Çözümlü Diferansiyel Denklemler

Yar.Doç.Dr.
Melek Hamzaoğlu

Marmara Üniversitesi ● Atatürk Eğitim Fakültesi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümlü
Diferansiyel Denklemler

Birinci Baskı, 1000

Marmara Üniversitesi, Yayın No : 661
Atatürk Eğitim Fakültesi, Yayın No : 34

ISBN : 975 - 400 - 214 - 2

Bu kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre, yazarın önceden yazılı izni olmadan elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz. Tüm hakları saklıdır.

İsteme Adresi :

4. Gazeteciler Sitesi B1 - D5
80630, İstanbul

0212 268 77 28
ehamzaoğlu@superonline.com

Baskı-cilt : Doğan Ofset Yayıncılık ve Matbaacılık A.Ş.
0212 622 19 00

Cemal - 742

QA
371
.H36
2000
k.4

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

T.C. MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Kütüphane ve Dokümantasyon
Daire Başkanlığı
DEMİRBAŞ NO: M0126484

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖNSÖZ

Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesinde 1988 yılından beri Fizik ve Matematik bölümlerinde okuttuğum **Diferansiyel Denklemler** dersinde, bu kitabın kaynaklar bölümünde belirttiğim İngilizce kitapların çoğunu ders kitabı olarak kullandım. Özellikle İngilizce eğitimin yapıldığı 1988–1998 yılları arasında derslerde çözdüğüm problemler ve sınavlarda sorulan soruların çözümleri bir klasörü doldurunca, çözülmüş olan bu problemleri öğrencilerin yararlanabileceği bir kitapta toplamayı uygun gördüm. Kişisel görüşüm, Fen ve Mühendislik Fakülteleri öğrencilerinin daha çok problem çözerek hem Diferansiyel Denklemler hem de okudukları diğer fizik derslerinde daha başarılı olacaklarına inanıyorum. Bu kitapta çözümleri doğrudan vermeden önce ayrıntılı olmasa bile çözüm yöntemlerini vermeyi uygun gördüm. Ayrıca her bölümle ilgili daha ayrıntılı bilgi için başvurulacak kaynak kitaplar dipnot numaraları ile belirtilmiştir. Kitabında bir yarıyıl da okutulan Diferansiyel Denklemler dersinde, okutulması gereken tüm konuları kapsayan 340 adet problemin detaylı olarak çözümleri verilmiştir. Ayrıca bu dersi verenlerin de biraz da olsa yükünü hafifletmek için, sınavlarda sorabilecekleri 125 adet problem ve cevapları verilmiştir.

Kitabın yazılması esnasında en ufak bir hatanın olmaması için elimden geldiği kadar özen göstermeme karşın, kitapta gözden kaçmış yanlışlıklar olabilir. Daha sonraki baskıda bunların giderilmesi için okuyucuların yapacakları uyarı ve eleştirilere şimdiden teşekkür ederim. Ayrıca kitabımın yazılma aşamasında her türlü desteği sağlayan meslektaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

Kitabın basımını sağlayan, Milliyet Gazetesi Sorumlu Yazışleri Müdürü Sayın Eren Güvener'e ve Doğan Ofset Yayıncılık ve Matbaacılık A.Ş. Genel Müdürü Sayın Rıfat Akkaya'ya teşekkürü borç bilirim.

İstanbul
19 Eylül, 2000

Melek Hamzaoğlu

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması 1
1.2 Diferansiyel Denklemlerim Çözümü 3

BÖLÜM 2. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

2.1 Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler 7
2.2 Homogen Denklemler 11
2.3 Homogen Türe Dönüştürülebilen Denklemler 16
2.4 Tam Diferansiyel Denklemler 21
2.4.1 Tam Diferansiyel Denklemin Çözümü 21
2.4.2 İntegrasyon Çarpanının Bulunması 22
2.5 Birinci Mertebeten Lineer Diferansiyel Denklemler 32
2.6 Bernoulli Diferansiyel Denklemi 38
2.7 Riccati Diferansiyel Denklemi 46

BÖLÜM 3. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

3.1 Dik Yörüngeler 52
3.2 Radyoaktif Bozunma 54
3.3 Newton ' un Soğuma Yasası 55
3.4 Mekanik Problemleri 57
3.5 Ekektrik Devre Problemleri 62

BÖLÜM 4. YÜKSEK DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

4.1 Birinci Mertebeden Yüksek Dereceli Denklemler 65
4.1.1 p ' ye Göre Çözülebilen Denklemler 65
4.1.2 Bağımlı Değişkene Göre Çözülebilen Denklemler 69
4.1.3 Bağımsız Değişkene Göre Çözülebilen Denklemler 71
4.1.4 Clairaut Denklemi 73
4.2 Değişkenlerden Birini İçermeyen İkinci Mertebeden Denklemler 76
4.2.1 Bağımlı Değişkeni Bulundurmayan Denklemler 76
4.2.2 Bağımsız Değişkeni Bulundurmayan Denklemler 79

BÖLÜM 5. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

5.1 Giriş 84
5.2 Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık 84
5.3 Sabit Katsayılı Homogen Lineer Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü 86
5.4 Sabit Katsayılı Homogen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü 91
5.4.1 Belirsiz Katsayılar Yöntemi 91
5.4.2 Parametrelerin Değişimi Yöntemi 102
5.5 Cauchy - Euler Denklemi 117
5.6 Sabit Katsayılı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları 125

T.C. MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Kütüphane ve Dokümantasyon
Daire Başkanlığı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 6. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİLERLE ÇÖZÜMÜ

6.1 Kuvvet Serileri 139
6.2 Bayağı Nokta Yakınında Çözüm 143
6.3 Düzenli Tekil Nokta Yakınında Çözüm : Frobenius Yöntemi 164
6.4 Sonsuzda Nokta 197
6.5 Gamma ve Beta Fonksiyonları 209
6.6 Bessel Diferansiyel Denklemi 213

BÖLÜM 7. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

7.1 Eleminasyon Yöntemi 226
7.2 Bir Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörler 231
7.3 Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Matris Metodu İle Çözümü 238
7.4 Birinci Mertebeden Homogen Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü 240
7.5 Özdeğerlerin Birbirinden Farklı , Pozitif ve Negatif Reel Sayılar Olması Durumu 241
7.6 Özdeğerlerin Kompleks Olması Durumu 254
7.7 Özdeğerlerin Tekrarlanması Durumu 267
7.8 Birinci Mertebeden Homogen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü 279

BÖLÜM 8. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

8.1 Giriş
8.2 Laplace Dönüşümlerinin Özellikleri 298
8.3 Ters Dönüşüm 302
8.4 Konvolüsyon 306
8.5 Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümüyle Çözümü 311
8.6 Lineer Denklem Sistemlerinin Laplace Dönüşümüyle Çözümü 320
8.7 Laplace Dönüşümü Uygulamaları 328

YARARLANILAN KAYNAKLAR 334

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1.1 Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım 1.1 Bağımlı bir değişkeni ve bunun bir veya daha çok bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denkleme **diferansiyel denklem** denir.

Tanım 1.2 Bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişkenin tek bir bağımsız değişkene göre bayağı türevlerini içeren denkleme **bayağı diferansiyel denklem** denir.

Tanım 1.3 Bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişkene göre kısmi türevlerini içeren denkleme **kısmi diferansiyel denklem** denir.*

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangileri bayağı hangileri kısmi diferansiyel denklemdir ?

(a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}-y=0$

(b) $\dfrac{\partial v}{\partial x}=xy$

(c) $e^{xy}-2x+3y^2=0$

(d) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

(e) $(x^2+y^2)dx-3ydy=0$

(f) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+5\dfrac{d^2x}{dt^2}+3x=\sin t$

(g) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=h^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

Çözümler :

(a) Denklem bayağı diferansiyel denklemdir , denklem bir tek bağımsız değişkene göre bayağı türevleri içermektedir.

(b) Denklem kısmi diferansiyel denklemdir , denklem bir tek bağımsız değişkene göre kısmi türev içermektedir.

(c) Denklem türev içermediğinden ne bayağı ne de kısmi diferansiyel denklemdir.

(d) Denklem kısmi diferansiyel denklemdir , denklem birden fazla bağımsız değişkene göre
kısmi türevi içermektedir.

(e) $(x^2+y^2)dx-3ydy=0$ denklemi

* Kaynak 7

$(x^2+y^2)-3y\frac{dy}{dx}=0$ şeklinde yazıldığı takdirde, denklemin bir tek bağımsız değişkene göre bayağı türev içerdiği görülür. Dolayısıyla bu denklem bayağı diferansiyel denklemdir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(f) Denklem bayağı diferansiyel denklemdir, denklem bir tek bağımsız değişkene göre bayağı türevleri içermektedir.

(g) Denklem kısmi diferansiyel denklemdir, denklem birden fazla bağımsız değişkene göre kısmi türev içermektedir.

Tanım 1.4 Bayağı diferansiyel denklemde, en yüksek mertebeli türevin mertebesi **denklemin mertebesi**, en yüksek mertebeli türevin üssü de **denklemin derecesi** olarak tanımlanır.

Aşağıdaki bayağı diferansiyel denklemlerin mertebe ve derecelerini bulunuz.

(a) $2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4y=0$

(b) $y'''+2(y'')^2+y'=\cos x$

(c) $(y')^3-5x(y')^4=e^x+1$

Çözümler :

(a) Denklemde en yüksek mertebeli türevin $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ mertebesi 2 ve üssü 1 dir. Dolayısıyla bu denklem ikinci mertebeden birinci derece bir bayağı diferansiyel denklemdir.

(b) Denklemde en yüksek mertebeli türevin $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ mertebesi 3 ve üssü 1 dir. Dolayısıyla bu denklem üçüncü mertebeden birinci derece bayağı diferansiyel denklemdir.

(c) Denklemde en yüksek mertebeli türevin $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$ mertebesi 2 ve üssü 3 dür. Dolayısıyla bu denklem ikinci mertebeden üçüncü derece bayağı diferansiyel denklemdir.

Tanım 1.5

Bir diferansiyel denklemde,

(a) bağımlı değişkenin ve türev terimlerinin üsleri 1, ve

(b) bağımlı değişkenlerin veya türev terimlerinin çarpımları yoksa bu denklem **lineerdir (doğrusaldır)** denir. Genel olarak aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x) \qquad (1.1)$$

Burada $a_i(x)$, $(0,1,2,\ldots,n)$ ve $F(x)$ bilinen fonksiyonlar olup x değişkenine bağlıdırlar. Bu şekilde ifade edilemeyen **diferansiyel denklem lineer değildir.***

---

* Kaynak 6

Aşağıdaki bayağı diferansiyel denklemlerin lineer olup olmadıklarını belirleyiniz.

(a) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+xy=\sin x$

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y(\cos x)\dfrac{dy}{dx}=0$

(c) $xy''+y'=x^2$

(d) $y'''-x(y')^3+y=0$

Çözümler :

(a) Tanım 1.5 'e göre denklem lineerdir.
(b) Tanım 1.5 'e göre denklem lineer değildir.
(c) Tanım 1.5 'e göre denklem lineer değildir.
(d) Tanım 1.5 'e göre denklem lineer değildir.

Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin mertebesini , derecesini ve lineer olup olmadıklarını belirtiniz.

(a) $5x\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x^2\dfrac{dy}{dx}-(\sin x)y=0$

(b) $5t\dfrac{d^2y}{dt^2}+y^3\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^4-(\sin t)y^6=0$

(c) $\left(\dfrac{d^2r}{dy^2}\right)^2+\dfrac{d^3r}{dy^3}+y\dfrac{dr}{dy}=0$

Çözümler :

(a) Denklemde yüksek mertebeli türevin $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$ mertebesi 2 ve üssü 1 dir. Dolayısıyla bu denklem ikinci mertebeden birinci derece bir bayağı diferansiyel denklemdir. Tanım 1.5 'e göre bu denklem lineerdir.

(b) Denklemde en yüksek mertebeli türevin $\left(\dfrac{d^4y}{dt^4}\right)$ mertebesi 4 ve üssü 1 dir. Böylece bu denklem dördüncü mertebeden birinci derece bir bayağı diferansiyel denklemdir. Tanım 1.5 'e göre lineer değildir.

(c) Denklemde en yüksek mertebeli türevin $\left(\dfrac{d^2r}{dy^2}\right)^2$ mertebesi 2 ve üssü 2 dir. Böylece bu denklem ikinci mertebeden ikinci derece bir bayağı diferansiyel denklemdir. Tanım 1.5 'e göre lineer değildir.

1.2 Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Tanım 1.6 Bir diferansiyel denklemi sağlayan bir fonksiyona bu denklemin **özel çözümü** denir.

Tanım 1.7 N 'inci mertebeden bir **diferansiyel denklemin genel çözümü** öyle bir bağıntıdır ki, n tane bağımsız sabite sahip olup verilen denklemi sağlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıda tanımlanan $y(x)$ fonksiyonlarının, yanlarında verilen diferansiyel denklemlerin çözümleri olup olmadığını ve çözümlerin hangi aralıklarda geçerli olduğunu belirleyiniz.

(a) $y'+y^2=0$, $y(x)=2$

(b) $y'+y=0$, $y(x)=3e^{-x}$

(c) $y''+4y=0$, $y(x)=2\sin x$

(d) $\dddot{y}-4\ddot{y}-4\dot{y}+16y=0$, $y(t)=e^{4t}$

Çözümler :

(a) $y(x)=2$ denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$y'(x)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$y'+y^2=0+(2)^2=4\neq 0$$

bulunur. Görüldüğü gibi $y(x)$ diferansiyel denklemi sağlamadığı için önerilen çözüm bu denklemin çözümü değildir.

(b) $y(x)=3e^{-x}$ denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa

$$y'(x)=-3e^{-x}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem diferansiyel deklemde yerine koyulursa

$$-3e^{-x}+3e^{-x}=0$$

bulunur. Görüldüğü gibi verilen çözüm diferansiyel denklemi x'in her değeri için sağlar ve $(-\infty,+\infty)$ aralığında denklemin çözümü olduğu belirlenir.

(c) $y(x)=2\sin x$ denkleminin her iki tarafının ardışık türevi alınırsa

$$y'(x)=2\cos x \quad (1) \quad , \quad y''(x)=-2\sin x \quad (2)$$

denklemleri elde edilir. Önerilen çözüm ve (2) denklemi diferansiyel denklemde yerine koyulursa,

$$y''+4y=-2\sin x+4(2\sin x)=6\sin x$$

elde edilir. Bu ise sadece π'nin tam katları için sıfır olabilir. $6\sin x$ her aralıkta sıfır olamıyacağından verilen çözümün denklemi sağlamadığı kabul edilir. Böylece çözüm olarak alınmaz.

(d) $y(t)=e^{4t}$ denkleminin her iki tarafının ardışık türevi alınırsa

$$\dot{y}(t)=4e^{4t} \quad (1) \quad , \quad \ddot{y}(t)=16e^{4t} \quad (2) \quad , \quad \dddot{y}(t)=64e^{4t} \quad (3)$$

elde edilir. (1), (2), (3) denklemleri ve önerilen çözüm diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\dddot{y}-4\ddot{y}-4\dot{y}+16y=64e^{4t}-64e^{4t}-16e^{4t}+16e^{4t}=0$$

elde edilir. Böylece verilen çözümün denklemi sağladığı görülür. $y(t)$ nin her yerde çözüm olarak alınabileceği görülür.

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz.

(a) $y'' = 12x + 8$ (b) $y''' = 16e^{-2x}$

(c) $y'' = \sec^2 x$ (d) $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}$

Çözümler :

(a) $y'' = 12x + 8$ denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa
$y' = 6x^2 + 8x + c_1$ bulunur. Bu işlem bir kez daha tekrarlanırsa
$y = 2x^3 + 4x^2 + c_1x + c_2$ istenilen çözüm bulunur.

(b) $y''' = 16e^{-2x}$ denkleminin her iki tarafının art arda üç kez integrali alınırsa
$y'' = -8e^{-2x} + c_1$, $y' = 4e^{-2x} + c_1x + c_2$
$y = -2e^{-2x} + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3$ istenilen çözüm bulunur.

(c) $y'' = \sec^2 x$ denkleminin her iki tarafının art arda iki kez integrali alınırsa
$y' = \tan x + c_1$
$y = -\ln|\cos x| + c_1x + c_2$ istenilen çözüm bulunur.

(d) $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}$ denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa

$$y = -\ln|x| + \ln|x-4| + c = \ln\left|\frac{x-4}{x}\right| + c$$ istenilen çözüm bulunur.

Tanım 1.8 Özel çözümün tek bir noktada sağlaması gereken bir koşul **başlangıç koşulu**, birden çok noktada sağlaması gereken bir koşul ise **sınır koşulu** olarak tanımlanır.

Tanım 1.9 Başlangıç (sınır) koşullarla birlikte bir diferansiyel denklem **başlangıç değeri (sınır değeri) problemi** olarak adlandırılır.

Bu tür problemlerde önemli olan nokta, başlangıç koşullarının (ya da sınır koşullarının) sayısının denklemin mertebesine eşit olmasıdır.

Aşağıda genel çözümleri ile verilen başlangıç değer problemlerini çözünüz.

(a) $y(x) = c_1e^{-x}$; $y' + y = 0$, $y(3) = 2$

(b) $x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}$; $x'' - x' - 2x = e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$

(c) $y(x) = x^3 + c_1x + c_2$; $y'' = 6x$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$

(d) $y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-3x}$; $y'' - y' - 12y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) Verilen genel çözüm c_1'in her değerini sağladığı için öyle bir c_1 değeri bulacağız ki başlangıç değerini sağlasın. O halde $y(3)=c_1e^{-3}=2$, burada $c_1=2e^3$ olur. Bulduğumuz c_1 değeri genel çözümde yerine koyulursa

$$y(x)=2e^3e^{-x}=2e^{3-x}$$ istenilen çözüm bulunur.

(b) c_1 ve c_2 sabitlerini bulabilmek için başlangıç şartlarını kullanarak aşağıdaki ifadeleri buluruz.

$$x(0)=c_1+c_2+\frac{1}{4}=1\ ,\ \text{buradan}\quad c_1+c_2=\frac{3}{4} \qquad (1)$$

$$x'(0)=-c_1+2c_2+\tfrac{1}{4}=2\ ,\ \text{buradan}\quad -c_1+2c_2=\frac{5}{4} \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2)'nin çözümünden $c_1=\frac{1}{12}$ ve $c_2=\frac{2}{3}$ elde edilir. Böylece

$$x(t)=\frac{1}{12}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}$$ istenilen çözüm bulunur.

(c) c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için verilen koşullar kullanılarak

$$y(0)=c_2=1 \qquad (1)$$

$$y'(1)=3+c_1=2 \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2)'nin çözümünden $c_1=-1$ ve $c_2=1$ elde edilir. Böylece istenilen çözüm

$$y=-x^3+1$$ bulunur.

(d) c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için verilen koşullar kullanılarak

$$y(0)=c_1+c_2=1\ ,\ \text{buradan}\quad c_1+c_2=1 \qquad (1)$$

$$y'(0)=4c_1-3c_2=2\ ,\ \text{buradan}\quad 4c_1-3c_2=2 \qquad (2)$$

bulunur. (1) ve (2)'nin çözümünden $c_1=\frac{5}{7}$ ve $c_2=\frac{2}{7}$ elde edilir. Böylece istenilen

$$y(x)=\frac{5}{7}e^{4x}+\frac{2}{7}e^{-3x}$$ çözüm bulunur.

2.1 Değişkenlerine Ayrılabilen Denklemler

Tanım 2.1 $M(x)dx + N(y)dy = 0$

şeklinde yazılabilen denklemlere **değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem** denir. Burada $M(x)$ ve $N(y)$ bilinen fonksiyonlardır. Çözüm doğrudan integral alarak elde edilir.

Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

(a) $xy(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$

(b) $ye^{2x}dx=(4+e^{2x})dy$

(c) $xy^3dx+(y+1)e^{-x}dy=0$

(d) $a^2dx=x\sqrt{x^2-a^2}dy$

(e) $x\cos^2 ydx+\tan ydy=0$

(f) $xy'dx+(y+1)e^{-x}dy=0$

(g) $x^2y\dfrac{dy}{dx}=e^y$

(h) $(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$

(ı) $\sin x\sin ydx+\cos x\cos ydy=0$

(j) $dx=t(1+t^2)\sec^2 xdt$

Çözümler :

(a) $xy(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$ denklemini değişkenlerine ayırırsak

$$x\frac{dx}{1+x^2}-\frac{dy}{y(1+y^2)}=0$$ şeklinde yazılır. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\tfrac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|-\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2}{1+y^2}\right|=\text{sabit}$$ bulunur. Eğer sabiti $1/2\ln|c|$ olarak seçersek

$$\ln\left|1+x^2\right|-\ln\left|\frac{y^2}{1+y^2}\right|=\ln|c|$$

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{y^2}=c$$

$$(1+x^2)(1+y^2)=cy^2$$

istenilen çözüm bulunur.

(b) $ye^{2x}dx=(4+e^{2x})dy$ denklemini değişkenlerine ayırıp, her iki tarafın integrali alınırsa

$$\tfrac{1}{2}\ln\left|4+e^{2x}\right|=\ln|y|\ln|c|$$

$$4+e^{2x}=y^2c^2$$

istenilen çözüm elde edilir.

(c) $xy^3dx+e^{x^2}dy=0$ denklemini değişkenlerine ayırırsak

$xe^{-x^2}dx+y^{-3}dy=0$ biçiminde yazılır. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2}-\frac{1}{2}y^{-2}=c$$

$e^{-x^2}+y^{-2}=-2c=c'$ şeklinde istenen çözüm bulunur.

(d) $a^2dx=x\sqrt{x^2-a^2}dy$ denklemini değişkenlerine ayırırsak

$\frac{a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}dx=dy$ biçiminde yazılır. Her iki tarafın integrali alınırken, önce sol taraftaki integrali göz önüne alalım.

$$\int\frac{a^2}{x\sqrt{x^2-a^2}}dy$$

$x=a\sec u$, $dx=a\sec u\tan u du$ değişken dönüşümü yapılırsa

$a^2\int\frac{a\sec u\tan u}{a\sec u a\tan u}du=a\int du$ bulunur. Böylece

$$a\int du=\int dy$$

$au=y+c$ bulunur. u'nun değeri yerine koyulursa istenilen çözüm

$x=a\sec\frac{y+c}{a}$ bulunur.

(e) $x\cos^2 ydx+\tan ydy=0$ denklemini değişkenlerine ayırırsak

$xdx+\frac{\tan y}{\cos^2 y}dy=0$ şeklinde yazılır. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\tan^2 y=c$$

$x^2+\tan^2 y=2c$ istenilen çözüm bulunur.

(f) $xy^3dx+(y+1)e^{-x}dy=0$ denklemini değişkenlerine ayırırsak

$xe^xdx+\frac{(y+1)}{y^3}dy=0$ biçiminde yazılır. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\int xe^xdx+\int\frac{y+1}{y^3}dy=0$$

$$xe^x+\int e^xdx=\int\frac{1}{y^2}dy+\int\frac{1}{y^3}dy$$

$e^x(x-1)=\frac{1}{y}+\frac{1}{2y^2}+c$ istenilen çözüm bulunur.

(g) $x^2y\frac{dy}{dx}=e^y$ denklemini değişkenlerine ayırırsak

$\frac{dx}{x^2}=ye^{-y}dy$ biçiminde yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int\frac{dx}{x^2}=\int ye^{-y}dy$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

SOL

$$-\frac{1}{x} = -ye^{-y} + \int e^{-y}dy$$

$$-\frac{1}{x} = -e^{-y}(y+1)+c$$

$(cx+1)e^{y} = x(y+1)$ bulunur.

(h) $(1+y^2)dx-(1+x^2)dy=0$ denklemi değişkenlerine ayrılarak

$\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{dx}{1+x^2}$ biçiminde yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa

$\arctan y + \arctan x + c$

bulunur. Burada her terimin tan'ı alınırsa

$\tan(\arctan y + \arctan x) = \tan c$ (1)

$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b}$ formülünden yararlanarak, (1) denklemi

$\frac{y+x}{1-xy} = \tan c$ biçimine dönüşür. Bu ise istenilen çözümdür.

(ı) $\sin x \sin y dx + \cos x \cos y dy = 0$ denklemi değişkenlerine ayrılarak

$\tan x dx + \cot y dy = 0$ biçiminde yazılır. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$\ln|\sec x| + \ln|\sin y| = \ln|c|$

$\ln|\sin y| = \ln|\cos x| + \ln|c|$

$\sin y = c\cos x$ istenilen çözüm bulunur.

(j) $dx = t(1+t^2)\sec^2 x dt$ denklemini değişkenlerine ayırırsak

$\frac{dx}{\sec^2 x} = t(1+t^2)dt$ şeklinde yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int \cos^2 x dx = \int t(1+t^2)dt$$

$$\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \int tdt + \int t^3 dt$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4 + c$$

$2x + \sin 2x = c' + (1+t^2)^2$ bulunur. Burada $c' = 4c+1$ dir.

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

(a) $y' = 2(3x+y)^2 - 1$; $y(0)=1$

(b) $e^x \cos y dx + (1+e^x)\sin y dy = 0$; $y(0)=0$

(c) $\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy = 0$; $y(0) = \frac{\pi}{4}$

(d) $(1+x^3)dy - x^2 y dx = 0$; $y(1)=2$

(e) $dr\sin\theta = 2r\cos\theta d\theta$; $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$

Çözümler :

(a) $y' = 2(3x+y)^2 - 1$ denklemini çözebilmek için $3x+y = w$ dönüşümü yapılarak

$\frac{dw}{dx} - 2w^2 - 2 = 0$ bulunur. Bu denklemi değişkenlerine ayırarak

$\frac{dw}{w^2+1} = 2dx$ biçiminde yazarız. Her iki tarafın integrali alınırsa

$\arctan w = 2x + c$

$\arctan(3x+y) = 2x + c$

biçiminde genel çözüm bulunur. Başlangıç koşulu uygulanırsa $\arctan 1 = c$, buradan $c = \frac{\pi}{4}$ elde edilir. c' nin bu değeri genel çözümde yerine konursa ,

$4\arctan(3x+y) = 8x + \pi$ bulunur .

(b) $e^x \cos y dx + (1+e^x)\sin y dy = 0$ denklemini değişkenlerine ayırarak

$\frac{e^x dx}{1+e^x} + \tan y dy = 0$ şeklinde yazılır. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$\ln|1+e^x| - \ln|\cos y| = \ln|c|$

$1+e^x = c\cos y$ biçiminde genel çözüm bulunur.

Başlangıç koşulu uygulanırsa $1+e^0 = c(1)$, buradan $c = 2$ elde edilir. c' nin bu değeri genel çözümde yerine konursa

$1+e^x = 2\cos y$ bulunur.

(c) $\cos y dx + (1+e^{-x})\sin y dy = 0$ denklemini değişkenlerine ayırarak

$\frac{dx}{(1+e^{-x})} = -\tan y dy$ veya pay ve paydayı e^x ile çarparak

$\frac{e^x}{e^x+1} dx = -\tan y dy$ biçiminde yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa

$\ln|e^x+1| = \ln|\cos y| + \ln c$

$e^x + 1 = c\cos y$

biçiminde genel çözüm bulunur. Başlangıç koşulu uygulanırsa $e^0 + 1 = c\cos\frac{\pi}{4}$, buradan $c = 2\sqrt{2}$ elde edilir. c' nin bu değeri genel çözümde yerine konursa

$(e^x+1)\sec y = 2\sqrt{2}$ bulunur.

(d) $(1+x^3)dy - x^2 y dy = 0$ denklemini değişkenlerine ayırarak

$\frac{dy}{y} - \frac{x^2}{1+x^3} dx = 0$ biçiminde yazılır. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$\ln|y| - \frac{1}{3}\ln|1+x^3| = \ln|c|$

$y^3 = c(1+x^3)$

biçiminde genel çözüm bulunur. Başlangıç koşulu uygulanırsa $8 = c(1+1)$, buradan $c = 4$ bulunur. c' nin bu değeri genel çözümde yerine konursa

$y^3 = 4(1+x^3)$ bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $dr\sin\theta = 2r\cos\theta d\theta$ denklemini değişkenlerine ayırarak

$\frac{dr}{2r} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta$ şeklinde yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa

$\frac{1}{2}\ln|r| = \ln|\sin\theta| + \ln|c|$ veya $r = \sin^2\theta\, c^2$

biçiminde genel çözüm bulunur. Başlangıç koşulu uygulanırsa $c^2 = -4$ bulunur. c^2 nin bu değeri genel çözümde yerine konursa

$r = -4\sin^2\theta$ bulunur.

2. 2 *Homogen Denklemler*

Tanım 2.2 Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunda x yerine tx ve y yerine ty yazıldığında fonksiyon

$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

biçiminde yazılabiliyorsa, bu fonksiyona **n ' inci dereceden homogen fonksiyon** denir. Örneğin

$f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ fonksiyonu 2. dereceden bir homogen fonksiyondur. Bu fonksiyonda x yerine tx ve y yerine ty yazılırsa

$f(tx,ty) = t^2x^2 + (tx)(ty) - t^2y$ $f(tx,ty) = t^2x^2 + (tx)(ty) - t^2y^2$

$= t^2(x^2 + xy - y^2)$

$= t^2 f(x,y)$ elde edilir.

Tanım 2.3 $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

denkleminde eğer $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ aynı dereceden homogen fonksiyonlar ise bu denklem **homogen diferansiyel denklem** olarak tanımlanır. Böyle bir durumda, M ve N fonksiyonları sıfırdan farklı her $t \in R$ için

$$\frac{M(tx,ty)}{N(tx,ty)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \quad , \quad N(x,y) \neq 0 \qquad (2.1)$$

özdeşliğini sağlarlar. Birinci dereceden ve birinci mertebeden herhangi bir homogen diferansiyel denklem, $y = vx$ veya $x = vy$ değişken dönüşümü yapılarak değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem biçimine dönüştürülür.*

Aşağıdaki denklemlerin homogen olduklarını göstererek çözümlerini bulunuz

(a) $(x^2 + y^2)dx + 3xydy = 0$ (b) $(x\tan y/x + y)dx - xdy = 0$

(c) $x^2dy - (y^2 - yx)dx = 0$ (d) $(4x^2 - 3xy - y^2)dx + (5x^2 - yx)dy = 0$

(e) $2(2x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ (f) $v^2dx + x(x+v)dv = 0$

(g) $(y^2 + 7xy + 16x^2)dx + x^2dy = 0$ (h) $2xdy - 2ydx = \sqrt{x^2 + 4y^2}dx$

(i) $2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0$ (j) $dy = (y/x - \csc^2 y/x)$

* Kaynak 6

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) $(x^2+y^2)dx+3xydy=0$

$\frac{(tx)^2+(ty)^2}{3(tx)(ty)}=\frac{x^2+y^2}{3xy}$, $3xy\neq 0$ olduğundan verilen denklem homogendir.

$y=vx$, $dy=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$(x^2+v^2x^2)+3x(vx)(vdx+xdv)=0$

$\frac{1}{x}dx+\frac{3v}{1+4v^2}dv=0$ eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$\ln|x|+\frac{3}{8}\ln|1+4v^2|=\ln|c|$

$x^8(1+4v^2)^3=c^8=c'$

elde edilir. Ayrıca $v=y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$x^2(x^2+4y^2)^3=c'$ bulunur.

(b) $(x\tan y/x+y)dx-xdy=0$

$-\frac{(tx\tan ty/tx+ty)}{tx}=-\frac{(x\tan y/x+y)}{x}$, $x\neq 0$ olduğundan denklem homogendir.

$y=vx$, $dy=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$(x\tan v+vx)dx-x(xdv+vdx)=0$

$\frac{dx}{x}-\frac{dv}{\tan v}=0$ eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$\ln|x|-\ln|\sin v|=\ln|c|$

$\sin v=x/c$

elde edilir. Ayrıca $v=y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$\sin y/x=x/c$ bulunur.

(c) $x^2dy-(y^2-yx)dx=0$

$\frac{-t^2y^2+(ty)(tx)}{t^2x^2}=\frac{-y^2+yx}{x^2}$, $x^2\neq 0$ olduğundan verilen denklem homogendir.

$y=vx$, $y=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$x^2(vdx+xdv)-(v^2x^2-vx^2)=0$

$x^2(2v-v^2)dx+x^3dv=0$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(2v - v^2)dx + xdv = 0$$

eşdeğer elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{v^2 - 2v}$$
$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dv}{2} + \int \frac{dv}{2(v-2)}$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|v| + \frac{1}{2}\ln|v-2| + \ln|c|$$
$$x^2 = \frac{(v-2)c^2}{v}$$

elde edilir. Ayrıca $v = y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$$c^2 = \frac{x^2 y}{y - 2x}$$ bulunur.

(d) $(4x^2 - 3xy - y^2)dx + (5x^2 - yx)dy = 0$

$$\frac{4(t^2x^2) - 3(tx)(ty) - (t^2y^2)}{5(t^2x^2) - (ty)(tx)} = \frac{4x^2 - 3xy - y^2}{5x^2 - yx}, \quad 5x^2 - yx \neq 0$$ olduğundan

verilen denklem homogendir. $y = vx$, $dy = vdx + xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$(4x^2 - 3x^2v - v^2x^2)dx + (5x^2 - vx^2)(vdx + xdv) = 0$$
$$x^2(4 + 2v - 2v^2)dx + x^3(5 - v)dv = 0$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{5 - v}{2(v^2 - v - 2)}dv$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{2(v-2)} - \int \frac{dv}{(v+1)}$$
$$2\ln|x| = \ln|v-2| - 2\ln|v+1| + \ln|c|$$

$$x^2 = \frac{(v-2)c}{(v+1)^2}$$

elde edilir. Ayrıca $v = y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$$x(y + x)^2 = (y - 2x)c$$ bulunur.

(e) $2(2x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\frac{t^2(4x^2+2y^2)}{-t^2xy}=\frac{4x^2+2y^2}{-xy}$, $-xy\neq 0$ olduğundan verilen denklem homogendir. $y=vx$, $dy=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$(4x^2+2v^2x^2)dx-vx^2(vdx+xdv)=0$$
$$x^2(4+v^2)dx-vx^3dv=0$$
$$\frac{dx}{x}=\frac{vdv}{4+v^2}$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\ln|x|=\tfrac{1}{2}\ln|4+v^2|+\ln|c|$$
$$x^2=(4+v^2)c^2$$

elde edilir.Ayrıca $v=y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$x^4=(4x^2+y^2)c^2$ bulunur.

