamanda B matrisi de sabittir. Ayrıca x den ξ ye dönüşüm,

$$dx = \frac{x_2 - x_1}{2} d\xi \qquad \text{veya} \qquad dx = \frac{l_e}{2} d\xi \qquad 12.16$$

olur. Burada $-1 \le \xi \le 1$, ve $l_e = |x_2 - x_1|$ elemanın boyu olmaktadır. Eleman için şekil değiştirme enerjisi,

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \left[A_e \frac{l_e}{2} E_e B^T B \int_{-1}^{1} d\xi\right] q \qquad 12.17$$

olur.

Burada e elemanının elastiklik modülü E_e dir. $\int_{-1}^{1} d\xi = 2$

olduğu gözönüne alınır ve B nin değeri yazılırsa,

$$U_e = \frac{1}{2} q^T A_e l_e E_e \frac{1}{l_e^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} [-1 \quad 1] q \qquad \text{veya}$$

$$U_e = \frac{1}{2} q^T \frac{A_e E_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} q \qquad 12.18$$

bulunur. Bu denklem aşağıdaki formda yazılabilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$U_e = \frac{1}{2} q^T k^e q \qquad 12.19$$

Burada k^e elemanın katılık matrisidir:

$$k^e = \frac{A_e E_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 12.20$$

Denklem 12.20 deki şekil değiştirme enerjisiyle basit yayın $U = kQ^2/2$ ile verilen şekil değiştirme enerjisi ifadesi arasında benzerlik bulunmaktadır. k^e, A_e E_e çarpımı ile lineer orantılı ve l_e uzunluğu ile ters orantılıdır.

Kuvvet Terimleri

Toplam potansiyel enerjinin içinde görülen $\int_e u^T fA \, dx$ elemanın cisim kuvveti terimi ilk olarak incelenir.

$u = N_1 q_1 + N_2 q_2$ yazılarak,

$$\int_e u^T fA \, dx = A_e f \int_e (N_1 q_1 + N_2 q_2) \, dx \qquad 12.21$$

bulunur. f cisim kuvveti kuvvet/birim hacim boyutundadır. A_e ve f eleman içinde sabit olduğundan integralin dışına alınabilir ve yukardaki denklem,

$$\int_e u^T fA \, dx = q^T \begin{Bmatrix} A_e f \int_e N_1 \, dx \\ A_e f \int_e N_2 \, dx \end{Bmatrix} \qquad 12.22$$

olur.

$dx = (l_e/2) \, d\xi$ yazılarak yukardaki şekil fonksiyonu integralleri değerlendirilebilir. Böylece,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int_e N_1\,dx = \frac{l_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{2}\,d\xi = \frac{l_e}{2}$$

$$\int_e N_2\,dx = \frac{l_e}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1+\xi}{2}\,d\xi = \frac{l_e}{2} \qquad 12.23$$

bulunur.

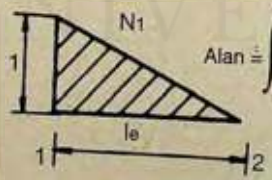
$\int_e N_1\,dx$ integrali N_1 eğrisinin altındaki alana eşittir.

Şekil 12.9 dan $l_e/2$ olarak bulunur. Diğer integral de aynı değerdedir. Cisim kuvveti terimi,

$$\int_e u^T f A\,dx = q^T \frac{A_e}{2} l_e \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{veya} \qquad 12.24$$

$$\int_e u^T f A\,dx = q^T f^e$$

olarak kısalır. Bu denklem, yer değiştirme x kuvvet formundadır.



$$\text{Alan} = \int_e N_1\,dx = \frac{1}{2} l_e * 1$$

Şekil 12.9

Böylece elemanın cisim kuvveti vektörü f^e,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f^e = \frac{A_e l_e f}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad 12.25$$

olur. Yukardaki eleman cisim kuvveti vektöründe bulunan 1/2 katsayısı toplam cisim kuvvetinin iki düğüm noktasına eşit dağıldığını göstermektedir.

Toplam potansiyel enerji içindeki birim alana yayılı kuvvet terimi,

$$\int_e u^T T\,dx = \int_e (N_1 q_1 + N_2 q_2) T\,dx$$

olur. T birim alana yayılı kuvvet eleman içinde sabit olduğundan,

$$\int_e u^T T\,dx = q^T \begin{Bmatrix} T\int_e N_1 dx \\ T\int_e N_2 dx \end{Bmatrix} \qquad 12.26$$

Yukardaki denklemde sağ taraftaki integraller $l_e/2$ değerine eşittir.

Böylece 12.26 denklemi,

$$\int_e u^T T\,dx = q^T T^e \qquad 12.27$$

olur. Burada T^e birim alana yayılı kuvvet vektörü aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$T^e = \frac{T l_e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Böylece k^e, f^e ve T^e eleman matrisleri elde edilir. Şimdi eleman bağlama matrisi hesaba katılabilir. Mesela Şekil 12.3 de 1 numaralı eleman için $q = [Q_1\ Q_2]^T$ ve 2 numaralı eleman için $q = [Q_2\ Q_3]^T$ olur. Toplam potansiyel enerji,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\Pi = \frac{1}{2} Q^T K Q - Q^T F \qquad 12.28$$

olur. Burada K global katılık matrisidir. F global yük vektörü ve Q global yer değiştirme vektörü olmaktadır. Şekil 12.2 deki sonlu eleman modelinde K, 5x5 lik bir matris, Q ve F ise 5x1 lik vektörlerdir. K aşağıdaki gibi elde edilir:

Eleman bağlama durumu ile her k^e matrisinin elemanları daha büyük olan K matrisinde uygun yere yerleştirilir ve üst üste düşen elemanlar toplanır. F vektörü benzer şekilde elde edilir.

12.5 Galerkin Yaklaşımı

Virtüel yer değiştirme alanı $\emptyset = \emptyset(x)$ ve virtüel şekil değiştirme $\varepsilon(\emptyset) = d\emptyset/dx$ olur. Burada $\emptyset$ keyfi veya sınır şartlarıyla uyumlu virtüel şekil değiştirmedir. Galerkin'in varyasyonel formu üç boyutlu hal için aşağıdaki gibidir:

$$\int_V \sigma^T \varepsilon(\emptyset)\, dV - \int_V \emptyset^T f\, dV - \int_S \emptyset^T T\, dS - \Sigma \emptyset^T P = 0 \qquad 12.29$$

Her kinematik müsaade edilebilir yer değiştirme alanı ($\emptyset, \varepsilon(\emptyset)$) için eğer iç virtüel iş dış virtüel işe eşitse cisim dengededir. Buna virtüel iş ilkesi adı verilir. Aynı esaslar veya koordinat fonksiyonları kullanıldığında Galekin yöntemi ile virtüel iş ilkesi aynı denklem takımını vermektedir. Bir boyutlu problemler için Galerkin'in varyasyonel formu,

$$\int_L \sigma^T \varepsilon(\emptyset) A\, dV - \int_L \emptyset^T f\, A dx - \int_L \emptyset^T T\, dx - \Sigma \emptyset P = 0 \qquad 12.30$$

olur. Bu denklemde birinci terim iç virtüel işi, kuvvet terimleri ise dış virtüel işi temsil etmektedir. Elemanlara ayrılmış bölgede yukardaki denklem,

$$\Sigma \int_e \varepsilon^T E \varepsilon(\emptyset) A\, dx - \Sigma \int_e \emptyset^T f\, A\, dx - \Sigma \int_e \emptyset^T T\, dx - \Sigma \emptyset P = 0 \qquad 12.31$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklini alır. Burada ε problemdeki hakiki yükler sebebiyle olan şekil değiştirmeyi, ε (Ø) ise virtüel şekil değiştirmeyi gösterir.

İnterpolasyonda yapıldığı gibi,

$$Ø = N\psi \quad \text{ve} \quad \varepsilon(Ø) = B\psi \qquad 12.32$$

yazılabilir. Burada $\psi = [\psi \ \psi_2]^T$ ile e elemanının keyfi düğüm noktası yer değiştirmesi temsil edilmektedir.

Eleman Katılığı

Denklem 12.31 deki iç virtüel iş terimini inceleyelim. 12.32 denklemi burada yazılır ve ε = Bq olduğu gözönüne alınırsa,

$$\int_e \varepsilon^T E\varepsilon(Ø) A \, dx = \int_e q^T B^T EB \psi A \, dx \qquad 12.33$$

Sonlu eleman modelinde A_e ile gösterilen e elemanın kesit alanı sabittir. Aynı zamanda B sabit bir matristir. Ayrıca $dx = (l_e/2) d\xi$ olur. Böylece,

$$\int_e \varepsilon^T E\varepsilon(Ø) A \, dx = q^T \left| E_e A_e \frac{l_e}{2} B^T B \int_{-1}^{1} d\xi \right| \psi$$

$$= q^T k^e \psi = \psi^T k^e q \qquad 12.34$$

bulunur. Burada $k^e = E_e A_e l_e B^T B$ elemanın simetrik katılık matrisidir. B değeri denklem 12.11 den alınırsa,

$$k^e = \frac{E_e A_e}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 12.35$$

olur.

Kuvvet Terimleri

Denklem 12.29 daki ikinci terim elementteki cisim kuvvetinin yaptığı virtüel işi temsil etmektedir. Ø = N ψ, $dx = l_e \, d\xi / 2$ kullanılarak ve eleman içinde cisim kuvveti sabit kabul edilerek,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int_e \emptyset^T f A \, dx = \int_{-1}^{1} \psi^T N^T f A_e \frac{l_e}{2} d\xi = \psi^T f^e \qquad 12.36$$

bulunur. Burada f^e, elemanın cisim kuvveti vektörü adını alır:

$$f^e = \frac{A_e l_e f}{2} \begin{Bmatrix} \int_{-1}^{1} N_1 \, d\xi \\ \int_{-1}^{1} N_2 \, d\xi \end{Bmatrix} \qquad 12.37$$

$N_1 = (1 - \xi)/2$ ve $N_2 = (1 + \xi)/2$ yazılarak integrallerin değerleri 1 olarak bulunur. Böylece,

$$f^e = \frac{A_e l_e f}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad 12.38$$

olur. Benzer şekilde birim alana gelen kuvvet terimi,

$$\int_e \emptyset^T T \, dx = \psi^T T^e \qquad 12.39$$

bulunur. Burada T^e elemanının birim alana gelen kuvvet vektörüdür:

$$T^e = \frac{T l_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

k^e, f^e ve T^e eleman matrisleri elde edilir. Eleman bağlama ile (mesela $\psi = [\psi_1 \; \psi_2]$ örnekteki 1 numaralı eleman için vs.) varyasyonel form,

$$\Sigma \psi^T k^e q - \Sigma \psi^T f^e - \Sigma \psi^T T^e - \Sigma \psi P = 0 \text{ veya}$$

$$\psi^T (KQ - F) = 0 \qquad 12.40$$

bulunur. Burada her ψ sınır şartlarına uygun tutulmalıdır. Eleman bağ-

lama bilgisi kullanılarak k^e eleman matrislerinden K global katılık matrisinin montajı yapılır. Benzer şekilde f^e ve T^e eleman matrislerinden F elde edilir.