(f) $v^2dx+x(x+v)dv=0$

$\frac{t^2v^2}{t^2(x^2+xv)}=\frac{v^2}{(x^2+xv)}$, $(x^2+xv)\neq 0$ olduğundan verilen denklem homogendir.

$x=wv$, $dx=wdv+vdw$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$v^2(vdw+wdv)+w^2v^2dv+wv^2dv=0$$
$$v^3dw+(2v^2w+w^2v^2)dv=0$$
$$vdw+(2w+w^2)dv=0$$
$$\frac{dw}{2w+w^2}+\frac{dv}{v}=0$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa ,

$$\int\frac{dw}{2w}-\int\frac{dw}{2(2+w)}+\int\frac{dv}{v}=0$$

$$\frac{1}{2}\ln|w|-\frac{1}{2}\ln|2+w|+\ln|v|=\ln|c|$$
$$\frac{wv^2}{2+w}=c^2$$

elde edilir. Ayrıca $w=x/v$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$xv^2=c^2(2v+x)$ bulunur.

(g) $(y^2+7xy+16x^2)dx+x^2dy=0$

$$\frac{t^2y^2+7(tx)(ty)+16t^2x^2}{t^2x^2}=\frac{y^2+7xy+16x^2}{x^2}$$, $x^2\neq 0$ olduğundan verilen denklem homogendir. $y=vx$, $dy=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$(v^2x^2+7vx^2+16x^2)dx+x^2(vdx+xdv)=0$$
$$x^2(v^2+8v+16)dx+x^3dv=0$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{dv}{(v+4)^2}=0$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\ln|x|-\frac{1}{v+4}=c$$

elde edilir. Ayrıca $v=y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$$\ln|x|-\frac{x}{y+4x}=c$$ bulunur.

(h) $2xdy-2ydx=\sqrt{x^2+4y^2}dx$

$$\frac{\sqrt{t^2x^2+4t^2y^2}+2ty}{2ty}=\frac{\sqrt{x^2+4y^2}+2y}{2y}$$, $2y\neq 0$ olduğundan verilen denklem homogendir. $y=vx$, $dy=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$2x(vdx+xdv)-2vxdx=\sqrt{x^2+4v^2x^2}dx$$
$$2x^2dv=x\sqrt{1+4v^2}dx$$
$$\frac{dv}{\sqrt{1+4v^2}}=\frac{dx}{2x}$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 tdt}{\sqrt{1+\tan^2 t}}=\int\frac{dx}{2x}$$

$$cx=\sqrt{1+4v^2}+2v$$

elde edilir. Ayrıca $v=y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$$cx^2=\sqrt{x^2+4y^2}+2y$$ bulunur.

(ı) $2xydx-(x^2-y^2)dy=0$

$\frac{2(tx)(ty)}{(t^2y^2-t^2x^2)}=\frac{2xy}{y^2-x^2}$, $(y^2-x^2)\neq 0$ olduğundan verilen denklem homogendir.

$y=vx$, $dy=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$2x(vx)dx-(x^2-v^2x^2)(vdx+xdv)=0$$
$$x^2(v^3+v)dx+x^3(v^2-1)dv=0$$
$$v(v^2+1)dx+x(v^2-1)dv=0$$
$$\frac{dx}{x}+\frac{v^2-1}{v(v^2+1)}=0$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\ln|x|=\ln|v|-\ln|v^2+1|+\ln|c|$$
$$x(v^2+1)=vc$$

elde edilir. Ayrıca $v=y/x$ değişken dönüşümü kullanarak istenilen çözüm

$y^2+x^2=cy$ bulunur.

(j) $dy=\left[y/x-\csc^2 y/x\right]dx$

$y=vx$, $dy=vdx+xdv$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$vdx+xdv=(v-\csc^2 v)dx$$
$$xdv=-\csc^2 vdx$$
$$\frac{dv}{\csc^2 v}=-\frac{dx}{x}$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int\sin^2 vdv=-\int\frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{2}v-\frac{1}{4}\sin 2v=-\ln|x|+c$$
$$2v-\sin 2v=-4\ln|x|+4c$$

elde edilir. Ayrıca $v=y/x$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$2y-x\sin 2\frac{y}{x}+4x\ln|x|=4cx$ bulunur.

2.3 Homogen Türe Dönüştürülebilen Denklemler

Tanım 2.4 a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 ve c_2 sabit sayılar olmak üzere ,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0 \qquad (2.2)$$

denklemini göz önüne alalım.

(i) Eğer $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$ ise,

$$x=X+h \quad ve \quad y=Y+k \qquad (2.3)$$

değişken dönüşümü yapılarak, (2.2) denklemi

$$(a_1X+b_1Y)dX+(a_2X+b_2Y)dY=0 \qquad (2.4)$$

homogen denklemine dönüştürülebilir. Burada h ve k'nın seçimi

$$\begin{aligned} a_1h+b_1k+c_1&=0,\\ a_2h+b_2k+c_2&=0 \end{aligned} \qquad (2.5)$$

sisteminin çözümünden bulunabilir.

(ii) Eğer $a_2/a_1=b_2/b_1=k$ ise

$$z=a_2x+b_1y \qquad (2.6)$$

değişken dönüşümü yapılarak (2.2) denklemi x ve z'in değişkenleri cinsinden değişkenlerine ayrılabilen türe dönüştürülebilir.

Aşağıdaki denklemleri çözünüz

(a) $(x-2y+1)dx-(2x-y-1)dy=0$

(b) $(x+y+1)dx+(2x+2y+3)dy=0$

(c) $(2x-y)dx+(4x+y-6)dy=0$

(d) $(y-2)dx-(x-y-1)dy=0$

(e) $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$

(f) $(x-2)dx+4(x+y-1)dy=0$

(g) $(2x-3y+4)dx+(3x-2y+1)dy=0$

Çözümler :

(a) $(x-2y+1)dx-(2x-y-1)dy=0$ denkleminde

$a_1=1, b_1=-2, c_1=1, a_2=-2, b_2=1, c_2=1$ dir. Burada $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$ olduğundan durum (i) uygulanır. Sabitlerin değerleri (2.5) denklem sisteminde yerlerine koyulduğunda

$$\begin{aligned} h-2k+1&=0\\ -2h+k+1&=0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $h=1$ ve $k=1$ bulunur. Bu durumda (2.3) denklemi

$$x=X+1,\ y=Y+1$$

biçiminde yazılır. Bu değerler yerlerine koyulduğunda

$$(X-2Y)dX-(2X-Y)dY=0$$

homogen denklem elde edilir. $Y=vX$, $dY=vdX+Xdv$ değişken dönüşümü yapılırsa

$\frac{dX}{X}+\frac{(v-2)dv}{v^2-4v+1}=0$ bulunur. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\ln|X|+\frac{1}{2}\ln|v^2-4v+1|=\ln|c|$$
$$X^2(v^2-4v+1)=c^2$$
$$Y^2-4YX+X^2=c^2$$

elde edilir. Burada Y ve X yerine değerleri yazılırsa istenilen çözüm

$$(y-1)^2-4(y-1)(x-1)+(x-1)^2=c^2$$ bulunur.

(b) $(x+y+1)dx+(2x+2y+3)dy=0$ denkleminde

$a_1=1, b_1=1, c_1=1, a_2=2, b_2=2, c_2=3$ dir. Burada $a_2/a_1=b_2/b_1=2$ olduğundan durum (ii) uygulanır. (2.6) denkleminden yararlanarak $z=x+y$, $dz=dx+dy$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$(z+1)dx+(2z+3)(dz-dx)=0$$
$$\frac{2z+3}{z+2}dz=dx$$

eşdeğer denklemi elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$2z-\ln(z+2)=x+c$$

elde edilir. Ayrıca $z=x+y$ değişken dönüşümünü kullanarak istenilen çözüm

$$x+2y-\ln(x+y+2)=c$$ bulunur.

(c) $(2x-y)dx+(4x+y-6)dy=0$ denkleminde

$a_1=2, b_1=-1, c_1=0, a_2=4, b_2=1, c_2=-6$ dir. Burada $a_2/a_1\neq b_2/b_1$ olduğundan durum (i) uygulanır. Sabitlerin değerleri (2.5) denklem sisteminde yerlerine koyulduğunda

$$2h-k=0$$
$$4h+k-6=0$$

elde edilir. Buradan $h=1$ ve $k=2$ bulunur. Bu durumda (2.3) denklemi

$$x=X+1 \quad \text{ve} \quad y=Y+2$$

biçiminde yazılır. Bu değerler yerlerine koyulduğunda

$$(2X-Y)dX+(4X+Y)dY=0$$

homogen denklem elde edilir. $Y=vX$, $dY=vdX+Xdv$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dX}{X}+\frac{(4+v)dv}{(v+2)(1+v)}=0$$

eşdeğer denklemi elde edilir. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\int\frac{dX}{X}+\int\frac{3}{1+v}dv=\int\frac{2}{v+2}dv$$
$$\ln|X|+3\ln|v+1|-2\ln|v+2|=\ln|c|$$
$$\frac{X(v+1)^3}{(v+2)^2}=c$$
$$(Y+X)^3=(2X+Y)^2c$$

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. Burada Y ve X yerine değerleri yazılırsa istenilen çözüm

$$(x+y-3)^3 = c(2x+y-4)^2 \quad \text{bulunur.}$$

(d) $(y-2)dx-(x-y-1)dy=0$ denkleminde

$a_1=0, b_1=1, c_1=-2, a_2=-1, b_2=1, c_2=1$ dir. Burada $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$ olduğundan durum (i) uygulanır. Sabitlerin değerleri (2.5) denklem sisteminde yerlerine koyulduğunda

$$\begin{aligned} k-2 &= 0 \\ -h+k+1 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $h=3$ ve $k=2$ bulunur. Bu durumda (2.3) denklemi

$$x = X+3, \quad y = Y+2$$

biçiminde yazılır. Bu değerler yerlerine koyulduğunda

$$YdX-(X-Y)dY=0$$

homogen denklem elde edilir. $Y=vX$, $dY=vdX+Xdv$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dX}{X}+\frac{(v-1)dv}{v^2}=0$$

eşdeğer denklemi elde edilir. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$X = -Y\ln|Y|+\ln|c|$$

elde edilir. Burada Y ve X yerine değerleri yazılırsa istenilen çözüm

$$(x-3) = (2-y)\ln|c(y-2)| \quad \text{bulunur.}$$

(e) $(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$ denkleminde

$a_1=1, b_1=-1, c_1=-1, a_2=1, b_2=4, c_2=-1$ dir. Burada $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$ olduğundan durum (i) uygulanır. Sabitlerin değerleri (2.5) denklem sisteminde yerlerine koyulduğunda

$$\begin{aligned} h-k-1 &= 0 \\ h+4k-1 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $h=1$, $k=0$ bulunur. Bu durumda (2.3) denklemi

$$x = X+1 , \quad y = Y$$

biçiminde yazılır. Bu değerler yerlerine koyulduğunda

$$(X-Y)dX+(X+4Y)dY=0$$

homogen denklem elde edilir. $Y=vX$, $dY=vdX+Xdv$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dX}{X}+\frac{(4v+1)dv}{1+4v^2}=0$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\ln|X|+\frac{1}{2}\ln|4v^2+1|+\frac{1}{2}\arctan 2v = C$$

$$\ln|4Y^2+X^2|+\arctan\frac{2Y}{X}=C' \quad \text{bulunur.}$$

Burada Y ve X yerine değerleri yazılırsa istenilen çözüm

$$\ln|4y^2+(x-1)^2|+\arctan\frac{2y}{x-1}=C' \quad \text{bulunur.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(f) $(x-2)dx+4(x+y-1)dy=0$ denkleminde

$a_1=1, b_1=0, c_1=-2, a_2=4, b_2=4, c_1=-4$ dür. Burada $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$ olduğundan durum (i) uygulanır. Sabitlerin değerleri (2.5) denklem sisteminde yerlerine koyulduğunda

$$h-2=0$$

$$4h+4k-4=0$$

elde edilir. Buradan $h=2$ ve $k=-1$ bulunur. Bu durumda (2.3) denklemi

$$x=X+2,\quad y=Y-1$$

biçiminde yazılır. Bu değerler yerlerine koyulduğunda

$$XdX+(4X+4Y)dY=0$$

homogen denklem elde edilir. $Y=vX$, $dY=vdX+Xdv$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{dX}{X}+\frac{4(1+v)dv}{4v^2+4v+1}=0$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$\int\frac{dX}{X}+\int\frac{2dv}{(2v+1)^2}=-\int\frac{2dv}{(2v+1)}$$

$$\ln|X|+\ln|2v+1|-\frac{1}{(2v+1)}=\ln|C|$$

$$X=-(2Y+X)\ln|C(X+2Y)|$$

bulunur Burada Y ve X yerine değerleri yazılırsa istenilen çözüm

$$(x-2)=-(2y+x)\ln|C(2y+x)|$$ bulunur.

(g) $(2x-3y+4)dx+(3x-2y+1)dy=0$ denkleminde

$a_1=2, b_1=-3, c_1=4, a_2=3, b_2=-2, c_2=1$ dir.

Burada $a_2/a_1 \neq b_2/b_1$ olduğundan durum (i) uygulanır. Sabitlerin değerleri (2.5) denklem sisteminde yerlerine koyulduğunda

$$2h-3k+4=0$$

$$3h-2k+1=0$$

elde edilir. Buradan $h=1$ ve $k=2$ bulunur. Bu durumda (2.3) denklemi

$$x=X+1,\ y=Y+2$$

biçiminde yazılır. Bu değerler yerlerine koyulduğunda

$$(2X-3Y)dX+(3X-2Y)dY=0$$

homogen denklem elde edilir. $Y=vX$, $dY=vdX+Xdv$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{2dX}{X}+\frac{(2v-3)dv}{v^2-1}=0$$

eşdeğer denklemi bulunur. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin her teriminin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$2\ln|X|+\ln|v^2-1|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|=\ln|C|$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$X^4\frac{(v+1)^5}{v-1}=C$$

elde edilir. Burada Y ve X yerine değerleri yazılırsa istenilen çözüm

$(y+x-3)^5=C(y-x-1)$ bulunur.

2. 4 Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.5 Birinci mertebeden

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2.7}$$

denklemini düşünelim. $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonları ve bunların $\frac{\partial M}{\partial y}$ ve $\frac{\partial N}{\partial x}$ kısmi türevleri $D\subset R^2$ gibi yalın bağlı bir bölgede sürekli olsunlar. (2.7) denkleminin tam diferansiyel denklem olması için gerekli ve yeterli koşul, bu fonksiyonların D içinde

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{2.8}$$

eşitliğini sağlamalarıdır. (2.7) şeklinde olan bir denklem tam diferansiyel denklem değilse böyle bir denklemi $\mu(x,y)$ fonksiyonu ile çarparak bir tam diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

2. 4. 1 Tam Diferansiyel Denklemin Çözümü

$$F(x,y)=c \tag{2.9}$$

fonksiyonu, (2.7) denkleminin bir genel çözümü olsun. Bu fonksiyon aşağıdaki şekilde bulunur. $\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$ (2.10)

dir. Her iki tarafın x'e göre kısmi integrali alınırsa

$$F(x,y)=\int^{x} M(x,y)dx+C(y) \tag{2.11}$$

elde edilir. Bu ifadede $\int^{x}$ y yi sabit tutmak koşuluyla x'e göre integral alınması gerektiğini gösterir. Ayrıca $C(y)$ integrasyon sabiti olup yalnız y nin fonksiyonudur. Bu nedenle $\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{dC}{dy}$ dir. (2.11) bağıntısının y ye göre kısmi türevi alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{x} M(x,y)dx\right]+\frac{dC}{dy} \tag{2.12}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

olduğundan (2.13) denklemi (2.11) de yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$N(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int^{x} M(x,y)dx\right]+\frac{dC}{dy} \qquad (2.14)$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapıldığında $\frac{dC}{dy}=C(y)$ (2.15)

bulunur. Bu ifadenin y ye göre integrali alınarak $C(y)$ fonksiyonu bulunur. $C(y)$ nin bu değeri (2.11) denkleminde yerine konursa , verilen diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur.

2.4.2 İntegrasyon Çarpanının Bulunması

(i) Eğer $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$ ise $\mu(x)=e^{\int f(x)dx}$ (2.7) denkleminin integrasyon çarpanıdır.

(ii) Eğer $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=-g(y)$ ise $\mu(y)=e^{\int g(y)dy}$ (2.7) denkleminin integrasyon çarpanıdır.

(iii) Eğer (2.7) denklemi homogen ve $Mx+Ny\neq 0$ ise $\frac{1}{Mx+Ny}$ integrasyon çarpanıdır.

(iv) Bazen bir integrasyon çarpanı denklemi inceleyerek de bulunabilir. Şöyle ki , terimlerin yeniden düzenlenmesi ile bazı kısımların , bilinen ifadelerin tam diferansiyeli olduğu görülür. Aşağıda verilen ifadelerden yararlanmak mümkündür.

Terim Grupları	*İntegrasyon Çarpanı*	*Tam Diferansiyel*
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d(\frac{y}{x})$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{y^2}$	$-\frac{ydx-xdy}{y^2}=d(-\frac{x}{y})$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=d(\ln\frac{y}{x})$
$xdy-ydx$	$\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{\frac{xy-ydx}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}=d(\arctan\frac{y}{x})$
$xdy+ydx$	$\frac{1}{(xy)^n}$	$\frac{xdy+ydy}{(xy)^n}=d\left\{\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right\}$, $n\neq 1$
		$\frac{xdy+ydx}{xy}=d\{\ln(xy)\}$, $n=1$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıda verilen denklemlerin tam diferansiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferansiyel olanları çözünüz. Tam diferansiyel olmayanları da uygun integrasyon çarpanlarını bulup tam diferansiyel denkleme dönüştürdükten sonra çözünüz.

(a) $(x^3+xy^2+y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0$

(b) $x(x^2-y^2-x)dx-y(x^2-y^2)dy=0$

(c) $(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$

(d) $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0$

(e) $(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$

(f) $(3xy^4+x)dx+(6x^2y^3-2y^2+7)dy=0$

(g) $(x^3y^3+1)dx+x^4y^2dy=0$

(h) $(xy^3+xy)dx+(x^2y^2-2)dy=0$

(i) $y(2x-y-1)dx+x(3x-4y+3)dy=0$

(i) $(xy+1)dx+x(x+4y-2)dy=0$

(j) $y(y+2x-2)dx-2(x+y)dy=0$

(k) $y(2x^2-xy+1)dx+(x-y)dy=0$

(l) $3(x^2+y^2)dx+x(x^2+3y^2+6y)dy=0$

(m) $(2xy\ln y+ye^y)dx+(x^2+xye^y+y^3)dy=0$

(n) $(2y^2+3xy-2y-6x)dx+x(x+2y-1)dy=0$

Çözümler :

(a) $(x^3+xy^2+y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2xy+1=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyeldir. (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int^{x}(x^3+xy^2+y)dx+C(y)$$

$$F(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}y^2+yx+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$2y\frac{x^2}{2}+x+\frac{dC(y)}{dy}=y^3+x^2y+x$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=y^3$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=\frac{y^4}{4}$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

koyulursa

$$F(x,y)=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}y^2+yx+\frac{y^4}{4}\right]=c$$

$$x^4+2x^2y^2+y^4+4yx=4c$$

$$(x^2+y^2)^2=4(c-yx)$$ istenilen çözüm bulunur.

(b) $x(x^2-y^2-x)dx-y(x^2-y^2)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=-2xy=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyeldir. (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int^{x}(x^3-x^2-xy^2)dx+C(y)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}x^2y^2+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$-x^2y+\frac{dC(y)}{dy}=-x^2y+y^3$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=y^3$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=\frac{y^4}{4}$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$F(x,y)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}=c$$

$$3x^4-4x^3-6x^2y^2+3y^4=12c$$ istenilen çözüm bulunur.

(c) $(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=4x=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyeldir. Bu denklemi aşağıdaki biçimde yeniden düzenleyerek yazarsak

$$3x^2dx+(4xydx+2x^2dy)+2ydy=0$$

$$d(x^3)+d(2x^2y)+d(y^2)=d(c)$$ bulunur. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$x^3+2x^2y+y^2=c$$ istenilen çözüm bulunur.

(d) $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2-2x\sin y=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyeldir. Bu denklemi aşağıdaki biçimde yeniden düzenleyerek yazarsak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(2x\cos y dx - x^2 \sin y dy) + (3x^2 y dx + x^3 dy) - y dy = 0$$
$$d(x^2 \cos y) + d(x^3 y) - d(1/2\, y^2) = d(c)$$

elde edilir. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$x^2 \cos y + x^3 y - \frac{1}{2} y^2 = c$$

istenilen çözüm bulunur.

(e) $(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3 = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyeldir. Bu denklemi aşağıdaki şekilde yeniden düzenleyerek yazarsak

$$2x^3 dx + y dy - dy + 3(y dx + x dy) = 0$$
$$2x^3 dx + y dy - dy + 3d(xy) = 0$$

elde edilir. Her terimin ayrı ayrı integrali alınırsa

$$x^4 + y^2 - 2y + 6xy = 2c$$

istenilen çözüm bulunur.

(f) $(3xy^4 + x)dx + (6x^2 y^3 - 2y^2 + 7)dy = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy^3 = \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan verilen denklem tam diferansiyeldir. (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y) = \int^{x} (3xy^4 + x)dx + C(y)$$

$$F(x,y) = \frac{3}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{2} x^2 + C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N$ olduğundan

$$6x^2 y^3 + \frac{dC(y)}{dy} = 6x^2 y^3 - 2y^2 + 7$$
$$\frac{dC(y)}{dy} = -2y^2 + 7$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y) = -2/3\, y^3 + 7y$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$\frac{3}{2} x^2 y^4 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} y^3 + 7y = c$$

$$9x^2 y^4 + 3x^2 - 4y^3 + 42y = 6c$$

istenilen çözüm bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(g) $(x^3y^3+1)dx+x^4y^2dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2y^2$, $\frac{\partial N}{\partial x}=4x^3y^2$ dir. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{3x^3y^2-4x^3y^2}{x^4y^2}=-\frac{1}{x}=f(x)$$

burada integrasyon çarpanının yalnızca x'in fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(x)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln|x|}=x^{-1}$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan x^{-1} fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(x^2y^3+x^{-1})dx+x^3y^2dy=0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int^{x}(x^2y^3+\frac{1}{x})dx+C(y)$$

$$F(x,y)=\frac{x^3}{3}y^3+\ln|x|+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$x^3y^2+\frac{dC(y)}{dy}=x^3y^2$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=0$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=$ sabit elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$x^3y^3=-3\ln|xc|$$

istenilen çözüm bulunur.

(h) $(xy^3+xy)dx+(x^2y^2-2)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=3xy^2+x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2xy^2$ dir. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu denklem
tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{3xy^2+x-2xy^2}{xy^3+xy}=\frac{1}{y}=-g(y)$$

burada integrasyon çarpanının yalnızca y nin fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(y)=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{-\ln|y|}=y^{-1}$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan y^{-1} fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(xy^2+x)dx+(x^2y-\frac{2}{y})dy=0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int^{x}(xy^2+x)dx+C(y)$$

$$F(x,y)=\tfrac{1}{2}x^2y^2+\tfrac{1}{2}x^2+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$x^2y+\frac{dC(y)}{dy}=x^2y-\frac{2}{y}$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=-\frac{2}{y}$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=-2\ln|y|$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{2}x^2-2\ln|y|$$

$$x^2y^2+x^2-4\ln|y|=2c$$

istenilen çözüm bulunur.

(i) $y(2x-y+1)dx+x(3x-4y+3)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x-2y+1$, $\frac{\partial N}{\partial x}=6x-4y+3$ dür.

Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial y}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{2x-2y+1-6x+4y-3}{y(2x-y+1)}=-\frac{2}{y}=-g(y)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

burada integrasyon çarpanının yalnızca y nin fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(y)=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln|y|}=y^2$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan y^2 ile çarpılırsa

$$(2xy^3-y^4+y^3)dx+(3x^2y^2-4xy^3+3xy^2)dy=0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir. (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int^{x}(2xy^3-y^4+y^3)dx+C(y)$$

$$F(x,y)=x^2y^3-xy^4+xy^3+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$3x^2y^2-4xy^3+3xy^2+\frac{dC(y)}{dy}=3x^2y^2-4xy^3+3xy^2$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=0$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=$ sabit elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$xy^3(1+x-y)=c$

istenilen çözüm bulunur.

(i) $(xy+1)dx+x(x+4y-2)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=x$, $\frac{\partial N}{\partial x}=2x+4y-2$ dir. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{x-2x-4y+2}{x(x+4y-2)}=-\frac{1}{x}=f(x)$$

burada integrasyon çarpanın yalnızca x 'in fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(x)=e^{\int\frac{-1}{x}dx}=e^{-\ln|x|}=x^{-1}$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan x^{-1} fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(y+\frac{1}{x})dx+(x+4y-2)dy=0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int^{x}(y+\frac{1}{x})dx+C(y)=xy+\ln|x|+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$x+\frac{dC(y)}{dy}=x+4y-2$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=4y-2$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=2y^2-2y$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$F(x,y)=xy+\ln|x|+2y^2-2y$$

$$xy+\ln|x|+2y^2-2y=c$$

istenilen çözüm bulunur.

(j) $y(y+2x-2)dx-2(x+y)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2y+2x-2$, $\frac{\partial N}{\partial x}=-2$ dir. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y+2x-2}{-2(x+y)}=-1=f(x)$$

buradan integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{-\int dx}=e^{-x}$$

olarak bulunur. Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan e^{-x} fonksiyonu ile çarpılırsa

$$e^{-x}(y^2+2xy-2y)dx-2e^{-x}(x+y)dy=0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int^{x}e^{-x}(y^2+2xy-2y)dx+C(y)=-y^2e^{-x}-2xye^{-x}+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$-2xe^{-x}-2ye^{-x}+\frac{dC(y)}{dy}=-2xe^{-x}-2ye^{-x}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{dC(y)}{dy}=0$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=$ sabit elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$y(2x+y)=ce^{x}$ istenilen çözüm bulunur.

(k) $y(2x^2-xy+1)dx+(x-y)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2x^2-2xy+1$, $\frac{\partial N}{\partial y}=1$ dir. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2x^2-2xy+1-1}{(x-y)}=2x=f(x)$$

burada integrasyon çarpanın yalnızca x' in fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(x)=e^{\int 2x dx}=e^{x^2}$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan e^{x^2} fonksiyonu ile çarpılırsa

$$e^{x^2}(2x^2y-xy^2+y)dx+e^{x^2}(x-y)dy=0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y)=\int e^{x^2}(2x^2y-xy^2+y)dx+C(y)=e^{x^2}(xy-\tfrac{1}{2}y^2-\frac{y}{2x})+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$xe^{x^2}-ye^{x^2}-\frac{1}{2x}e^{x^2}+\frac{dC(y)}{dy}=e^{x^2}(x-y)$$

$$\frac{dC(y)}{dy}=\frac{e^{x^2}}{2x}$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=\frac{e^{x^2}y}{2x}$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$y(2x-y)=2ce^{-x^2}$ istenilen çözüm bulunur.

(l) $3(x^2+y^2)dx+x(x^2+3y^2+6y)dy=0$

$\frac{\partial M}{\partial y}=6y$, $\frac{\partial N}{\partial x}=3x^2+3y^2+6y$ dir. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{6y-3x^2-3y^2-6y}{3(x^2+y^2)}=-1=-g(y)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

burada integrasyon çarpanının yalnızca y nin fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(y) = e^{\int dy} = e^{y}$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan e^{y} fonksiyonu ile çarpılırsa

$$3e^{y}(x^3 + y^2)dx + e^{y}(x^3 + 3xy^2 + 6xy)dy = 0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y) = \int^{x} 3e^{y}(x^2 + y^2)dx + C(y) = 3e^{y}(\tfrac{1}{3}x^3 + xy^2) + C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N$ olduğundan

$$x^3e^{y} + 6xye^{y} + 3xy^2e^{y} + \frac{dC(y)}{dy} = e^{y}(x^3 + 3xy^2 + 6xy)$$

$$\frac{dC(y)}{dy} = 0$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y) =$ sabit elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$x(x^2 + 3y^2) = ce^{-y}$$

istenilen çözüm bulunur.

(m) $(2xy\ln y + ye^{y})dx + (x^2 + xye^{y} + y^3)dy = 0$

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2x\ln y + 2x + e^{y} + ye^{y}$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x + ye^{y}$ dir. Görüldüğü gibi $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$

olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{2x\ln y + 2x + e^{y} + ye^{y} - 2x - ye^{y}}{2xy\ln y + ye^{y}} = \frac{1}{y} = -g(y)$$

burada integrasyon çarpanının yalnızca y nin fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ln|y|} = y^{-1}$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan y^{-1} fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(2x\ln y + e^{y})dx + (x^2/y + xe^{y} + y^2)dy = 0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y) = \int^{x} (2x\ln y + e^{y})dx + C(y) = x^2\ln y + xe^{y} + C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N$ olduğundan

$$\frac{x^2}{y} + xe^{y} + \frac{dC(y)}{dy} = \frac{x^2}{y} + xe^{y} + y^2$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{dC(y)}{dy} = y^2$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y) = \frac{y^3}{3}$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$x^2 \ln y + xe^y + \frac{y^3}{3} = c$$

istenilen çözüm bulunur.

(n) $(2y^2 + 3xy - 6x - 2y)dx + x(x + 2y - 1)dy = 0$ (2.8)

$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y + 3x - 2$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y - 1$ dir. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. İntegrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4y + 3x - 2 - 2x - 2y + 1}{x(x + 2y - 1)} = \frac{1}{x} = f(x)$$

burada integrasyon çarpanın yalnızca x'in fonksiyonu olduğu görülür.

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$$

Denklemin bütün terimleri integrasyon çarpanı olan x fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(3x^2 y - 6x^2 + 2y^2 x - 2yx)dx + x^2(x + 2y - 1)dy = 0$$

tam diferansiyel denklemi elde edilir ve (2.9) denklemiyle tanımlanan genel çözümü aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$F(x,y) = \int (3x^2 y - 6x^2 + 2y^2 x - 2yx)dx + C(y) = x^3 y - 2x^3 + x^2 y^2 - x^2 y + C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N$ olduğundan

$$x^3 + 2x^2 y - x^2 + \frac{dC(y)}{dy} = x^3 + 2x^2 y - x^2$$

$$\frac{dC(y)}{dy} = 0$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y) =$ sabit elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$x^3 y + x^2 y^2 - x^2 y - 2x^3 = c$$

istenilen çözüm bulunur.

2. 5 *Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler*

Tanım 2.6

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \qquad (2.16)$$

biçiminde tanımlanan diferansiyel denkleme **birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denir. (2.6) denklemini

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0 \tag{2.17}$$

biçiminde yazalım. Burada $p(x)y - q(x) = M(x,y)$ ve $N(x,y) = 1$ olsun.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = p(x)$, $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 0$ dır. Görüldüğü gibi $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan bu denklem tam diferansiyel denklem değildir. 2.7 (i) uygulanarak integrasyon çarpanı aşağıda gösterildiği biçimde bulunur.

$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] = p(x)$$

olduğundan,

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{2.18}$$

fonksiyonu (2.17) denklemi için bir integrasyon çarpanıdır. (2.17) denklemini $\mu(x)$ ile çarparak

$$\mu(x)[p(x)y - q(x)]dx + \mu(x)dy = 0 \tag{2.19}$$

tam diferansiyel denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümü 2.6'da verilen yöntem uygulanarak,

$$\mu(x)y = \int q(x)\mu(x)dx + c \tag{2.20}$$

bulunur. Böylece (2.17) denkleminin çözümünü

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right] \tag{2.21}$$

olarak buluruz.

Aşağıda verilen diferansiyel denklemleri ve başlangıç değer problemlerini çözünüz.

(a) $xy' + 2y = 4x^2$, $y(1) = 4$

(b) $xy' - 3y = x^3$, $y(1) = 0$

(c) $y' - 2y = 4x$, $y(0) = 1$

(d) $y' + (\cos x)y = \cos x$, $y(\pi) = 0$

(e) $x(\ln x)y' + y = 2\ln x$

(f) $(x^2+1)y' - 2xy = x^2 + 1$, $y(1) = \pi$

(g) $y' + (\cot x)y = 3\sin x\cos x$

(h) $(y+1)dx + (x-y)dy = 0$

(i) $y' = \csc x + y\cot x$

(j) $(y - \cos^2 x)dx + \cos x dy = 0$

(k) $y' + (\tan x)y = x\sin 2x$

(l) $y' = e^{2x} + 3y$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) $xy'+2y=4x^2$, $y(1)=4$ başlangıç değer problemini çözmek için önce denklemin genel çözümü bulunur. Bu nedenle denklemi

$$y'+\frac{2y}{x}=4x$$

biçiminde yazalım ve (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x)=\frac{2}{x}$ ve $q(x)=4x$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=x^2$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$x^2y=\int 4x^3dx+c=x^4+c$$
$$y=x^2+cx^{-2}$$

olarak genel çözümü buluruz. Burada x ve y nin bilinen değerleri yerlerine koyulduğunda $y(1)=4=1+c$ elde edilir. Buradan $c=3$ bulunarak genel çözümde yerine koyulursa $y=x^2+3x^{-2}$ bulunur.

(b) $xy'-3y=x^3$, $y(1)=0$ başlangıç değer problemini çözmek için önce denklemin genel çözümü bulunur. Bu nedenle denklemi

$$y'-\frac{3}{x}y=x^2$$

biçiminde yazalım ve (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x)=-\frac{3}{x}$ ve $q(x)=x^2$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int \frac{3}{x}dx}=e^{-3\ln|x|}=x^{-3}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$x^{-3}y=\int\frac{dx}{x}+c$$
$$y=x^3(\ln|x|+c)$$

olarak genel çözümü buluruz. Burada x ve y nin bilinen değerleri yerine koyulduğunda $y(1)=0=\ln 1+c$ elde edilir. Buradan $c=0$ bulunarak genel çözümde yerine koyulursa $y=x^3\ln|x|$ bulunur.

(c) $y'-2y=4x$, $y(0)=1$ başlangıç değer problemini çözmek için önce denklemin genel çözümü bulunur. (2.16) denklemiyle karşılaştırıldığında $p(x)=-2$ ve $q(x)=4x$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int 2dx} = e^{-2x}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$e^{-2x}y = 4\int xe^{-2x}dx + c = 4(-\tfrac{1}{2}xe^{-2x} - \tfrac{1}{4}e^{-2x}) + c$$

olduğu görülür. Buradan

$$y = -2x - 1 + ce^{2x}$$

olarak genel çözümü buluruz. Burada x ve y nin bilinen değerleri yerlerine koyulduğunda $y(0) = 1 = -1 + c$ elde edilir. Buradan $c = 2$ bulunarak genel çözümde yerine koyulursa

$y = (-2x - 1) + 2e^{2x}$ bulunur.

(d) $y' + (\cos x)y = \cos x$, $y(\pi) = 0$ başlangıç değer problemini çözmek için önce denklemin genel çözümü bulunur. (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x) = \cos x$ ve $q(x) = \cos x$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \cos x dx} = e^{\sin x}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.10) denkleminde yerine koyulursa

$$ye^{\sin x} = \int e^{\sin x}\cos x dx + c = e^{\sin x} + c$$

$y = 1 + ce^{-\sin x}$ olarak genel çözümü buluruz. Burada, x ve y nin bilinen değerleri yerine koyulduğunda $y(\pi) = 0 = 1 + ce^{1}$ elde edilir. Buradan $c = -1$ bulunarak genel çözümde yerine koyulursa

$y = 1 - e^{-\sin x}$ bulunur.

(e) $x(\ln x)y' + y = 2\ln x$ denklemini

$$y' + \frac{y}{x\ln x} = \frac{2}{x}$$

biçiminde yazalım ve (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ ve $q(x) = \dfrac{2}{x}$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x\ln x}dx} = e^{\ln|\ln x|} = \ln x$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$y\ln x = 2\int \frac{\ln x}{x}dx + c = \ln^2 x + c$$

$$y = \ln x + \frac{c}{\ln x}$$ bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(f) $(x^2+1)y'-2xy=x^2+1$, $y(\pi)=0$ başlangıç değer problemini çözmek için önce denklemin genel çözümü bulunur. Bu nedenle denklemi

$$y'-\frac{2x}{x^2+1}y=1$$

biçiminde yazalım ve (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x)=-\frac{2x}{x^2+1}$ ve $q(x)=1$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{2x}{x^2+1}dx}=e^{-\ln|x^2+1|}=\frac{1}{x^2+1}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$\frac{1}{1+x^2}y=\int\frac{1}{1+x^2}dx+c=\arctan x+c$$

$$y=(x^2+1)[\arctan x+c]$$

olarak genel çözümü buluruz. Burada x ve y nin bilinen değerleri yerine koyulduğunda $y(1)=\pi=2[\arctan 1+c]$ elde edilir. Buradan $c=1/2\pi$ bulunarak genel çözümde yerine koyulursa

$$y=(x^2+1)[\arctan x+1/2\pi]$$ bulunur.

(g) $y'+(\cot x)y=3\sin x\cos x$ denklemi (2.16) denklemiyle karşılaştırıldığında $p(x)=\cot x$ ve $q(x)=3\sin x\cos x$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\cot x dx}=e^{\ln|\sin x|}=\sin x$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$y\sin x=3\int\sin^2 x\cos x dx+c=\sin^3 x+c$$

$$y=\sin^2 x+\frac{c}{\sin x}$$

olarak genel çözüm bulunur.

(h) $(y+1)dx+(x-y)dy=0$ denklemini

$$x'+\frac{4}{y+1}x=\frac{y}{y+1}$$

biçiminde yazalım ve (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x)=\frac{4}{y+1}$ ve $q(x)=\frac{y}{y+1}$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mu(y) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{4}{y+1}dy} = e^{4\ln|y+1|} = (1+y)^4$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$(1+y)^4 x = \int (1+y)^3 y dy = \frac{y^5}{5} + \frac{3y^4}{4} + y^3 + \frac{y^2}{2} + c$$

$$20x = (4y-1) + c'(1+y)^{-4}$$

olarak genel çözüm bulunur. Burada $c' = 1 + 20c$ dir.

(i) $y' = \csc x + y\cot x$ denklemi (2.16) denklemiyle karşılaştırıldığında $p(x) = -\cot x$ ve $q(x) = \csc x$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\cot x dx} = e^{-\ln|\sin x|} = \frac{1}{\sin x}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$y\frac{1}{\sin x} = \int \frac{1}{\sin x}\csc x dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$y = -\cos x + c\sin x$ bulunur.

(j) $(y - \cos^2 x)dx + \cos x dy = 0$ denklemini

$$y' + \frac{1}{\cos x}y = \cos x$$

biçiminde yazalım ve (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x) = \frac{1}{\cos x}$ ve $q(x) = \cos x$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \sec x dx} = e^{\ln|\sec x + \tan x|} = \sec x + \tan x$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$(\sec x + \tan x)y = \int (\sec x + \tan x)\cos x dx = x - \cos x + c$$

$$(\sec x + \tan x)y = x - \cos x + c$$

genel çözümü bulunur.

(k) $y' + (\tan x)y = x\sin 2x$ denklemi (2.16) denklemiyle karşılaştırıldığında $p(x) = \tan x$ ve $q(x) = x\sin 2x$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \tan x dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \frac{1}{\cos x}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{1}{\cos x}y=\int\frac{x\sin 2x}{\cos x}+c=\int\frac{2x\sin x\cos x}{\cos x}dx=2(\sin x-x\cos x)+c$$

$$y=2\cos x(\sin x-x\cos x)+c\cos x$$

genel çözüm bulunur.

(I) $y'=e^{2x}+3y$ denklemini

$y'-3y=e^{2x}$

biçiminde yazalım ve (2.16) denklemiyle karşılaştıralım. Bu karşılaştırmada $p(x)=-3$ ve $q(x)=e^{2x}$ olduğu görülür. İntegrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int 3dx}=e^{-3x}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ye^{-3x}=\int e^{-3x}e^{2x}dx+c=\int e^{-x}dx+c=-e^{-x}+c$$

$$y=-e^{2x}+ce^{3x}$$

genel çözüm bulunur.

2. 6 *Bernoulli Diferansiyel Denklemi*

Tanım 2.7

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=y^n q(x) \tag{2.22}$$

biçiminde lineer olmayan bir denklem **Bernoulli** denklemi olarak adlandırılır. Bu denklemin $n=0$ için lineer ve $n=1$ için homogen denklemleri de içerdiği açıktır. Bu nedenle $n\neq 0,1$ varsayacağız. Basit bir bağımlı değişken değişimi ile lineer denkleme dönüştürülebilir. Çözmek için önce denklemin bütün terimleri y^{-n} ile çarpılır.

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x) \tag{2.23}$$

Burada $u=y^{1-n}$, $n\neq 0,1$ değişken dönüşümü yapılırsa

$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ elde edilir. Bu bağıntı (2.23) de yerine koyulursa

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx}+p(x)u=q(x) \tag{2.24}$$

olur. Bu ise birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem olup Tanım 2.6 ' da verilen yöntemle çözülür. Burada bağımsız değişken x ve bağımlı değişken u olduğundan denklemin çözümünde $u=y^{1-n}$ yazılarak (2.22) ile verilen Bernoulli denkleminin genel çözümü bulunmuş olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki Bernoulli Diferansiyel denklemlerini çözünüz

(a) $y'+\frac{3}{x}y=x^2y^2$

(b) $2xy'-y(x+1)=-6y^3$

(c) $y'+2xy=-xy^4$

(d) $xy'-\{y+xy^3(1+\ln x)\}=0$

(e) $xy'-(3x+6)y=-9xe^{-x}y^{3/2}$

(f) $3xy^2y'-3y^3=x^4\cos x$

(g) $y'-\frac{1}{x+1}y\ln y=(x+1)y$

(h) $2y'+\frac{1}{x+1}y+2(x^2-1)y^3=0$

(i) $y'-2(\sin x)y=-2y^{1/2}\sin x$

(j) $y'+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$

(k) $y'+y=xy^{1/2}$

(l) $xy'+y=2xy^2$

(m) $y'+\frac{2}{x}y=\frac{y^3}{x^2}$

(n) $y'\tan x\sin 2y=\sin^2 x+\cos^2 y$

Çözümler :

(a) $y'+\frac{3}{x}y=x^2y^2$

Denklemin her iki tarafı y^{-2} ile çarpılırsa

$$y^{-2}y'+\frac{3}{x}y^{-1}=x^2$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u=y^{-1}$ alınırsa , $u'=-y^{-2}y'$ olur ve verilen denklem

$$u'-\frac{3}{x}u=-x^2$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int(-3/x)dx}=e^{-3\ln|x|}=x^{-3}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ux^{-3}=-\int x^{-3}x^2dx+c=-\int x^{-1}dx+c=-\ln|x|+c$$

$$u=x^3\left[c-\ln|x|\right]$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y=x^{-3}\left[c-\ln|x|\right]^{-1}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(b) $2xy' - y(x+1) = -6y^3$

Denklemin her iki tarafı y^{-3} ile çarpılırsa

$$2y'y^{-3} - \frac{(x+1)}{x}y^{-2} = -\frac{6}{x}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u = y^{-2}$ alınırsa, $u' = -2y^{-3}y'$ olur ve verilen denklem

$$u' + \frac{(x+1)}{x}u = \frac{6}{x}$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} = e^{x+\ln|x|} = xe^x$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$xe^x u = \int xe^x \frac{6}{x}dx + c = 6e^x + c$$

$$u = \frac{6}{x} + \frac{6}{xe^x}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$x = y^2(6 + ce^{-x})$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(c) $y' + 2xy = -xy^4$

Denklemin her iki tarafı y^{-4} ile çarpılırsa

$$y'y^{-4} + 2xy^{-3} = -x$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u = y^{-3}$ alınırsa, $u' = -3y^{-4}y'$ olur ve verilen denklem

$$u' - 6xu = 3x$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int 6xdx} = e^{-3x^2}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ue^{-3x^2} = \int e^{-3x^2} 3xdx + c = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + c$$

$$u = -\frac{1}{2} + ce^{3x^2}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y^{-3} = -\frac{1}{2} + ce^{3x^2}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(d) $xy' - \{y + xy^3(1 + \ln x)\} = 0$

Denklemin her iki tarafı y^{-3} ile çarpılırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = (1+\ln x)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u = y^{-2}$ alınırsa, $u' = -2y^{-3}y'$ olur ve verilen denklem

$$u' + \frac{2}{x}u = -2(1+\ln x)$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ux^2 = \int x^2(-2-2\ln x)dx + c = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^3\ln x + c$$

$$u = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{3}x\ln x + cx^{-2}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y^{-2} = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{3}x\ln x + cx^{-2}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(e) $xy' - (3x+6)y = -9xe^{-x}y^{4/3}$

Denklemin her iki tarafı $y^{-4/3}$ ile çarpılırsa

$$y'y^{-4/3} - \frac{(3x+6)}{x}y^{-4/3} = -9e^{-x}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u = y^{-1/3}$ alınırsa, $u' = -\frac{1}{3}y^{-4/3}y'$ olur ve verilen denklem

$$u' + \frac{(x+2)}{x}u = 3e^{-x}$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{(x+2)}{x}dx} = e^{x+2\ln|x|} = x^2e^x$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ux^2e^x = \int x^2e^x 3e^{-x}dx + c = x^3 + c$$

$$u = xe^{-x} + cx^{-3}e^{-x}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y = e^{3x}(cx^{-2} + x)^{-3}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(f) $3xy^2y' - 3y^3 = x^4\cos x$

Burada $u = y^3$ alınırsa, $u' = 3y^2y'$ olur ve verilen denklem

$$u' - \frac{3}{x}y^3 = x^3\cos x$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int -\frac{3}{x}dx}=e^{-3\ln|x|}=x^{-3}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ux^{-3}=\int x^{-3}x^3\cos x dx+c=\int \cos x dx+c=\sin x+c$$

$$u=x^3\sin x+cx^3$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y=x(\sin x+c)^{1/3}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(g) $y'-\dfrac{1}{x+1}y\ln y=(x+1)y$

Denklemin her iki tarafı y^{-1} ile çarpılırsa

$$y^{-1}y'-\frac{1}{(x+1)}\ln y=(x+1)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u=\ln y$ alınırsa, $u'=\dfrac{1}{y}y'$ olur ve verilen denklem

$$u'-\frac{1}{x+1}u=(x+1)$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int \frac{1}{1+x}dx}=e^{-\ln|x+1|}=\frac{1}{x+1}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$u\frac{1}{x+1}=\int\frac{1}{x+1}(x+1)dx+c=x+c$$

$$u=x(x+1)+c(x+1)$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$\ln y=x(x+1)+c(x+1)$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(h) $2y'+\dfrac{1}{1+x}y=-2(x^2-1)y^3$

Denklemin her iki tarafı y^{-3} ile çarpılırsa

$$2y^{-3}y'+\frac{1}{x+1}y^{-2}=-2(x^2-1)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u=y^{-2}$ alınırsa, $u'=-2y^{-3}y'$ olur ve verilen denklem

$$u'-\frac{1}{x+1}u=2(x^2-1)$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{1}{x+1}dx}=e^{-\ln|x+1|}=\frac{1}{1+x}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$u\frac{1}{x+1}=\int\frac{1}{x+1}2(x^2-1)dx+c=\int 2(x-1)dx+c=x^2-2x+c$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u=(x+1)x^2-2(x+1)x+c(x+1)=(x+1)\left[(x-1)^2+c-1\right]$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$y^{-2}=(x+1)\left[(x-1)^2+c'\right]$ verilen denklemin genel çözümü bulunur.

Burada $c'=c-1$ dir

(i) $y'-2(\sin x)y=-2\sin x\,y^{1/2}$

Denklemin her iki tarafı $y^{-1/2}$ ile çarpılırsa

$$y'y^{-1/2}-2(\sin x)y^{-1/2}=-2\sin x$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u=y^{-1/2}$ alınırsa $u'=-\frac{1}{2}y^{-3/2}y'$ olur ve verilen denklem

$$u'+(\sin x)u=\sin x$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \sin x\,dx}=e^{-\cos x}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ue^{-\cos x}=\int e^{-\cos x}\sin x\,dx+c=e^{-\cos x}+c$$

$$u=1+ce^{\cos x}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$y=(1+ce^{\cos x})^{-2}$ verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(j) $y'+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$

Denklemin her iki tarafı y^{-4} ile çarpılırsa

$$y^{-4}y'+\frac{1}{3}y^{-3}=\frac{1}{3}(1-2x)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u=y^{-3}$ alınırsa, $u'=-3y^{-4}y'$ olur ve verilen denklem

$$u'-u=2x-1$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int dx}=e^{-x}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ue^{-x}=\int e^{-x}(2x-1)dx+c=e^{-x}(-2x-1)+c$$

$$u=-(2x+1)+ce^{x}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y^{-3}=-(2x+1)+ce^{x}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(k) $y' + y = xy^{1/2}$

Denklemin her iki tarafı $y^{-1/2}$ ile çarpılırsa

$$y^{-1/2}y' + y^{-1/2} = x$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u = y^{1/2}$ alınırsa, $u' = -\frac{1}{2}y^{-1/2}y'$ olur ve verilen denklem

$$u' - \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}x$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{2}dx} = e^{-1/2x}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ue^{-1/2x} = \int -\frac{1}{2}xe^{-1/2x}dx + c = e^{-1/2x}(x+2) + c$$

$$u = (x+2) + ce^{1/2x}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y^{1/2} = (x+2) + ce^{1/2x}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(l) $xy' + y = 2xy^2$

Denklemin her iki tarafı y^{-2} ile çarpılırsa,

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = 2$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u = y^{-1}$ alınırsa, $u' = -y^{-2}y'$ olur ve verilen denklem

$$u' - \frac{1}{x}u = -2$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$' in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$\frac{1}{x}u = -\int \frac{2}{x}dx + c = -2\ln|x| + c$$

$$u = -2x\ln|x| + cx$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y = \frac{1}{cx - 2x\ln|x|}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(m) $y'+\frac{2}{x}y=\frac{y^3}{x^2}$

Denklemin her iki tarafı y^{-3} ile çarpılırsa

$$y^{-3}y'+\frac{2}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $u=y^{-2}$ alınırsa, $u'=-2y^{-3}y'$ olur ve verilen denklem

$$u'-\frac{4}{x}u=-\frac{2}{x^2}$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln|x|}=x^{-4}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ux^{-4}=-\int x^{-4}\frac{2}{x^2dx}+c=\frac{2}{5}x^{-5}+c$$

$$u=\frac{2}{5x}+cx^4$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y=\left[\frac{2}{5x}+cx^4\right]^{-1/2}$$

verilen denklemin genel çözümü elde edilir.

(n) $y'\tan x\sin 2y=\sin^2 x+\cos^2 y$ denklemini

$$2\sin y\cos yy'+\frac{\cos^2 y}{\tan x}=-\sin x\cos x$$

biçiminde yazalım. Bu denklemin Bernoulli diferansiyel denklemi olduğu görülmektedir. Burada $u=\cos^2 y$ alınırsa, $u'=-2\sin y\cos yy'$ olur ve verilen denklem

$$u'+\frac{1}{\tan x}u=-\sin x\cos x$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int\frac{1}{\tan x}dx}=e^{\ln|\sin x|}=\sin x$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$u\sin x=-\int\sin^2 x\cos xdx+c=-\frac{\sin^3 x}{3}+c$$

$$u=-\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{c}{\sin x}$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$(\sin^2 x+3\cos^2 y)\sin x=3c$$

verilen denklemin genel çözümü elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.7 *Riccati Diferansiyel Denklemi*

Tanım 2.8 Standart Riccati denklemi

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{2.25}$$

biçiminde lineer olmayan bir denklemdir. Burada p, özdeş olarak sıfır olmayan bir fonksiyondur. Riccati denklemi $r = 0$ için Bernoulli denklemi olup, $p = q = 0$ içinde değişkenlerine ayrılan diferansiyel denklem olduğu görülür. Bu denklemin $y = y_1$ gibi bir özel çözümü biliniyorsa denklemin genel çözümü bulunabilir. Bunun için u yeni bir bağımlı değişken olmak üzere

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \tag{2.26}$$

dönüşümü yapmak yeterlidir. y_1 özel bir çözüm olduğundan (2.25) denklemini sağlar, böylece

$$y_1' = py_1^2 + qy_1 + r \tag{2.27}$$

olur. O halde (2.25) denklemi

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2} = p(y_1^2 + 2\frac{y_1}{u} + \frac{1}{u^2}) + q(y_1 + \frac{1}{u}) + r$$

olarak yazılır ve (2.27) göz önünde bulundurulursa

$$u' + (2py_1 + q)u + p = 0 \tag{2.28}$$

lineer denklemi elde edilir. Bunun çözümü ise Tanım 2.6 da verilen yöntemle çözülür. Riccati denkleminin çözümünü bulmak için

$$y = y_1 + v \tag{2.29}$$

değişken dönüşümü de uygulanabilir. Bu durumda denklem Bernoulli denklemine dönüşür. Bunun çözümü ise Tanım 2.7 de verilmiştir.*

Aşağıdaki Riccati denklemlerinin yanlarında gösterilen bir özel çözümü bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.

(a) $y' + y^2 - 2xy + x^2 - 1$, $y_1 = x$

(b) $y' + y^2 = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$, $y_1 = \frac{1}{x}$

(c) $y' + e^{-x}y^2 - 3y + e^x = 0$, $y_1 = e^x$

(d) $(1 - \sin x \cos x)y' + \cos x y^2 - y + \sin x = 0$, $y_1 = \cos x$

(e) $y' + \sin x y^2 = 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, $y_1 = \sec x$

* Kaynak 6

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) $y' + y^2 - 2xy + x^2 - 1$ denklemini çözmek için $y_1 = x$ verildiğinden,

$y = y_1 + \frac{1}{u} = x + \frac{1}{u}$ dönüşümü yapılır. $y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ olduğundan y ve y' verilen denklemde yerine koyulursa

$$u' - 1 = 0$$

değişkenlerine ayrılabilen denkleme dönüşür. Bu denklemin çözümü ise

$$u = x + c$$

biçimindedir. Bulunan bu çözüm y de yerine koyulursa

$y = x + \frac{1}{c - x}$ verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(b) $y' + y^2 = \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$ denklemini çözmek için $y_1 = \frac{1}{x}$ verildiğinden,

$y = y_1 + v = \frac{1}{x} + v$ dönüşümü yapılır. $y' = -\frac{1}{x^2} + v'$ olduğundan y ve y' verilen denklemde yerine koyulursa

$$v' + v = -xv^2$$

bulunur. Denklemin her iki tarafı v^{-2} ile çarpılırsa

$$v'v^{-2} + v^{-1} = -x$$

Bernoulli diferansiyel denklemine dönüşür. Burada $u = v^{-1}$ alınırsa, $u' = -v^{-2}v'$ olur ve verilen denklem

$$u' - u = x$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ue^{-x} = \int e^{-x} x dx + c = -xe^{-x} - e^{-x} + c$$

$$u = -x - 1 + ce^{x}$$

$$v = \frac{1}{u} = \frac{1}{-x - 1 + ce^{x}}$$

elde edilir. Bulunan bu çözüm y de yerine koyulursa $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{-x - 1 + ce^{x}}$ verilen denklemin genel çözümü bulunur.

(c) $y' + e^{-x}y^2 - 3y + e^{x} = 0$ denklemini çözmek için $y_1 = e^{x}$ verildiğinden.

$y = y_1 + \frac{1}{u} = e^{x} + \frac{1}{u}$ dönüşümü yapılır. $y' = e^{x} - \frac{u'}{u^2}$ olduğundan y ve y' verilen denklemde yerine koyulursa

$$u' + u = e^{-x}$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^{x}$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$ue^{x} = \int e^{x}e^{-x}dx + c = x + c$$

$$u = e^{-x}x + ce^{-x}$$

elde edilir. Bulunan bu çözüm y de yerine koyulursa

$$y = e^{x} + \frac{1}{e^{-x}x + ce^{-x}}$$

verilen denklemin istenilen çözümü bulunur.

(d) $(1-\sin x\cos x)y' + \cos x y^{2} - y + \sin x = 0$ denklemini çözmek için $y_1 = \cos x$ verildiğinden,

$y = \cos x + u$ dönüşümü yapılır. $y' = -\sin x + u'$ olduğundan y ve y' verilen denklemde yerine koyulursa

$$u' + \frac{2\cos^{2}x - 1}{1-\sin x\cos x}u = -\frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}u^{2}$$

biçiminde Bernoulli diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin her iki tarafı u^{-2} ile çarpılırsa ve $u^{-1} = z$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$z' - \frac{2\cos^{2}x - 1}{1-\sin x\cos x}z = \frac{\cos x}{1-\sin x\cos x}$$

lineer denklemi elde edilir. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{2\cos^{2}x-1}{1-\sin x\cos x}dx} = e^{\ln|1-\sin x\cos x|} = 1-\sin x\cos x$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$z(1-\sin x\cos x) = \int (1-\sin x\cos x)\frac{\cos x}{(1-\sin x\cos x)}dx + c = \sin x + c$$

$$z = \frac{\sin x + c}{1-\sin x\cos x}$$

bulunur. $u^{-1} = z$ olduğundan

$$u = \frac{1-\sin x\cos x}{\sin x + c}$$

elde edilir ve u nun değeri y de yerine koyulursa

$$y = \cos x + u = \frac{c\cos x + 1}{\sin x + c}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $y'+\sin x y^2 = 2\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ denklemini çözmek için $y_1 = \sec x$ verildiğinden,

$y = y_1 + \dfrac{1}{u} = \sec x + \dfrac{1}{u}$ dönüşümü yapılır. $y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{u'}{u^2}$ olduğundan y ve y' verilen denklemde yerine koyulursa

$$u' - 2\frac{\sin x}{\cos x}u = \sin x$$

biçiminde lineer diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{-2\int \frac{\sin x}{\cos x}dx} = e^{2\ln|\cos x|} = \cos^2 x$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$u\cos^2 x = \int \cos^2 x \sin x dx + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

buradan

$$u = \frac{3c - \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

bulunur. u nun değeri y de yerine koyulursa

$$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3c - \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

$$y = \frac{\cos x + 3c - \cos^3 x}{\cos^2 x}$$

verilen denklemin genel çözümü bulunur.

2. BÖLÜMLE İLGİLİ PROBLEMLER

A. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri değişkenlerine ayırarak çözünüz.

1. $(1-x)y' = y^2$ — Y. $y\ln|c(1-x)| = 1$
2. $x^3dx + y(x-1)dy = 0$ — Y. $(x+1)^2 + y^2 + 2\ln|c(x-1)| = 0$
3. $xydx - (x+2)dy = 0$ — Y. $e^x = cy(x+2)^2$
4. $x^2yy' = e^y$ — Y. $x(y+1) = (1+cx)e^y$
5. $(1+\ln x)dx + (1+\ln y)dy = 0$ — Y. $x\ln x + y\ln y = c$
6. $(e^{2x}+4)y' = y$ — Y. $y^8(1+4e^{-2x}) = c^8$
7. $x^3dy - x^3dx = dx$ — Y. $2y = 2x - x^{-2} + c$
8. $\tan^2 ydy = \sin^3 xdx$ — Y. $\cos^3 x - 3\cos x = 3(\tan y - y + c)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

B. Aşağıdaki denklemlerin homogen olduklarını göstererek çözümlerini bulunuz.

1. $3(3x^2+y^2)dx-2xydy=0$ Y. $x^3=c(9x^2+y^2)$
2. $xydx-(x^2+3y^2)dy=0$ Y. $x^3=6y^2\ln\left|\frac{y}{c}\right|$
3. $(5v-u)du+(3v-7u)dv=0$ Y. $(3v+u)^2=c(v-u)$
4. $\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right)-y\right]dx+xdy=0$ Y. $\ln\left|\frac{x}{c}\right|=\cos\left(\frac{y}{x}\right)$
5. $ydx=(x+\sqrt{y^2-x^2})dy$ Y. $\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left|\frac{y}{c}\right|$
6. $(3x^2-2xy+3y^2)dx=4xydy$ Y. $(y-x)(y+3x)^3=cx^5$
7. $t(s^2+t^2)ds-s(s^2-t^2)dt=0$ Y. $s^2=-2t^2\ln|cst|$
8. $x^2y'=4x^2+7xy+2y^2$ Y. $x^2(y+2x)=c(y+x)$

C. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1. $(x-4y-9)dx+(4x+y-2)dy=0$

   Y. $\ln\left[(x-1)^2+(y+2)^2\right]-8\arctan\frac{x-1}{y+2}=c$
2. $(x-y+2)dx+3dy=0$ Y. $x+c=3\ln|x-y+5|$
3. $(6x-3y+2)dx-(2x-y-1)dy=0$ Y. $3x-y+c=5\ln|2x-y+4|$
4. $(x-1)dx-(3x-2y-5)dy=0$ Y. $(2y-x+3)^2=c(y-x+2)$
5. $(9x-4y+4)dx-(2x-y+1)dy=0$ Y. $y-1=3(y-3x-1)\ln|c(3x-y+1)|$

D. Aşağıda verilen denklemlerin tam diferansiyel olup olmadığını gösteriniz. Tam diferansiyel olanları çözünüz. Tam diferansiyel olmayanlarda; uygun integrasyon çarpanlarını bulup tam diferansiyel denkleme dönüştürdükten sonra çözünüz.

1. $(x^2+y^2+1)dx+x(x-2y)dy=0$ Y. $x^2-y^2+xy-1=cx$
2. $y(4x+y)dx-2(x^2-y)dy=0$ Y. $2x^2+xy+2y\ln|y|=cy$
3. $y(8x-9y)dx+2x(x-3y)dy=0$ Y. $x^3y(2x-3y)=c$
4. $2y(x+y+2)dx+(y^2-x^2-4x-1)dy=0$ Y. $x^2+2xy+y^2+4x+1=cy$
5. $xdy-ydx=\sqrt{x^2-y^2}dx$ Y. $\arcsin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x^2+c$
6. $y^2dx+(3xy+y^2-1)dy=0$ Y. $y^2(y^2+4xy-2)=c$
7. $(1+y^2)dx=(x+x^2)dy$ Y. $\arctan y=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+c$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

E. *Aşağıda verilen birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemleri çözünüz.*

1. $(x^5+3y)dx-xdy=0$ Y. $2y=x^5+cx^3$
2. $y'=\csc x-y\cot x$ Y. $y\sin x=x+c$
3. $y'=x-2y\cot x$ Y. $4y\sin 2x=c+\sin 2x-2x\cos 2x$
4. $vdx+(2x+1-vx)dv=0$ Y. $xv^2=v+1+ce^v$
5. $y'=1+3y\tan x$ Y. $3y\cos^3 x=3\sin x-\sin^3 x+c$
6. $\frac{di}{dt}-6i=10\sin 2t$ Y. $i=-\frac{1}{2}(3\sin 2t+\cos 2t)+ce^{6t}$
7. $y(1+y^2)dx=2(1-2xy^2)dy$ Y. $(1+y^2)^2x=2\ln|y|+y^2+c$

F. *Aşağıdaki Bernoulli Diferansiyel Denklemlerini çözünüz.*

1. $y'-y=xy^2$ Y. $\frac{1}{y}=1-x+ce^{-x}$
2. $y'+y=y^2e^x$ Y. $(c+x)ye^x+1=0$
3. $xy'+y=x^3y^6$ Y. $\frac{2}{y^5}=cx^5+5x^3$
4. $yy'-xy^2+x=0$ Y. $y^2=1+ce^{x^2}$
5. $2\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}+x^3\cos y=0$ Y. $x^{-2}y=\cos y+y\sin y+c$
6. $(2xy^5-y)dx+2xdy=0$ Y. $3x^2=(4x^5+c)y^4$

G. *Aşağıdaki Riccati Diferansiyel Denklemlerinin yanlarında gösterilen bir özel çözümü bilindiğine göre genel çözümünü bulunuz.*

1. $y'-(1-x)y^2-(2x-1)y+x=0$, $y_1=1$ Y. $(y-1)(x-2+ce^{-x})=1$
2. $y'+y^2=\frac{1}{x^4}$, $y_1=\frac{x+1}{x^2}$ Y. $x^2y=x+1+(ce^{-2x}-1/2)^{-1}$
3. $x^2(y'+y^2)+4xy+2=0$, $y_1=-\frac{2}{x}$ Y. $y=\frac{2c-x}{x(x-c)}$
4. $y'-\frac{1}{2\cos x}y^2-\frac{2\cos^2 x-\sin^2 x}{2\cos x}=0$, $y_1=\sin x$

Y. $y=\sin x+(c\cos x-1/2\sin x)^{-1}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 3. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

3.1 Dik Yörüngeler

xy - düzleminde bir D bölgesinde tanımlanmış olan bir eğri ailesi

$$f(x,y,c)=0$$

denklemi ile verilir. Burada c bir parametredir ve c nin her değeri yeni bir eğriyi tanımlar. Bu eğriler birlikte bir eğri ailesi oluşturur. Bir eğri ailesinin eğrilerinin her birini aynı bir α açısı ile kesen bir eğriyi varsayalım. Bu eğriye adı geçen eğri ailesinin α - yörüngesi denir.

Eğer α açısı 90^0 olursa bu yörüngeye **dik yörünge** denir.

Verilen eğri ailelerinin dik yörüngelerini bulmak için izlenecek adımları özetleyelim.

i) $f(x,y,c)=0$ (3.1)

eğri ailelerinin denkleminden eğri ailesinin

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.2}$$

biçiminde diferansiyel denklemini bulalım.

ii) (3.2) de $f(x,y)$ fonksiyonu negatif işaretli tersi $-1/f(x,y)$ ile değiştirilir. Böylece istenilen dik yörüngelerin diferansiyel denklemi

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{f(x,y)} \tag{3.3}$$

bulunur.

iii) (3.3) denkleminin çözümünden

$$G(x,y,c)=0 \tag{3.4}$$

veya

$$y=F(x,c) \tag{3.5}$$

biçiminde bir parametreli eğri ailesi bulunur.

Aşağıdaki bir parametreli eğri ailelerinin dik yörüngelerini bulunuz

(a) $xy=c$ (b) $x^2+y^2=c^2$

(c) $y=cx^2$ (d) $cx^2+y^2=1$

Çözümler :

(a) $xy=c$ (1)

(1) eşitliğinin her iki tarafının türevini alarak

$$x\frac{dy}{dx}+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \tag{2}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eğri ailesine dik olan eğri ailesinin diferansiyel denklemi ise

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$ydy = xdx \tag{3}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılan diferansiyel denklemdir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$y^2 - x^2 = c \tag{4}$$

çözümü bulunur. (4) denklemi hiperbol eğri ailesini temsil eder.

(b) $x^2 + y^2 = c^2$ (1)

(1) eşitliği, merkezi başlangıç noktasında olan c yarıçaplı çember kümesini tanımlar. Başlangıç noktasına bir pozitif nokta yük koyduğumuzu varsayalım. $xy-$ düzlemi üzerinde elektrik potansiyel şiddeti aynı olan noktaların geometrik yeri c yarıçaplı çemberdir. Böylece verilen eğri ailesi eş potansiyel eğrilerinin matematiksel ifadesidir.
(1) eşitliğinin her iki tarafının türevini alarak

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eğri ailesine dik olan eğri ailesinin diferansiyel denklemi ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0 \tag{3}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$y = kx \tag{4}$$

çözümü bulunur. (4) denklemi başlangıç noktasından çıkan ve $xy-$ düzlemi içinde uzanan kuvvet çizgilerini temsil eder.

(c) $y = cx^2$ (1)

(1) eşitliği tepe noktası başlangıç noktasında olan parabol kümesini tanımlar.
(1) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{dy}{dx} = 2cx \tag{2}$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerinden c parametresi yok edilirse

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \tag{3}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eğri ailesine dik olan eğri ailesinin diferansiyel denklemi ise

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

$$2ydy = -xdx \tag{4}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılan diferansiyel denklemdir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$x^2 + 2y^2 = k^2 \tag{5}$$

çözümü bulunur. Burada k keyfi bir sabittir. (5) denklemi merkezi başlangıç noktasında olan bir elips ailesini gösterir. Bu elips ailesinin yarı büyük eksenleri x ekseni üzerindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(d) $cx^2 + y^2 = 1$ (1)

(1) eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$cx + yy' = 0 \quad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) denklemlerinden c parametresi yok edilirse

$$(1-y^2) + xyy' = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1-y^2)}{xy} \quad (3)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Eğri ailesine dik olan eğri ailesinin diferansiyel denklemi ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1-y^2}$$

$$\frac{(1-y^2)}{y}dy = xdx \quad (4)$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilen denklemdir. Bu denklemin her iki tarafının integrali alınırsa

$$x^2 + y^2 - 2\ln|y| = c$$

elde edilir. Bu ise istenen dik yörünge eğri ailesinin denklemidir

3. 2 *Radyoaktif Bozunma*

(a) Radyoaktif Toryum -234 izotopu mevcut miktarına bağlı olarak bozunmaya uğrar. Bir hafta sonra bu maddenin başlangıçta mevcut olan 100 mg 'lık miktarı 82,004 mg 'a inerse

i) Radyoaktif izotopun herhangi bir t anında miktarını belirten ifadeyi yazınız.

ii) Bu maddenin kütlesinin yarıya inmesi için gereken zaman süresini bulunuz.