12.6 Global Katılık Matrisinin ve Yük Vektörünün Montajı

Toplam potansiyel enerji eleman bağlama durumu dikkate alındığında,

$\Pi = 0.5\ Q^T KQ - Q^T F$ olur. Eleman katılık ve kuvvet matrisleri monte edilir.

Şekil 12.2 deki mesela 3 numaralı eleman için şekil değiştirme enerjisi,

$$U_3 = 0.5\ q^T\ k^3\ q = 0.5\ q^T\ E_3A_3/l_3\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & & \\ -1 & & -1 \end{bmatrix} q \qquad 12.41$$

olur.

Eleman 3 için, $q = [Q_3, Q_4]^T$ olur. Böylece,

$$U_3 = 0.5\ [\ Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5\ ] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q \\ Q \\ Q \\ Q \\ Q \end{Bmatrix} \qquad 12.42$$

olur.

Yukarda görüldüğü gibi k^3 matrisinin elemanları K matrisinin üçüncü ve dördüncü satır ve sütunlarını işgal etmektedir. Şekil değiştirme enerjileri ilave edildiğinde k^e nin elemanları global K matrisinde uygun yerlere eleman bağlama durumuna tabi olarak yerleştirilir. Üst üste düşen elemanlar toplanır. Bu montaj sembolik olarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$K \leftarrow \Sigma k^e \qquad 12.43$$

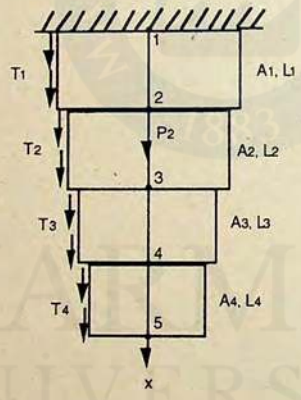
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Benzer şekilde global yük yük vektörü F eleman kuvvet vektörleri ve nokta yükleri ile,

$$F \leftarrow \Sigma (f^e + T^e) + P \qquad 12.44$$

olur. Galerkin yaklaşımı da aynı montaj yöntemini verir. Gerçek hesaplamada simetri üstünlüğü için K bant şeklinde depolanır.

Örnek 12.2 Şekil 12.10 daki çubuğu inceleyelim. Her elemanın kesit alanı A ve uzunluğu l olsun. Her eleman, birim uzunluğu gelen kuvvet T ve birim hacme gelen cisim kuvveti f ye maruzdur. Elastiklik modülü E dir. P_2 münferit kuvveti 2 numaralı düğüm noktasına uygulanmaktadır. Yapı katılık matrisi ve düğüm noktası yük vektörü monte edilmeyecektir. Global yük vektörü montajını yapınız. E ve f sabittir.



Şekil 12.10

Çözüm: Her eleman için eleman katılık matrisi,

$$[k^i] = \frac{EA_i}{l_i}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Eleman bağlama tablosu aşağıdaki gibi olur:

Eleman	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

Eleman katılık matrisleri, bağlama tablosu kullanılarak genişletilebilir ve montaj yapılarak yapının katılık matrisi aşağıdaki gibi bulunur:

$$K = \frac{EA_1}{l_1}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_2}{l_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{EA_3}{l_3}\begin{bmatrix} 0 & -0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA_4}{l_4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu gösteriliş tarzı nadiren kullanılır. Bilgisayarda sıfırların depolanması etkin değildir ve bunun yerine K, bağlama tablosu kullanılarak doğrudan k^e den bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buradan,

$$K = E\begin{bmatrix} \frac{A_1}{l_1} & -\frac{A_1}{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{A_1}{l_1} & (\frac{A_1}{l_1}+\frac{A_2}{l_2}) & -\frac{A_2}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_2}{l_2} & (\frac{A_2}{l_2}+\frac{A_3}{l_3}) & -\frac{A_3}{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A_3}{l_3} & (\frac{A_3}{l_3}+\frac{A_4}{l_4}) & -\frac{A_4}{l_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_4}{l_4} & \frac{A_4}{l_4} \end{bmatrix}$$

bulunur. Global yük vektörü aşağıdaki gibi olur:

$$F = \begin{Bmatrix} \frac{A_1 l_1 f}{2} + \frac{l_1 T_1}{2} \\ \frac{A_1 l_1 f}{2} + \frac{l_1 T_1}{2} + \frac{A_2 l_2 f}{2} + \frac{l_2 T_2}{2} \\ \frac{A_2 l_2 f}{2} + \frac{l_2 T_2}{2} + \frac{A_3 l_3 f}{2} + \frac{l_3 T_3}{2} \\ \frac{A_3 l_3 f}{2} + \frac{l_3 T_3}{2} + \frac{A_4 l_4 f}{2} + \frac{l_4 T_4}{2} \\ \frac{A_4 l_4 f}{2} + \frac{l_4 T_4}{2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

12.7 Global Katılık Matrisinin Özellikleri

Global katılık matrisiyle ilgili bazı önemli hususlar aşağıda verilmektedir:

1. N düğüm noktası sayısı olmak üzere K matrisi NxN boyutundadır. Bu her düğüm noktasının bir serbestlik derecesine sahip olduğunu gösterir.

2. K simetriktir.

3. K bant matristir. Yani bantın dışındaki tüm elemanlar sıfırdır. Birçok bir boyutlu problemde i elemanının bağlaması i + 1 dir. Böyle matrislerde bant genişliği = 2 olur. Yarı bant genişliği (BG) için aşa-

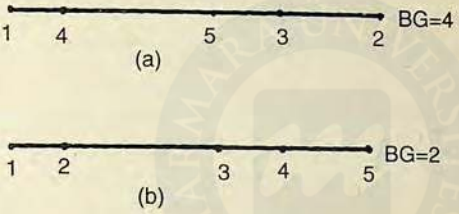
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ğıdaki genel formül kullanılabilir.

BG = azami (elemanın SD bağlama numaraları farkı) + 1 12.43

Mesela 4 elemanlı bir çubuk modeli Şekil 12.11 deki gibi numaralandığında,

BG = azami (4–1, 5–4, 5–3, 3–2) + 1 = 4 olur. Şekil 12.10 a daki numaralama daha çok bilgisayar zamanına yol açtığından iyi değildir. En küçük BG için b deki numaralama optimumdur.



Şekil 12.11

Şimdi potansiyel enerji veya Galerkin yaklaşımı uygulanmalıdır. Problemin sınır şartları belirtilerek sonlu eleman denge denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümüyle global yer değiştirme vektörü Q bulunur. Bundan sonra gerilmeler ve reaksiyon kuvvetleri bulunur.

12.8. Sınır Şartlarının Değerlendirilmesi

Sınır Şartı Tipleri

Toplam potansiyel enerji bir cisim için, $\Pi = 0.5\, Q^T KQ - Q^T F$ olur. Minimum potansiyel enerji teoremine göre, bir yapı sisteminin sınır şartlarını gerçekleştiren bütün mümkün olan yer değiştirmeler toplam potansiyel enerjiyi minimum yapar. Bunun sonucu olarak sınır şartlarına tabi potansiyel enerji Q ya göre minimize edilerek denge denklemleri elde edilebilir.

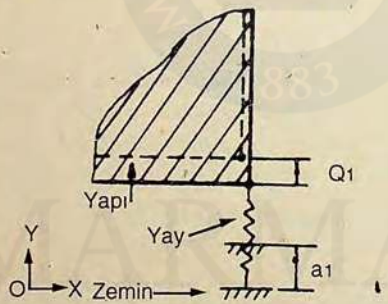
Sınır şartları genellikle $Q_{p_1} = a_1$,... şeklindedir. Yani p_1... serbestlik dereceleri boyunca yer değiştirmeler sırasıyla a_1 ..., a_r ye eşitlenerek belirlenir. Yani yapıda r adet mesnet vardır ve her mesnet noktasının yer değiştirmesi verilir. Mesela Şekil 12.2 deki çubukta bir sınır şartı vardır ve $Q_1 = 0$ dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çok noktalı kısıtlar, $\beta_1 Q_{p_1} + \beta_2 Q_{p_2} = \beta_0$ tipindedir. Burada β lar bilinen sabitlerdir. Bu tip sınır şartları eğik kayar mesnetlerin, rijit bağlantıların veya pres geçmelerin modellenmesinde kullanılır. Sınır şartlarının uygun olmayan şekilde tanımlanmasının yanlış sonuç vereceği unutulmamalıdır. Sınır şartları yapının rijit cisim hareketi yapması ihtimalini ortadan kaldırmaktadır. Ayrıca sınır şartlarının fiziki sistemi doğru modellemesi gerekmektedir. Bunlardan eliminasyon ve ceza yaklaşımları kullanılmaktadır. Çok noktalı kısıtlar için ceza yaklaşımının kullanılması daha kolaydır.

Ceza yaklaşımı için önce belirli yer değiştirme sınır şartalarını inceleyelim. $Q_1 = a_1$ olsun. Burada a_1 SD bire eşit olan mesnet boyunca bilinen belirli yer değiştirmedir.