Çözüm :

i) Problemin çözümünü veren diferansiyel denklem bir başlangıç değer problemi olarak

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad ; \quad y(0) = 100 \ , \ y(7) = 82{,}004 \quad (3.5)$$

biçiminde yazılır. Burada t zamanı gün cinsinden ve herhangi bir anda maddenin mevcut miktarı $y(t)$ ise miligram cinsinden verilmiştir. Zaman geçtikçe madde miktarı azaldığı için k katsayısı bir negatif sayıdır. Yukarıdaki diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilen bir diferansiyel denklem olup çözümü

$$y = y_0 e^{kt} \quad (3.6)$$

biçimindedir. (3.5) de verilen başlangıç koşullarının ilki uygulanırsa $y_0 = 100$ bulunur. k nın değerini bulmak için (3.6) denkleminde bulduğumuz y_0 ın değeri ve ikinci koşul birlikte kullanılırsa

$$82{,}004 = 100e^{7k}$$

$$k = \frac{\ln 0{,}824}{7} = -0{,}02831 \ (\text{gün})^{-1}$$

elde edilir. k nın bu değeri (3.6) da yerine koyulursa

$$y(t) = 100e^{-0.0283t} \quad (3.7)$$

radyoaktif izotopun herhangi bir t anında miktarını belirten ifade bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ii) Herhangi bir t anında geriye kaç miligram Th-234 kaldığı (3.6) denklemiyle bulunur. Bir radyoaktif elementin miktarının yarıya inmesi için geçen zamana o elementin **yarı ömrü** denir ve τ ile gösterilir. (3.6) denkleminde değerler yerine koyulursa

$$50 = 100\,e^{-0.02831\tau}$$

$$\tau = \frac{\ln 2}{0{,}02831} = 24{,}5 \text{ gün}$$

olarak bulunur.

(b) Fosilleşmiş kemikte radyoaktif karbon ${}_6C^{14}$ ün miktarı %25 ise bu fosilin yaşını bulunuz.

Çözüm :

Atmosferde, radyoaktif karbon ${}_6C^{14}$ ün ${}_6C^{12}$ ye oranı sabittir. Bu canlı organizmalar için de geçerlidir. Organizma öldüğünde solunum ve yiyeceklerden alınan radyoaktif karbon miktarı sona erer. Böylece atmosferdeki karbon oranı ile fosilde mevcut olan karbon oranı kıyaslanarak fosilin yaşı bulunabilir. (1960 yılında Nobel Kimya Ödülü bu buluşa verilmiştir.)

${}_6C^{14}$ ün yarı ömrü $\tau = 5730$ yıldır. (3.6) denklemini yeniden yazalım

$$y = y_0 e^{kt}$$

burada y_0 , ${}_6C^{14}$ ün başlangıçtaki değeridir. Verilen yarı ömrün değeri yerine koyulursa

$$\frac{1}{2} = e^{5730k}$$

$$k = \frac{\ln 2}{5730} = -0{,}000121$$

bulunur. Radyoaktif elementin başlangıçtaki madde miktarının %25 'e düştüğü zaman süresi (3.6) denkleminden hesaplanabilir.

$$\frac{1}{4} = e^{kt} = e^{-0.000121t}$$

$$t = \frac{\ln 1/4}{-0{,}000121} = 11460 \text{ yıl}$$

böylece fosilin yaşı 11460 yıl olarak bulunur.

3. 3 Newton 'un soğuma yasası

(a) Bakırdan yapılmış top 373 K'e kadar ısıtılıyor. $t = 0$ anında sıcaklığı 303 K olan su içine batırılıyor. 3 dakika geçtikten sonra bakır topun sıcaklığı 343 K'e düşüyor. Bakır topun sıcaklığının 304 K'e düşmesi için geçen zamanı bulunuz.

Çözüm:

Newton ' un soğuma yasasına göre soğuyan bir cismin sıcaklığındaki değişme hızı cismin ve dış ortamın sıcaklıkları arasındaki fark ile orantılıdır ve

$$\frac{dT}{dt} = -k\Delta t \qquad (3.8)$$

diferansiyel denklemiyle ifade edilir. Burada $\Delta t = T_{cisim} - T_{ortam}$ ve k ise pozitif orantı katsayısıdır. (3.8) denklemi probleme uygulanırsa

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 303)$$

yazılır. Ayrıca başlangıç koşulları $T_{cisim}(0) = 373\,K$ ve $T_{cisim}(3) = 343\,K$ olarak verilmiştir. Değişkenlerine ayrılabilen bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\frac{dT}{T-30} = -kdt$$
$$\ln(T-303) = -kt + C$$
$$T - 303 = Ce^{kt}$$
$$T(t) = Ce^{-kt} + 303$$

elde edilir. Bu denklemde başlangıç koşulu $T_{cisim}(0) = 373\,K$ kullanılırsa $C = 70\,K$ bulunur. Bulunan bu sabitin değeri yukarıda yerine koyulursa

$$T(t) = 70e^{-kt} + 303$$

elde edilir. k katsayısını bulmak için $T_{cisim}(3) = 343\,K$ kullanılır. Bunu kullanarak yukarıdaki denklem

$$T(3) = 70e^{-k} + 303 = 343$$

şeklinde ifade edilir. Buradan

$$k = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{4} = 0{,}1865$$ bulunur. k'nın bu değeri tekrar yukarıda yerine koyulursa

$$T(t) = 70e^{-0{,}1865t} + 303$$

bulunur. Bakır topun sıcaklığının 304 K'e düşmesi için geçen zamanı en son bulduğumuz denklemden

$$304 = 70e^{-0{,}1865t} + 303$$
$$t = \frac{\ln 70}{0{,}1865} = 22{,}78 \approx 23 \text{ dakika}$$

buluruz. Sonuç olarak 23 dakika sonra bakır topun sıcaklığı 304 K'e düşer.

(b) Ev içinde oda sıcaklığını 295 K olarak gösteren bir termometre, sıcaklığı 283 K olan bina dışına çıkarılmaktadır. 2 dakika sonra termometrenin 289 K gösterdiği görülmüştür. Herhangi bir anda termometrenin göstereceği sıcaklığın değerini bulunuz.

Çözüm :

(3.8) denklemi probleme uygulanırsa

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-283)$$

yazılır. Ayrıca başlangıç koşulları $T(0) = 295\,K$ ve $T(2) = 289\,K$ olarak verilmiştir. Değişkenlerine ayrılabilen bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\frac{dT}{T-283} = -kdt$$
$$\ln(T-283) = -kt + C$$
$$T - 283 = Ce^{kt}$$
$$T(t) = Ce^{-kt} + 283$$

olarak bulunur. Bu denklemde başlangıç koşulu $T(0) = 295\,K$ kullanılırsa $C = 12\,K$ elde edilir. Bulunan bu sabitin değeri yukarıda yerine koyulursa

$$T(t) = 12e^{-kt} + 283$$

bulunur. Bulduğumuz bu denklemde $T(2) = 289$ K koşulu kullanılırsa

$$T(2) = 289 = 12e^{-2k} + 283$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$e^{-k} = 1/\sqrt{2}$$

bulunur. Böylece herhangi bir andaki termometrenin göstereceği sıcaklığın değeri

$$T(t) = 12(1/\sqrt{2})^t + 373$$

ifadesi ile verilir.

3. 4 *Mekanik Problemleri*

(a) Yeryüzünden radyal doğrultuda fırlatılan bir cismin minimum kurtulma hızını bulunuz. Havanın sürtünme kuvvetinin ve diğer gök cisimlerinin çekim kuvveti göz önüne alınmayacaktır.

Çözüm :

Newton 'un çekim yasasına göre çekim kuvveti ve yeryüzünden radyal doğrultuda fırlatılan cismin ivmesi $1/r^2$ ile orantılıdır. Burada r yeryüzünün merkezinden cisme olan uzaklığı gösterir. Böylece

$$a(r) = \frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2} \tag{3.9}$$

yazılır. Burada v hızı t ise zamanı gösterir. v hızı azaldığı için $a < 0$ ve dolayısıyla $k < 0$. Eğer R yeryüzünün yarıçapı olarak alınırsa, $r = R$ olması durumunda $a = -g$ olur. Burada g yeryüzündeki çekim ivmesini gösterir. (3.9) da $a = -g$ koyulursa

$$-g = a(r) = \frac{k}{r^2}$$

ve

$$a(r) = -g\frac{R^2}{r^2} \tag{3.10}$$

bulunur. Ayrıca

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v \tag{3.11}$$

(3.10) ile (3.11) eşitlenirse

$$\frac{dv}{dr}v = -g\frac{R^2}{r^2}$$

$$vdv = -gR^2\frac{dr}{r^2} \tag{3.12}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Değişkenlerine ayrılabilen bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\frac{v^2}{2} = g\frac{R^2}{r} + c \tag{3.13}$$

biçimindedir. Yeryüzünde $r = R$ ve v_0 başlangıç hızı olmak üzere $v = v_0$ dır. Bu değer (3.13) de yerine koyulursa c sabiti bulunur.

$$c = \frac{v_0^2}{2} - gR \tag{3.14}$$

c nin değeri (3.13) de yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$v^2 = \frac{2gR^2}{r} + v_0^2 - 2gR$$

bulunur. Eğer $v^2 = 0$ ise $v = 0$ olur. Bu durumda cisim durur. Hız pozitif değerden negatif değere değişeceğinden cisim yeryüzüne geri döner. Bunu önlemek için v_0 değeri büyük seçilir. Eğer

$$v_0 = \sqrt{2gR} \tag{3.15}$$

olarak seçilirse (3.14) de $v_0^2 - 2gR$ sıfır olur ve r nin hiç bir değeri için v^2 sıfır olmaz. Fakat v_0 için daha küçük değer seçersek r nin belirli değerleri için $v = 0$ olabilir. (3.15) denklemine yeryüzünden kurtulma hızı denir. $R = 6372$ km ve $g = 0{,}00980$ km/s^2 ise

$$v_0 = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ km/s}$$

olarak bulunur.

(b) Yeryüzüne doğru düşen bir paraşütcünün $t = 0$ anında paraşütünün açıldığını düşünelim. Bu andaki $v(0) = v_0 = 10$ m/s ise t zaman sonraki $v(t)$ hızını bulunuz

Çözüm :

Paraşütcünün ve paraşüt düzeneğinin toplam ağırlığı $W = 712$ N olsun. Havanın direncini U ile gösterirsek, $U = bv^2$ dir. Buradaki b katsayısı paraşüte bağlı bir katsayıdır ve $b = 30$ N olduğunu kabul edelim. Newton'un ikinci yasası

$$F = ma \tag{3.16}$$

biçiminde ifade edilir. Paraşütcüye etki eden iki kuvvet W ve U dur. Havanın direnci hareketin yönünün ters yönünde olduğu için, etki eden net kuvvet

$$W - U = mg - bv^2$$

olur. Yasayı uygulayacak olursak

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv^2 \tag{3.17}$$

ifadesi bulunur. (3.17) problemin diferansiyel denklemi olup $v(0) = v_0 = 10$ m/s ise başlangıç koşuludur. (3.17) denklemini yeniden düzenlenmiş olarak yazalım.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}(v^2 - k^2) \tag{3.18}$$

Burada $k^2 = mg/b$ dir. (3.18) denklemi değişkenlerine ayrılırsa

$$\frac{dv}{v^2 - k^2} = -\frac{b}{m}dt$$

$$\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{v-k} - \frac{1}{v+k}\right]dv = -\frac{b}{m}dt \tag{3.19}$$

biçiminde yazılır. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\frac{1}{2k}[\ln(v-k) - \ln(v+k)] = -\frac{b}{m}t + c'$$

$$\frac{1}{2k}\ln\frac{(v-k)}{(v+k)} = -\frac{b}{m}t + c'$$

$$\frac{v-k}{v+k} = ce^{-pt} \tag{3.20}$$

bulunur. Burada $c = e^{2kc'}$ ve $p = \frac{2kb}{m}$ dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(3.20) denkleminden

$$v(t) = k\frac{1+ce^{-pt}}{1-ce^{-pt}}$$

elde edilir. Burada görüldüğü gibi $t \to \infty$ giderken $v(t) \to k$ ya yaklaşır. Verilen başlangıç koşulu $v(0) = v_0 = 10$ m/s kullanılarak (3.20) den

$$c = \frac{v_0 - k}{v_0 + k} \qquad (3.21)$$

bulunur. Ayrıca k nın değeri, $k^2 = \frac{mg}{b} = \frac{W}{b} = \frac{712}{30} = 23{,}7\ \text{m}^2/\text{s}^2$ den $k = 4{,}87$ m/s olarak bulunur. Bu değer (3.21) de yerine koyulursa $c = 0{,}345$ bulunur ve $p = \frac{2kb}{m} = \frac{2(4{,}87)(30)}{72{,}7} = 4{,}02s^{-1}$ değeri de bulunduktan sonra sonuç olarak

$$v(t) = 4{,}87\frac{1+0{,}345e^{-4{,}02t}}{1-0{,}345e^{-4{,}02t}}$$

elde edilir.

(c) Kütlesi $m = 2$ kg olan duran bir cisim $F = 2\sin 2t$ kuvveti ile yatay olarak hareket ettiriliyor. Cismin hareket ettiği yüzeyin karşı koyduğu sürtünme kuvveti cismin hızının iki katı olduğuna göre cismin herhangi bir t anındaki hızını veren bağıntıyı bulunuz.

Çözüm :
Newton yasası uygulandığında problemi

$$2\frac{dv}{dt} = 2\sin 2t - 2v$$

$$\frac{dv}{dt} + v = \sin 2t \qquad ; \ v(0) = 0 \qquad (3.22)$$

biçiminde başlangıç değer problemi olarak ifade ederiz. (3.22) denklemi birinci mertebeden lineer diferansiyeldir. Bu denklemin çözüm yöntemi ikinci bölümde açıklanmıştır. Burada integrasyon çarpanının e^t olduğu görülür. Buna göre

$$ve^t = \int e^t \sin 2t dt$$
$$ve^t = e^t \sin 2t - 2e^{2t}\cos 2t + c$$
$$v = \sin 2t - 2\cos 2t + ce^{-t} \qquad (3.23)$$

integral sabitini bulmak için (3.23) de verilen başlangıç koşulu $v(0) = 0$ kullanılarak $c = 2$ bulunur. (3.23) de yerine koyulursa

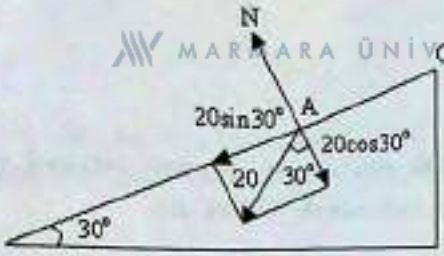
$$v = \sin 2t - 2\cos 2t + 2e^{-t}$$

istenilen bağıntı bulunur.

(d) Yatayla 30^0 açı yapan bir eğik düzlemin tepe noktasından eğik düzlem boyunca serbest olarak bırakılan cismin ağırlığı 20 kg olsun. Hava sürtünmesi cismin hızının yarısına ve cisim ile eğik düzlem arasındaki sürtünme katsayısı ise $\mu = 0{,}25$ olarak verilsin. Cismin eğik düzlem boyunca serbest olarak bırakılmasından 2 s sonra hızı ne olacaktır ?

Çözüm :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Cismin O noktasından eğik düzlem boyunca serbest bırakılması durumunda cismin hareket denklemini yazmak için Newton yasası uygulanırsa

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2 + F_3 \qquad (3.24)$$

yazılabilir. Burada F_1 cismin ağırlığının eğik düzlem doğrultusundaki bileşeni F_2 sürtünme kuvveti ve F_3 ise havanın sürtünme kuvvetidir. Bu kuvvetlerin sayısal değerleri

$$F_1 = 20\sin 30^\circ = 10$$

$$F_2 = \mu N = -\frac{1}{4}20\cos 30^\circ = -5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ve $F_3 = -\frac{1}{2}v$ dir.

Burada F_2 ve F_3 kuvvetlerinin işaretinin negatif olmasının nedeni her ikisinin de yönlerinin yukarı doğru olmasındandır. Ayrıca m kütlesinin değeri

$$m = \frac{w}{g} = \frac{20}{10} = 2$$

olarak verilmektedir. Bu değerler (3.24) denkleminde yerlerine koyulursa

$$2\frac{dv}{dt} = 10 - 5\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}v \qquad (3.25)$$

problemimizin diferansiyel denklemi yazılmış olur. Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. (3.25) denklemini aşağıdaki biçimde yeniden yazarsak

$$4\frac{dv}{dt} = 20 - 5\sqrt{3} - v$$

$$\frac{dv}{20 - 5\sqrt{3} - v} = \frac{dt}{4}$$

her iki tarafın integrali alınırsa

$$v = 20 - 5\sqrt{3} - c_1 e^{-t/4} \qquad (3.26)$$

bulunur. c_1 sabiti $v(0) = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak $c_1 = 20 - 5\sqrt{3}$ olarak bulunur. c_1 in değeri (3.26) yerine koyulursa hızın zamana bağlı olarak

$$v = (20 - 5\sqrt{3})(1 - e^{-t/4}) \qquad (3.27)$$

ifadesi bulunur. (3.27) de $t = 2s$ koyulursa , cismin eğik düzlem boyunca serbest olarak bırakılmasından 2s sonraki hızın değeri

$$v(2) = (20 - 5\sqrt{3})(1 - e^{-1/2}) = 4{,}462 \text{ m/s}$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) Halkaları eşit olarak yapılmış a uzunluğundaki bir zincir sürtünmesiz ve yatay yüzeye sahip masa üzerinde bulunmaktadır. Zincir masanın bir ucundan b uzunluğu kadar aşağıya doğru sarkmaktadır. Bu zincirin tamamının masanın üzerinden kayarak düşmesi için ne kadar süre geçmelidir ?

Çözüm :

t anında zincirin boyunun x kadar masadan sarktığını ve zincirin yoğunluğunun σ olduğunu varsayalım. Zincirin hareket denklemini yazacak olursak

Net kuvvet = Hızlandırılan kütle x ivme

$$(\sigma g)x = \sigma a \frac{dv}{dt} \tag{3.28}$$

$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ olduğu için (3.28) yeniden aşağıdaki biçimde

$$vdv = \frac{g}{a}xdx \tag{3.29}$$

yazılır. (3.28) değişkenlerine ayrılabilen bir diferansiyel denklemdir. Çözümü her iki tarafının integrali alınarak

$$v^2 = \frac{g}{a}x^2 - c \tag{3.30}$$

bulunur. İntegral sabiti $v = 0$ iken $x = b$ başlangıç koşulu kullanılırsa $c = \frac{g}{a}b^2$ olarak elde edilir. Bu değer (3.30) da yerine koyulursa

$$v = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{x^2 - b^2} \tag{3.31}$$

bulunur. t anında zincirin masadan sarkan boyunu bulmak için

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{x^2 - b^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{g}{a}}\,dt \tag{3.32}$$

(3.32) denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\ln\left|x + \sqrt{x^2 - b^2}\right| = \sqrt{\frac{g}{a}}t + c' \tag{3.33}$$

elde edilir. Burada $t = 0$ iken $x = b$ başlangıç koşulu kullanılırsa $c' = \ln|x|$ bulunur. c' nün değeri (3.33) de yerine koyulursa

$$\ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - b^2}}{x}\right| = \sqrt{\frac{g}{a}}t \tag{3.34}$$

bulunur. Zincirin masanın üzerinden tamamen kayması için gereken T zamanı (3.34) de $x = a$ koyularak

$$T = \sqrt{\frac{a}{g}}\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right|$$

elde edilir.

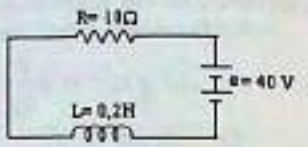
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3. 5 *Elektrik Devre Problemleri*

(a) Elektromotor kuvveti $\varepsilon = 40\,\mathrm{V}$ olan bir üreteç, $R = 10\,\Omega$ luk bir direnç teli ve $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$ olan bir bobinle seri olarak bağlıdır. $I(0) = 0$ olarak varsayılmıştır. Akım şiddetinin zamana bağlı olarak ifadesini bulunuz.

Çözüm :

I, t anında devreden geçen akım şiddetini göstersin.



R direnci üzerindeki potansiyel düşmesi $\varepsilon_R = RI$

L bobini üzerindeki potansiyel düşmesi $\varepsilon_L = L\dfrac{dI}{dt}$

olmak üzere Kirchoff yasası uygulanırsa

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon \tag{3.35}$$

yazılır. (3.35) denklemi yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılırsa

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L} \tag{3.36}$$

biçiminde birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin integrasyon çarpanı $\mu = e^{\frac{R}{L}t}$ dir. Buna göre denklemin genel çözümü

$$I\, e^{\frac{R}{L}t} = \int e^{\frac{R}{L}t}\frac{\varepsilon}{L}dt + C$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t} \tag{3.37}$$

bulunur. $I(0) = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak (3.37) deki C sabitinin değeri $C = -\dfrac{\varepsilon}{R}$ elde edilir. C nin değeri (3.37) de yerine koyulursa

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{3.38}$$

bulunur. Bu ifadede R ve L nin sayısal değerleri yerine koyulursa

$$I(t) = 4(1 - e^{-50t})$$

olarak akım şiddetinin zamana bağlı ifadesi bulunur.

(b) Birbirleriyle seri olarak bağlı bulunan bir R direnci ile L bobininin uçları arasına $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ alternatif gerilimi tatbik ediliyor. $t = 0$ anında devreden geçen akımın şiddeti sıfır ise

(i) Devreden geçen akım şiddetini zamana bağlı ifadesini bulunuz.

(ii) $\varepsilon = 100 \sin 40t\,\mathrm{V}$ $R = 10\,\Omega$ ve $L = 0{,}5\,\mathrm{H}$ değerleri için devreden geçen akım şiddetinin zamana bağlı olarak ifadesini bulunuz.

Çözüm :

(i)Kirchoff yasasının uygulanmasıyla elde edilen (3.35) denklemini alternatif gerilimin tatbik edildiği bu devre için

$$RI + L\frac{dI}{dt} = \varepsilon_0 \sin \omega t \tag{3.39}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

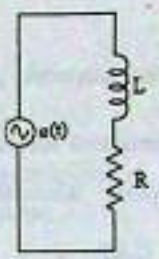
biçiminde yazalım. (3.39) birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemin integrasyon çarpanı $\mu = e^{\frac{R}{L}t}$ dir. Genel çözümü bulmak için

$$I\, e^{\frac{R}{L}t} = \frac{\varepsilon_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt + C \qquad (3.40)$$

yazılır. (3.40) eşitliğinin ikinci tarafındaki integralin değeri

$$\int e^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t dt = e^{\frac{R}{L}t}\left[\frac{R/L\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{(R/L)^2+\omega^2}\right] \qquad (3.41)$$

dır. İntegralin değeri olan (3.41) , (3.40) da yerine koyulursa



$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{L}\frac{R/L\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{(R/L)^2+\omega^2} + Ce^{\frac{R}{L}t} \qquad (3.42)$$

genel çözüm bulunur. Başlangıç koşulu olarak $I(0)=0$ kullanılırsa C integrasyon sabitinin değeri $C = \frac{\varepsilon_0\omega L}{R^2+\omega^2L^2}$ elde edilir. Bu değer (3.42) de yerine koyulursa akım şiddetinin zamana bağlı olarak ifadesi

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 L}{R^2+\omega^2L^2}\left[\frac{R}{L}\sin\omega t - \omega\cos\omega t + \omega e^{-\frac{R}{L}t}\right] \qquad (3.43)$$

bulunur.

(ii) (3.39) denkleminde $\varepsilon = 100\sin 40t$ V , $R = 10\,\Omega$ ve $L = 0{,}5$ H değerleri yerlerine koyulursa

$$\frac{1}{2}\frac{dI}{dt} + 10I = 100\sin 40t$$

$$\frac{dI}{dt} + 20I = 200\sin 40t \qquad (3.44)$$

problemin diferansiyel denklemi bulunur. Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin integrasyon çarpanı $\mu = e^{20t}$ olduğu görülür. Bu denklem çözülürse

$$e^{20t}I(t) = \int e^{20t}200\sin 40t dt + C$$

$$e^{20t}I(t) = \frac{200e^{20t}[20\sin 40t - 40\cos 40t]}{2000} + C$$

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + Ce^{-20t} \qquad (3.45)$$

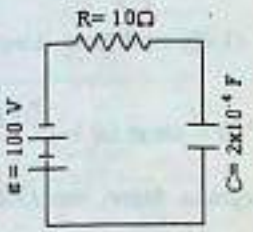
bulunur. Başlangıç koşulu olarak $I(0)=0$ kullanılırsa C integrasyon sabitinin değeri $C=4$ elde edilir. Bu değer (3.45) de yerine koyulursa akım şiddetinin zamana bağlı olarak ifadesi

$$I(t) = 2(\sin 40t - 2\cos 40t) + 4e^{-20t}$$

bulunur.

(c) Elektromotor kuvveti $\varepsilon = 100\,V$ olan bir üreteç , $R = 10\,\Omega$ luk bir direnç teli ve $C = 2x10^{-4}$ farad' lık sığaya sahip kondansatörle seri olarak bağlıdır. $q(0) = 0$ olduğu varsayılacaktır. t anında kondansatörün q yükünü ve I akım şiddetini zamana bağlı olarak hesaplayınız

Çözüm :



R direnci üzerindeki potansiyel düşmesi $\varepsilon_R = RI = R\dfrac{dq}{dt}$

C kondansatörü üzerindeki potansiyel düşmesi $\varepsilon_C = \dfrac{q}{C}$

olmak üzere Kirchoff yasası uygulanırsa

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon \qquad (3.46)$$

yazılır. (3.45) denklemi yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılırsa

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} \qquad (3.47)$$

bulunur. (3.47) denkleminin birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem olduğu görülür. Bu denklemin integrasyon çarpanı $\mu = e^{\frac{1}{RC}t}$ dir. Buna göre denklemin genel çözümü

$$q\,e^{\frac{1}{RC}t} = \int e^{\frac{1}{RC}t}\frac{\varepsilon}{R}dq + c$$

$$q(t) = \varepsilon C + ce^{\frac{1}{RC}t} \qquad (3.48)$$

olarak bulunur. $q(0) = 0$ başlangıç koşulu kullanılarak (3.48) deki c sabitinin değeri $c = -\varepsilon C$ elde edilir. c nin değeri (3.48) de yerine koyulursa

$$q(t) = \varepsilon C(1 - e^{\frac{1}{RC}t}) \qquad (3.49)$$

ifadesi bulunur. I akım şiddetinin ifadesi ise

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{\frac{1}{RC}t} \qquad (3.50)$$

ile verilir. R ve C nin sayısal değerleri sırasıyla (3.49) ve (3.50) denklemlerinde yerine koyulursa

$$q(t) = \frac{(1 - e^{-500t})}{50}$$

ve

$$I = 10e^{-500t}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 4. YÜKSEK DERECEDEN DENKLEMLER

4.1 Birinci Mertebeden Yüksek Dereceli Denklemler

4. 1. 1 $y' = \frac{dy}{dx} = p$ ye göre çözülebilen denklemler

Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım.

$$F(x, y, p) = 0 \tag{4.1}$$

Burada p nin derecesi birden fazla olsun. Bu denklemin p ye göre çözülebildiğini ve

$f_k(x, y)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, x ile y nin fonksiyonu olmak üzere ,

$$(p - f_1)(p - f_2)\ldots(p - f_n) = 0 \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabildiğini varsayalım. Her çarpan sıfıra eşitlenerek n tane birinci mertebeden ve birinci dereceden denklem bulunur.

$$p = f_1(x, y)\ ,\ p = f_2(x, y)\ ,\ p = f_3(x, y)\ ,\ldots,\ p = f_n(x, y) \tag{4.3}$$

Bu denklemlerin çözümünden

$$F_1(x, y, c) = 0\ ,\ F_2(x, y, c) = 0\ ,\ F_3(x, y, c) = 0\ ,\ldots,\ F_n(x, y, c) = 0$$

elde edilir. Bu fonksiyonların çarpımı

$$F_1(x, y, c) \cdot F_2(x, y, c) \cdot F_3(x, y, c) \cdots F_n(x, y, c) = 0 \tag{4.4}$$

genel çözüm olarak kabul edilebilir. Çünkü (4.4) ancak ve ancak (4.3) ile tanımlanan bütün çözümleri göstermektedir.*

Aşağıda verilen denklemleri çözünüz

(a) $p^2 - p - 6 = 0$

(b) $xyp^2 + (x + y)p + 1 = 0$

(c) $x^2p^2 - 5xyp + 6y^2 = 0$

(d) $(x - y)^2 p^2 = y^2$

(e) $p^2 - 3 = 0$

(f) $xy^2p^2 + (x^3 + xy^2 - y^3)p + x^3 - y^3 = 0$

(g) $xp^2 + (1 - x^2y)p - xy = 0$

(h) $xyp^2 + (xy^2 - 1)p - y = 0$

(i) $(y + x)^2 p^2 + (2y^2 + xy - x^2)p + y(y - x) = 0$

(j) $p^4 - (x + 2y + 1)p^3 + (x + 2y + 2xy)p^2 - 2xyp = 0$

Çözümler :

(a) $p^2 - p - 6 = 0$ denklemini

$(p - 3)(p + 2) = 0$

* Kaynak 14

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitliyerek

$$p-3=0 \quad \text{ve} \quad p+2=0$$

bulunur. Bu iki denklemden

$$p=\frac{dy}{dx}=3 \quad \text{ve} \quad p=\frac{dy}{dx}=-2$$

elde edilir. Her iki denkleminde ayrı ayrı integrali alınırsa

$$y=3x+c \quad \text{ve} \quad y=-2x+c$$

çözümleri bulunur. Genel çözüm ise

$$(3x+c)(-2x+c)=0 \quad \text{şeklinde olur.}$$

(b) $xyp^2+px+py+1=0$ denklemini

$$(yp+1)(xp+1)=0$$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$y\frac{dy}{dx}+1=0 \qquad \text{ve} \qquad x\frac{dy}{dx}+1=0$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen iki denklem bulunur. Bu denklemlerin çözümü

$$y^2=-2(x-c) \qquad \text{ve} \qquad y=-\ln|cx| \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

(c) $x^2p^2-5xyp+6y^2=0$ denklemini

$$(xp-2y)(xp-3y)=0$$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$x\frac{dy}{dx}=2y \quad (1) \qquad \text{ve} \qquad x\frac{dy}{dx}=3y \quad (2)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen iki denklem bulunur. Bu denklemlerin çözümü

$$x^2c=y \qquad \text{ve} \qquad x^3c=y \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

(d) $(x-y)^2p^2=y^2$ denklemini

$$[(x-y)p-y][(x-y)p+y]=0$$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$(x-y)\frac{dy}{dx}-y=0 \quad (1) \qquad \text{ve} \qquad (x-y)\frac{dy}{dx}+y=0 \quad (2) \quad \text{elde edilir.}$$

Burada (1) ve (2) denklemleri sırasıyla aşağıda gösterildiği şekilde çözülür.

(i) $-ydx+(x-y)dy=0$

Homogen olan bu denklemi çözmek için , $x=vy$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$dv=-\frac{dy}{y}$$

eşdeğer denklemini elde ederiz. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklemin çözümü

$$v=-\ln|y|+\ln|c|$$

olarak bulunur. Ayrıca $v=x/y$ olduğundan

$$x=y\ln|c/y| \quad (1) \text{ denkleminin çözümü bulunur.}$$

(ii) (2) denklemi tam diferansiyel denklem olduğundan 2.4.1 de verilen çözüm yöntemi uygulanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$F(x,y)=\int^{x} ydx+C(y)=yx+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$x+\frac{dC(y)}{dx}=x-y$$

$$\frac{dC(y)}{dx}=-y \text{ bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa } C(y)=-y^2/2 \text{ elde edilir.}$$

Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$$F(x,y)=yx-\frac{y^2}{x} \quad \text{veya} \quad c=y(2x-y) \quad (2) \text{ denkleminin çözümü bulunur.}$$

(e) $p^2-3=0$ denklemini

$$(p-\sqrt{3})(p+\sqrt{3})=0$$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$\frac{dy}{dx}-\sqrt{3}=0 \quad (1) \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx}+\sqrt{3}=0 \quad (2)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen iki denklem bulunur. Bu denklemlerin çözümü

$$y=\sqrt{3}x+c \quad \text{ve} \quad y=-\sqrt{3}x+c \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

(f) $xy^2p^2+(x^3+xy^2-y^3)p+x^3-y^3=0$ denklemini

$$(p+1)(xy^2p+x^3-y^3)=0$$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$(p+1)=0 \quad (1) \quad \text{ve} \quad (xy^2p+x^3-y^3)=0 \quad (2)$$

elde edilir. Burada (1) ve (2) denklemleri sırasıyla aşağıda gösterildiği şekilde çözülür.

(i) $\frac{dy}{dx}+1=0$ denklemi değişkenlerine ayrılabilen bir denklemdir. Bu denklemin çözümü

$$y=-x+c \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

(ii) $(xy^2y'+x^3-y^3)=0$ denklemi Bernoulli Diferansiyel Denklemidir. Bu denklemi

$$y^2y'-\frac{y^3}{x}=-x^2$$

şeklinde yazalım. Burada $u=y^3$ alınırsa, $u'=3y^2y'$ olur ve verilen denklem

$$u'-\frac{3}{x}=-3x^2$$

lineer denklemine dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{-\int \frac{3}{x}dx}=e^{-3\ln|x|}=x^{-3}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ux^{-3}=\int x^{-3}(-3x^2)dx+c=-3\ln|x|+c$$

$$u=-3x^3\ln|x|+cx^3$$

elde edilir. Burada u yerine değeri yazılırsa

$$y^3=-3x^3\ln|x|+cx^3 \quad \text{veya} \quad y=(-3x^3\ln|x|+cx^3)^{\frac{1}{3}} \quad \text{çözümü bulunur.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(g) $xp^2+(1-x^2y)p-xy=0$ denklemini

$(p-xy)(xp+1)=0$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$(\frac{dy}{dx}-xy)=0 \quad (1) \quad \text{ve} \quad (x\frac{dy}{dx}+1)=0 \quad (2)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen iki denklem bulunur. Bu denklemlerin çözümü

$y=ce^{\frac{1}{2}x^2}$ ve $y=\ln|c/x|$ olarak bulunur.