C yay katsayısı büyük olan bir yay, mesnetin modellenmesinde kullanılır. Bu halde yayın bir ucu a_1 kadar yer değiştirmektedir (Şekil 12.12). SD 1 boyunca Q_1 yer değiştirmesi yaklaşık olarak a_1



Şekil 12.12

değerine eşit olacaktır. Yapının verdiği izafi olarak küçük bir direnç bulunacaktır. Neticede yayın net uzaması = $Q_1 - a_1$ olur.

Yaydaki şekil değiştirme enerjisi,

$$U_S = 0.5\, C(Q_1 - a_1)^2 \qquad 12.45$$

olur. Sonuçta,

$$\Pi_M = 0.5\, Q^T KQ + 0.5\, C\,(Q_1 - a_1)^2 - Q^T F \qquad 12.46$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Minimize etmek için Q ya göre türev alınır ve nihayet sonlu eleman denklemleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{bmatrix} (K_{11}+C) & K_{12} \ldots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} \ldots & K_{2N} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \ldots \\ Q_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 + Ca_1 \\ F_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_N \end{Bmatrix} \qquad 12.47$$

Yukarda görüldüğü gibi $Q_1 = a_1$ in elde edilmesi için K matrisinin ilk köşegen elemanına C büyük sayısı ve F_1 için Ca_1 ilave edilmektedir. Denklem 12.47 çözülerek Q yer değiştirme vektörü bulunur. Düğüm noktası 1 deki reaksiyon kuvveti, yayın yapı üzerinde meydana getirdiği kuvvete eşittir. Yayın net uzaması $Q_1 - a_1$ ve yay katsayısı C olduğundan reaksiyon kuvveti,

$$R_1 = -C(Q_1 - a_1) \qquad 12.48$$

olur. Denklem 12.47 de verilen K ve F nin modifikasyonu Galerkin yaklaşımı ile de türetilebilir. $Q_1 = a_1$ sınır şartını inceleyelim. Bunun için büyük C yay katsayılı bir yayı mesnetten a_1 yer değiştirme verecek şekilde ithal edelim. Keyfi bir ψ yer değiştirmesinin sonucu olarak yay tarafından yapılan iş,

δW_S = virtüel yer değiştirme x yaydaki kuvvet

veya

$$\delta W_S = \psi_1 C((Q_1 - a_1) \qquad 12.49$$

olur. Böylece varyasyonel form,

$$\psi^T(KQ - F) + \psi_1 C((Q_1 - a_1) = 0 \qquad 12.50$$

olarak bulunur, bu herhangi bir ψ için geçerli olmalıdır.
$\psi = [1,..,0]$, $\psi = [0, 1,..,0]$,..., $\psi = [0,..,1]$,seçilerek ve denklem 12.49 da yazılarak 12.46 denklemindeki modifikasyon bulunur. Ceza yaklaşımını özetlemek için,

$Q_{p_1} = a_1, Q_{p_2} = a_2, .., Q_{p_r} = a_r$ sınır şartlarını inceleyelim.

1. K yapı katılık matrisinin köşegen elemanlarına büyük sayı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C eklenerek modifikasyon yapılır. Yine global yük vektörü F nin modifikasyonu için Ca_1 değerine Fp_1 ve Ca_2 değerine Fp_2 ... eklenir. KQ = F yer değiştirme Q için çözülür. Burada K ve F modifiye edilmiş katılık ve yük matrisleridir.

2. Her eleman için eleman bağlama durumu kullanılarak Q vektöründen q yer değiştirme vektörü çıkarılır ve elemandaki gerilmeler tayin edilir.

3. Aşağıdaki gibi her mesnetteki reaksiyon kuvveti değerlendirilir:

$$Rp_i = -C\,(Qp_i - a_i)\;(i = 1,2,...,r) \qquad 12.51$$

Ceza yaklaşımının takribi bir yaklaşım olduğu unutulmamalıdır. Çözümün özellikle reaksiyon kuvvetlerinin doğruluk derecesi seçilen C ye bağlıdır.

C nin seçimi : 12.46 daki ilk denklem açılarak,

$$(K_{11} + C)\,Q_1 + K_{12}\,Q_2 + \ldots + K_{1N}\,Q_N = F_1$$

bulunur. C ye bölünürse,

$$\left(\frac{K_{11}}{C} + 1\right) Q_1 + \frac{K_{12}}{C} Q_2 + \ldots + \frac{K_{1N}}{C} Q_N = \frac{F_1}{C} + a_1$$

olur.

Yukardaki denklemden görüldüğü gibi C yeteri kadar büyük seçilirse $Q_1 \approx a_1$ olur. Özel olarak eğer C katılık katsayıları $K_{11}, \ldots, K_{1N}$ ile mukayese edildiğinde büyük ise $Q_1 \approx a_1$ bulunur. Mesnete uygulanan F_1 kuvveti varsa F_1 / C genellikle küçük şiddette olur. C nin şiddetinin seçimi için aşağıdaki öneri verilebilir:

$$C = \text{maksimum} \mid K_{ij} \mid * 10^4 \qquad 12.52$$

$$1 \le i \le N$$

$$1 \le j \le N$$

Birçok bilgisayar üzerinde 10^4 değerinin tatmin edici olduğu bulunur. Reaksiyon kuvvetindeki farkın büyük olup olmadığını tahkik için örnek bir problem seçilerek mesela 10^5 gibi bir değer denenebilir.

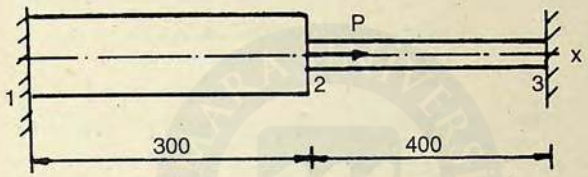
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 12.3. Şekil 12.12 deki çubuğa P = 200 kN eksenel yükü uygulanmaktadır. Sınır şartlarını elde etmek için ceza yaklaşımını kullanarak,

a. Düğüm noktalarının yer değiştirmelerini,

b. Her malzemedeki gerilmeyi ve

c. Reaksiyon kuvvetlerini hesaplayınız.



$A_1 = 2400\ mm^2$ $A_1 = 2400\ mm^2$

$E_1 = 70GPa$ $E_1 = 200GPa$

Şekil 12.13

Çözüm:

a. Eleman katılık matrisleri,

$$k^1 = \frac{70\,000*2400}{300} \begin{matrix} 1 & 2 \\ \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Global SD}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k^2 = \frac{200\,000*600}{400} \begin{matrix} 2 & 3 \\ \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Global SD}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bunların montajıyla yapı katılık matrisi bulunur:

$$K = 10^6 \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 0.56 & -0.56 & 0 \\ 0.56 & -0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & 0.30 \end{bmatrix}$$

Global yük vektörü, $F = [\,0 \quad 200\,000 \quad 0\,]^T$ olur.

1 ve 3 ün serbestlik dereceleri sabitlenir. Ceza yaklaşımı kullanıldığından K nın köşegeninin birinci ve üçüncü elemanlarına C büyük sayısı eklenir. Denklem 12.51 den $C = (0.86*10^6)*10^4$ bulunur.

Böylece modifiye edilmiş katılık matrisi,

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & 8600.30 \end{bmatrix}$$

olur. Sonlu eleman denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.30 \\ 0 & -0.30 & 8600.30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200\,000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Çözümü, $Q = [\ 15.1432*10^{-6} \quad 0.23257 \quad 8.1127*10^{-6}]^T$ mm verir.

b. Eleman gerilmeleri,

$$\sigma_1 = \frac{70\,000*10^3}{300} [\ -1 \quad 1\ ] \begin{Bmatrix} 15.1423*10^{-6} \\ 0.23257 \end{Bmatrix}$$

$\sigma_1 = 54.27$ MPa

$$\sigma_2 = \frac{200\,000*10^3}{400} [\ -1 \quad 1\ ] \begin{Bmatrix} 0.23257 \\ 8.1127*10^{-6} \end{Bmatrix}$$

$\sigma_2 = -116.29$ MPa

olur.

c. Reaksiyon kuvvetleri,

$R_1 = -CQ_1 = -[\ 0.86*10^{10}\ ]\ 15.1432*10^{-6} = -130\ 230$ N

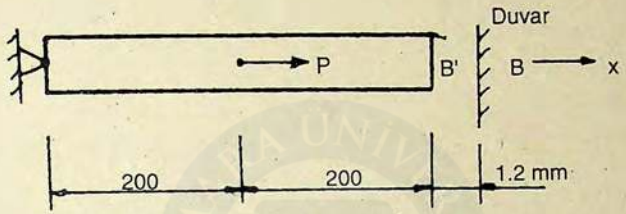
$R_3 = -CQ_3 = -[\ 0.86*10^{10}\ ]\ 8.1127*10^{-6} = -69\ 770$ N

olarak bulunur.

PROBLEMLER

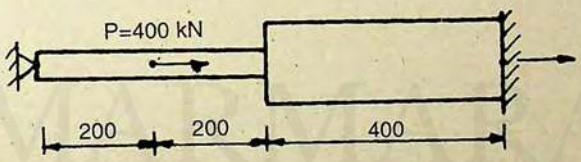
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

12.1 Şekil 12.14 deki kesiti A = 300 mm^2 olan çubuğa P = 60 kN eksenel yükü uygulanmaktadır. Yer değiştirme alanını, cisimdeki gerilme ve mesnet reaksiyonlarını hesaplayınız. E = 20 GPa olarak verilmektedir.



Şekil 12.14

12.2 Şekil 12.15 elemanda düğüm noktası yer değiştirmelerini, eleman gerilmelerini ve mesnet reaksiyonlarını tayin ediniz E = 200 GPa olarak verilmektedir.

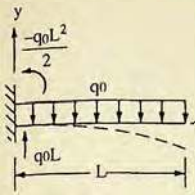


$A_1 = 300\ mm^2$ $A_2 = 500\ mm^2$

Şekil 12.15

MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

Ek 1 Kirişlerin sehim ve eğimleri



Sehim

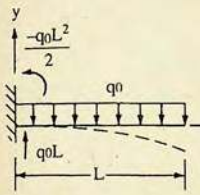
$$y = -\frac{P}{6EI}(3Lx^2 - x^3)$$

$$y_{max} = y(L) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

Eğim

$$\Theta = -\frac{P}{2EI}(2Lx - x^2)$$

$$\Theta(L) = -\frac{PL^2}{2EI}$$

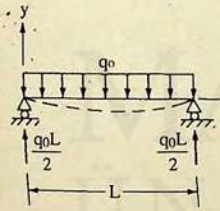


$$y = -\frac{q_0}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$$

$$y_{max} = y(L) = -\frac{q_0L^4}{8EI}$$

$$\Theta = -\frac{q_0}{6EI}(3Lx^2 - 3Lx^2 + x^3)$$

$$\Theta(L) = -\frac{q_0L^3}{6EI}$$

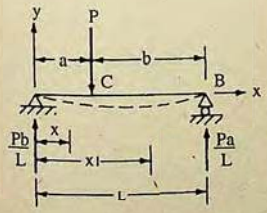


$$y = -\frac{q_0x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$$

$$y_{max} = y(\frac{L}{2}) = -\frac{5q_0L^4}{384EI}$$

$$\Theta = -\frac{q_0}{24EI}(L^3 - 6Lx^2 + 4x^3)$$

$$\Theta(L) = \Theta(0) = \frac{q_0L^3}{24EI}$$



$$y_{AC} = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2x - b^2x - x^3)$$

$$y_{CB} = -\frac{Pa}{6EIL}(2Lx_1 - a^2 - x_1^2)$$

$$\Theta_{AC} = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2 - 3x^2)$$

$$\Theta_{CB} = -\frac{Pa}{6EIL}(2L^2 + a^2 - 6Lx_1 + 3x_1^2)$$

$a = b = L/2,$

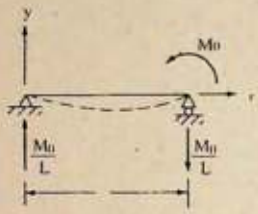
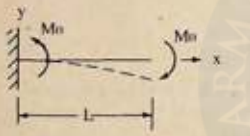
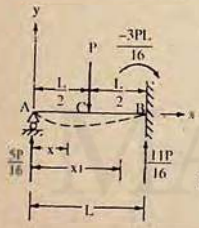
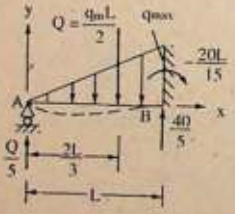
$$y_{AC} = -\frac{P}{4EI}\left(\frac{L^2x}{4} - \frac{x^3}{3}\right)$$

$a = b = L/2,$

$$\Theta_{AC} = -\frac{P}{4EI}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

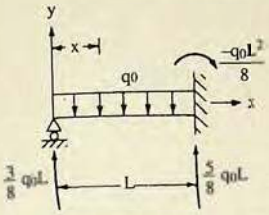
Ek 1 (devam)

	Sehim	Eğim
	$y = -\frac{M_0 x}{6EIL}(L^2 - x^2)$	$\Theta = -\frac{M_0}{6EIL}(L^2 - 3x^2)$ $\Theta(0) = -\frac{M_0 L}{6EI}$ $\Theta(L) = \frac{M_0 L}{3EI}$
	$y = -\frac{M_0 x^2}{2EI}$ $y(L) = -\frac{M_0 L^2}{2EI}$	$\Theta(0) = -\frac{M_0 x}{EI}$ $\Theta(L) = -\frac{M_0 L}{EI}$
	$y_{AC} = -\frac{PL^3}{32EI}\left(\frac{x}{L} - \frac{5x^3}{3L^3}\right)$ $y_{CB} = y_1 = -\frac{PL^3}{32EI}\left(\frac{-x_1}{4L} - \frac{5x_1^3}{2L^2} + \frac{11x_1^3}{3L^3} + \frac{7}{24}\right)$ $y\left(\frac{L}{2}\right) = y_C = -\frac{7PL^3}{768EI}$	$\Theta_{AC} = -\frac{PL^2 x}{32EI}\left(1 - \frac{5x^2}{L^2}\right)$ $\Theta_{CB} = -\frac{PL^2}{32EI}\left(\frac{11x_1^2}{L^2} - \frac{5x_1}{L^2} + \frac{1}{4}\right)$ $\Theta\left(\frac{L}{2}\right) = \Theta(C) = \frac{PL^2}{128EI}$
	$y = -\frac{QL^3}{60EI}\left(\frac{x}{L} - \frac{2x^3}{L^3} + \frac{x^5}{L^5}\right)$	$\Theta = -\frac{QL^2}{12EI}\left(\frac{1}{5} - \frac{6x^2}{5L^2} + \frac{x^4}{L^4}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 1 (devam)

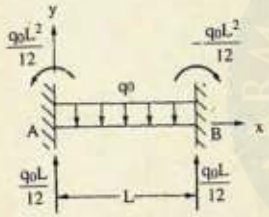
	Sehim	Eğim



$$y = -\frac{q_0L^4}{48EI}\left(\frac{x}{L} - \frac{3x^3}{L^3} + \frac{2x^4}{L^4}\right) \qquad \Theta = -\frac{q_0L^3}{48EI}\left(1 - \frac{9x^2}{L^2} + \frac{8x^3}{L^3}\right)$$

$$x = 0.4215L,$$

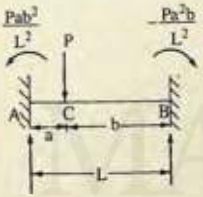
$$y_{min} = -\frac{q_0L^4}{185EI}$$



$$M_A = \frac{q_0L^2}{12} = -M_B \qquad \Theta = -\frac{q_0L^3}{6EI}\left(\frac{x}{2L} - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{L^3}\right)$$

$$y = -\frac{q_0L^4}{24EI}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right.$$

$$y_{max} = -\frac{q_0L^4}{384EI}$$



$$M_A = \frac{Pab^2}{L^2}; M_B = \frac{Pa^2b}{L^2} \qquad \Theta = -\frac{Pb^2}{6EIL^3}(6axL - 9ax^2 - 3bx^2) \quad (x < a)$$

$$M_z = R_Ax - \frac{Pab^2}{L^2} \quad (x < a)$$

$$y = -\frac{Pb^2x^2}{6EIL^3}(3aL - 3ax - bx) \quad (x < a)$$

$$R_A = \frac{Pb^2}{2L^2}(a + 2L)$$

$$R_B = \frac{Pa}{2L^3}(3L^2 - a^2)$$

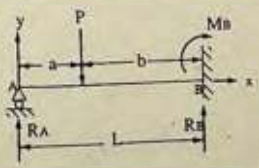
$$M_A = 0; M_B = \frac{-Pab(a + L)}{2L^2}$$

$$M_x = R_Ax \quad (x < a)$$

$$M_x = R_Ax - P(x - a) \quad (x > a)$$

$$y = -\frac{Pb^2x}{12EIL^3}(3aL^2 - 2Lx^2 - ax^2) \quad (x < a)$$

$$y = -\frac{Pb}{12EIL^3}(L - x)^2(3L^2x - a^2x - 2a^2L) \quad (x > a)$$



$$\Theta' = \frac{-Pb^2}{12EIL^3}(3aL^2 - 6Lx^2 - 3ax^2) \quad (x < a)$$

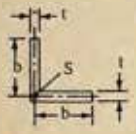
$$\Theta = \frac{-Pa}{12EIL^3}(3L^4 + 2a^2L^2 + 9L^2x^2 - 3a^2x^2) \quad (x > a)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

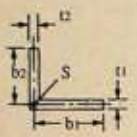
Ek 2 Burulma sabitleri

Kesit

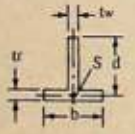
Genel $J = \sum_i b_i t_i^3/3$



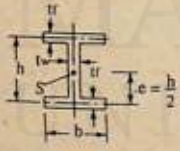
$$J = \frac{2bt^3}{3}$$



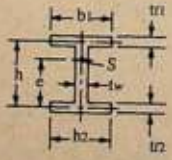
$$J = \frac{b_1t_1^3 + b_2t_2^3}{3}$$



$$J = \frac{bf^3 + dw^3}{3}$$



$$J = \frac{2bf^3 + hw^3}{3}$$

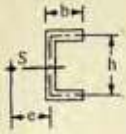


$$J = \frac{b_1f_1^3 + b_2f_2^3 + hw^3}{3}$$

$$f_1 = f_2 \quad e = \frac{hb_1^3}{b_1^3 + b_2^3}$$

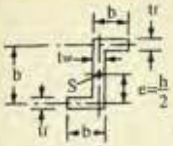
$$f_1 = f_2 = w = t \quad J_x = \frac{t^3}{3}(b_1 + b_2 + h)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$J = \frac{2bf^3 + hw^3}{3}$$

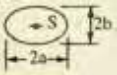
$$e = \frac{3b^2f}{6bf + hw}$$



$$J = \frac{2bf^3 + hw^3}{3}$$



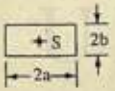
$$J = \frac{\pi r^4}{2}$$



$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$



$$J = 0.1406a^4$$



$$J = ab^3\left[\frac{16}{3} - 3.36\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{12a^4}\right)\right]$$



$$J = \frac{a^4\sqrt{3}}{80}$$

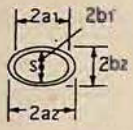


$$J = \frac{\pi(r_1^4 - r_1^4)}{2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 2 (devam)

Kesit



$$J = \frac{\pi^3 a_2^3 b_2^3}{a_2^2 + b_2^2}(1 - k^4)$$

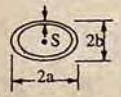
$$k = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



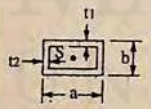
$$J = 8\pi r_{ort} t^3$$



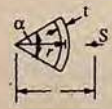
$$J = \frac{4A_m^2 t}{L}$$



$$J = \frac{4\pi^2 t[(a - \frac{1}{2}t^2)^2(b - \frac{1}{2}t)^2]}{\pi(a + b - t)[1 + 0.27(a - b)^2/(a + b)^2]}$$



$$J = \frac{2t_1t_2(a - t_2)^2(b - t_1)^2}{at_2 + bt_1 - t_2^2 - t_1^2}$$

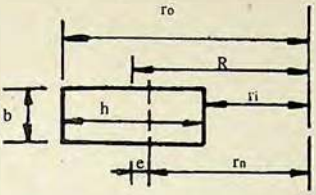


$$J = \frac{\alpha r t^3}{3}$$

$$e = 2r\frac{\sin(\alpha/2) - r\cos(\alpha/2)}{r - \sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)}$$

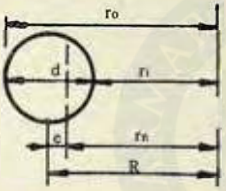
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 3 Bazı eğri eksenli kirişlerde sentroidal (R) ve tarafsız (r_n) eksenlerin yerleri.