(h) $xyp^2+(xy^2-1)p-y=0$ denklemini

$(xyp-1)(p+y)=0$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanlar sıfıra eşitlenerek

$$xy\frac{dy}{dx}-1=0 \quad (1) \quad \text{ve} \quad \frac{dy}{dx}+y=0 \quad (2)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen iki denklem bulunur. Bu denklemlerin çözümü

$y^2=2\ln|cx|$ ve $x=-\ln|cy|$ olarak bulunur.

(i) $(y+x)^2p^2+(2y^2+xy-x^2)p+y(y-x)=0$ denklemini

$$[(y+x)p+y][(y+x)p+(y-x)]=0$$

çarpanlarına ayırarak yazalım. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$(y+x)\frac{dy}{dx}+y=0 \quad (1) \quad \text{ve} \quad (y+x)\frac{dy}{dx}+(y-x)=0 \quad (2)$$

elde edilir. Burada (1) ve (2) denklemleri sırasıyla aşağıda gösterildiği gibi çözülür.

(i) $ydx+(y+x)dy=0$ (1)

Denklem tam diferansiyel denklem olduğundan 2.4.1 de verilen çözüm yöntemi uygulanır.

$$F(x,y)=\int ydx+C(y)=yx+C(y)$$

Burada $C(y)$ integrasyon sabitidir ve değerinin bulunması gerekir. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N$ olduğundan

$$x+\frac{dC(y)}{dx}=x+y$$

$\frac{dC(y)}{dx}=y$ bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa $C(y)=\frac{1}{2}y^2$ elde edilir. Bu değer $F(x,y)$ de yerine koyulursa

$F(x,y)=xy+\frac{1}{2}y^2=c$ veya $2xy+y^2=c'$ çözümü bulunur.

(ii) $(y-x)dx+(y+x)dy=0$ (2)

(2) denklemi de tam diferansiyel denklem olduğundan benzer şekilde 2.4.1 de verilen çözüm yöntemi uygulanır. Bu denklemin çözümü ise

$$F(x,y)=yx-1/2x^2+1/2y^2=c \quad \text{veya} \quad 2yx-x^2+y^2=c'$$

ile verilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. 1. 2 Bağımlı değişkene göre çözülebilen denklemler

y ye göre çözülebilen denklemler

$$y = f(x, p) \tag{4.5}$$

şeklindedir. x'e göre türev alırsak

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = F\left[\, x, p, \frac{dp}{dx} \,\right]$$

birinci mertebeden ve birinci dereceden denklem elde edilir.

$$p = F\left[\, x, p, \frac{dp}{dx} \,\right] \tag{4.6}$$

çözülerek

$$\phi(x, p, c) = 0 \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.5) ile (4.7) arasında p yok edilerek x, y, c cinsinden çözüm elde edilir.

Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

(a) $p^2 + 2xp - 2y = 0$

(b) $p^2 x - y = 0$

(c) $y = 4xp^2 + 2xp$

(d) $xp^2 - 3yp + 9x^2 = 0$

Çözümler :

(a) $p^2 + 2xp - 2y = 0.$ (1)

Denklemi y ye göre çözersek,

$y = \frac{1}{2}p^2 + px$ elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının x'e göre türevini alırsak,

$$\frac{dy}{dx} = p = p\frac{dp}{dx} + x\frac{dp}{dx} + p$$

$$p\frac{dp}{dx} + x\frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx}(p + x) = 0$$

bulunur. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$\frac{dp}{dx} = 0$ (2) ve $(p + x) = 0$ (3) şeklinde iki denklem bulunur. Bu denklemlerin çözümü

$p = c$ (4) ve $p = -x$ (5) dir.

Bu çözümler sırası ile (1) denkleminde yerine koyulursa,

$y = cx + \frac{1}{2}c^2$ (4) ve $y = -\frac{1}{2}x^2$ (5) çözümleri bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Dikkat edilecek olursa (4) denklemi c keyfi sabitini içermektedir ve bu nedenle genel çözümdür. Fakat (5) denklemi c keyfi sabitini içermediği için genel çözüm değildir ve tekil çözüm olarak adlandırılır.

(b) $p^2x-y=0$ (1)

Denklemi y ye göre çözersek,

$y=p^2x$ elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının x'e göre türevini alırsak

$$\frac{dy}{dx}=p=p^2+2px\frac{dp}{dx}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenerek

$$2\frac{dp}{(p-1)}+\frac{dx}{x}=0$$

şeklinde yazılır. Değişkenlerine ayrılabilen bu denklem çözülürse

$$2\ln|p-1|+\ln|x|=\ln|c|\ ,$$

$$(p-1)^2x=c \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ile (2) arasında p yok edilirse

$y-2\sqrt{yx}+x=c$ genel çözümü elde edilir.

(c) $y=4xp^2+2xp$ (1)

Denklemin her iki tarafının x'e göre türevini alırsak

$$\frac{dy}{dx}=p=4p^2+8p\frac{dp}{dx}x+2p+2\frac{dp}{dx}x$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenerek

$$(4p+1)\left[\ p+2\frac{dp}{dx}x\ \right]=0$$

bulunur. Çarpanları sıfıra eşitlersek,

$$(4p+1)=0 \qquad (2) \qquad \text{ve} \qquad \left[p+2\frac{dp}{dx}x\right]=0 \qquad (3)$$

şeklinde iki denklem bulunur. (3) denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü,

$$p=cx^{-1/2} \qquad (4)$$

şeklindedir. (1) ile (4) arasında p yok edilirse,

$y=4c^2+2cx^{1/2}$ veya $(y-c^2)^2=c^2x$ genel çözümü bulunur.

Ayrıca p, (1) ile (2) arasında yok edilirse,

$4y+x=0$ tekil çözüm bulunur.

(d) $xp^2-3yp+9x^2=0$ (1)

Denklemi y ye göre çözersek,

$3y=xp+9\frac{x^2}{p}$ elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının x'e göre türevini alırsak

$$3p=p+x\frac{dp}{dx}+\frac{18x}{p}-\frac{9x^2}{p^2}\frac{dp}{dx}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenerek,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\left[1-\frac{9x}{p^2}\right]\left[2p-x\frac{dp}{dx}\right]=0$$

bulunur. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$\left[1-\frac{9x}{p^2}\right]=0 \quad (2) \qquad \text{ve} \qquad \left[2p-x\frac{dp}{dx}\right]=0 \quad (3)$$

şeklinde iki denklem bulunur. (3) denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü

$$p=cx^2 \quad (4)$$

şeklindedir. (1) ile (4) arasında p yok edilirse

$3cy=c^2x^3+9$ genel çözümü elde edilir.

Ayrıca p, (1) ile (2) arasında yok edilirse

$y^2=4x^3$ tekil çözümü elde edilir.

4. 1. 3 Bağımsız değişkene göre çözülebilen denklemler

x'e göre çözülebilen denklemler

$$x=f(y,p) \qquad (4.8)$$

şeklindedir. y ye göre türev alırsak

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}=F\left[\ y,p,\frac{dp}{dy}\ \right]$$

birinci mertebeden ve birinci dereceden denklem elde edilir.

$$\frac{1}{p}=F\left[\ y,p,\frac{dp}{dy}\ \right] \qquad (4.9)$$

çözülerek

$$\phi(y,p,c)=0 \qquad (4.10)$$

elde edilir. (4.8) ile (4.9) arasında p yok edilerek x, y, c cinsinden çözüm elde edilir.

Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

(a) $p^2+2y-2x=0$

(b) $p^3=y^4(y+xp)$

(c) $y=3px+6p^2y^2$

(d) $p^3-2xyp+4y^2=0$

Çözümler :

(a) $p^2+2y-2x=0$ (1)

Denklemi x'e göre çözersek

$x=\frac{1}{2}(2y+p^2)$ elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının y ye göre türevini alırsak

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=1+p\frac{dp}{dy}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenerek

$$\left[(p+1)+\frac{1}{p+1}\right]dp+dy=0 \quad (2)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bulunur. (2) denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir. Bu denklem çözülürse

$$\frac{1}{2}p^2+p+\ln|p-1|+y=c \qquad (3)$$

bulunur. (1) ile (3) arasında p yok edilirse

$x=c-p-\ln|p-1|$ genel çözümü elde edilir.

(b) $p^3=y^4(y+xp)$ (1)

Denklemi x'e göre çözersek

$$x=\frac{p^2}{y^4}-\frac{y}{p} \qquad (2)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının y ye göre türevini alırsak

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}=2p\frac{dp}{dy}\frac{1}{y^4}-\frac{4p^2}{y^5}-\frac{1}{p}+y\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

bulunur. Bu ifade düzenlenerek

$$\left[\frac{y}{2p}\frac{dp}{dy}-1\right]\left[\frac{2}{p}+\frac{4p^2}{y^5}\right]=0$$

şeklinde yazılır. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$\left[\frac{y}{2p}\frac{dp}{dy}-1\right]=0 \qquad (3) \quad \text{ve} \quad \left[\frac{2}{p}+\frac{4p^2}{y^5}\right]=0 \qquad (4)$$

şeklinde iki denklem elde edilir. (3) denklemi değişkenlerine ayrılabilen denklemdir ve çözümü

$p=cy^2$ (5)

şeklindedir. (4) denklemini p ye göre çözersek

$y=-2^{\frac{1}{5}}p^{\frac{1}{5}}$ (6)

bulunur. (5) denklemi (2) de yerine koyulursa

$$x=c^2-\frac{1}{cy}$$

genel çözümü elde edilir. Ayrıca (6) denklemi (2) de yerine koyulursa

$x^3y^2=\frac{27}{4}$ tekil çözümü bulunur.

(c) $y=3px+6p^2y^2$ (1)

Denklemi x'e göre çözersek

$$3x=\frac{y}{p}-6py^2$$

bulunur. Bu ifadenin y ye göre türevi alınırsa

$$\frac{3}{p}=\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}-12py-6y^2\frac{dp}{dy}$$ bulunur. bu ifade düzenlenerek

$$(1+6p^2y)\left[2p+y\frac{dp}{dy}\right]=0 \qquad (2)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. Bu ifadenin çarpanları sıfıra eşitlenirse

$$(1+6p^2y)=0 \qquad (3) \quad \text{ve} \quad \left[2p+y\frac{dp}{dy}\right]=0 \ (4)$$

denklemleri elde edilir. (4) denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir ve çözümü

$$py^3=c \qquad (5)$$

şeklindedir. (5) denklemi p ye göre çözülür ve (1) denkleminde yerine koyulursa

$y^3=3cx+6c^2$ genel çözümü bulunur.

(3) denklemi (1) de yerine konularak p nin yok edilmesiyle

$3x^2+8y^3=0$ tekil çözümü bulunur.

(d) $p^3-2xyp+4y^2=0 \qquad (1)$

Denklemi x'e göre çözersek

$$2x=\frac{p^2}{y}+\frac{4y}{p} \qquad (2)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının y ye göre türevini alırsak

$$\frac{2}{p}=\frac{2p}{y}\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{y^2}+\frac{4}{p}-\frac{4y}{p^2}\frac{dp}{dy},$$

$$\left[\ p-2y\frac{dp}{dy}\ \right](2y^2-p^3)=0 \qquad (3)$$

bulunur. Çarpanları sıfıra eşitlersek

$$\left[\ p-2y\frac{dp}{dy}\ \right]=0 \qquad (4) \quad \text{ve} \quad (2y^2-p^3)=0 \qquad (5)$$

şeklinde iki denklem elde edilir. (4) denklemi değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemdir ve çözümü

$$p^2=cy \qquad (6)$$

şeklindedir. (6) ile (2) arasında p yok edilirse

$$16y=c(c-2x)^2$$

şeklinde genel çözüm elde edilir. Ayrıca (5) denklemi (1) de yerine konularak p yok edilirse

$y=2x^3$ tekil çözümü bulunur.

4. 1. 4 Clairaut Denklemi

$$y=px+f(p) \qquad (4.11)$$

biçimindeki denkleme Clairaut Denklemi denir.* Bu denklemi çözmek için (4.11) denkleminin x'e göre türevi alınıp

$$\frac{dy}{dx}=p=x\frac{dp}{dx}+p+f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$[x+f'(p)]\frac{dp}{dx}=0 \qquad (4.12)$$

çarpanları sıfıra eşitlersek

$$\frac{dp}{dx}=0 \qquad (4.13)$$

* Kaynak 11

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ve $[x+f'(p)]=0$ (4.14)

denklemleri elde edilir. (4.12) denkleminin çözümü

$$p=c \tag{4.15}$$

olarak bulunur. p nin bu ifadesi (4.11) denkleminde yerine konursa

$$y=cx+f(c) \tag{4.16}$$

genel çözümü elde edilir. Bu çözüm geometrik olarak **bir doğru ailesi** gösterir. (4.14) denkleminden

$$x=-f'(p) \tag{4.17}$$

yazılabilir. (4.17) denklemi (4.11) de yerine konursa

$$y=f(p)-pf'(p) \tag{4.18}$$

şeklinde parametrik bir denklem bulunur. Bu çözüm genel bir çözüm olmayıp tekil bir çözümdür ve genel çözümü teşkil eden doğru ailesinin zarfıdır.

Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

(a) $y=px+2p^2$

(b) $y+p^2=xp+1$

(c) $y=px+p^3$

(d) $xp^3-yp^2+1=0$

(e) $xp^2+(x-y)p+1-y=0$

(f) $p(xp-y+k)+a=0$

Çözümler:

(a) $y=px+2p^2$ (1)

Denklemin (4.11) de verilen Clairaut Denklemi olduğu görülür. Bu nedenle denklemin genel çözümü, (1) denkleminde $p=c$ koyularak

$$y=cx+2c^2 \tag{2}$$

şeklinde bulunur. Tekil çözüm ise, parametrik olarak (4.14) ve (4.18) den yararlanarak bulunur. Sırası ile bu denklemlerde $f(p)=2p^2$ ve $f'(p)=4p$ koyularak

$$y=2p^2-4p^2=-2p^2 \tag{3}$$

$$x=-4p \tag{4}$$

bulunur. (4) denklemi (3) denkleminde yerine koyulursa

$y=-2(-\frac{x}{4})^2=-\frac{1}{8}x^2$ istenilen tekil çözüm bulunur.

(b) $y+p^2=xp+1$ (1)

Denklemin (4.11) de verilen Clairaut Denklemi olduğu görülür. Bu nedenle denklemin genel çözümü, (1) denkleminde $p=c$ koyularak,

$$y=cx-c^2+1 \tag{2}$$

şeklinde bulunur. Tekil çözüm ise parametrik olarak (4.14) ve (4.18)'den yararlanarak bulunur. Sırası ile bu denklemlerde $f(p)=1-p^2$ ve $f'(p)=-2p$ koyularak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y = 1 - p^2 + 2p^2 = 1 + p^2$ (3)

$x = 2p$ (4)

bulunur. (4) denklemi (3) denkleminde yerine koyulursa

$4y = x^2 + 4$ (5) istenilen tekil çözüm bulunur.

(c) $y = px + p^3$ (1)

Denklemin (4.11) de verilen Clairaut Denklemi olduğu görülür. Bu nedenle denklemin genel çözümü, (1) denkleminde $p = c$ koyularak

$y = cx + c^3$ (2)

şeklinde bulunur. Tekil çözüm ise, parametrik olarak (4.14) ve (4.18) den yararlanarak bulunur. Sırası ile bu denklemlerde $f(p) = p^3$ ve $f'(p) = 3p^2$ yerlerine koyularak

$y = p^3 - 3p^3 = -2p^3$ (3)

$x = -3p^2$ (4)

bulunur. (4) denklemi (3) denkleminde yerine koyulursa

$27y^2 = -4x^3$ istenilen tekil çözüm bulunur.

(d) $xp^3 - yp^2 + 1 = 0$ (1)

Denklemin (4.11) de verilen Clairaut Denklemi olduğu görülür. Bu nedenle denklemin genel çözümü (1) denkleminde $p = c$ koyularak

$xc^3 - yc^2 + 1 = 0$ (2)

biçiminde bulunur. Tekil çözüm ise parametrik olarak (4.14) ve (4.18) den yararlanarak bulunur. Sırası ile bu denklemlerde $f(p) = \frac{1}{p^2}$ ve $f'(p) = -\frac{2}{p^3}$ yerlerine koyularak

$y = \frac{1}{p^2} + p\frac{2}{p^3} = \frac{3}{p^2}$ (3)

$x = \frac{2}{p^3}$ (4)

bulunur. (4) denklemi (3) denkleminde yerine koyulursa

$4y^3 = 27x^2$ istenilen tekil çözüm bulunur.

(e) $xp^2 + (x - y)p + 1 - y = 0$ (1)

Denklemin (4.11) de verilen Clairaut Denklemi olduğu görülür. Bu nedenle denklemin genel çözümü (1) denkleminde $p = c$ koyularak

$xc^2 + (x - y)c + 1 - y = 0$ (2)

biçiminde bulunur. Tekil çözüm ise parametrik olarak (4.14) ve (4.18) den yararlanarak bulunur. Sırası ile bu denklemlerde $f(p) = \frac{1}{p+1}$ ve $f'(p) = -\frac{1}{(p+1)^2}$ yerlerine koyularak

$y = \frac{1}{p+1} + p\frac{1}{(p+1)^2}$ (3) ve $x = \frac{1}{(p+1)^2}$ (4)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. (3) ve (4) denklemleri taraf tarafa toplanarak p yok edilirse

$(y+x)^2=4x$ istenilen tekil çözüm bulunur.

(f) $p(xp-y+k)+a=0$ (1)

Denklemin (4.11) de verilen Clairaut Denklemi olduğu görülür. Bu nedenle denklemin genel çözümü, (1) denkleminde $p=c$ koyularak

$c(xc-y+k)+a=0$ (2)

şeklinde bulunur. Tekil çözüm ise, parametrik olarak (4.14) ve (4.18) den yararlanarak bulunur. Sırası ile bu denklemlerde $f(p)=k+\frac{a}{p}$ ve $f'(p)=-\frac{a}{p^2}$ yerlerine koyularak

$y=k+2\frac{p}{a}$ (3) ve $x=\frac{a}{p^2}$ (4)

bulunur. (3) ve (4) denklemleri arasında p yok edilirse;

$(y-k)^2=4ax$ istenilen tekil çözüm bulunur.

4.2 Değişkenlerden Birini İçermeyen İkinci Mertebeden Denklemler

4.2.1 Bağımlı Değişkeni Bulundurmayan Denklemler

$f(x,y',y'')=0$ (4.19)

İkinci mertebeden y yi içermeyen bir diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu denklemde $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$ değerleri yerlerine koyulursa

$$f\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0 \qquad (4.20)$$

elde edilir. Bu denklem (4.19) denkleminin p cinsinden birinci mertebeye indirgenmiş şeklidir. Eğer (4.20) denkleminden p bulunursa, $y'=p$ den integral alarak y bulunur.

Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

(a) $xy''-(y')^3-y'=0$

(b) $y''=1+(y')^2$

(c) $xy''-4y'=x^5$

(d) $x^2y''+(y')^2-2xy'=0$; $y(2)=5$, $y'(2)=-4$

(e) $xy''+y'+x=0$; $y(2)=-1$, $y'(2)=-\frac{1}{2}$

Çözümler :

(a) $xy''-(y')^3-y'=0$ (1)

Denklemde $y'=p$ ve $y''=\frac{dp}{dx}$ koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x\frac{dp}{dx}-p^2-p=0$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dp}{p}-\frac{p}{p^2+1}dp$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\ln|x|=\ln|p|-\frac{1}{2}\ln|p^2+1|+\ln|c_1|$$

$$p^2=\frac{x^2}{c_1^2-x^2}$$

elde edilir. Burada $p=y'$ olduğundan

$$dy=\pm\frac{xdx}{\sqrt{c_1^2-x^2}} \quad (2)$$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafının integrali alınırsa

$$y-c_2=\pm(c_1^2-x^2)^{1/2}$$

$x^2+(y-c_2)^2=c_1^2$ istenen genel çözüm bulunur.

(b) $y''=1+(y')^2$ (1)

Denklemde $y'=p$ ve $y''=\frac{dp}{dx}$ koyulursa

$$\frac{dp}{1+p^2}=dx \quad (2)$$

elde edilir. (2) denkleminin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\arctan p=x+c_1 \quad (3)$$

bulunur. Ayrıca (3) denkleminin her iki tarafının tanjantı alınırsa

$$\tan(\arctan p)=\tan(x+c_1)$$

$$p=\tan(x+c_1) \quad (4)$$

elde edilir. Bu denklemi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin(x+c_1)}{\cos(x+c_1)}$$

şeklinde yazarak her iki tarafının integralini alırsak

$$y=-\ln\cos|x+c_1|+\ln|c_2|$$

$e^y\cos(x+c_1)=c_2$ genel çözümünü buluruz.

(c) $xy''-4y'=x^5$ (1)

Denklemde $y'=p$ ve $y''=p'$ koyulursa

$$xp'-4p=x^5 \quad \text{veya} \quad p'-\frac{4}{x}p=x^4 \quad (2)$$

elde edilir. Bu ise birinci mertebeden lineer bir denklemdir ve çözümü aşağıda gösterildiği şekilde bulunur. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=\frac{1}{x^4}$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$\frac{1}{x^4}p=\int\frac{1}{x^4}x^4dx=x+c_1$$

bulunur. Buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$p = x^5 + c_1 x^4 \qquad (3)$$

elde edilir. (3) denklemi

$$\frac{dy}{dx} = x^5 + c_1 x^4$$

şeklinde yazılıp her iki tarafın integrali alınırsa

$$y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 c_1 + c_2 \quad \text{istenilen çözüm bulunur.}$$

(d) $x^2 y'' + (y')^2 - 2xy' = 0 \qquad (1)$

Denklemde $y' = p$ ve $y'' = p'$ konursa

$$p' - 2\frac{p}{x} = -\frac{p^2}{x^2} \qquad (2)$$

şeklinde yazılır. (2) denklemi Bernoulli Diferansiyel Denklemi olduğundan , bu denklemi

$$p^{-2}p' - \frac{2}{x}p^{-1} = -\frac{1}{x^2} \qquad (3)$$

şeklinde yazalım . Burada $u = p^{-1}$ alınırsa , $u' = -p^{-2}p'$ olur ve denklem ,

$$u' + \frac{2}{x}u = \frac{1}{x^2}$$

lineer diferansiyel denkleme dönüşür. Bu denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

olarak bulunur. Bu değer (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$ux^2 = \int x^2 \frac{1}{x^2}dx = x + c_1$$

bulunur. Buradan

$$x^2 = p(x + c_1) \qquad (5)$$

elde edilir . (5) denkleminde verilen başlangıç koşullarından $y'(2) = p = -4$ kullanılırsa $c_1 = -3$ bulunur. c_1'in bu değeri (5) denkleminde yerine koyulursa

$$dy = \frac{x^2}{x-3}dx \,, \quad \text{veya} \quad dy = \left(x + 3 + \frac{9}{x-3}\right)dx \qquad (6)$$

Bulunur. (6) denkleminin her iki tarafın integrali alınırsa

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 9\ln|x-3| + c_2 \qquad (7)$$

bulunur. Burada başlangıç koşullarından $y(2) = 5$ kullanılırsa $c_2 = -3$ bulunur. Bulunan bu değer (7) denkleminde yerine koyulursa

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3(x-1) + 9\ln|x-3| \quad \text{istenilen çözüm bulunur.}$$

(e) $xy'' + y' + x = 0 \qquad (1)$ denkleminde $y' = p$ ve $y'' = p'$ koyulursa ;

$$p' + \frac{1}{x}p = -1 \qquad (2)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. Bu ise lineer bir denklemdir ve çözümü aşağıda gösterildiği şekildedir. Denklemin integrasyon çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln|x|} = x$$

olarak bulunur. $\mu(x)$'in değeri (2.20) denkleminde yerine koyulursa

$$xp = \int -x dx = -\frac{1}{2}x^2 + c_1$$

bulunur. Buradan

$$p = -\frac{1}{2}x + \frac{c_1}{x} \quad (3)$$

elde edilir. (3) denklemi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{c_1}{x}$$

biçiminde yazılıp her iki tarafın integrali alınırsa

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + c_1 \ln|x| + c_2 \quad (4)$$

bulunur. Başlangıç koşullarının sırasıyla (3) ve (4) denklemlerinde yerine koyulmasıyla

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}2 + \frac{c_1}{2} \quad (5) \text{ ve } -1 = -\frac{1}{4}4 + c_1 \ln|2| + c_2 \quad (6)$$

denklemleri elde edilir. (5) ve (6) denklemlerinin çözümünden $c_1 = 1$ ve $c_2 = -\ln|2| - 1$ bulunur. Bu değerler (4) denkleminde yerine koyulursa

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \ln\left|\frac{x}{2}\right|$$ istenilen çözüm bulunur.

4. 2. 2 Bağımsız Değişkeni Bulundurmayan Denklemler

$$f(y, y', y'') = 0 \quad (4.21)$$

ikinci mertebeden x'i içermeyen bir diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu denklemde $y' = p$ ve $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}$ değerleri yerlerine koyulursa

$$f\left[\ y, p, p\frac{dp}{dy}\ \right] = 0 \quad (4.22)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem (4.21) denkleminin p cinsinden birinci mertebeye indirgenmiş biçimidir. Eğer (4.22) denkleminden p bulunursa, $y' = p$ den integral alarak y bulunur.

Aşağıda verilen denklemleri çözünüz.

(a) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$

(b) $(y+1)y'' = (y')^2$

(c) $yy'' + (y')^3 - (y')^2 = 0$

(d) $y'' = y'e^y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

(e) $y'' = -e^{-2y}$; $y(3) = 0$, $y'(3) = 1$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$ (1)

Denklemde $y' = p$ ve $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ koyulursa

$$yp\frac{dp}{dy} + p^2 + 1 = 0$$

$$\frac{pdp}{p^2+1} + \frac{dy}{y} = 0 \qquad (2)$$ bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\frac{1}{2}\ln|p^2+1| + \ln|y| = \ln|c_1|$$

$$p^2 + 1 = c_1^2 y^{-2} \qquad (3)$$

bulunur. (3) denkleminden

$$p = \pm\frac{(c_1^2 - y^2)^{1/2}}{y} \qquad (4)$$

elde edilir. (4) denkleminde $y' = p$ yerine koyulursa

$$\pm y(c_1^2 - y^2)^{-1/2}dy = dx$$

değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\pm(c_1^2 - y^2)^{1/2} = x - c_2$$

$$(x-c_2)^2 + y^2 = c_1^2$$ istenilen genel çözüm bulunur.

(b) $(y+1)y'' = (y')^2$ (1)

Denklemde $y' = p$ ve $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ koyulursa

$$(y+1)p\frac{dp}{dy} = p^2 \quad \text{veya} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y+1} \qquad (2)$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\ln|p| = \ln|y+1| + \ln|c_1|$$

$$p = (y+1)c_1 \qquad (3)$$

bulunur. (3) denkleminde $y' = p$ yerine koyulursa

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)c_1$$

$$\frac{dy}{y+1} = c_1 dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının

integrali alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y+1=e^{c_1x+c_2}$ genel çözümü bulunur.

(c) $yy''+(y')^3-(y')^2=0$ (1)

Denklemde $y'=p$ ve $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ koyulursa

$$y\frac{dp}{dy}+p^2-p=0,$$

$$-\frac{dp}{p}+\frac{dp}{p-1}=-\frac{dy}{y} \quad (2)$$

bulunur.Her iki tarafın integrali alınırsa

$$-\ln|p|+\ln|p-1|=-\ln|y|+\ln|c_1|$$

$$\frac{1}{p}=-\frac{c_1}{y}+1 \quad (3)$$

elde edilir. Burada $y'=p$ yerine koyulursa

$$dx=-c_1\frac{dy}{y}+dy$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$x=y-c_1\ln|yc_2|$ istenilen genel çözüm bulunur.

(d) $y''=y'e^y$ (1)

Denklemde $y'=p$ ve $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ koyulursa

$$p\frac{dp}{dy}=pe^y$$

$$dp=e^y dy$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$p=e^y+c_1$ (2)

bulunur. (2) denkleminde verilen başlangıç koşullarından $y'(0)=2$ kullanılırsa $c_1=1$ bulunur. c_1 in bu değeri (2) denkleminde yerine koyulursa

$$p=e^y+1$$

$$\frac{dy}{e^y+1}=dx \quad (3)$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklem elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$x=-\ln|1+e^{-y}|+c_2 \quad (4)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Burada başlangıç koşullarından $y(0)=0$ kullanılırsa $c_2=\ln|2|$ bulunur. Bulunan bu değer (4) denkleminde yerine koyulursa

$$-x=\ln|1+e^{-y}|-\ln|2| \quad \text{veya} \quad e^{-x}=\frac{1+e^{-y}}{2} \qquad (5)$$

bulunur. (5) denkleminden

$y=-\ln|2e^{-x}-1|$ istenilen genel çözüm bulunur.

(e) $y''=-e^{-2y}$ (1)

Denklemde $y'=p$ ve $y''=p\dfrac{dp}{dy}$ koyulursa

$$pdp=-e^{-2y}dy \qquad (2)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$p^2=e^{-2y}+2c_1$$
$$p=\pm(e^{-2y}+2c_1)^{1/2} \quad (3)$$

elde edilir. (3) denkleminde verilen başlangıç koşullarından $y'(3)=1$ ve $y(3)=0$ kullanılırsa $c_1=0$ bulunur. c_1 in bu değeri (3) denkleminde yerine koyulursa

$$e^{y}dy=dx \qquad (4)$$

bulunur. Burada başlangıç koşullarından $y(3)=0$ kullanılırsa, $c_2=-2$ bulunur. Bulunan bu değer (4) denkleminde yerine koyulursa

$$e^{y}=x-2$$
$y=\ln|x-2|$ istenilen çözüm bulunur.

4. BÖLÜMLE İLGİLİ PROBLEMLER

A. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini ve varsa tekil çözümlerini bulunuz.

(a) $p^2-4p+2=0$ Y. $y=\left(2\pm\sqrt{2}\right)x+C$

(b) $(x+y)^2p^2=y^2$ Y. $x=y\ln|c_1y|$, $y(2x+y)=c_2$

(c) $xp^3-(x^2+x+y)p^2+(x^2+xy+y)p-xy=0$
Y. $y=c_1x$, $y=x+c_2$, $x^2=2(y-c_3)$

(d) $(y-px)^2=p$ Y. $(y-cx)^2=C$

(e) $yp=-xp^2$ Y. $(y-c)(xy-c)=0$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(f) $2x + yp(4p^2 + 6) = 0$ Y. $(x^2 + y^2 - 4c)^3 + 27cy^4 = 0$

(g) $p^3 + xp - y = 0$ Y. $y = cx + c^2$; tekil çöz., $x^2 + 4y = 0$

(h) $2p^3 + 3p^2 = x + y$ Y. $4(x+c)^3 = 27(y-c)^2$; tekil çöz. $x + y = 1$

(i) $xp^4 - 2yp^3 + 12x^3 = 0$ Y. $2c^3y = c^4x^2 + 12$; tekil çöz. $3y^2 = \pm 8x^3$

(i) $3x^4p^2 - xp - y = 0$ Y. $xy = c(3cx - 1)$; tekil çöz. $12x^2y = -1$

B. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini ve varsa tekil çözümlerini bulunuz.

(a) $x^2y'' + (y')^2 - 2xy' = 0$; $y(2) = 5$, $y'(2) = -4$
Y. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3 + 9\ln|3 - x|$

(b) $x^2y'' = y'(2x - y')$; $y(-1) = 5$, $y'(-1) = 1$
Y. $2y - 1 = (x-2)^2 + 8\ln|x+2|$

(c) $y^2y'' + (y')^3 = 0$ Y. $x = c_1y - \ln|c_2y|$

(d) $2ay'' + (y')^3 = 0$ Y. $(y-c)^2 = 4a(x - c_1)$

(e) $x^3y'' - x^2y' = 3 - x^2$ Y. $y = x^{-1} + x + c_1x^2 + c_2$

(f) $xy'' = y'(2 - 3xy')$ Y. $3y = c_2 + \ln|x^3 + c_1|$

(g) $(y'')^2 - xy'' + y' = 0$ Y. $2y = c_1x^2 - 2c_1^2x + c_2$; tekil çöz. $12y = x^3 + k$ ailesi

(h) $4y(y')^2y'' = (y')^4 + 3$ Y. $256c_1(y - c_1)^3 = 243(x - c_2)^4$

(i) $y'' = 2x + (x^2 - y')^2$ Y. $3y = x^3 + c_2 - 3\ln|x + c_1|$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 5. YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

5.1 Giriş

N inci mertebeden lineer diferansiyel denklemi birinci bölümde (1.1) denklemiyle aşağıda gösterildiği biçimde tanımlamıştık.

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x) \qquad (5.1)$$

Burada $a_0(x),a_1(x),\ldots,a_n(x)$ değişken katsayılardır. Bu katsayılar ve $F(x)$ fonksiyonu x in bir $I=[a,b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlarıdır. Ayrıca $a_0(x)$ bu aralıkta daima sıfırdan farklıdır. Eğer, $F(x)=0$ ise (5.1) denklemi

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0 \qquad (5.2)$$

biçimini alır. (5.2) denklemine n'inci mertebeden değişken katsayılı homogen diferansiyel denklem denir. (5.1) ve (5.2) denklemleri pratikte kolaylık sağladığı için **operatör** adı verilen $D,D^2,D^3,\ldots,D^n$ gibi sembollerle yazılabilir. D diferansiyel operatörü x'e göre birinci türev olarak tanımlanırsa $Dy=\frac{dy}{dx}$ olarak gösterilir. Burada $D=\frac{d}{dx}$ dir. Benzer şekilde y nin x'e göre ikinci türevi D^2y ve n'inci türevi $D^n y$ şeklinde ifade edilir. (5.1) denklemi D operatörünü kullanarak aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\left[a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)\right]y=F(x) \qquad (5.3)$$

(5.3) denkleminde değişken katsayılar yerine sabit katsayılar göz önüne alınırsa (5.3) denklemi

$$\left[a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n\right]y=F(x) \qquad (5.4)$$

biçimini alır. Bu denklemi aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$P(D)y=F(x) \qquad (5.5)$$

Burada

$$P(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n \qquad (5.6)$$

n'inci mertebeden **polinom operatörü** olarak tanımlanır. Ayrıca $P(D)$ operatörünü bu kez L **lineer operatör** ile gösterirsek (5.5) denklemi

$$Ly=F(x) \qquad (5.7)$$

biçiminde de yazılabilir.