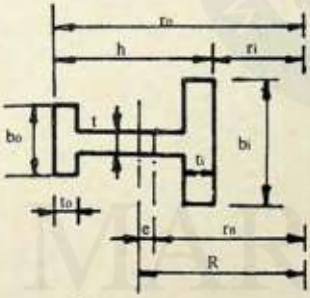
$$r_n = \frac{h}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$$

$$R = r_i + h/2$$



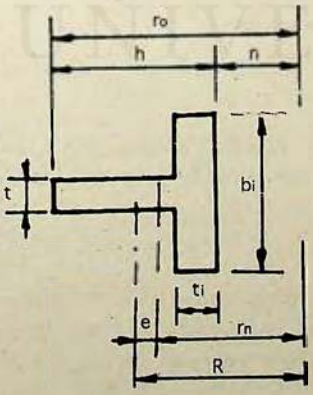
$$r_n = \frac{(\sqrt{r_o} + \sqrt{r_i})^2}{4}$$

$$R = r_i + d/2$$



$$r_n = \frac{(b_i - t)\,t_i + (b_o - t)t_o + th}{b_i \ln \frac{r_i + t_i}{r_i} + t \ln \frac{r_o - t_o}{r_i + t_i} + b_o \ln \frac{r_o}{r_o - t_o}}$$

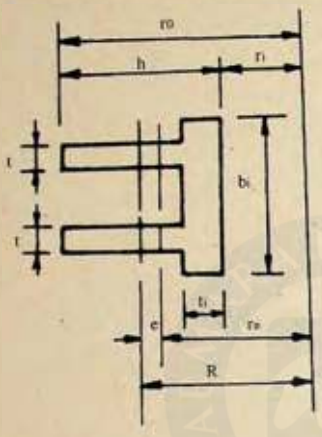
$$R = r_i + \frac{h^2t/2 + t_i^2(b_i - t)/2 + (b_o - t)t_o(h - t_o/2)}{(b_i - t)\,t_i + (b_o - t)\,t_o + th}$$



$$r_n = \frac{(b_i - t)\,t_i + th}{(b_i - t)\ln\frac{r_i + t_i}{r_i} + t\ln\frac{r_o}{r_i}}$$

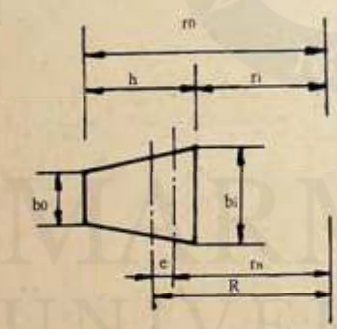
$$R = r_i + \frac{h^2t/2 + t_i^2(b_i - t)/2}{ht + (b_i - t)t_i}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



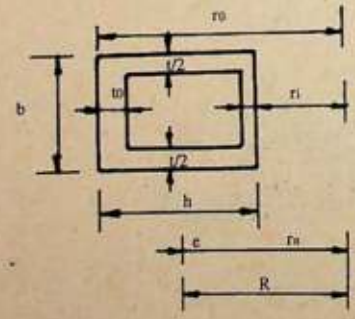
$$r_n = \frac{b_i\ t_i + 2\,(h - t_i)t}{2t\,\ln\frac{r_o}{r_i + t_i} + b_i\,\ln\frac{r_i + t_i}{r_i}}$$

$$R = r_i + \frac{b_i\ t_i^2/2 + 2(h - t_i)\,t(t_i + \dfrac{h - t_i}{2}}{b_i\ t_i + 2(h - t_i)t}$$



$$r_n = \frac{(b_i + b_o)h/2}{[(b_i r_o - b_o r_i)/h]\ln\frac{r_o}{r_i} - (b_i - b_o)}$$

$$R = r_i + \frac{h(b_i + 2b_o)}{3(b_i + b_o)}$$



$$r_n = \frac{(b - t)\,(t_i + t_o) + th}{b(\ln\frac{r_i + t_i}{r_i} + \ln\frac{r_o}{r_o - t_o}) + t\,\ln\frac{r_o - t_o}{r_i + t_i}}$$

$$R = r_i + \frac{h^2\,t/2 + t_i^2\,(b - t)/2 + (b - t)\,t_o(h - t_o/2)}{ht + (b - t)\,(t_i + t_o)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

Ek 4 Amerikan çelik profilleri

Gösteriliş	Kesit	Yük.	Flanş		Perde	X-X			Y-Y		
			Gen.	Kal.		I	I/c	r	I	I/c	r
						$X10^6$	$X10^3$		$X10^6$	$X10^3$	
	mm^2	d, mm	mm	mm		mm^4	mm^3	mm	mm^4	mm^3	mm
S 610 X 179	22 770	610	204	28.0	20.3	1260	4140	235	35.0	343	39.2
X 157.6	20 060	610	200	28.0	15.9	1180	3860	242	32.5	325	40.3
X 149	18 970	610	184	22.1	19.0	995	3260	229	19.9	216	32.4
X 134	17 100	610	181	22.1	15.8	937	3070	234	18.7	207	33.1
X 118.9	15 160	610	178	22.1	12.7	878	2880	241	17.6	198	34.1
S 510 X 141	18 000	508	183	23.3	20.3	670	2640	193	20.7	226	33.9
X 127	16 130	508	179	23.3	16.6	633	2490	198	19.2	215	34.5
X 112	14 260	508	162	20.1	16.3	533	2100	193	12.3	152	29.4
X 97.3	12 390	508	159	20.1	12.7	491	1930	199	11.4	144	30.3
S 460 X 104	13 290	457	159	17.6	18.1	385	1590	170	10.0	126	27.5
X 81.4	10 390	457	152	17.6	11.7	335	1460	179	8.66	114	28.9
S 380 X 74	9 480	381	143	15.8	14	202	1060	146	6.53	91.2	26.3
X 64	8 130	381	140	15.8	10.4	186	977	151	5.99	85.8	27.2
S 310 X 74	9 480	305	139	16.8	17.4	127	833	116	6.53	94.0	26.3
X 60.7	7 740	305	133	16.8	11.7	113	743	121	5.66	84.9	27.0
X 52	6 640	305	129	13.8	10.9	95.3	625	120	4.11	63.7	24.9
X 47.3	6 032	305	127	13.8	8.9	90.7	595	123	3.90	61.4	25.4
S 250 X 52	6 640	254	126	12.5	15.1	61.2	482	96.0	3.48	55.4	22.9
X 37.8	4 806	254	118	12.5	7.9	51.6	406	104	2.83	47.7	24.2
S 200 X 34	4 368	203	106	10.8	11.2	27.0	266	78.6	1.79	33.9	20.3
X 27.4	3 484	203	102	10.8	6.9	24.0	236	82.9	1.55	30.6	21.1
S 180 X 30	3 794	178	97	10.0	11.4	17.7	199	68.2	1.32	26.9	18.7
X 22.8	2 890	178	92	10.0	6.4	15.3	172	72.5	1.10	23.6	19.5
S 150 X 25.7	3 271	152	90	9.1	11.8	11.0	144	57.9	0.961	21.2	17.1
X 18.6	2 362	152	84	9.1	5.8	9.2	121	62.3	0.758	17.9	17.9
S 130 X 22.0	2 800	127	83	8.3	12.5	6.33	99.6	47.5	0.695	16.7	15.8
X 15	1 884	127	76	8.3	5.3	5.12	80.6	52.0	0.508	13.3	16.4
S 100 X 14.1	1 800	102	70	7.4	8.3	2.83	55.6	39.6	0.376	10.6	14.5
X 11.5	1 452	102	67	7.4	4.8	2.53	49.8	41.7	0.318	9.4	14.8
S 75 X 11.2	1 426	76	63	6.6	8.9	1.22	32.0	29.2	0.244	7.66	13.1
X 8.5	1 077	76	59	6.6	4.3	1.05	27.5	31.2	0.189	6.4	13.3

Not : Gösterilişte birinci sayı yüksekliği, ikinci sayı kütleyi ifade etmektedir. Mesela S 610 x 179 için 610 mm ve 179 kg/m anlaşılmaktadır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 4 (Devam)



Gösteriliş	Kesit	Yük.	Flanş		Perde	X-X			Y-Y		
			Gen.	Kal.		I	$\frac{I}{c}$	r	I	$\frac{I}{c}$	r
	mm^2	d, mm	mm	mm		$X10^6$ mm^4	$X10^3$ mm^3	mm	$X10^6$ mm^4	$X10^3$ mm^3	mm
W 920 X 342	43 680	911	418	32.0	19.3	6240	13 700	378	391	1870	94.6
X 223	28 520	910	304	23.9	15.9	3760	8 260	363	112	739	62.8
W 840 X 298	38 000	838	400	29.2	18.2	4620	11 000	349	312	1560	90.6
X 193	24 710	841	292	21.7	14.7	2790	6 640	336	90.7	621	60.6
W 760 X 256	32 710	759	381	27.1	16.6	3290	8 680	317	249	1310	87.2
X 161	20 520	757	266	19.3	13.9	1860	4 910	301	60.8	456	54.4
W 690 X 216	27 550	683	355	24.8	15.2	2260	6 620	286	184	1040	81.8
X 140	17 870	684	254	19.0	12.4	1360	3 980	276	51.6	407	53.7
W 610 X 193	24 710	616	356	22.9	14.4	1670	5 430	260	172	965	83.3
X 149	19 030	610	305	19.7	11.9	1250	4 100	256	92.8	609	69.8
X 113	14 450	607	228	17.3	11.2	874	2 880	246	34.4	301	48.8
W 530 X 167	21 290	533	330	22.0	13.4	1090	4 090	226	132	799	78.7
X 122	15 610	530	228	20.2	12.7	733	2 770	217	39.8	350	50.5
X 92	11 810	533	209	15.6	10.2	554	2 080	217	23.9	229	45.0
X 82	10 450	528	209	13.3	9.5	475	1 800	213	20.1	193	43.9
W 460 X 143	18 190	461	298	21.1	13.0	699	3 030	196	93.7	628	71.7
X 95	12 190	454	221	17.4	10.2	437	1 930	189	31.6	285	50.9
X 82	10 450	460	191	16.0	9.9	371	1 610	188	18.7	196	42.3
X 74	9 480	457	191	14.5	9.1	334	1 460	188	16.7	176	42.0
X 67	8 520	454	190	12.7	8.5	294	1 300	186	14.5	153	41.2
X 52	6 640	450	152	10.9	7.6	214	949	179	6.45	84.7	31.2
W 410 X 143	18 190	415	293	22.2	13.6	566	2 730	176	93.2	637	71.6
X 131	16 710	410	292	20.2	12.8	508	2 470	174	84.1	576	70.9
X 80	11 030	403	215	16.4	10.3	311	1 550	168	27.2	253	49.6
X 74	9 480	413	180	16.0	9.7	273	1 330	170	15.4	172	40.4
X 54	6 840	403	178	10.9	7.6	186	924	165	10.2	114	38.5
X 39	4 950	398	140	8.8	6.4	125	628	159	3.99	57.2	28.4
W 360 X 476	60 710	427	424	53.2	48	1720	8 070	168	683	3220	106
X 202	25 580	375	374	27.0	16.8	662	530	160	236	1260	95.7
X 130	16 520	356	368	17.5	10.7	403	2 260	156	146	791	93.9
X 125	15 940	360	305	19.8	11.5	386	2 140	156	93.7	613	76.7
X 116	14 770	357	305	18.2	10.9	354	1 980	155	86.2	565	76.4
X 110	14 060	360	256	19.9	11.4	332	1840	154	55.4	433	62.7
X 101	12 900	357	255	18.2	10.6	301	1690	153	50.4	395	62.5

Not : Gösterilişte birinci sayı yüksekliği ikinci sayı kütleyi ifade etmektedir. W 920 X 342 için 920mm ve 342 kg/m anlaşılmaktadır.

Ek 4 (Devam)

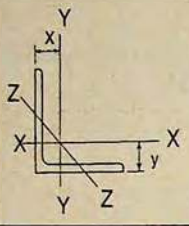
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Gösteriliş	Kesit	Yük.	Flanş Gen.	Flanş Kal.	Perde	X-X I	X-X I/c	X-X r	Y-Y I	Y-Y I/c	Y-Y r
	mm²	d, mm	mm	mm		X10⁶ mm⁴	X10³ mm³	mm	X10⁶ mm⁴	X10³ mm³	mm
W 360 X 91	11 550	353	254	16.3	9.6	267	1510	152	44.5	351	62.1
X 79	10 060	354	205	16.7	9.4	226	1270	150	23.9	234	48.8
X 64	8 130	347	203	13.4	7.8	179	1030	148	18.8	185	48.1
X 57	7 230	359	172	13.0	8.0	161	896	149	11.1	129	39.1
X 51	6 450	356	171	11.5	7.3	142	796	148	9.7	113	38.8
X 45	5 700	352	171	9.7	6.9	121	686	146	8.12	94.9	37.8
W 310 X 126	16 130	317	307	20.2	12.6	301	1900	137	97.8	636	77.9
X 97	12.320	308	305	15.4	9.9	222	1440	134	72.8	478	76.9
X 79	10 060	306	254	14.6	8.8	177	1160	133	40.0	315	63.0
X 60	7 610	303	203	13.1	7.5	129	851	130	18.4	181	49.1
X 54	6 840	311	167	13.7	7.7	117	752	131	10.6	127	39.4
X 46	5 890	307	166	11.8	6.7	99.5	648	130	8.99	108	39.1
X 40	5 129	304	165	10.2	6.0	84.9	559	129	7.62	92.3	38.5
W 250 X 167	21 230	289	265	31.7	19.2	299	2070	119	97.8	740	67.9
X 149	18 970	282	263	28.4	17.4	260	1840	117	86.2	656	67.4
X 132	16 900	276	261	25.3	15.6	226	1630	116	75.3	577	66.8
X 115	14 640	270	259	22.0	13.6	190	1410	114	63.7	492	65.9
X 89	11 420	260	256	17.3	10.5	143	1100	112	48.3	377	65.3
X 73	9 290	254	254	14.2	8.6	114	895	110	38.7	305	64.5
X 67	8 520	257	204	15.7	8.9	104	806	110	22.1	217	51.0
X 58	7 420	252	203	13.4	8.1	87.4	692	109	18.7	184	50.2
X 49	6 265	248	202	11.0	7.4	71.2	575	107	15.2	150	49.2
X 43	5 510	260	147	12.7	7.3	65.8	507	109	6.78	92.1	35.1
X 31	4 000	251	146	8.6	6.1	44.5	354	106	4.50	61.6	33.5
W 200 X 100	12 710	229	210	23.7	14.6	113	991	94.4	36.9	350	53.9
X 86	11 030	222	209	20.5	13.0	94.5	850	92.5	31.2	299	53.2
X 71	9 100	216	206	17.3	10.3	76.6	709	91.8	25.3	246	52.8
X 60	7 610	210	205	14.2	9.3	60.8	580	89.3	20.4	199	51.8
X 52	6 640	206	204	12.5	8.0	52.4	509	88.8	17.7	174	51.6
X 46	5 884	203	203	11.0	7.3	45.8	451	88.2	15.4	152	51.2
X 42	5 310	205	166	11.8	7.2	40.7	398	87.6	8.99	108	41.1
X 36	4 555	201	165	10.1	6.2	34.3	341	86.8	7.58	91.8	40.8
X 30	3 800	207	134	9.6	6.3	28.9	279	87.2	3.84	57.4	31.8
X 25	3 232	203	133	7.8	5.8	23.6	232	85.4	3.10	46.4	31.0

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 4 Devam



			X-X veya Y-Y				Z-Z
Gösteriliş	Kütle	Kesit	I	$\frac{I}{c}$	r	x veya y	r
			$X10^6$	$X10^3$			
mm	kg/m	mm^2	mm^4	mm^3	mm	mm	mm
L 203 X 203 X 28.6	84.7	10 770	40.8	287	61.5	61.2	39.6
X 25.4	75.9	9 680	37.0	259	61.9	60.2	39.6
X 22.2	67.0	8 520	33.1	230	62.4	58.9	39.9
X 19.0	57.9	7 360	29.0	200	62.8	57.9	40.1
X 15.9	48.7	6 200	24.7	169	63.1	56.6	40.1
X 14.3	44.0	5 600	22.5	153	63.4	56.1	40.4
X 12.7	39.3	5 000	20.2	137	63.6	55.6	40.4
L 125 X 152 X 25.4	55.7	7 100	14.8	141	45.6	47.2	29.7
X 22.2	49.3	6 277	13.3	125	46.0	46.2	29.7
X 19.0	42.7	5 445	11.7	110	46.4	45.2	29.7
X 15.9	36.0	4 587	10.1	92.9	46.9	43.9	30.0
X 14.3	32.6	4 148	9.2	84.4	47.1	43.4	30.0
X 12.7	29.2	3 710	8.28	75.5	47.3	42.7	30.0
X 11.1	25.6	3 265	7.37	66.8	47.5	42.2	30.2
X 9.5	22.2	2 813	6.41	57.9	47.7	41.7	30.6
X 7.9	18.5	2 355	5.41	48.6	47.9	41.1	30.5
L 127 X 127 X 22.2	40.5	5 148	7.41	85.0	37.9	39.9	24.7
X 19.0	35.1	4 477	6.53	73.9	38.2	38.6	24.8
X 15.9	29.8	3 781	5.66	63.3	38.7	37.6	24.8
X 12.7	24.1	3 065	4.7	51.9	39.2	36.3	25.0
X 11.1	21.3	2 697	4.16	45.6	39.3	35.8	25.0
X 9.5	18.3	2 329	3.64	39.7	39.5	35.3	25.1
X 7.9	15.3	1 955	3.09	33.5	39.7	34.8	25.2

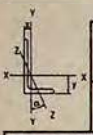
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 4 (Devam)

Gösteriliş	Kütle	Kesit	X-X veya Y-Y				Z-Z
			I	$\frac{I}{c}$	r	x veya y	r
			$X10^6$	$X10^3$			
mm	kg/m	mm^2	mm^4	mm^3	mm	mm	mm
L 102 X 102 X 19.0	27.5	3 510	3.19	46.0	30.2	32.3	19.8
X 15.9	23.4	2 974	2.77	39.4	30.5	31.2	19.8
X 12.7	19.0	2 419	2.31	32.3	30.9	30.0	19.9
X 11.1	16.8	2 135	2.07	28.7	31.1	29.5	19.9
X 9.5	14.6	1 845	1.81	25.0	31.4	29.0	20.0
X 7.9	12.2	1 548	1.54	21.1	31.6	28.4	20.1
X 6.4	9.8	1 252	1.27	17.1	31.8	27.7	20.2
L 89 X 89 X 12.7	16.5	2 097	1.52	24.4	26.9	26.9	17.3
X 11.1	14.6	1 852	1.36	21.7	27.1	26.4	17.4
X 9.5	12.6	1 600	1.19	18.9	27.3	25.7	17.4
X 7.9	10.7	1 348	1.02	16.0	27.5	25.1	17.5
L 89 X 89 X 6.4	8.6	1 090	0.837	13.0	27.7	24.6	17.6
L 76 X 76 X 12.7	14.0	1 774	0.924	17.6	22.8	23.7	14.8
X 11.1	12.4	1 568	0.828	15.6	23.0	23.1	14.9
X 9.5	10.7	1 361	0.733	13.7	23.2	22.6	14.9
X 7.9	9.1	1 148	0.629	11.6	23.4	22.1	15.0
X 6.4	7.3	929	0.516	9.42	23.6	21.4	15.0
X 4.8	5.5	703	0.400	7.23	23.9	20.8	15.1
L 64 X 64 X 12.7	11.4	1 452	0.512	11.9	18.8	20.5	12.4
X 9.5	8.7	1 116	0.41	9.28	19.2	19.4	12.4
X 7.9	7.4	942	0.353	7.9	19.4	18.8	12.4
X 6.4	6.1	768	0.293	6.46	19.5	18.2	12.5
X 4.8	4.6	581	0.228	4.96	19.8	17.6	12.6