5.2 Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

Tanım 5.1

Bir $I=[a,b]$ aralığında tanımlanmış olan $y_1,y_2,\ldots,y_n$ fonksiyon kümesi için hepsi sıfır olmayan $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_n$ gibi sabit sayılar bulunabilirse ve x in bu aralıktaki bütün değerleri için

$$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n=0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ise bu fonksiyonlara aralarında **lineer bağımlı fonksiyonlar** denir. $[a,b]$ aralığında lineer bağımlı olmayan fonksiyonlara ise **lineer bağımsız fonksiyonlar** denir.

Tanım 5.2 Wronskiyen

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, ortak bir I aralığında tanımlanmış ve n kez türevleri alınabilir fonksiyonlar olsun.

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (5.8)$$

determinantına $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ fonksiyonlarının Wronskiyeni denir.

Teorem 5.1

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ ortak bir I aralığında tanımlanmış ve n kez türevleri alınabilir fonksiyonlar olsun. Eğer bu fonksiyonların Wronskiyeni I aralığının her noktasında sıfıra eşitse bu fonksiyonlar lineer bağımlı fonksiyonlardır. Fakat bu fonksiyonların Wronskiyeni I aralığının herhangi bir noktasında sıfır değilse bu fonksiyonlar lineer olarak bağımsızdır.

Aşağıdaki fonsiyon takımlarının Wronskiyenini bularak fonksiyonların lineer bağımsız olup olmadıklarını inceleyiniz

(a) e^{ax}, e^{bx}, $a \neq b$, $(-\infty < x < +\infty)$ (b) $\cos ax, \sin ax$, $a \neq 0$, $(-\infty < x < +\infty)$

(c) $1, x, x^2$, $(-\infty < x < +\infty)$ d) $x+1, x+2, x+3$, $(-\infty < x < +\infty)$

Çözümler :

(a) (5.8)' den yararlanarak verilen fonksiyon takımının Wronskiyeni yazılır.

$$W(e^{ax}, e^{bx}) = \begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ ae^{ax} & be^{bx} \end{vmatrix} = (b-a)e^{(a+b)x} \neq 0$$

dır. Teorem 5.1 'e göre fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

(b) (5. 8) ' den yararlanarak verilen fonksiyon takımının Wronskiyeni yazılır.

$$W(\cos ax, \sin ax) = \begin{vmatrix} \cos ax & \sin ax \\ -a\sin ax & a\cos ax \end{vmatrix} = a \neq 0$$

dır. Teorem 5.1' e göre fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

(c) (5.8)' den yararlanarak verilen fonksiyon takımının Wronskiyeni yazılır.

$$W(1, x, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

dır. Teorem (5.1)'e göre fonksiyonlar lineer bağımsızdırlar.

(d) (5.8)'den yararlanarak verilen fonksiyon takımının Wronskiyeni yazılır

$$W(x+1,x+2,x+3)=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

dır. Teorem 5.1'e göre fonksiyonlar lineer bağımlıdırlar.

5.3 *Sabit Katsayılı Homogen Lineer Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü*

Eğer $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarının her biri (5.2) denkleminin birer çözümü ve bu fonksiyonlar aynı zamanda kendi aralarında lineer bağımsız iseler bunların lineer kombinasyonu olan

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

fonksiyonuda aynı denklemin bir çözümüdür. Bu şekilde tanımlanan fonksiyona **homogen denklemin genel çözümü** denir. (5.2) denklemi diferansiyel operatörü kullanılarak

$$P(D)y = 0 \tag{5.9}$$

veya lineer operatör kullanarak

$$Ly = 0 \tag{5.10}$$

biçiminde yazılabilir. Bir fonksiyonun (5.10) denkleminin çözümü olması için bu fonksiyonun ve ilk n türevinin belirli bir lineer bileşiminin sıfıra eşit olması gerekir. Bu tür bir fonksiyon, türevleri

$$D^n e^{rx} = r^n e^{rx} \tag{5.11}$$

eşitliğiyle verilen üstel fonksiyondur. (5.10) denkleminin bir çözümünün

$$y = e^{rx}$$

biçiminde olduğunu varsayalım. (5.11) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} P(D)e^{rx} &= (a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)e^{rx} \\ &= (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n)e^{rx} \\ &= P(r)e^{rx} \ , \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik $r \in R$ için

$$P(r) = 0 \tag{5.12}$$

karakteristik denkleminin bir kökü ise, $y = e^{rx}$ fonksiyonun (5.10) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Genel olarak (5.12) karakteristik denkleminin bazıları çok katlı olan n tane reel ya da kompleks kökü vardır. Bu köklerin*

(a) farklı reel (gerçel)
(b) çok katlı reel
(c) farklı kompleks
(d) çok katlı kompleks ,

olmaları durumunda (5.10) denkleminin çözümlerini inceleyelim.

---

* Kaynak 6

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(a) *Farklı Reel Kökler*

$r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ (5.12) denkleminin birbirinden farklı reel kökleri ise

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$$

fonksiyonlarının her biri (5.10) denkleminin bir çözümüdür. Bu fonksiyonlar lineer bağımsız olduklarından (5.10) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \quad \text{ile verilir.}$$

(b) *Çok Katlı Reel Kökler*

r_1 (5.12) denkleminin k katlı bir reel kökü ve $r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_n$ birbirinden farklı reel kökler olsun. Bu durumda

$$e^{r_1 x}, e^{r_{k+1} x}, \ldots, e^{r_n x}$$

fonksiyonları (5.10) denkleminin lineer bağımsız çözümleridirler. Geriye kalan $k-1$ lineer bağımsız çözüm aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.2

r_1 (5.12) denkleminin k katlı kökü ise

$$x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_1 x}$$

fonksiyonlarının her biri (5.10) denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_1 x}, e^{r_{k+1} x}, \ldots, e^{r_n x}$$

fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından (5.10) denkleminin genel çözümü

$$y = (c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}) e^{r_1 x} + c_{k+1} e^{r_{k+1} x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \quad \text{ile verilir.}$$

(c) *Farklı Kompleks Kökler*

$r_1 = a + ib$ (5.2) denkleminin kompleks bir kökü olsun .(5.12) denkleminin katsayıları reel olduklarından kompleks kökler eşlenik olarak görülürler. Böylece $\bar{r}_1 = a - ib$ de (5.12) denkleminin bir köküdür ve

$$e^{(a+ib)x}, \; e^{(a-ib)x}$$

fonksiyonları (5.10) denklemini sağlar. Ancak bu fonksiyonlar reel değerli olmadıklarından istenen çözümler değildirler. (5.12) denklemini sağlayan kompleks değerli $w(x) = u(x) + iv(x)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$Lw = Lu + iLv = 0$$

eşitliği reel değerli u ve v fonksiyonlarının (5.10) denkleminin çözümleri olduğunu gösterir. Dolayısıyla $r_1 = a + ib$ ve $\bar{r}_1 = a - ib$ (5.12) denkleminin bir eşlenik kök ikilisi ise

$$e^{(a \pm ib)x} = e^{ax}(\cos bx \pm i \sin bx)$$

fonksiyonunun reel ve sanal kısımları olan

$$e^{ax} \cos bx, \; e^{ax} \sin bx$$

fonksiyonları (5.10) denkleminin çözümleridir.

Sonuç olarak $r_1 = a + ib$ ve $\bar{r}_1 = a - ib$ (5.12) denkleminin eşlenik kökleri ve $r_3, r_4, \ldots, r_n$ birbirinden farklı reel kökleri ise

$$e^{ax} \cos bx, \; e^{ax} \sin bx, \; e^{r_3 x}, \ldots, e^{r_n x}$$

fonksiyonları lineer bağımsızdır. Dolayısıyla (5.10) denkleminin genel çözümü

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) + c_3 e^{r_3 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \quad \text{ile verilir.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(d) *Çok Katlı Kompleks Kökler*

$r_1 = a+ib$ ve $\bar{r}_1 = a-ib$ (5.12) denkleminin k katlı eşlenik kökleri olsun. Teorem 5.2 ' yi kompleks değerli fonksiyonlara genelleştirerek

$$e^{(a+ib)x}, xe^{(a+ib)x}, \ldots, x^{k-1}e^{(a+ib)x} \quad \text{ve} \quad e^{(a-ib)x}, xe^{(a-ib)x}, \ldots, x^{k-1}e^{(a-ib)x}$$

fonksiyonlarının (5.10) denklemini sağladığını gösterebiliriz. Dolayısıyla

$$e^{ax}\cos bx, xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx \quad \text{ve} \quad e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx$$

fonksiyonları (5.10) denkleminin çözümleridir.

Aşağıdaki homogen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz

(a) $y''-y'-6y=0$
(b) $y''+2y'=0$
(c) $y'''+3y''-4y'=0$
(d) $y''+2y'+y=0$
(e) $y'''-6y''+12y'-8y=0$
(f) $y''+9y=0$
(g) $y''-6y'+13y=0$
(h) $y^{(4)}+2y''+y=0$

Çözümler :

(a) $y''-y'-6y=0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^2-r-6=0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1=-2$ ve $r_2=3$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için $y_1=e^{-2x}$ ve $y_2=e^{3x}$ çözümleri , $W(y_1,y_2)=5e^{x}\neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır Denklemin genel çözümü ise

$$y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x} \quad \text{ile verilir.}$$

(b) $y''+2y'=0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^2+2r=r(r+2)=0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1=-2$ ve $r_2=0$ olarak bulunur Böylece verilen denklem için $y_1=e^{-2x}$ ve $y_2=e^{0x}=1$ çözümleri , $W(y_1,y_2)=-2e^{-2x}\neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü ise

$$y=c_1+c_2e^{-2x} \quad \text{ile verilir.}$$

(c) $y'''+3y''-4y'=0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^3+3r^2-4r=r(r+4)(r-1)=0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1=-4$, $r_2=0$ ve $r_3=1$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için $y_1=e^{-4x}$, $y_2=e^{0x}$ ve $y_3=e^{x}$ çözümleri $W(y_1,y_2,y_3)=20e^{-3x}\neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü ise

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = c_1 + c_2 e^{-4x} + c_3 e^{x}$$

ile verilir.

(d) $y''' + 2y' + y = 0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^3 + 2r + 1 = (r+1)^3 = 0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1 = r_2 = -1$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için $y_1 = e^{-x}$ ve $y_2 = xe^{-x}$ çözümleri, $W(y_1, y_2) = e^{-2x} \neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü ise

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

ile verilir.

(e) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = (r-2)^3 = 0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ ve $y_3 = x^2 e^{2x}$ çözümleri, $W(y_1, y_2, y_3) = 2e^{6x} \neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü ise

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{2x}$$

ile verilir.

(f) $y'' + 9y = 0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + 9 = 0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1 = 3i$ ve $r_2 = -3i$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için $y_1 = \cos 3x$ ve $y_2 = \sin 3x$ çözümleri, $W(y_1, y_2) = 3 \neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü ise

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$$

ile verilir.

(g) $y'' - 6y' + 13y = 0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - 6r + 13 = 0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1 = 3 + 2i$ ve $r_2 = 3 - 2i$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için $y_1 = e^{3x}\cos 2x$ ve $y_2 = e^{3x}\sin 2x$ çözümleri, $W(y_1, y_2) = 2e^{6x} \neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü ise

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$$

ile verilir.

(h) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1 = r_2 = i$ ve $r_3 = r_4 = -i$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için $y_1 = \cos x$, $y_2 = x\cos x$ ve $y_3 = \sin x$, $y_4 = x\sin x$ çözümleri $W(y_1, y_2, y_3, y_4) \neq 0$ olduğundan lineer bağımsızdır. Denklemin genel çözümü ise

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos x + (c_3 + c_4 x)\sin x$$

ile verilir.

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz

(a) $y''-4y'+3y=0$; $y(0)=-1$, $y'(0)=3$

(b) $y''+4y=0$; $y(\pi)=1$, $y'(\pi)=-4$

(c) $y'''+y''=0$; $y(0)=2$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$

Çözümler :

(a) $y''-4y'+3y=0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^2-4r+3=0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1=1$ ve $r_2=3$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için sırası ile e^x ve e^{3x} lineer bağımsız çözümleri elde edilir. Buna göre denklemin genel çözümü

$$y=c_1e^x+c_2e^{3x}$$

ile verilir. Başlangıç koşulları kullanılırsa

$$y(0)=c_1+c_2=-1 \quad \text{ve} \quad y'(0)=c_1+3c_2=3$$

denklemlerinden $c_1=-3$ ve $c_2=2$ bulunur. Bu değerler genel çözümde yerine koyulursa denklemin özel çözümü

$$y=-3e^x+2e^{3x} \quad \text{bulunur.}$$

(b) $y''+4y=0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^2+4=0$$

dir. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1=2i$ ve $r_2=-2i$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için sırası ile $\cos 2x$ ve $\sin 2x$ lineer bağımsız çözümleri elde edilir. Buna göre denklemin genel çözümü

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

ile verilir. Başlangıç koşulları kullanılırsa

$$y(\pi)=c_1\cos 2\pi+c_2\sin 2\pi=1$$

$$y'(\pi)=-2c_1\sin 2\pi+2c_2\cos 2\pi=-4$$

denklemlerinden $c_1=1$ ve $c_2=-2$ bulunur. Bu değerler genel çözümde yerine koyulursa denklemin özel çözümü

$$y=\cos 2x-2\sin 2x \quad \text{bulunur.}$$

(c) $y'''+y''=0$

Homogen denklemin karakteristik denklemi

$$r^3+r^2=r^2(r+1)=0$$

dır. Bu cebirsel denklemin kökleri $r_1=r_2=0$ ve $r_3=-1$ olarak bulunur. Böylece verilen denklem için sırası ile $1, x$ ve e^{-x} lineer bağımsız çözümler elde edilir. Buna göre denklemin genel çözümü

$$y=c_1+c_2x+c_3e^{-x}$$

ile verilir. Başlangıç koşulları kullanılırsa

$$y(0)=c_1+c_3=2 \quad , \quad y'(0)=c_2-c_3=1 \quad \text{ve} \quad y''(0)=c_3=-1 \quad \text{denklemlerinden}$$

$c_1=3$, $c_2=0$ ve $c_3=-1$ bulunur. Bu değerler genel çözümde yerine koyulursa verilen koşulları sağlayan özel çözüm

$$y=3-e^{-x} \quad \text{bulunur.}$$

5.4 Sabit Katsayılı Homogen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemlerin Genel Çözümü

N inci mertebeden sabit katsayılı ve homogen olmayan bir lineer diferansiyel denklem (5.1) ile aşağıda gösterildiği şekilde tanımlamıştık.

$$a_0\frac{d^n y}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n y=F(x) \qquad (5.13)$$

Bu denklemin genel çözümü

$$y=y_h+y_\phi \qquad (5.14)$$

ile verilir. Burada y_h (5.13)'ün homogen kısmının genel çözümüdür. Bu çözümü (5.3) bölümünde detaylı olarak inceledik. Şimdi ise amacımız homogen olmayan (5.13) denkleminin bir özel çözümü olan ve keyfi sabit sayı içermeyen y_ϕ özel çözümünü bulmaktır. Özel çözüm bulunduktan sonra (5.15) denklemi yardımıyla genel çözümü bulmuş oluruz. y_ϕ'nin bulunması ile ilgili birkaç yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden aşağıda belirtilenler verilecektir.

(i) Belirsiz Katsayılar Yöntemi*
(ii) Parametrelerin Değişimi Yöntemi

5. 4. 1 Belirsiz Katsayılar Yöntemi

(5.13) denkleminin ikinci tarafındaki $F(x)$ fonsiyonu bir UC fonksiyonu veya bu fonksiyonların lineer kombinasyonu ise ancak o zaman bu yöntem kullanılarak y_ϕ bulunur. $F(x)$ fonksiyonu UC fonksiyonu veya onun lineer kombinasyonlarından biri değilse o zaman bu yöntem yerine başka yöntemler kullanılır.

Çözüme geçmeden önce UC fonksiyonlarını ve UC fonksiyon kümelerini gösteren Tablo 5.1 de verilmektedir.

Tablo 5.1

	UC Fonksiyonu	UC Kümesi
1	x^n	$\{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots, x, 1\}$
2	e^{ax}	$\{e^{ax}\}$
3	$\sin(bx+c)$ veya $\cos(bx+c)$	$\{\sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
5	$x^n e^{ax}$	$\{x^n e^{ax}, x^{n-1}e^{ax}, x^{n-2}e^{ax}, \ldots, xe^{ax}, e^{ax}\}$
5	$x^n \sin(bx+c)$ veya $x^n \cos(bx+c)$	$\{x^n \sin(bx+c), x^n \cos(bx+c), x^{n-1}\sin(bx+c), x^{n-1}\cos(bx+c), \ldots, x\sin(bx+c), x\cos(bx+c), \sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
6	$e^{ax}\sin(bx+c)$ veya $e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$
7	$x^n e^{ax}\sin(bx+c)$ veya $x^n e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{x^n e^{ax}\sin(bx+c), x^n e^{ax}\cos(bx+c), x^{n-1}e^{ax}\sin(bx+c), x^{n-1}e^{ax}\cos(bx+c), \ldots, xe^{ax}\cos(bx+c), e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$

* Kaynak 12

Tablo 5.1 ' den görüldüğü gibi UC fonksiyon kümesi , UC fonksiyonunun kendisi ile fonksiyonun birbirinden farklı art arda gelen türevlerinden oluşan elemanları içermektedir. Aşağıda verilen örneklerle küme elemanlarının nasıl bulunduğunu daha detaylı göstereceğiz.

Örnek 1

$F(x)=x^3$ fonksiyonunun küme elemanlarını bulunuz.

Fonksiyonun art arda gelen türevlerini alırsak ,

$F'(x)=3x^2$, $F''(x)=6x$, $F'''(x)=6.1$ ve $n>3$ için $F^{(n)}=0$ bulunur. Burada x^2, x, 1 birer UC fonksiyonudur ve **bunların katsayılarını göz önüne almak gerekmez.** Verilen $F(x)$ fonksiyonunun kendisi ve türevlerinden oluşan UC kümesini S ile gösterirsek

$S=\{x^3,x^2,x,1\}$ elde edilir.

Örnek 2

$F(x)=\sin 2x$ fonksiyonunun küme elemanlarını bulunuz .

Fonksiyonun art arda gelen türevlerini alırsak

$F'(x)=2\cos 2x$, $F''(x)=-4\sin 2x$, ... bulunur.

Burada $\sin 2x$ ve $\cos 2x$ birer UC fonksiyonudur . Verilen $F(x)$ fonksiyonunun UC kümesi

$S=\{\sin 2x,\cos 2x\}$ elde edilir.

Örnek 3

$f(x)=x^2\sin x$ fonksiyonunun küme elemanlarını bulunuz.

Fonksiyonun art arda gelen türevlerini alırsak

$f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$

$f''(x)=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$

$f'''(x)=6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x$ bulunur.

Bu işlem adımından sonra türev almaya devam edecek olursak yeni bir tür UC fonksiyonu elde edilemiyeceği görüldüğü için türev almayı burada noktalarız. UC kümesi ise aşağıda verildiği biçimdedir.

$S=\{x^2\sin x,x^2\cos x,x\sin x,x\cos x,\sin x,\cos x\}$

Örnek 4

$f(x)=x^3+x\sin x+\cos x$ fonksiyonunun küme elemanlarını bulunuz.

Burada $x^3, x\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonlarının herbiri UC fonksiyonudur ve $f(x)$ bu fonksiyonların bir lineer kombinasyonudur. Bundan ötürü , önce bu fonksiyonların herbirinin UC küme elemanları bulunur sonra da bunlar arasında tekrar edenler çıkartılarak UC kümesi

$S=\{x^3,x^2,1,x\sin x,x\cos x,\sin x,\cos x\}$ biçiminde bulunur.

Dikkat edilecek olursa UC kümesi Tablo 5.1 'den 5 nolu satırda $n=3$, $b=2$ ve $c=0$ alınarak doğrudan yazılabilir.

Aşağıda verilen Homogen olmayan diferansiyel denklemleri "Belirsiz Katsayılar Yöntemi" ile çözünüz.

(a) $(D^2+1)y=x\sin x$

(b) $y'''-y''+4y'-4y=\cos 2x$

(c) $(D^2-1)y=e^x\sin 2x$

(d) $(D^3+4D^2+D-6)y=-18x^2+1$

(e) $(D^2-1)y=e^x+\sin 2x$

(f) $D^3(D-1)y=3e^x+\sin x$

(g) $(D^3-3D^2+4)y=4e^x-18e^{-x}$

(h) $(D^2-3D+2)y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(i) $(D^4+D^2)y=3x^2+4\sin 2x-2\cos x$
(j) $(D^3+4D+4)y=8$
(j) $(D^4+D^3)y=-12$
(k) $y^{(5)}+4y^{(3)}=7$

Çözümler :

(a) $(D^2+1)y=x\sin x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$(D^2+1)y=0 \quad (2)$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2+1=0 \quad (3)$$

olup, kökleri $r_1=-i$ ve $r_2=i$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h=c_1\cos x+c_2\sin x \quad (4)$$

ile verilir. Burada görülen $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x)=x\sin x$$

fonksiyonunun UC kümesi

$$S=\{x\sin x, x\cos x, \sin x, \cos x\} \quad (5)$$

biçiminde yazılır. Bu kümenin elemanları ile homogen kısmın çözümünde yer alan $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonları karşılaştırılırsa bu fonksiyonların UC kümesinde de yer aldığı görülür. Bu nedenle S de tekrarlanan elemanlar x ile çarpılır ve S yeniden düzenlenerek aşağıdaki biçimde yazılır.

$$S'=\{x^2\sin x, x^2\cos x, x\sin x, x\cos x\} \quad (6)$$

S' ile verilen UC kümesinin elemanları kullanılarak verilen (1) denkleminin özel çözümü

$$y_\delta=Ax^2\sin x+Bx^2\cos x+Cx\sin x+Ex\cos x \quad (7)$$

olarak belirlenir. Burada A, B, C ve E katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_δ nün türevleri alınırsa

$$y_\delta'=2Ax\sin x+Ax^2\cos x+2Bx\cos x-Bx^2\sin x+C\sin x+Cx\cos x+E\cos x-Ex\sin x$$

$$y_\delta''=2A\sin x+4Ax\cos x-Ax^2\sin x+2B\cos x-4Bx\sin x-Bx^2\cos x$$
$$+2C\cos x-Cx\sin x-2E\sin x-Ex\cos x$$

bulunur. y_δ ve y_δ'' verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$4Ax\cos x-4Bx\sin x+(2A-2E)\sin x+(2B+2C)\cos x=x\sin x$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$4A=0\ ,\ -4B=1\ ,\ 2A-2E=0\ ,\ 2B+2C=0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A=0$, $B=-1/4$, $C=1/4$, $E=0$ elde edilir. Bu değerler (7) denkleminde yerine koyulursa

$$y_\delta=-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x \quad (8)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = y_h + y_o = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x$$

ile verilir.

(b) $y''' - y'' + 4y' - 4y = \cos 2x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$(D^3 - D^2 + 4D - 4)y = 0 \quad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^3 - r^2 + 4r - 4 = (r-1)(r^2+4) = 0 \quad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = 1$, $r_2 = 2i$ ve $r_3 = -2i$ olarak bulunur. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1e^x + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x \quad (4)$$

ile verilir. Burada görülen e^x, $\cos 2x$ ve $\sin 2x$ fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x) = \cos 2x$$

fonksiyonunun UC kümesi

$$S = \{\sin 2x, \cos 2x\} \quad (5)$$

biçiminde yazılır. Homogen kısmın çözümünde yer alan $\cos 2x$, $\sin 2x$ fonksiyonlarının UC kümesinde de yer aldığı görülür. Bu nedenle S de tekrarlanan elemanlar x ile çarpılır, S yeniden düzenlenerek aşağıdaki biçimde yazılır

$$S' = \{x\sin 2x, x\cos 2x\} \quad (6)$$

S' ile verilen UC kümesinin elemanları kullanılarak verilen (1) denkleminin özel çözümü

$$y_o = Ax\sin 2x + Bx\cos 2x \quad (7)$$

olarak belirlenir. Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_o nün türevleri alınırsa

$$y_o' = A\sin 2x + 2Ax\cos 2x + B\cos 2x - 2Bx\sin 2x$$

$$y_o'' = 4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 4Ax\sin 2x - 4Bx\cos 2x$$

$$y_o''' = -12A\sin 2x - 2B\cos 2x - 8Ax\cos 2x + 8Bx\sin 2x$$

bulunur. y_o, y_o', y_o'', y_o''' verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$(-4A - 8B)\cos 2x + (-8A + 4B)\sin 2x = \cos 2x$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$-4A - 8B = 1 \quad \text{ve} \quad -8A + 4B = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A = -1/20$ ve $B = -1/10$ elde edilir. Bu değerler (7) denkleminde yerine koyulursa

$$y_o = -\frac{x}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x) \quad (8)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin çözümü

$$y = y_h + y_o = c_1e^x + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x - \frac{x}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

ile verilir.

(c) $(D^2 - 1)y = e^x\sin 2x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$(D^2 - 1)y = 0 \quad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0 \quad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = 1$ ve $r_2 = -1$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \qquad (4)$$

ile verilir. Burada görülen e^x ve e^{-x} fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x) = e^x \sin 2x$$

fonksiyonunun UC kümesi

$$S = \{e^x \sin 2x, e^x \cos 2x\} \qquad (5)$$

biçiminde yazılır. Homogen kısmın çözümünde yer alan e^x ve e^{-x} fonksiyonları S de yer almadığından (1) denkleminin özel çözümü doğrudan S kümesinin elemanlarından aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$y_o = Ae^x \sin 2x + Be^x \cos 2x \qquad (6)$$

Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_o nün türevleri alındıktan sonra, verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$(-4A - 4B)e^x \sin 2x + (4A - 4B)e^x \cos 2x = e^x \sin 2x$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$-4A - 4B = 1 \quad , \quad 4A - 4B = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A = B = -1/8$ elde edilir. Bu değerler (6) denkleminde yerine koyulursa

$$y_o = -\frac{1}{8} e^x (\sin 2x + \cos 2x) \qquad (7)$$

bulunur.. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_o = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{8} e^x (\sin 2x + \cos 2x)$$

ile verilir.

(d) $(D^3 + 4D^2 + D - 6)y = -18x^2 + 1 \qquad (1)$

Denklemin homogen kısmı

$$(D^3 + 4D^2 + D - 6)y = 0 \qquad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^3 + 4r^2 r - 6 = (r-1)(r+2)(r+3) = 0 \qquad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = 1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -3$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x} \qquad (4)$$

ile verilir. Burada görülen e^x, e^{-2x} ve e^{-3x} fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$F(x) = -18x^2 + 1$ ise, birer UC fonksiyonu olan x^2 ve 1'in lineer kombinasyonudur.

Bu fonksiyonların UC kümeleri sırasıyla S_1 ve S_2 olarak aşağıda gösterildiği biçimde

$$S_1 = \{x^2, x, 1\} \quad \text{ve} \quad S_2 = \{1\}$$

yazılır. Görüldüğü gibi S_1, S_2 kümesini içerdiği için yalnız S_1 göz önüne alınır. Ayrıca bu kümenin elemanları ile homogen kısmın çözümünde yer alan UC fonksiyonları karşılaştırıldığında tekrarlanan UC fonksiyonu olmadığı görülür. Böylece S_1'in elemanları kullanılarak (1) denkleminin çözümü

$$y_\delta = Ax^2 + Bx + C \quad (5)$$

olarak belirlenir. Burada A, B ve C katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_δ 'nün türevleri alınırsa

$$y_\delta' = 2Ax + B \ , \ y_\delta'' = 2A \ , \ y_\delta''' = 0 \quad \text{bulunur.}$$

$y_\delta, y_\delta', y_\delta'', y_\delta'''$ verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$-6Ax^2 + (2A - 6B)x + (8A + B - 6C) = -18x^2 + 1$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$-6A = -18 \ , \ 2A - 6B = 0 \ , \ 8A + B - 6C = 1$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A = 3$, $B = 1$ ve $C = 4$ bulunur. Bu değerler (5) denkleminde yerine koyulursa

$$y_\delta = 3x^2 + x + 4 \quad (6)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_\delta = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{-3x} + 3x^2 + x + 4$$

ile verilir.

(e) $(D^2 - 1)y = e^x + \sin 2x \quad (1)$

Denklemin homogen kısmı

$$(D^2 - 1)y = 0 \quad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^2 - 1 = (r - 1)(r + 1) = 0 \quad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = 1$ ve $r_2 = -1$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (4)$$

ile verilir. Burada görülen e^x ve e^{-x} fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x) = e^x + \sin 2x$$

ise, UC fonksiyonu olan e^x ve $\sin x$ 'in lineer kombinasyonudur. Bu fonksiyonların UC kümeleri sırasıyla S_1 ve S_2 olarak aşağıda gösterildiği biçimde

$$S_1 = \{e^x\} \quad \text{ve} \quad S_2 = \{\sin 2x, \cos 2x\}$$

yazılır. Görüldüğü gibi S_1 ve S_2 kümeleri birbirlerinden farklı UC kümeleridir. Bu nedenle her iki kümenin elemanları göz önünü alınacaktır. Ayrıca homogen kısmın çözümünde yer alan UC fonksiyonlarından e^x S_1 'in de elemanı olduğu için x ile çarpılarak S_1 kümesi

$$S_1' = \{xe^x\}$$

biçiminde yeniden düzenlenir. Sonuç olarak S_1' ve S_2 kümelerinin birleşimi olan S_3 UC kümesi

$$S_3 = \{xe^x, \sin 2x, \cos 2x\} \quad (5)$$

şeklinde yazılır. S_3 ile verilen UC kümesinin elemanları kullanılarak verilen (1) denkleminin özel çözümü

$$y_\delta = Axe^x + B\sin 2x + C\cos 2x \quad (6)$$

olarak belirlenir. Burada A, B ve C katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_δ nün türevleri alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y_{\ddot{o}}' = Ae^x + Axe^x + 2B\cos 2x - 2C\sin 2x$$
$$y_{\ddot{o}}'' = 2Ae^x + Axe^x - 4B\sin 2x - 4C\cos 2x$$

bulunur. $y_{\ddot{o}}$ ve $y_{\ddot{o}}''$ verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2Ae^x - 5B\sin 2x - 5C\cos 2x = e^x + \sin 2x$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$2A = 1\ ,\ -5B = 1\ ,\ -5C = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A = 1/2$, $B = -1/5$, $C = 0$ elde edilir. Bu değerler (6) denkleminde yerine koyulursa

$$y_{\ddot{o}} = \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{5}\sin 2x \qquad (7)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_{\ddot{o}} = c_1e^{-x} + c_2e^x + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{5}\sin 2x$$

ile verilir.

(f) $D^2(D-1)y = 3e^x + \sin x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$D^2(D-1)y = 0 \qquad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^2(r-1) = 0 \qquad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = r_2 = 0$ ve $r_3 = 1$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1 + c_2x + e^x \qquad (4)$$

ile verilir. Burada görülen 1 , x , e^x fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x) = 3e^x + \sin x$$

ise birer UC fonksiyonu olan e^x ve $\sin x$ 'in lineer kombinasyonudur. e^x in UC kümesi S_1 ve $\sin x$' in UC kümesi S_2 aşağıda gösterildiği şekilde yazılır.

$$S_1 = \{e^x\} \quad \text{ve} \quad S_2 = \{\sin x, \cos x\}.$$

Ayrıca homogen kısmın çözümünde yer alan UC fonksiyonlarından e^x , S_1 in de elemanı olduğu için x ile çarpılarak S_1 kümesi $S_1' = \{xe^x\}$ şeklinde yeniden düzenlenir. Sonuç olarak S_1' ve S_2 kümelerinin birleşimini alarak S_3 kümesi aşağıdaki biçimde yazılır.

$$S_3 = \{xe^x, \sin x, \cos x\}$$

Buradan, S_3 ün elemanları kullanılarak denklemin özel çözümü

$$y_{\ddot{o}} = Axe^x + B\sin x + C\cos x \qquad (5)$$

olarak belirlenir. Burada A, B ve C katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için $y_{\ddot{o}}$ nün türevleri alınırsa

$$y_{\ddot{o}}' = A(xe^x + e^x) + B\cos x - C\sin x$$
$$y_{\ddot{o}}'' = A(xe^x + 2e^x) - B\sin x - C\cos x$$
$$y_{\ddot{o}}''' = A(xe^x + 3e^x) - B\cos x + C\sin x$$

elde edilir. $y_{\ddot{o}}'$ ve $y_{\ddot{o}}'''$ verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$Ae^x + (B+C)\sin x + (C-B)\cos x = 3e^x + \sin x$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$A=3\ ,\ B+C=1\ ,\ C-B=0$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A=3$ ve $B=C=1/2$ elde edilir. Bu değerler (5) denkleminde yerine koyulursa

$$y_o = 3xe^x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \qquad (6)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_o = c_1 + c_2x + c_3e^x + 3xe^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

ile verilir.