MUKAVEMET

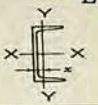
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Gösteriliş	Kütle	Kesit	X-X				Y-Y				Z-Z	
			I	I/c	r	y	I	I/c	r	x	r	tan α
			$X10^6$	$X10^3$			$X10^6$	$X10^3$			e	
mm	kg/m	mm^2	mm^4	mm^3	mm	mm	mm^4	mm^3	mm	mm	mm	
L 203 X 152 X 25.4	65.5	8390	33.6	247	63.3	67.3	16.1	146	43.9	41.9	32.5	.543
X 19.0	50.1	6413	26.4	191	64.1	65.0	12.8	113	44.6	39.6	32.8	.551
X 12.7	34.1	4355	18.4	131	65.1	62.7	9.03	78.5	45.5	37.3	33.0	.558
L 203 X 102 X 25.4	55.4	7100	29.0	230	63.9	77.5	4.83	64.4	26.1	26.7	21.5	.247
X 19.0	42.5	5445	22.9	178	64.8	74.9	3.90	50.3	26.8	24.2	21.6	.258
X 12.7	29.0	3710	16.0	123	65.7	72.6	2.81	35.2	27.5	21.8	22.0	.267
L 152 X 102 X 19.0	35.0	4477	10.2	102	47.7	52.8	3.61	48.7	28.4	27.4	21.8	.428
X 12.7	24.0	3065	7.24	71.1	48.6	50.6	2.61	34.1	29.2	25.1	22.1	.440
L 127 X 76 X 12.7	19.0	2419	3.93	47.7	40.3	44.5	1.07	18.8	21.1	19.1	16.5	.357
X 9.5	14.5	1845	3.07	36.6	40.8	43.2	.849	14.6	21.5	17.9	16.6	.364
X 6.4	9.8	1252	2.13	25.1	41.2	42.2	.599	10.1	21.9	16.7	16.8	.371
L 102 X 89 X 12.7	17.6	2258	2.21	31.7	31.3	31.8	1.58	24.8	26.4	25.4	18.3	.750
X 9.5	13.5	1723	1.74	24.6	31.8	30.7	1.23	19.0	26.7	24.3	18.5	.755
X 6.4	9.2	1168	1.21	16.8	32.2	29.5	.870	13.2	27.3	23.1	18.6	.759
L 102 X 76 X 12.7	16.4	2097	2.10	31.0	31.7	33.8	1.01	18.6	21.9	21.9	16.2	.543
X 9.5	12.6	1600	1.65	23.9	32.1	32.5	.799	14.2	22.3	19.9	16.4	.551
X 6.4	8.6	1090	1.15	16.4	32.5	31.5	.566	9.84	22.8	18.7	16.5	.558
L 89 X 64 X 12.7	13.9	1774	1.35	23.1	27.6	30.5	.566	12.4	17.9	17.9	13.6	.486
X 11.1	12.3	1568	1.21	20.6	27.8	30.0	.512	11.1	18.1	17.3	13.6	.491
X 9.5	10.7	1361	1.07	17.9	28.0	29.5	.454	9.71	18.3	16.8	13.6	.496
X 7.9	9.0	1148	.912	15.2	28.2	29.0	.391	8.26	18.4	16.2	13.7	.501
X 6.4	7.3	929	.749	12.3	28.4	28.2	.323	6.75	18.7	15.6	13.8	.506
L 76 X 64 X 12.7	12.6	1613	.866	17.0	23.2	25.4	.541	12.2	18.3	19.1	13.2	.667
X 11.1	11.3	1426	.783	15.2	23.4	24.8	.491	10.9	18.6	18.5	13.2	.672
X 9.5	9.8	1239	.691	13.3	23.6	24.3	.433	9.50	18.7	17.9	13.3	.676
X 7.9	8.3	1045	.591	11.3	23.8	23.7	.374	8.10	18.9	17.3	13.3	.680
X 6.4	6.7	845	.487	9.18	24.0	23.1	.309	6.62	19.1	16.8	13.4	.684
X 4.8	5.1	643	.378	7.04	24.2	22.6	.240	5.08	19.3	16.2	13.5	.688
L 76 X 51 X 12.7	11.5	1452	.799	16.4	23.5	27.4	.280	7.77	13.9	14.8	10.9	.414
X 11.1	10.1	1290	.720	14.6	23.6	26.9	.253	6.94	14.0	14.2	10.9	.421
X 9.5	8.8	1116	.637	12.8	23.9	26.4	.226	6.09	14.2	13.7	10.9	.428
X 7.9	7.4	942	.549	10.9	24.2	25.9	.196	5.19	14.4	13.1	11.0	.435
X 6.4	6.1	768	.454	8.90	24.3	25.2	.163	4.26	14.6	12.5	11.0	.440
X 4.8	4.6	582	.350	6.80	24.5	24.6	.128	3.29	14.8	11.9	11.2	.446
L 64 X 51 X 9.5	7.9	1000	.380	8.95	19.5	21.1	.214	5.94	14.6	14.8	10.7	.614
X 7.9	6.7	845	.328	7.64	19.7	20.5	.186	5.07	14.8	14.2	10.7	.620
X 6.4	5.4	684	.272	6.26	20.0	20.0	.155	4.17	15.0	13.6	10.8	.626
X 4.8	4.2	522	.212	4.81	20.1	19.4	.121	3.21	15.2	13.1	10.8	.631

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 4 (Devam)



Gösteriliş	Kesit	Yük.	Flanş		Perde	X-X			Y-Y			
			Gen.	Kal.		I	$\frac{I}{c}$	r	I	$\frac{I}{c}$	r	x
						X10⁶	X10³		X10⁶	X10³		
	mm²	d, mm²	mm	mm	mm	mm⁴	mm³	mm	mm⁴	mm³	mm	mm
C 380 X 74	9480	381	94	16.5	18.2	168	883	133	4.58	97.0	22.0	20.3
X 60	7610	381	89	16.5	13.2	145	763	138	3.84	85.9	22.5	19.8
X 50.4	6426	381	86	16.5	10.2	131	688	143	3.38	78.4	23.0	20.0
C 310 X 45	5690	305	80	12.7	13.0	67.4	442	109	2.14	53.1	19.4	17.1
X 37	4742	305	77	12.7	9.8	59.9	393	112	1.86	48.1	19.8	17.1
X 30.8	3929	305	74	12.7	7.2	53.7	352	117	1.61	43.2	20.3	17.7
C 250 X 45	5690	254	76	11.1	17.1	42.9	388	86.8	1.64	42.6	170	16.5
X 37	4742	254	73	11.1	13.4	38.0	299	89.5	1.40	38.2	17.2	15.7
X 30	3794	254	69	11.1	9.6	32.8	259	93.0	1.17	33.6	17.6	15.4
X 22.8	2897	254	65	11.1	6.1	28.1	221	98.4	0.949	28.7	18.1	16.1
C 230 X 30	3794	229	67	10.5	11.4	25.3	222	81.7	1.01	30.0	16.3	14.8
X 22	2845	229	63	10.5	7.2	21.2	186	86.4	0.803	25.5	16.8	14.9
X 19.9	2542	229	61	10.5	5.9	19.9	174	88.6	0.733	23.7	17.0	15.3
C 200 X 27.9	3555	203	64	9.9	12.4	18.3	180	71.8	0.824	25.7	15.2	14.4
X 20.5	2606	203	59	9.9	7.7	15.0	148	75.9	0.637	21.4	15.6	14.0
X 17.1	2118	203	57	9.9	5.6	13.6	134	78.9	0.549	19.1	15.9	14.5
C 180 X 22.0	2794	178	58	9.3	10.6	11.3	127	63.7	0.574	19.7	14.3	13.5
X 18.2	2323	178	55	9.3	8.0	10.1	113	65.9	0.487	17.5	14.5	13.3
X 14.6	1852	178	53	9.3	5.3	8.87	99.7	69.2	0.403	15.2	14.8	13.7
C 150 X 19.3	2471	152	54	8.7	11.1	7.24	95.0	54.1	0.437	16.0	13.3	13.1
X 15.6	1994	152	51	8.7	8.0	6.33	83.0	56.3	0.36	13.9	13.4	12.7
X 12.2	1548	152	48	8.7	5.1	5.45	71.6	59.3	0.288	11.8	13.6	13.0
C 130 X 13.4	1703	127	47	8.1	8.3	3.70	58.3	46.6	0.263	11.0	12.4	12.1
X 10.0	1271	127	44	8.1	4.8	3.12	49.1	49.5	0.199	8.95	12.5	12.3
C 100 X 10.8	1374	102	43	7.5	8.2	1.91	37.6	37.3	0.180	8.23	11.4	11.7
X 8.0	1026	102	40	7.5	4.7	1.60	31.5	39.5	0.133	6.60	11.4	11.6
C 75 X 8.9	1135	76	40	6.9	9.0	0.862	22.6	27.5	0.127	6.26	10.6	11.6
X 7.4	948	76	37	6.9	6.6	0.770	20.2	28.5	0.103	5.40	10.4	11.1
X 6.1	781	76	35	6.9	4.3	0.691	18.1	29.8	0.082	4.58	10.2	11.1

Not : Gösterilişte birinci sayı yüksekliği, ikinci sayı kütleyi ifade etmektedir. Mesela C 380 X 74 için 380 mm ve 74 kg/m anlaşılmaktadır.

Ek 5 Bazı malzemelerin

Malzeme	ρ x10³ kg/m³	Kopma mukavemeti,MPa			Akma muk. MPa		Müs.ed.ger. MPa		Elas.mod. GPa		∝ x10⁻⁶ C⁻¹
		çekme	basma	kayma	çekme	kayma	çek.bas.	kayma	çek.bas.	kayma	
Al alaşımı 2014 – T6	2.77	414	–	241	365	214			75	27.6	23.2
Al alaşımı 6061 – T6		262	–	207	241	138			70	25.6	23.4
Dök. Demir, gri	7.64	210	825	–	–	–			90	41	10.4
Dök. Demir, lamelli		370	–	330	250	165			170	83	12.1
Beton, % 70 su - çim.	2.41	–	20	–	–	–	–9.31	0.455	20	–	10.8
Beton, % 53 su - çim.		–	35	–	–	–	–15.5	0.592	35	–	
Mg alaşımı , AM100 A	1.80	275	–	145	150	–			45	17	25.2
Çelik, % 0.2 C, sıc.had	7.83	450	–	330	250	165	±165	100			
Çelik, % 0.6 C, sıc.had		690	–	550	415	250			200	83	11.7
Çelik, % 0.6 C, su ver.		825	–	690	515	310					
Çelik, % 3.5 Ni, % 0.4 C		1380	–	1035	1035	620					
Ahşap, Douglas	0.50	–	51	7.6	–	–	±13.1	0.825	12.1	–	–
Ahşap, Güney	0.58	–	58	10	–	–	±15.5	0.930	12.1	–	–
Poliamid–11	1.04	56	–	–	–	–	–	–	–	–	100
Polistren	1.05	48	90	55	–	–	–	–	3	–	72
Cam, % 98 silika	2.19	–	50	–	–	–	–	–	65	28	80

MUKAVEMET
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Ek 6 TEK NUMARALI PROBLEMLERİN CEVAPLARI

2. BÖLÜM

2.1 $N = 1.89$ kN

2.3 $N_a = 45$ kN, $N_b = 30$ kN, $N = 60$ kN

2.5 $V = -1$ kN, $M = -10$ Nm

2.7 $\tau = 78.5$ MPa, $V = 25.13$ kN

2.9 $\sigma = 45.8$ MPa

2.11 $\sigma_o = 52.63$ MPa, $\sigma_{45} = 9.32$ MPa, $\sigma_{90} = -30.00$ MPa

2.13 $d = 3.58$ mm, $\sigma_{bp} = 42.18$ MPa, $\sigma_{bm} = 42.18$ MPa

2.15 $F = 6.03$ kN

2.17 $V = 75$ N, $M = 2.25$ N.m

2.19 $V = 0$, $M = -\sigma_0 bh^2/6$

2.21 $V = 8.75$ kN, $M = 19.79$ kN.m

3. BÖLÜM

3.1 $\delta = 1.5$ mm

3.3 $\varepsilon = -0.00667$

3.5 $\varepsilon_x = 0$, $\varepsilon_y = b/(100\,h)$, $\gamma_{xy} = b/(100h) + 0.01$

3.7 $\delta_p = 1.18$ mm, $\delta_d = 1.13$ mm

4. BÖLÜM

4.1 $\delta_b = 0.24$ mm, $\delta_d = 0.13$ mm, $\delta_e = 1.05$ mm

4.3 $\sigma = 87.1$ MPa

4.5 $P = 40$ kN

4.7 $a = 45$ mm, $b = 250$ mm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5. BÖLÜM

5.1 $U = 16.72$ J, $u = 334.3$ kJ/m^3

5.3 $U_2 / U_1 = 0.4$

5.5 $\delta = 0.0371$ mm

5.7 $U_3 = 160$ J, $U_6 = 128$ J

5.9 $A = mL\omega^2/(\sigma - \rho\,\omega^2 L^2/2)$

6. BÖLÜM

6.1 (a) $\sigma_{x'} = 24.7$ MPa, $\tau_{x'y'} = 12.9$ MPa, $\sigma_{y'} = 55.3$ MPa

6.3 $p = 8.32$ MPa, $\sigma_1 = 124.8$ MPa, $\sigma_2 = 62.4$ MPa, $\tau = 62.4$ MPa

6.5 $\varepsilon_x = 200\mu$

6.7 $\varepsilon_3 = -185\mu$, $\varepsilon_1 = 256\mu$, $\varepsilon_2 = -191\,\mu$, $\gamma = 447\,\mu$

7. BÖLÜM

7.1 $T = 1993$ N.m, $\tau = 28.6$ MPa

7.3 $T_1 = 13.2$ kN.m, $T_1 = 4.29$ kN.m, $T_3 = 24.5$ kN.m

7.5 $T = 2.86$ kN.m

7.7 3.3° ve 0.5°

7.9 $\varnothing = 5^\circ$

7.11 $d = 50$ mm, $d' = 69$ mm

7.13 (a) $V = 6.63$ kN (b) $d = 80$ mm

7.15 $\tau = 10.3$ MP, $\theta = 4.6^0$

7.17 $\tau = 76.2$ MPa, $\theta = 0.01$ derece/m

7.19 $\tau = 28.3$ MPa $\tau_3 = 37.7$ MPa $\tau_5 = 22.6$ MPa

7.21 $T = 5.24$ N.m

7.23 $\tau / \tau_k = 3\,(r/t + 0.5)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8. BÖLÜM

8.1 σ = 196 MPa

8.3 M = 3300 N.m

8.5 0.02 d

8.7 σ_a = 10.5 MPa, $\sigma_ç$ = 231 MPa

8.9 F = 140 N

8.11 (a) V =10 kN, M = 4 kN.m

8.13 σ_p = 51 MPa, σ_Q = – 42 MPa

8.15 σ_p = –32 MPa, σ_Q = 33 MPa

9. BÖLÜM

9.1 P = 37 N

9.3 P = 1220 N

9.5 (a) P = 114.2 kN, (b) P= 242.7 kN

9.7 a = 55 mm

9.9 $\Delta T = 4\pi^2/(\propto\lambda^2)$ ve $\lambda = L/r$

9.11 P = 16.7 MN, F = 7.72 MN

10. BÖLÜM

10.1 p = 4 MPa, p' = 4.62 MPa

10.3 P = 74 kN

10.5 M = 6.7 N.m, M' = 13.5 N.m

10.7 p = 8.4 MPa

10.9 d = 26.4 mm

11. BÖLÜM

11.1 P_i = 406 kW, P_s = 504 kW

11.3 P = 150 kW

11.5 %24

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

12. BÖLÜM

12.1 $Q = 7.49985*10^{-5}, 1.500045, 1.200015]^T$ mm,

$\sigma_1 = 199.996$ MPa, $\sigma_2 = -40.004$ MPa,

$R_1 = -49.999$ kN, $R_3 = -10.001$ kN,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

KAYNAKLAR

1. BEER, F.P. and E.R. JOHNSTON, Mechanics of Materials. 2 nd Ed. McGraw-Hill Ltd., NewYork, 1992.

2. BYARS, E.F. and R. D. SNYDER, Engineering Mechanics of Deformable Bodies, 3rd Ed., Intext Educational Publishers, NewYork, 1975

3. İNAN, M., Cisimlerin Mukavemeti, 2. baskı. Ofset Matbaacılık Ltd. Şti. İstanbul, 1970

4. KAYAN, İ., Cisimlerin Mukavemeti, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı: 1334, İstanbul, 1987.

5. POPOV, E.P., Mechanics of Materials, 2nd Ed., Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1993

6. TIMOSHENKO, E.P. and J.M. GERE (Çev. O. Yazıcıoğlu ve Ö.R. Akgün), Mukavemet I. Kısım, Anadolu Üniversitesi Yayın No:37, Eskişehir, 1982

7.TIMOSHENKO, E. P. and J.M. GERE (Çev.Ö.R.Akgün ve O. Yazıcıoğlu), Mukavemet II. Kısım, Anadolu Üniversitesi Yayın No:39, Eskişehir, 1982.

8. UĞURAL, A.C., Mechanics of Materials, McGraw-Hill Book Co., International Editions Engineering Mechanics Series, New York, 1991.

9. WILLEMS, N., J.T. EASLEY and S. T. ROLFE, Strength of Materials, McGraw-Hill Book Co., NewYork 1981.

10. CHANDRUPATLA, T.R. and A.D. BELEGUNDU, Introduction to Finite Elements in Engineering. Prentice Hall, New Jersey, 1991.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İNDEKS

Azami çarpılma enerjisi teorisi, 121
  kayma gerilmesi teorisi, 120
  normal gerilme teorisi, 120
Beltrami, 120
Burkulma, 111
Burulma, 55
  deformasyonlar, 58
  dikdörtgen kesitler, 65
  ince cidarlı açık kesitler, 66
  ince cidarlı kapalı kesitler, 68
Castigliano teoremleri, 39
Coulomb, 119
Eğilme, 79
  elastik, 79
  elastik olmayan, 84
  diyagramlar, 97
Eğri eksenli kirişler, 103
Eğrilik, 97
Eksantrik yüklü kolonlar, 114
Elastiklik modülü, 27
  kayma, 30
Emniyet gerilmesi, 9
  katsayısı, 9
Gerilme, 6
  kayma, 6
  kirişler, 90
  normal, 6
  termik, 31
  yatak, 8
  yığılması, 127
Gerilme dönüşümleri, 46
  düzlem, 48
  iki eksenli, 47
  tek eksenli, 46
Hencky, 119
Hooke kanunu, 27
Huber, 119
İç kuvvetler, 3
İdealleştirilmiş gerilme–şekil değiştirme diyagramları, 29
Karşıt teoremler, 41
Kayma merkezi, 94
Kesme kuvveti, 97
Kirişler, 77
  kompozit, 86
Kritik yük, 112
Lineer ve elastik olmayan davranış, 60
Mohr, 120
Poisson, 29
Rankine, 119
Rezilans, 33
Rozetler, 49
Saint–Venant, 120
Sonlu elemanlar, 131
Şekil değiştirme, 19
  dönüşüm, 49
  enerji yoğunluğu, 38
  kayma, 20
  normal, 20
  termik, 23, 31
  –yer değiştirme, 21
Tokluk, 33
Tresca, 119
von Mises, 119

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

ISBN : 975-400-092-1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ
DÖNER SERMAYE İŞLETMESİ
MATBAA BİRİMİNDE BASILMIŞTIR.