(g) $(D^3 - 3D^2 + 4)y = 4e^x - 18e^{-x}$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$(D^3 - 3D^2 + 4)y = 0 \qquad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^3 - 3r^2 + 4 = (r+1)(r-2)^2 = 0 \qquad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = -1$ ve $r_2 = r_3 = 2$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^{2x} \qquad (4)$$

ile verilir. Burada görülen e^{-x}, e^{2x} ve xe^{2x} fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x) = 4e^x - 18e^{-x}$$

ise birer UC fonksiyonu olan e^x ve e^{-x}'in lineer kombinasyonudur. Bu fonksiyonların UC kümeleri sırasıyla S_1 ve S_2 olarak aşağıda gösterildiği biçimde

$$S_1 = \{e^x\} \quad \text{ve} \quad S_2 = \{e^{-x}\}$$

yazılır. Görüldüğü gibi S_1 ve S_2 kümeleri birbirlerinden farklı UC kümeleridir. Bu nedenle her iki kümenin elemanları göz önüne alınacaktır. Ayrıca homogen kısmın çözümünde yer alan UC fonksiyonlarından e^{-x}, S_2 nin de elemanı olduğu için, x ile çarpılır ve S_2 yeniden

$$S_2' = \{xe^{-x}\}$$

biçiminde düzenlenir. S_1 ve S_2' kümelerinin birleşimi olan

$$S_3 = \{e^x, xe^{-x}\}$$

biçiminde yazılır. S_3 ile verilen UC kümesinin elemanları verilen (1) denkleminin özel çözümü

$$y_o = Ae^x + Bxe^{-x} \qquad (5)$$

olarak belirlenir. Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_o'nün türevleri alınırsa

$$y_o' = Ae^x + Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

$$y_o'' = Ae^x - 2Be^{-x} + Bxe^{-x}$$

$$y_o''' = Ae^x + 3Be^{-x} - Bxe^{-x}$$

bulunur. y_o, y_o'', y_o''' verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2Ae^x + 9Be^{-x} = 4e^x - 18e^{-x}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$2A = 4\ ,\ 9B = -18$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A=2$ ve $B=-2$ elde edilir. Bu değerler (5) denkleminde yerine koyulursa

$$y_o = 2e^x - 2xe^{-x} \qquad (6)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_\delta = c_1e^{-x} + (c_2 + c_3x)e^{2x} + 2e^x - 2xe^{-x}$$

ile verilir.

(b) $(D^2 - 3D + 2)y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$(D^2 - 3D + 2)y = 0 \quad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0 \quad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = 1$ ve $r_2 = 2$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x} \quad (4)$$

ile verilir. Burada görülen e^x ve e^{2x} fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x) = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$$

ise birer UC fonksiyonu olan x^2, e^x, e^{2x} ve e^{3x} in lineer kombinasyonudur. Bu fonksiyonların UC kümeleri sırasıyla S_1, S_2, S_3 ve S_4 olarak aşağıda gösterildiği biçimde

$$S_1 = \{x^2, x, 1\}, S_2 = \{e^x\}, S_3 = \{xe^x, e^x\}, S_4 = \{e^{3x}\}$$

yazılır. Görüldüğü gibi S_3, S_2 kümesini içerdiği için yalnız S_3 kümesi göz önüne alınır. Ayrıca homogen kısmın çözümünde yer alan e^x, S_3 ün de elemanı olduğu için x ile çarpılarak

$$S_3' = \{x^2e^x, xe^x\}$$

biçiminde yeniden düzenlenir. S_1, S_2 ve S_3' kümelerinin elemanlarının lineer kombinasyonundan oluşan (1) denkleminin özel çözümü

$$y_\delta = Ax^2 + Bx + C + Ee^{3x} + Fx^2e^x + Gxe^x \quad (5)$$

olarak belirlenir. Burada A, B, C, F, G katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_δ nün türevleri alınırsa,

$$y_\delta' = 2Ax + B + 3Ee^{3x} + 2Fxe^x + Fx^2e^x + Ge^x + Gxe^x$$

$$y_\delta'' = 2A + 9Ee^{3x} + Fx^2e^x + (4F + G)xe^x + (2F + 2G)e^x$$

bulunur. y_δ, y_δ', y_δ'' verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2Ax^2 + (2F - G)e^x - 2Fxe^x + 2Ee^{3x} + (2B - 6A)x + (2A - 3B + 2C) = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$2A = 2,\ 2F - G = 1,\ -2F = 2,\ 2E = 4,\ 2B - 6A = 0,\ 2A - 3B + 2C = 0$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A = 1$, $B = 3$, $C = \frac{7}{2}$, $E = 2$, $F = -1$, $G = -3$ elde edilir. Bu değerler (5) denkleminde yerine koyulursa

$$y_\delta = x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x \quad (6)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_\theta = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2e^{3x} - x^2e^x - 3xe^x$$

ile verilir.

(i) $(D^4 + D^2)y = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$(D^4 + D^2)y = 0 \qquad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^4 + r^2 = r^2(r^2 + 1) = 0 \qquad (3)$$

olup, kökleri $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = -i$, $r_4 = i$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1 + c_2x + c_3\sin x + c_4\cos x \qquad (4)$$

ile verilir. Burada görülen 1, x, $\sin x$, $\cos x$ fonksiyonları birer UC fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan denklemin homogen olmayan kısmı

$$F(x) = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

ise birer UC fonksiyonu olan x^2, $\sin x$ ve $\cos x$ in lineer kombinasyonudur. Bu fonksiyonların UC kümeleri sırasıyla S_1, S_2 ve S_3 olarak aşağıda gösterildiği biçimde

$$S_1 = \{x^2, x, 1\}, \quad S_2 = \{\sin x, \cos x\} \text{ ve } S_3 = \{\cos x, \sin x\}$$

yazılır. Görüldüğü gibi, S_2 ve S_3 UC kümeleri eşit kümeler olduğundan bunlardan yalnızca biri göz önüne alınır. Ayrıca homogen kısmın çözümünde yer alan UC fonksiyonlarından 1 ve x S_1 kümesinde, $\cos x$ ve $\sin x$ ise S_2 kümesinde yer aldığından sırasıyla x^2 ile çarpılarak S_1 kümesi

$$S_1' = \{x^4, x^3, x^2\}$$

olarak ve x ile çarpılarak S_2 kümesi de

$$S_2' = \{x\sin x, x\cos x\}$$

olarak yeniden düzenlenir. S_1' ve S_2' kümelerinin elemanlarının lineer kombinasyonundan oluşan (1) denkleminin özel çözümü

$$y_\theta = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Ex\sin x + Fx\cos x \qquad (5)$$

olarak belirlenir. Burada A, B, C, E ve F katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için y_θ 'nün türevleri alınırsa,

$$y_\theta' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + E\sin x + Ex\cos x + F\cos x - Fx\sin x$$

$$y_\theta'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C + 2E\cos x - Ex\sin x - 2F\sin x - Fx\cos x$$

$$y_\theta''' = 24Ax + 6B - 3E\sin x - Ex\cos x - 3F\cos x + Fx\sin x$$

$$y_\theta^{iv} = 24A - 4E\cos x + Ex\sin x + 4F\sin x + Fx\cos x$$

bulunur. y_θ^{iv} ve y_θ'' verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$12Ax^2 + 6Bx + 24A + 2C - 2E\cos x + 2F\sin x = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$12A = 3, \quad 6B = 0, \quad 24A + 2C = 0, \quad -2E = -2, \quad 2F = 4$$

denklemleri bulunur. Bu denklemlerden $A = 1/4$, $B = 0$, $C = -3$, $E = 1$, $F = 2$ bulunur. Bu değerler (5) denkleminde yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y_s = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x\sin x + 2x\cos x \qquad (6)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y = y_h + y_s = c_1 + c_2 x + c_3 \sin x + c_4 \cos x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x\sin x + 2x\cos x$$

ile verilir.

(i) $(D^2 + 4D + 4)y = 8 \qquad (1)$

Denklemin homogen kısmı

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \qquad (2)$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 = 0 \qquad (3)$$

olup , kökleri $r_1 = r_2 = -2$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} \qquad (4)$$

ile verilir. Verilen diferansiyel denklemin homogen olmayan kısmının sabit bir fonksiyon olduğu görülür. Bu nedenle bu denklemin özel çözümünü bulmak için aşağıda özetleyeceğimiz yöntem kullanılır .*

N inci mertebeden sabit katsayılı ve homogen olmayan bir lineer diferansiyel denklemi (5.4) ile aşağıda gösterildiği biçimde tanımlamıştık.

$$\left[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right] y = F(x) \qquad (5.15)$$

(a) $F(x)$, F_0 gibi sabit bir fonksiyona eşit ve $a_n \neq 0$ ise (5.15) denklemi aşağıdaki biçimde

$$\left[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right] y = F_0 \qquad (5.16)$$

yeniden yazılır. Bu denklemin özel çözümü ise

$$y_s = \frac{F_0}{a_n} \qquad (5.17)$$

ile verilir.

(b) $F(x)$, F_0 gibi sabit bir fonksiyona eşit ve $a_n = 0$ ise (5.15) denklemi aşağıdaki biçimde

$$\left[a_0 D^n + \cdots + a_{n-k} D^k\right] y = F_0 \ , \ a_{n-k} \neq 0 \qquad (5.18)$$

yeniden yazılır. Burada $D^k y$ en düşük mertebeden türevi gösterir. Bu denklemin özel çözümü

$$y_s = \frac{F_0 x^k}{k! a_{n-k}} \qquad (5.19)$$

ile verilir. Şimdi (1) denkleminin çözümüne geçelim. Bu denklemin özel çözümü için durum (a) uygulanır. (5.17) denkleminden yararlanarak

$$y_s = \frac{F_0}{a_n} = \frac{8}{4} = 2$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$y = y_h + y_s = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + 2$ ile verilir.

(j) $(D^4 + D^2)y = -12 \qquad (1)$

Denklemin homogen kısmı

* Kaynak 11

T.C. MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Kütüphane ve Dokümantasyon
Daire Başkanlığı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(D^4+D^2)y=0 \qquad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^4+r^2=r^2(r^2+1)=0 \qquad (3)$$

olup, kökleri $r_1=r_2=0$, $r_3=i$, $r_4=-i$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x \qquad (4)$$

bulunur. (1) denkleminin özel çözümü için durum (b) uygulanır. (5.19) denkleminden yararlanarak

$$y_o=\frac{F_0x^k}{k!a_{n-k}}=\frac{-12x^2}{2!1}=-6x^2$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y=y_h+y_o=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x-6x^2$$

ile verilir.

(k) $y^{(5)}+4y^{(3)}=7 \qquad (1)$

Denkleminin homogen kısmı

$$(D^5+4D^3)y=0 \qquad (2)$$

dir. Bu denkleminin karakteristik denklemi

$$r^5+4r^3=r^3(r^2+4)=0 \qquad (3)$$

olup, kökleri $r_1=r_2=r_3=0$ ve $r_4=2i, r_5=-2i$ dir. Böylece (2) denkleminin çözümü

$$y_h=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos 2x+c_5\sin 2x \qquad (4)$$

bulunur. (1) denkleminin özel çözümü için durum (b) uygulanır. 5.19) denkleminden yararlanarak

$$y_o=\frac{F_0x^k}{k!a_{n-k}}=\frac{7x^3}{3!4}=\frac{7}{24}x^3$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y=y_h+y_o=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4\cos 2x+c_5\sin 2x+\frac{7}{24}x^3$$

ile verilir.

5.4.2 Parametrelerin Değişimi Yöntemi

Belirsiz katsayılar yönteminin uygulanabilmesi için $F(x)$ fonksiyonunun bir UC fonksiyonu olması ya da UC fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olması koşulu vardır. **Parametrelerin değişimi yöntemi**, bu koşullar aranmaksızın uygulanabilen bir yöntemdir. **Parametrelerin değişimi yöntemi** aşağıda bir teorem olarak verilmiştir.*

Teorem 5.3

$y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$, aşağıda verilen homogen diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri olsun.

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=0 \qquad (5.20)$$

$u_1(x), u_2(x),\ldots, u_n(x)$ I aralığı üzerinde sıfır olmayan ve türevleri

---

* Kaynak 10

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{aligned}
&u_1'(x)y_1(x)+\cdots+u_n'(x)y_n(x)=0\\
&u_1'(x)y_1'(x)+\cdots+u_n'(x)y_n'(x)=0\\
&u_1'(x)y_1''(x)+\cdots+u_n'(x)y_n''(x)=0\\
&\qquad\vdots\\
&u_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+\ldots+u_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0\\
&u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+\ldots+u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=\frac{F(x)}{a_0(x)}
\end{aligned} \qquad (5.21)$$

(5.21) denklem sistemini sağlayan fonksiyonlar ise

$$a_0(x)y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_{n-1}(x)y'(x)+a_n(x)y(x)=F(x) \qquad (5.22)$$

(5.17) ile verile n inci mertebeden homogen olmayan lineer diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_\ddot{o}=u_1(x)y_1(x)+\cdots+u_n(x)y_n(x) \qquad (5.23)$$

ile verilir.

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri "Parametrelerin Değişimi Yöntemini" kullanarak çözünüz.

(a) $y''+y=\tan x$

(b) $y'''-6y''+11y'-6y=e^x$

(c) $y''-3y'+2y=-\dfrac{e^{3x}}{e^x+1}$

(d) $y''+y=\cot x$

(e) $y''+2y'+y=4e^{-x}\ln x$

(f) $y''+4y=4\sec^2 2x$

(g) $y''+4y'+5y=e^{-2x}\sec x$

(h) $y''+6y'+9y=\dfrac{e^{-3x}}{x^3}$

(ı) $y''-y=e^{-2x}\sin e^{-x}$

(i) $y'''+y'=\csc x$

Çözümler :

(a) $y''+y=\tan x$ (1)

Denkleminin homogen kısmı

$$y''+y=0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin, $y_1(x)=\cos x$ ve $y_2(x)=\sin x$ gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1 'den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=1\neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x)=c_1\cos x+c_2\sin x \qquad (3)$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulamasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0$$
$$u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=F(x)/a_0(x) \qquad (4)$$

Bu denklem sisteminde $y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$ ve $F(x)/a_0(x)=\tan x$ dir. Bu değerler (4) denklem sisteminde yerlerine koyulursa

$$u_1'(x)\cos x+u_2'(x)\sin x=0$$
$$-u_1'(x)\sin x+u_2'(x)\cos x=\tan x \qquad (5)$$

bulunur. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı 'na göre çözülürse

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \tan x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=-\tan x\sin x \qquad (6)$$

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \tan x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\tan x\cos x \qquad (7)$$

bulunur. (6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=-\int\tan x\sin x\,dx=\tan x\cos x-\int\cos x\sec^2 x\,dx$$
$$u_1(x)=\sin x-\int\sec x\,dx=\sin x-\ln|\sec x+\tan x|+c_3 \qquad (8)$$
$$u_2(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+c_4 \qquad (9)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ 'in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_\ddot{o}=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$
$$y_\ddot{o}=\sin x\cos x-\cos x\ln|\sec x+\tan x|+c_3\cos x-\cos x\sin x+c_4\sin x$$
$$y_\ddot{o}=-\cos x\ln|\sec x+\tan x|+c_3\cos x+c_4\sin x \qquad (10)$$

bulunur. Özel çözümler keyfi sabitlere bağlı olmadığından c_3 ve c_4 yerine A ve B değerleri alınabilir. (10) denklemi yeniden yazılırsa

$$y_\ddot{o}=-\cos x\ln|\sec x+\tan x|+A\cos x+B\sin x \qquad (11)$$

bulunur. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y_g(x)=y_h(x)+y_\ddot{o}(x)$$
$$y_g(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+A\cos x+B\sin x-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$$
$$y_g(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln|\sec x+\tan x|$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. Burada $C_1 = c_1 + A$ ve $C_2 = c_2 + B$ dir. Böylece integral işlemlerinde c_3 ve c_4 ün sıfır seçilebileceğini görmüş olduk. Bunların sıfır seçilmesi sonucu değiştirmediğinden bundan sonraki çözümde c_3 ve c_4 sıfır alınacaktır.

(b) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$ gibi üç lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1'den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x), y_2(x), y_3(x)] = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin çözümü ise

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \qquad (3)$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_3'(x)y_3(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_3'(x)y_3'(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2''(x) + u_3'(x)y_3''(x) &= \frac{F(x)}{a_0(x)} \end{aligned} \qquad (4)$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$ ve $\frac{F(x)}{a_0(x)} = e^x$ dir.

Bu değerler yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} + u_3'(x)e^{3x} &= 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} + 3u_3'(x)e^{3x} &= 0 \\ u_1'(x)e^x + 4u_2'(x)e^{2x} + 9u_3'(x)e^{3x} &= e^x \end{aligned} \qquad (5)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı'na göre çözülürse

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{6x}}{2e^{6x}} = \frac{1}{2} \qquad (6)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & e^x & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}=-\frac{2e^{5x}}{2e^{6x}}=-e^{-x} \qquad (7)$$

$$u_3'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}=\frac{e^{4x}}{2e^{6x}}=\frac{1}{2}e^{-2x} \qquad (8)$$

bulunur. (6) , (7) ve (8) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}x \qquad (9)$$

$$u_2(x)=\int -e^{-x}dx=e^{-x} \qquad (10)$$

$$u_3(x)=\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{4}e^{-2x} \qquad (11)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ in ve $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ in değerleri (5.23) de yerlerine koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_s(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+u_3(x)y_3(x)$$

$$y_s(x)=\frac{1}{2}xe^x+e^{-x}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}e^{3x}=\frac{1}{2}xe^x+\frac{3}{4}e^x \qquad (12)$$

olarak bulunur. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x)=y_h(x)+y_s(x)=\ c_1e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+\frac{1}{2}xe^x+\frac{3}{4}e^x$$

$$y_g(x)=c_1'e^x+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+\frac{1}{2}xe^x$$

ile verilir. Burada $c_1'=c_1+\frac{3}{4}$.

(c) $y''-3y'+2y=-\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y''-3y'+2y=0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x)=e^x$ ve $y_2(x)=e^{2x}$ gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1 'den yararlanılır. Teorem uygulandığında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} \tag{3}$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) &= F(x)/a_0(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$ ve $\frac{F(x)}{a_0} = -\frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ dir. Bu değerler yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{2x} &= 0 \\ u_1'(x)e^x + 2u_2'(x)e^{2x} &= -\frac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{aligned} \tag{5}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı'na göre çözülürse

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ -\frac{e^{2x}}{e^x+1} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{e^{4x}}{e^x+1}}{e^{3x}} = \frac{e^x}{e^x+1} \tag{6}$$

$$u_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & -\frac{e^{2x}}{e^x+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{e^{3x}}{e^x+1}}{e^{3x}} = -\frac{1}{e^x+1} \tag{7}$$

bulunur. (6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \ln|e^x+1| \tag{8}$$

$$u_2(x) = -\int \frac{1}{e^x+1}dx = -\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \ln|1+e^{-x}| \tag{9}$$

bulunur. $u_1(x), u_2(x)$ ve $y_1(x), y_2(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y_o(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$y_o(x) = e^x \ln\left|e^x + 1\right| + e^{2x} \ln\left|1 + e^{-x}\right| \qquad (10)$$

olarak bulunur. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x) = y_h(x) + y_o(x)$$

$$y_g(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln\left|e^x + 1\right| + e^{2x} \ln\left|1 + e^{-x}\right|$$

ile verilir.

(d) $y'' + y = \cot x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y'' + y = 0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x) = \cos x$ ve $y_2(x) = \sin x$ gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1' den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x \qquad (3)$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminmin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) &= F(x)/a_0(x) \end{aligned} \qquad (4)$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ ve $F(x)/a_0(x) = \cot x$ dir. Bu değerler (4) denklem sisteminde yerine koyulursa

$$\begin{aligned} u_1'(x)\cos x + u_2'(x)\sin x &= 0 \\ -u_1'(x)\sin x + u_2'(x)\cos x &= \cot x \end{aligned} \qquad (5)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı ' na göre çözülürse

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cot x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\sin x \cot x = -\cos x \qquad (6)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \cot x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}}=\cos x\cot x=\frac{\cos^2 x}{\sin x} \qquad (7)$$

bulunur. (6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1=-\int\cos x dx=-\sin x \qquad (8)$$

$$u_2(x)=\int\frac{\cos^2 x}{\sin x}dx=\int(1-\sin^2 x)\csc x dx=\int\csc x dx-\int\sin x dx$$

$$u_2(x)=\ln|\csc x-\cot x|+\cos x \qquad (9)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ in değerleri (5.23) de yerine koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_{\ddot{o}}(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

$$y_{\ddot{o}}(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\ln|\csc x-\cot x| \qquad (10)$$

olarak bulunur. Verilen denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x)=y_h(x)+y_{\ddot{o}}(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\ln|\csc x-\cot x|$$

ile verilir.

(d) $y''+2y'+y=4e^{-x}\ln x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y''+2y'+y=0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x)=e^{-x}$ ve $y_2(x)=xe^{-x}$ gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1 ' den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix}e^{-x} & xe^{-x}\\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}=e^{-2x}\neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)&=0\\ u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)&=F(x)/a_0(x)\end{aligned} \qquad (4)$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x)=e^{-x}$, $y_2(x)=xe^{-x}$ ve $F(x)/a_0(x)=4e^{-x}\ln x$ dir. Bu değerler (4) denklem sisteminde yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned}u_1'(x)e^{-x}+u_2'(x)xe^{-x}&=0\\ -u_1'(x)e^{-x}+u_2'(x)e^{-x}-u_2'(x)xe^{-x}&=4e^{-x}\ln x\end{aligned} \qquad (5)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı ' na göre çözülürse

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & xe^{-x}\\ 4e^{-x}\ln x & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-x} & xe^{-x}\\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{-4x\ln xe^{-2x}}{e^{-2x}}=-4x\ln x \qquad (6)$$

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}e^{-x} & 0\\ -e^{-x} & 4e^{-x}\ln x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^{-x} & xe^{-x}\\ -e^{-x} & e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}}=\frac{4\ln xe^{-2x}}{e^{-2x}}=4\ln x \qquad (7)$$

bulunur. (6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=-4\int x\ln x dx=-4\left[\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx\right]=-2x^2\ln x+x^2 \qquad (8)$$

$$u_2(x)=4\int \ln x dx=4\left[x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx\right]=4x[\ln x-1] \qquad (9)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$) ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_o(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

$$y_o(x)=x^2e^{-x}(-2\ln x+1)+4x^2e^{-x}(\ln x-1) \qquad (10)$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x)=y_h(x)+y_o(x)$$

$$y_g(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+x^2e^{-x}(-2\ln x+1)+4x^2e^{-x}(\ln x-1)$$

$$y_g(x)=(c_1+c_2x)e^{-x}+x^2e^{-x}(2\ln x-3)$$

ile verilir.

(f) $y''+4y=4\sec^2 2x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y''+4y=0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x)=\cos 2x$ ve $y_2(x)=\sin 2x$ gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1 'den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}=2\neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x \qquad (3)$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0$$
$$u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=F(x)/a_0(x) \qquad (4)$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x)=\cos 2x$, $y_2(x)=\sin 2x$ ve $F(x)/a_0(x)=4\sec^2 2x$ dir. Bu değerler yerlerine koyulursa

$$u_1'(x)\cos 2x+u_2'(x)\sin 2x=0$$
$$-2u_1'(x)\sin 2x+2u_2'(x)\cos 2x=4\sec^2 2x \qquad (5)$$

elde edilir. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı 'na göre çözülürse

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \sin 2x\\ 4\sec^2 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}}=\frac{-4\sec^2 2x\sin 2x}{2}=-2\sec^2 2x\sin 2x \qquad (6)$$

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}\cos 2x & 0\\ -2\sin 2x & 4\sec^2 2x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ -2\sin 2x & 2\cos 2x\end{vmatrix}}=\frac{4\sec^2 2x\cos 2x}{2}=2\sec 2x \qquad (7)$$

bulunur. (6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=-2\int \sec^2 2x\sin 2x dx=-\sec 2x \qquad (8)$$
$$u_2(x)=2\int \sec 2x dx=\ln|\sec 2x+\tan 2x| \qquad (9)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_\phi(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$
$$y_\phi(x)=-\cos 2x\sec 2x+\sin 2x\ln|\sec 2x+\tan 2x|=-1+\sin 2x\ln|\sec 2x+\tan 2x|$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x)=y_h(x)+y_\phi(x)=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-1+\sin 2x\ln|\sec 2x+\tan 2x| \text{ dir.}$$

(g) $y''+4y'+5y=e^{-2x}\cos x$ (1)

Denkleminin homogen kısmı

$$y''+4y'+5y=0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x)=e^{-2x}\sin x$ ve $y_2(x)=e^{-2x}\cos x$ gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1 den yararlanılır. Teorem uygulandığında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix} e^{-2x}\sin x & e^{-2x}\cos x \\ e^{-2x}(-2\sin x+\cos x) & -e^{-2x}(2\cos x+\sin x)\end{vmatrix}=-e^{-4x}\neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü

$$y_h(x)=c_1e^{-2x}\sin x+c_2e^{-2x}\cos x \tag{3}$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} &u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)=0 \\ &u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)=F(x)/a_0(x)\end{aligned} \tag{4}$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x)=e^{-2x}\sin x$, $y_2(x)=e^{-2x}\cos x$ ve $F(x)/a_0(x)=e^{-2x}\sec x$ dir. Bu değerler (4) denklem sisteminde yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned} &u_1'(x)e^{-2x}\sin x+u_2'(x)e^{-2x}\cos x=0 \\ &u_1'(x)e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)-u_2'(x)e^{-2x}(2\cos x+\sin x)=e^{-2x}\sec x\end{aligned} \tag{5}$$

bulunur. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı 'na göre çözülürse

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x}\cos x \\ e^{-2x}\sec x & -e^{-2x}(2\cos x+\sin x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x}\sin x & e^{-2x}\cos x \\ e^{-2x}(-2\sin x+\cos x) & -e^{-2x}(2\cos x+\sin x)\end{vmatrix}}=\frac{-e^{-4x}\sec x\cos x}{-e^{-4x}}=1 \tag{6}$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} e^{-2x}\sin x & 0 \\ e^{-2x}(-2\sin x+\cos x) & e^{-2x}\sec x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x}\sin x & e^{-2x}\cos x \\ e^{-2x}(-2\sin x+\cos x) & -e^{-2x}(2\cos x+\sin x)\end{vmatrix}}=\frac{e^{-4x}\sec x\sin x}{-e^{-4x}}=-\tan x \tag{7}$$

(6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=\int dx=x \tag{8}$$

$$u_2(x)=-\int\tan x dx=\ln|\cos x| \tag{9}$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$\begin{aligned} &y_\theta(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x) \\ &y_\theta(x)=xe^{-2x}\sin x+(\ln|\cos x|)e^{-2x}\cos x\end{aligned} \tag{10}$$

bulunur. Diferansiyel denklemin genel çözümü ise

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & e^{-2x}\sin e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}=\frac{e^{-x}\sin e^{-x}}{-2}=-\frac{1}{2}e^{-x}\sin e^{-x} \qquad (7)$$

bulunur. (6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=\frac{1}{2}\int e^{-2x}e^{-x}\sin e^{-x}dx=\frac{1}{2}e^{-2x}\cos e^{-x}-e^{-x}\sin e^{-x}-\cos e^{-x} \qquad (8)$$

$$u_2(x)=-\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin e^{-x}dx=-\frac{1}{2}\cos e^{-x} \qquad (9)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_{\ddot{o}}(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

$$y_{\ddot{o}}(x)=-\sin e^{-x}-e^{x}\cos e^{-x}$$

olarak bulunur. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x)=y_h(x)+y_{\ddot{o}}(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\sin e^{-x}-e^{x}\cos e^{-x}$$

ile verilir.

(i) $y'''+y'=\csc x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y'''+y'=0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x)=1$, $y_2(x)=\cos x$, $y_3(x)=\sin x$ gibi üç lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1 den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x),y_2(x),y_3(x)]=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=1\neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x \qquad (3)$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır.Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} &u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)+u_3'y_3(x)=0\\ &u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)+u_3'y_3'(x)=0\\ &u_1'(x)y_1''(x)+u_2'(x)y_2''(x)+u_3'y_3''(x)=F(x)/a_0(x) \end{aligned} \qquad (4)$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x)=1, y_2(x)=\cos x, y_3(x)=\sin x$ ve $F(x)/a_0(x)=\csc x$ dir.

Bu değerler yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned} &u_1'(x)+u_2'(x)\cos x+u_3'\sin x=0\\ &-u_2'(x)\sin x+u_3'\cos x=0\\ &-u_2'(x)\cos x-u_3'\sin x=csx \end{aligned} \qquad (5)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_1(x) = -\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} \tag{8}$$

$$u_2(x) = \int \frac{1}{x^3}dx = -\frac{1}{2x^2} \tag{9}$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_{\ddot{o}}(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$$

$$y_{\ddot{o}}(x) = \frac{1}{x}e^{-3x} - \frac{1}{2x}e^{-3x} = \frac{1}{2x}e^{-3x}$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x) = y_h(x) + y_{\ddot{o}}(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2x + \frac{1}{2x})$$

ile verilir.

(1) $y'' - y = e^{-2x}\sin e^{-x}$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y'' - y = 0 \tag{2}$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x) = e^x$ ve $y_2(x) = e^{-x}$ gibi iki lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1'den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x) = c_1e^x + c_2xe^{-x} \tag{3}$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır. Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) &= F(x)/a_0(x) \end{aligned} \tag{4}$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$ ve $F(x)/a_0(x) = e^{-2x}\sin e^{-x}$ dir. Bu değerler (4) denklem sisteminde yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned} u_1'(x)e^x + u_2'(x)e^{-x} &= 0 \\ u_1'(x)e^x - u_2'(x)e^{-x} &= e^{-2x}\sin e^{-x} \end{aligned} \tag{5}$$

bulunur. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı'na göre çözülürse

$$u_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^{-2x}\sin e^{-x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{-3x}\sin e^{-x}}{-2} = \frac{1}{2}e^{-2x}e^{-x}\sin e^{-x} \tag{6}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 \\ e^{x} & e^{-2x}\sin e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & -e^{-x} \end{vmatrix}}=\frac{e^{-x}\sin e^{-x}}{-2}=-\frac{1}{2}e^{-x}\sin e^{-x} \qquad (7)$$

bulunur. (6) ve (7) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=\frac{1}{2}\int e^{-2x}e^{-x}\sin e^{-x}dx=\frac{1}{2}e^{-2x}\cos e^{-x}-e^{-x}\sin e^{-x}-\cos e^{-x} \qquad (8)$$

$$u_2(x)=-\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin e^{-x}dx=-\frac{1}{2}\cos e^{-x} \qquad (9)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_{\ddot{o}}(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$$

$$y_{\ddot{o}}(x)=-\sin e^{-x}-e^{x}\cos e^{-x}$$

olarak bulunur. Verilen diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x)=y_h(x)+y_{\ddot{o}}(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-x}-\sin e^{-x}-e^{x}\cos e^{-x}$$

ile verilir.

(i) $y'''+y'=\csc x$ (1)

Denklemin homogen kısmı

$$y'''+y'=0 \qquad (2)$$

dir. Homogen denklemin $y_1(x)=1$, $y_2(x)=\cos x$, $y_3(x)=\sin x$ gibi üç lineer bağımsız çözümü vardır. Bunların lineer bağımsız olduklarını göstermek için Teorem 5.1 den yararlanılır. Teorem uygulandığında

$$W[y_1(x),y_2(x),y_3(x)]=\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix}=1\neq 0$$

olduğu görülür. Homogen denklemin genel çözümü ise

$$y_h(x)=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x \qquad (3)$$

ifadesi ile verilir. (1) denkleminin özel çözümünü bulmak için Teorem 5.3 uygulanır.Bu teoremin uygulanmasından aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} &u_1'(x)y_1(x)+u_2'(x)y_2(x)+u_3'y_3(x)=0\\ &u_1'(x)y_1'(x)+u_2'(x)y_2'(x)+u_3'y_3'(x)=0\\ &u_1'(x)y_1''(x)+u_2'(x)y_2''(x)+u_3'y_3''(x)=F(x)/a_0(x) \end{aligned} \qquad (4)$$

Bu denklem sisteminde $y_1(x)=1, y_2(x)=\cos x, y_3(x)=\sin x$ ve $F(x)/a_0(x)=\csc x$ dir. Bu değerler yerlerine koyulursa

$$\begin{aligned} &u_1'(x)+u_2'(x)\cos x+u_3'\sin x=0\\ &-u_2'(x)\sin x+u_3'\cos x=0\\ &-u_2'(x)\cos x-u_3'\sin x=csx \end{aligned} \qquad (5)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Bu denklem sistemi Cramer Kuralı 'na göre çözülürse

$$u_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix}0 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ \csc x & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}=csx \qquad (6)$$

$$u_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & \sin x\\ 0 & 0 & \cos x\\ 0 & \csc x & -\sin x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}=-\cos x\csc x=-\cot x \qquad (7)$$

$$u_3'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1 & \cos x & 0\\ 0 & -\sin x & 0\\ 0 & -\cos x & \csc x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x\\ 0 & -\sin x & \cos x\\ 0 & -\cos x & -\sin x\end{vmatrix}}=-\sin xcsx=-1 \qquad (8)$$

bulunur. (6) , (7) ve (8) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$u_1(x)=\int \csc x dx=-\ln|\csc x+\cot x| \qquad (9)$$

$$u_2(x)=-\int \cot x dx=-\ln|\sin x| \qquad (10)$$

$$u_3(x)=-\int dx=-x \qquad (11)$$

bulunur. $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$ ve $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ in değerleri (5.23) de koyulursa verilen diferansiyel denklemin özel çözümü

$$y_\theta(x)=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)+u_3(x)y_3(x)$$

$$y_\theta(x)=-\ln|\csc x+\cot x|-\cos x\ln|\sin x|-x\sin x$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklemin genel çözümü ise

$$y_g(x)=y_h(x)+y_\theta(x)-\ln|\csc x+\cot x|-\cos x\ln|\sin x|-x\sin x$$

ile verilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5.5 *Cauchy – Euler Denklemi*

Yüksek mertebeden değişken katsayılı herhangi bir homogen lineer diferansiyel denklemin çözümünü bir cebirsel fonksiyon cinsinden veren belirli bir yöntem mevcut değildir. Bazı istisnalar dışında bu çeşit denklemlerin yalnız kuvvet serileri cinsinden çözümlerini bulmak olasıdır. Aşağıda tanımlıyacağımız **Cauchy – Euler** Denklemi denklemi bir istisna olarak bir değişken dönüşümü ile sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denkleme dönüştürülerek çözülebilir.*

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x) \qquad (5.24)$$

Burada $a_0 \neq 0$ olmak üzere $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, sabit katsayılardır.Bu denklem herhangi bir değişken katsayılı denklem olmayıp , denklemin bütün terimleri

$$cx^k \frac{d^k y}{dx^k} \quad , \quad (k = 0,1,2,\ldots,n)$$

şeklinde terimlerden oluşmaktadır. Burada c herhangi bir sabit sayıdır ve her terim için farklı değer alabilir. (5.24) denklemiyle verilen Cauchy – Euler Denklemi denklemi aşağıda gösterileceği şekilde $x = e^t$ değişken dönüşümü sonucu sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denkleme dönüştürülür.

$x \in (0,\infty)$ için $x = e^t$, $t = \ln x$ (5.25)

değişken dönüşümünü düşünelim .

$y(e^t) = Y(t)$ yazılırsa

$$xDy(x) = x\frac{dy(x)}{dx} = e^t \frac{dY(t)}{dt}\frac{dt}{dx}$$

burada $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$ olduğundan

$xDy(x) = DY(t)$ bulunur. Benzer işlemle

$$x^2 D^2 y(x) = \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} - \frac{dY(t)}{dt} = (D^2 - D)Y(t) = D(D-1)Y(t)$$

elde edilir. Tümevarım yöntemiyle her m pozitif sayısı için

$$x^m D^m y(x) = D(D-1)(D-2)\cdots(D-m+1)Y(t) \qquad (5.26)$$

olduğu gösterilebilir. (5.25) ve (5.26) eşitliklerini kullanarak (5.24) denklemi , aşağıdaki biçimde sabit katsayılı lineer diferansiyel denkleme indirgenir .

$$\left[a_0 D(D-1)\cdots(D-m+1) + a_1 D(D-1)\cdots(D-m+2) + \cdots a_{n-1} D + a_n\right] Y = F(e^t)$$

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$

(b) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$

(c) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$

---

* Kaynak 1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(d) $x^2y''+2xy'-6y=10x^2$; $y(1)=1, y'(1)=-6$

(e) $x^2y''-2y=4x-8$; $y(1)=1, y'(1)=-1$

(f) $x^2y''-4xy'+4y=4x^2-6x^3$; $y(2)=4, y'(2)=-1$

(g) $x^2y''-2xy'+2y=6\ln x$

(h) $x^2y''+xy'+y=4\sin\ln x$

(i) $x^3y'''+xy'-y=3x^4$

(j) $x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\ln x$

Çözümler :

(a) $x^2y''-3xy'+4y=0$ (1)

Denklemde $x=e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra, (1) denklemi

$$[D(D-1)-3D+4]Y=0$$

veya

$$[D^2-4D+4]Y=0$$

denklemine dönüşür. Homogen olan bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2-4r+4=0$$

olup, kökleri $r_1=r_2=2$ dir. Buradan (1) denkleminin genel çözümü

$$Y_g=c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$$

veya

$$y_g=(c_1+c_2\ln x)x^2 \qquad (2)$$

olarak elde edilir. Buradaki c_1 ve c_2 sabitleri verilen $y(1)=2$ ve $y'(1)=1$ başlangıç koşullarından $c_1=2$, $c_2=-3$ olarak bulunur. Bu değerler (2) denkleminde yerine koyulursa

$y=(2-3\ln x)x^2$ bulunur.

(b) $x^2y''+xy'+4y=0$ (1)

Denklemde $x=e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra, (1) denklemi

$$[D(D-1)+D+4]Y=0$$

veya

$$[D^2+4]Y=0$$

denklemine dönüşür. Homogen olan bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2+4=0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olup, kökleri $r_1 = 2i$ ve $r_2 = -2i$ dir. Buradan (1) denkleminin genel çözümü

$$Y_g = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

veya

$$y_g = c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x) \quad (2)$$

olarak elde edilir. Buradaki c_1 ve c_2 sabitleri verilen $y(1) = 1$ ve $y'(1) = 4$ başlangıç koşullarından $c_1 = 1$ ve $c_1 = 2$ olarak bulunur. Bu değerler (2) denkleminde yerine koyulursa

$$y = \cos(2\ln x) + 2\sin(2\ln x)$$ bulunur.

(c) $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$ (1)

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra, (1) denklemi

$$\left[D(D-1)(D-2) + 2D(D-1) - D + 1\right]Y = 0$$

veya

$$\left[D^3 - D^2 - D + 1\right]Y = 0$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^3 - r^2 - r + 1 = (r-1)^2(r+1) = 0$$

olup, kökleri $r_1 = r_2 = 1$ ve $r_3 = -1$ dir. Buradan (1) denkleminin genel çözümü

$$Y_g = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t}$$

veya

$$y_g = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^{-1}$$ bulunur.

(d) $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 10x^2$ (1)

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra, (1) denklemi

$$\left[D^2 + D - 6\right]Y = 10e^{2t} \quad (2)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin homogen kısmı

$$\left[D^2 + D - 6\right]Y = 0$$

dır. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + r - 6 = 0$$

olup, kökleri $r_1 = 2$ ve $r_2 = -3$ dir. Buradan (1) denkleminin homogen kısmının çözümü

$$Y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \quad (3)$$

olarak bulunur. Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak (1) denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan Y_o aşağıdaki şekilde bulunur.

$$Y_o = Ate^{2t} \quad (4)$$

Burada A katsayısı bulunması gerekli olan belirsiz katsayıdır. Bu katsayıyı bulmak için Y_o nün türevleri alınırsa

$$Y_o' = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$$

$$Y_o'' = 4Ae^{2t} + 4Ate^{2t}$$

bulunur. Y_o, Y_o' ve Y_o'' (2) denkleminde yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$5Ae^{2t} = 10e^{2t}$$

bulunur. Bu eşitlikten $A = 2$ elde edilir. A nın değeri (4) denkleminde yerine koyulursa

$$Y_g = 2te^{2t} \qquad (5)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_g = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + 2te^{2t}$$

veya

$$y_g = c_1x^2 + c_2x^{-3} + 2x^2 \ln x \qquad (6)$$

olarak bulunur. Buradaki c_1 ve c_2 sabitleri verilen $y(1) = 1$, $y'(1) = -6$ başlangıç koşullarından $c_1 = -\frac{11}{10}$ ve $c_2 = \frac{21}{10}$ olarak bulunur. Bu değerler (6) denkleminde yerine koyulursa

$$y = -\frac{11}{10}x^2 + \frac{21}{10}x^{-3} + \frac{5}{2}x^2 \ln x \quad \text{bulunur.}$$

(e) $x^2y'' - 2y = 4x - 8$ (1)

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra , (1) denklemi

$$\left[D^2 - D - 2\right]Y = 4e^t - 8 \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin homogen kısmı

$$\left[D^2 - D - 2\right]Y = 0$$

dır. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - r - 2 = 0$$

olup , kökleri $r_1 = 2$ ve $r_2 = -1$ dir. Buradan (1) denkleminin homogen kısmının çözümü

$$Y_h = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \qquad (3)$$

olarak bulunur. Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak (1) denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan Y_g aşağıdaki şekilde bulunur .

$$Y_g = Ae^t + B \qquad (4)$$

olarak belirlenir. Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için Y_g nün türevleri alınırsa

$$Y_g' = Ae^t \quad \text{ve} \quad Y_g'' = Ae^t$$

bulunur. Y_g , Y_g' ve Y_g'' (2) denkleminde yerine koyulursa

$$-2Ae^t - 2B = 4e^t - 8$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayılarının birbirine eşitlenmesinden $A = -2$ ve $B = 4$ elde edilir. A ve B nin değerleri (4) denkleminde yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y_s = -2e^t + 4 \qquad (5)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 2e^t + 4$$

veya

$$y_g = c_1 x^2 + c_2 x^{-1} - 2x + 4 \qquad (6)$$

olarak bulunur. Buradaki c_1 ve c_2 sabitleri verilen $y(1)=4$, $y'(1)=-1$ başlangıç koşullarından $c_1 = \frac{7}{3}$ ve $c_2 = \frac{5}{3}$ olarak bulunur. Bu değerler (6) denkleminde yerine koyulursa

$$y = \frac{7}{3}x^2 + \frac{5}{3}x^{-1} - 4x + 4 \quad \text{bulunur.}$$

(f) $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 4x^2 - 6x^3 \qquad (1)$

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra , (1) denklemi

$$\left[D(D-1) - 4D + 4\right]Y = 4e^{2t} - 6e^{3t}$$

veya

$$\left[D^2 - 5D + 4\right]Y = 4e^{2t} - 6e^{3t} \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin homogen kısmı

$$\left[D^2 - 5D + 4\right]Y = 0$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

olup , kökleri $r_1 = 4$ ve $r_2 = 1$ dir. Buradan (1) denkleminin homogen kısmının çözümü

$$Y_h = c_1 e^{4t} + c_2 e^t \qquad (3)$$

olarak bulunur.Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak (1) denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan Y_s aşağıdaki şekilde bulunur

$$Y_s = Ae^{2t} + Be^{3t} \qquad (4)$$

Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için Y_s nün türevleri alınırsa

$$Y_s' = 2Ae^{2t} + 3Be^{3t}$$

$$Y_s'' = 4Ae^{2t} + 9Be^{3t}$$

bulunur. Y_s , Y_s' ve Y_s'' (2) denkleminde yerine koyulursa

$$-2Ae^{2t} - 2Be^{3t} = 4e^{2t} - 6e^{3t}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayılarının birbirine eşitlenmesinden $A = -2$ ve $B = 3$ elde edilir. A ve B nin değerleri (4) denkleminde yerine koyulursa

$$Y_s = -2e^{2t} + 3e^{3t} \qquad (5)$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_s = c_1 e^{4t} + c_2 e^t - 2e^{2t} + 3e^{3t}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

veya

$$y_g = c_1x^4 + c_2x - 2x^2 + 3x^3 \qquad (6)$$

olarak bulunur. Buradaki c_1 ve c_2 sabitleri verilen $y(2)=4$ ve $y'(2)=-1$ başlangıç koşullarından $c_1 = -\frac{23}{24}$ ve $c_2 = \frac{5}{3}$ olarak bulunur. Bu değerler (6) denkleminde yerine koyulursa

$$y = -\frac{23}{24}x^4 + \frac{5}{3}x - 2x^2 + 3x^3 \quad \text{bulunur.}$$

(g) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 6\ln x \qquad (1)$

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra, (1) denklemi

$$[D(D-1) - 2D + 2]Y = 6t$$

veya

$$(D^2 - 3D + 2)Y = 6t \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin homogen kısmı

$$(D^2 - 3D + 2)Y = 0$$

dır. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

olup, kökleri $r_1 = 2$ ve $r_2 = 1$ dir. Buradan (1) denkleminin homogen kısmının çözümü

$$Y_h = c_1e^{2t} + c_2e^t \qquad (3)$$

olarak bulunur. Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak (1) denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan $Y_ö$ aşağıdaki şekilde bulunur.

$$Y_ö = At + B \qquad (4)$$

Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için $Y_ö$ nün türevleri alınırsa

$$Y_ö' = A \quad \text{ve} \quad Y_ö'' = 0$$

bulunur. $Y_ö$, $Y_ö'$ ve $Y_ö''$ (2) denkleminde yerine koyulursa

$$2At - 3A + 2B = 6t$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayılarının birbirine eşitlenmesinden $A = 3$ ve $B = 9/2$ elde edilir. A ve B nin değerleri (4) denkleminde yerine koyulursa

$$Y_ö = 3t + \frac{9}{2}$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_ö = c_1e^{2t} + c_2e^t + 3t + \frac{9}{2}$$

veya

$$y_g = y_h + y_ö = c_1x^2 + c_2x + 3\ln x + \frac{9}{2} \quad \text{bulunur.}$$

(h) $x^2y'' + xy' + y = 4\sin(\ln x) \qquad (1)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra, (1) denklemi

$$[D(D-1)+D+1]Y = 4\sin t$$

veya

$$(D^2+1)Y = 4\sin t \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin homogen kısmı

$$(D^2+1)Y = 0$$

dır. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2+1=0$$

olup, kökleri $r_1 = i$ ve $r_2 = -i$ dir. Buradan (1) denkleminin homogen kısmının çözümü

$$Y_h = c_1\cos t + c_2\sin t \qquad (3)$$

olarak bulunur. Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak (1) denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan Y_o aşağıdaki şekilde bulunur.

$$Y_o = At\cos t + Bt\sin t \qquad (4)$$

Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için Y_o nün türevleri alınırsa

$$Y_o' = A\cos t - At\sin t + B\sin t + Bt\cos t$$

$$Y_o'' = -2A\sin t - At\cos t + 2B\cos t - Bt\sin t$$

bulunur. Y_o ve Y_o'' (2) denkleminde yerine koyulursa

$$-2A\sin t + 2B\cos t = 4\sin t$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayılarının birbirine eşitlenmesinden $A=-2$ ve $B=0$ elde edilir. A ve B nin değerleri (4) denkleminde yerine koyulursa

$$Y_o = -2t\cos t$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_o = c_1\cos t + c_2\sin t - 2t\cos t$$

veya

$$y_g = y_h + y_o = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x) - 2\ln x\cos(\ln x)$$

bulunur.

(i) $x^3y''' + xy' - y = 3x^4$ (1)

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra, (1) denklemi

$$[D(D-1)(D-2)+D-1]Y = 3e^{4t}$$

veya

$$(D^3-3D^2+3D-1)Y = 3e^{4t} \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin homogen kısmı

$$(D^3-3D^2+3D-1)Y = 0$$

dır. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^3-r^2+3r-1=(r-1)^3=0$$

olup, kökleri $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ dir. Buradan (1) denkleminin homogen kısmının çözümü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y_h = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t \qquad (3)$$

olarak bulunur. Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak (1) denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan Y_δ aşağıdaki şekilde bulunur.

$$Y_\delta = Ae^{4t} \qquad (4)$$

Burada A katsayısı bulunması gerekli olan belirsiz katsayıdır. Bu katsayıyı bulmak için Y_δ nün türevleri alınırsa

$$Y_\delta' = 4Ae^{4t} \quad , \quad Y_\delta'' = 16Ae^{4t} \quad \text{ve} \quad Y_\delta''' = 64Ae^{4t}$$

bulunur. Y_δ , Y_δ' , Y_δ'' ve Y_δ''' (2) denkleminde yerine koyulursa

$$27Ae^{4t} = 3e^{4t}$$

elde edilir. Bu eşitlikten $A = 1/9$ elde edilir. A nın değeri (4) denkleminde yerine koyulursa

$$Y_\delta = \frac{1}{9}e^{4t}$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_\delta = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + \frac{1}{9}e^{4t}$$

veya

$$y_g = y_h + y_\delta = c_1x + c_2x\ln x + c_3x\ln^2 x + \frac{1}{9}x^4$$

bulunur.

(i) $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln x \qquad (1)$

Denklemde $x = e^t$ değişken dönüşümü yapıldıktan sonra , (1) denklemi

$$\left[D(D-1)(D-2) - 4D(D-1) + 8D - 8\right]Y = 4t$$

veya

$$(D^3 - 7D^2 + 14D - 8)Y = 4t \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemin homogen kısmı

$$(D^3 - 7D^2 + 14D - 8)Y = 0$$

dır. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0$$

olup , kökleri $r_1 = 4$, $r_2 = 2$ ve $r_3 = 1$ dir. Buradan (1) denkleminin homogen kısmının çözümü ,

$$Y_h = c_1e^{4t} + c_2e^{2t} + c_3e^t \qquad (3)$$

olarak bulunur. Belirsiz katsayılar yöntemi kullanılarak (1) denkleminin homogen olmayan kısmının bir özel çözümü olan Y_δ aşağıdaki şekilde bulunur

$$Y_\delta = At + B \qquad (4)$$

Burada A ve B katsayıları bulunması gerekli olan belirsiz katsayılardır. Bu katsayıları bulmak için Y_δ nün türevleri alınırsa

$$Y_\delta' = A \quad , \quad Y_\delta'' = 0 \quad \text{ve} \quad Y_\delta''' = 0$$

bulunur. Y_δ , Y_δ' , Y_δ'' ve Y_δ''' (2) denkleminde yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$14A - 8At - 8B = 4t$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayılarının birbirine eşitlenmesinden $A = -1/2$ ve $B = -7/8$ elde edilir. A ve B nin değerleri (4) denkleminde yerine koyulursa

$$Y_g = -\frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$$

bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Y_g = Y_h + Y_o = c_1 e^{4t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{t} - \frac{1}{2}t - \frac{7}{8}$$

veya

$$y_g = y_h + y_o = c_1 x^4 + c_2 x^2 + c_3 x - \frac{1}{2}(\ln x) - \frac{7}{8}$$

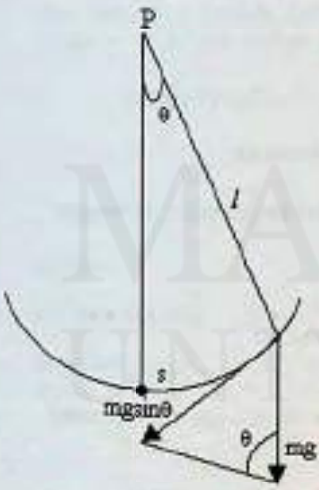
ile verilir.

5.6 İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

(a) 15 cm lik sarkaç düşey konumundan 1/5 radyanlık açı yapacak şekilde 1/2 rad / s lik hızla düşeye doğru bırakılırsa, bu hareketin denklemini bulunuz. ($g = 9{,}6\ \mathrm{ms}^{-2}$)

Çözüm :

Herhangi bir t anında cisim denge konumundan x uzaklığında bulunmaktadır. Sarkaç denge konumuyla θ açısı yapmaktadır. Sarkacın yatay doğrultudaki hareketinin diferansiyel denklemi



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\cos\theta\sin\theta \qquad (5.27)$$

burada $x = l\sin\theta$ dır. Küçük açılar için $\cos\theta \cong 1$ ve $\sin\theta \cong 0$ olduğu göz önüne alınırsa (5.27) denklemi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \qquad (5.28)$$

(5.28) denklemi ikinci mertebeden homogen bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$r^2 + \frac{g}{l} = 0 \qquad (5.29)$$

olup, kökleri $r_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathrm{i}$ ve $r_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}}\,\mathrm{i}$ olarak bulunur. Buradan denklemin genel çözümü

$$\theta = c_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + c_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t \qquad (5.30)$$

ile verilir. g ve l nin sayısal değerleri (5.30) da yerine koyulursa

$$\theta = c_1\cos 8\,t + c_2\sin 8\,t \qquad (5.31)$$

bulunur. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.30) denkleminin türevi alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\dot{\theta} = -8c_1 \sin 8t + 8c_2 \cos t \tag{5.32}$$

ifadesi bulunur. Başlangıç koşulları $\theta(0) = 1/5$ rad ve $\dot{\theta}(0) = 1/2$ rad/s (5.31) ve (5.32) de kullanılırsa $c_1 = 1/5$ ve $c_2 = -1/16$ bulunur. Bu değerler (5.31) de yerine koyulursa

$$\theta = \frac{1}{5}\cos 8t - \frac{1}{16}\sin 8t \tag{5.33}$$

istenilen hareket denklemi bulunur.

(b) Kütlesi m olan bir mermi v_0(ft/s) hızıyla yeryüzünden yukarı doğru ateşlenmektedir Hava sürtünmesi hız ile orantılıdır.

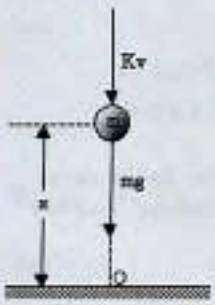
i) Eğer merminin ağırlığı W lb ise hareketin diferansiyel denklemini yazınız.

ii) Merminin ulaşacağı maksimum yükseklik ve yere düştüğü ana kadar geçen zamanı ifade eden iki bağıntıyı bulunuz.

iii) Havada kalış süresi ve maksimum yükseklik değerlerini hesaplayınız.

$v_0 = 100$ ft/s , $g = 32$ ft/s^2 , $k = 10^{-3}$ W (sürtünme katsayısı)

Çözüm :



O noktasından yukarıya doğru yönü pozitif alalım. x ise herhangi bir t anında merminin ulaştığı yerden O noktasına olan uzaklık olsun. Bu kütleye iki kuvvet etki edecektir. Bunlardan birisi büyüklüğü mg olan yer çekimi kuvveti ve diğeri büyülüğü Kv olan sürtünme kuvvetidir. Her ikisinin yönü aşağı doğrudur.

i)

Kütle x ivme = net kuvvet , bağıntısından

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - K\frac{dx}{dt}$$

veya $$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = -g \tag{5.34}$$

hareketin diferansiyel denklemi yazılır. Burada $K = mk$ olarak tanımlanmıştır.

ii) (5.34) ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denklemdir. Homogen kısmı

$$\ddot{x} + k\dot{x} = 0$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$r^2 + kr = 0$ olup, kökleri $r_1 = 0$, $r_2 = -k$ dır. Denklemin çözümü ,

$$x_h = c_1 + c_2 e^{-kt} \tag{5.35}$$

ifadesi ile verilir. Homogen olmayan kısım $F(t) = -g$ olduğundan bu denklemin özel çözümü için (5.19) kullanılarak

$$x_\delta = -\frac{gt}{k} \tag{5.36}$$

bulunur. Böylece (5.36) denkleminin genel çözümü

$$x = c_1 + c_2 e^{-kt} - \frac{g}{k}t \tag{5.37}$$

ile verilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.37) denkleminin türevi alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$v = \frac{dx}{dt} = -kc_1 e^{-kt} - \frac{g}{k} \qquad (5.38)$$

bulunur. (5.37) ve (5.38) denklemlerine başlangıç koşulları

$x(0) = 0$ ve $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ uygulanarak $c_1 = -c_2 = \frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}$ bulunur.

c_1 ve c_2 nin değerleri (5.37) de yerine koyulursa

$$x = \frac{1}{k^2}(g + kv_0)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t \qquad (5.39)$$

bulunur. Mermi maksimum yüksekliğe $v = 0$ anında ulaşır. (5.38) denkleminden

$$e^{-kt} = -\frac{g}{k^2 c_2} = \frac{g}{k^2\left[\frac{v_0}{k} + \frac{g}{k^2}\right]} = \frac{g}{g + kv_0}$$

elde edilir. Her iki tarafın logaritması alınırsa

$$t = \frac{1}{k}\ln\left[1 + \frac{kv_0}{g}\right] \qquad (5.40)$$

bulunur. Merminin havada kalış süresi $2t$ olduğundan (5.40) ifadesinin iki katı

$$2t = \frac{2}{k}\ln\left[1 + \frac{kv_0}{g}\right] \qquad (5.41)$$

bize merminin havada kalış süresini verir. Merminin ulaşacağı maksimum yüksekliğin ifadesi (5.40) ın (5.39) da yerine koyulmasıyla

$$x = \frac{1}{k^2}(g + kv_0)(1 - \frac{g}{g + kv_0}) - \frac{g}{k}\frac{1}{k}\ln\left[1 + \frac{kv_0}{g}\right]$$

$$x = \frac{1}{k}\left[v_0 - \frac{g}{k}\ln(1 + \frac{kv_0}{g})\right] \qquad (5.42)$$

bulunur.

iii) $v_0 = 100\,\text{ft/s}$, $g = 32\,\text{ft/s}^2$, $K = 10^{-3}\,\text{W}$ ve $k = \frac{K}{m} = \frac{Kg}{W} = 32\text{x}10^{-3}$

değerleri sırasıyla (5.41) ve (5.42) ifadelerinde yerine koyulur. Merminin havada kalış süresi

$$2t = \frac{2}{32\text{x}10^{-3}}\ln(1 + \frac{(32\text{x}10^{-3})(10^2)}{32}) = 5{,}96\,\text{s}$$

elde edilir. Merminin ulaşacağı maksimum yükseklik ise

$$x = \frac{1}{32\text{x}10^{-3}}\left[100 - \frac{322}{32\text{x}10^{-3}}\ln(1 + \frac{(32\text{x}10^{-3})(10^2)}{32})\right] = 14{,}6\,\text{ft}$$

olarak bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) x ekseni üzerinde serbest olarak hareket eden m kütleli bir cisim başlangıç noktasına olan uzaklıkla orantılı olarak başlangıç noktasına doğru çekilmektedir. $t=0$ anında ve $x=x_0$ için başlangıç hızının

i) $v=0$

ii) $v=v_0$ olması durumunda cismin hareketini inceleyiniz.

Çözüm :

i) Herhangi bir t anında cismin başlangıç noktasından olan uzaklığı x olsun.

kütle x ivme = net kuvvet, bağıntısı uygulanırsa

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \tag{5.43}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0 \tag{5.44}$$

hareketin diferansiyel denklemi yazılır. Burada sürtünme katsayısı $K=mk^2$ olarak tanımlanmıştır. (5.44) denklemi ikinci mertebeden homogen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$r^2+k^2=0$ olup, kökleri $r_1=-ki$, $r_2=ki$ olduğundan denklemin çözümü

$$x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt \tag{5.45}$$

ifadesi ile verilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.45) denkleminin türevi alınırsa

$$\dot{x} = v = kc_1 \cos kt - kc_2 \sin kt \tag{5.46}$$

bulunur. (5.44) ve (5.45) denklemlerinde başlangıç koşulları, $x(0)=x_0$ ve $v(0)=0$ kullanılırsa $c_1=x_0$ ve $c_2=0$ bulunur. Bu değerler (5.45) de yerine koyularak

$$x = x_0 \cos kt \tag{5.47}$$

elde edilir. (5.47) denklemi, genliği x_0 ve periyodu $2\pi/k$ olan basit harmonik hareketi belirler.

ii) (5.45) ve (5.46) denklemlerinde başlangıç koşulları $x(0)=x_0$ ve $v(0)=v_0$ kullanılacak olursa $c_1=v_0/k$ ve $c_2=v_0$ bulunur. Bu değerler (5.45) de yerine koyularak

$$x = \frac{v_0}{k}\sin kt + x_0 \cos kt \tag{5.48}$$

elde edilir. (5.48) denklemi de basit harmonik hareketi gösterir. Bu hareketin genliği

$\sqrt{{v_0}^2 + k^2{x_0}^2}\,/k$ ve periyodu $2\pi/k$ dır.

(d) Bir zincir pürüzsüz bir mandal üzerinden, bir yanda 8 metre diğer yanda 12 metre sarkacak şekilde asılı durumda bulunmaktadır. Zincirin mandaldan tamamen kayıp kurtulması için gereken zamanı

i) sürtünme ihmal edilerek

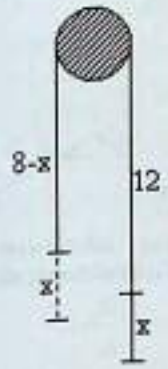
ii) sürtünme kuvveti 1 metre uzunluğundaki zincirin ağırlığına eşit olması durumunda hesaplayınız.

Çözüm :

i) Zincirin toplam kütlesi m ve t anında zincirin mandaldan kayma miktarı x olsun. t anında mandalın bir yanındaki zincirin uzunluğu $(8-x)$ metre diğer yanındaki ise $(12+x)$ metredir. Bir yandaki uzunluk farkı olan $(4+2x)$ metrelik uzunluk $(4+2x)\dfrac{mg}{20}$ newton'luk dengelenmemiş kuvvetin oluşmasına neden olacaktır

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu durumda hareketin denklemi



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = (4+2x)\frac{mg}{20}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g}{10}x = \frac{g}{5} \qquad (5.49)$$

ile ifade edilir. (5.49) ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denklemdir. Homogen kısmı

$$\ddot{x} - \frac{g}{10}x = 0$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$r^2 - \frac{g}{10} = 0$ olup, kökleri $r_1 = \sqrt{g/10}$ ve $r_2 = -\sqrt{g/10}$ dur. Denklemin çözümü

$$x_h = c_1 e^{\sqrt{g/10}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{g/10}\,t} \qquad (5.50)$$

ifadesi ile verilir. Homogen olmayan kısım $F(t) = g/5$ olduğundan bu denklemin özel çözümü için (5.17) kullanılarak

$$x_g = -2$$

bulunur. (5.49) un genel çözümü ise

$$x = c_1 e^{\sqrt{g/10}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{g/10}\,t} - 2 \qquad (5.51)$$

ile verilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.50) denkleminin türevi alınırsa

$$v = \dot{x} = \sqrt{\frac{g}{10}}\,\left(c_1 e^{\sqrt{g/10}\,t} - c_2 e^{-\sqrt{g/10}\,t}\right) \qquad (5.52)$$

bulunur. (5.51) ve (5.52) denklemlerine başlangıç koşulları, $x(0) = 0$, $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ uygulanarak $c_1 = c_2 = 1$ elde edilir. c_1 ve c_2 nin değerleri (5.51) de yerine koyulursa

$$x = e^{\sqrt{g/10}\,t} + e^{-\sqrt{g/10}\,t} - 2$$

$$x = 2\cosh\sqrt{\frac{g}{10}}\,t - 2 \qquad (5.53)$$

bulunur. (5.53) den istenilen t zamanı

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\cosh^{-1}\frac{1}{2}(x+2) \qquad (5.54)$$

veya $\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ kullanılarak

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln\frac{x+2+\sqrt{x^2+4x}}{2} \qquad (5.55)$$

elde edilir. $x = 8\text{m}$ alırsak, gereken zaman

$$t = \sqrt{\frac{10}{g}}\ln(5+\sqrt{6})\,\text{s} = 2.31\,\text{s} \qquad (5.56)$$

olarak bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ii) Sürtünme kuvveti göz önüne alındığı zaman hareketin denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=(4+2x)\frac{mg}{20}-\frac{mg}{20}$$

veya

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{g}{20}(2x+3)$$

$$\ddot{x}-\frac{g}{10}x=\frac{3}{20}g \qquad (5.57)$$

ile ifade edilir. (5.57) ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denklemdir. (5.49) diferansiyel denkleminin çözümüne benzer biçimde (5.57) denklemi de çözülürse bu denklemin genel çözümü

$$x=c_1e^{\sqrt{g/10}\,t}+c_2e^{-\sqrt{g/10}\,t}-\frac{3}{2} \qquad (5.58)$$

bulunur. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.58) denkleminin türevi alınırsa

$$v=\dot{x}=\sqrt{\frac{g}{10}}\,(c_1e^{\sqrt{g/10}\,t}-c_2e^{-\sqrt{g/10}\,t}) \qquad (5.59)$$

bulunur. (5.58) ve (5.59) denklemlerine başlangıç koşulları $x(0)=0$ ve $v(0)=\dot{x}(0)=v_0$ uygulanarak $c_1=c_2=3/4$ bulunur. c_1 ve c_2 nin değerleri (5.59) da yerine koyulursa

$$x=\frac{3}{4}(e^{\sqrt{g/10}\,t}+e^{-\sqrt{g/10}\,t})-\frac{3}{2}$$

veya

$$x=\frac{3}{2}\cosh\sqrt{\frac{g}{10}}\,t-\frac{3}{2} \qquad (5.60)$$

bulunur. (5.60) dan istenilen t zamanı

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\cosh^{-1}(\frac{2}{3}x+1) \qquad (5.61)$$

veya $\cosh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ kullanılarak

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\frac{2}{3}(x+\frac{3}{2}\sqrt{x^2+3x}) \qquad (5.62)$$

elde edilir. $x=8\,\mathrm{m}$ alırsak, gereken zaman

$$t=\sqrt{\frac{10}{g}}\ln\frac{19+4\sqrt{22}}{3}=2{,}55\,\mathrm{s} \qquad (5.63)$$

olarak bulunur. İki farklı durumda bulduğumuz zaman sürelerinin değerlerindeki farklılık sürtünme kuvvetinin varlığından ileri gelmektedir.

(e) Kütlesi ihmal edilebilen düzgün bir çubuk O orta noktası etrafında sabit ω açısal hızıyla dönerken, bir bilye bu çubuğun bir ucundan diğer ucuna sürtünmesiz olarak kaymaktadır. Bilyenin hareketini,

i) eğer bilye başlangıçta O noktasında hareketsiz ise,

ii) bilye başlangıçta O noktasından $g/2\omega$ başlangıç hızıyla hareket ediyorsa

belirleyiniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



i) t anında bilye O noktasından x uzaklığında olsun. Bilye hareketi esnasında iki kuvvetin etkisi altındadır. Bunlardan birisi gravitasyon kuvveti, diğeri ise çubuk boyunca O noktasından uzaklaşacak doğrultuda olan merkezkaç kuvveti $m\omega^2 x$ dir. Çubuk ωt açısıyla döndüğüne göre çubuk boyunca gravitasyon kuvvetinin bileşeni $mg\sin\omega t$ büyüklüğüne sahip olup doğrultusu O noktasına doğrudur.

Böylece bilyenin hareketinin denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 x - mg\sin\omega t$$

veya

$$\ddot{x} - \omega^2 x = -g\sin\omega t \qquad (5.64)$$

ile ifade edilir (5.64) ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denklemdir. Homogen kısmı

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$r^2 - \omega^2 = 0$ olup, kökleri $r_1 = \omega$ ve $r_2 = -\omega$ dır. Denklemin çözümü

$$x_h = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} \qquad (5.65)$$

ile verilir. Homogen olmayan kısım $F(t) = -g\sin\omega t$ olduğundan bu denklemin özel çözümü için Belirsiz Katsayılar Yöntemi kullanılarak

$$x_g = \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (5.66)$$

bulunur. (5.64) ün genel çözümü

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (5.67)$$

ifadesi ile verilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.67) denkleminin türevi alınırsa

$$\dot{x} = v = \omega c_1 e^{\omega t} - \omega c_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}\cos\omega t \qquad (5.68)$$

bulunur. (5.67) ve (5.68) denklemlerine başlangıç koşulları, $x(0) = 0$ ve $v(0) = 0$ uygulanarak, $c_1 = -c_2 = -\frac{g}{4\omega^2}$ bulunur. c_1 ve c_2 nin değerleri (5.67) da yerine koyulursa

$$x = \frac{g}{4\omega^2}(e^{-\omega t} - e^{\omega t}) + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

veya

$$x = -\frac{g}{4\omega^2}\sinh\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (5.69)$$

elde edilir.

ii) (5.67) ve (5.68) denklemlerine başlangıç koşulları, $x(0) = 0$ ve $v(0) = g/2\omega$ uygulanarak $c_1 = c_2 = 0$ bulunur. c_1 ve c_2 nin değerleri ((5.67) de yerine koyulursa

$$x = \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (5.70)$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(f) Bir ucu sabit olan bir yayın serbest olan diğer ucuna 7 kg lık bir cisim asılmaktadır. Cisim hareketsiz duruma geldikten sonra 0,05 m aşağı doğru çekilip bırakılmaktadır.

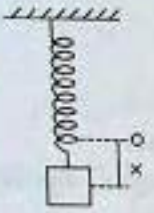
i) Hava sürtünmesi ihmal edilerek

ii) Hava sürtünmesinin $v/4$ 'e eşit olması durumunda

iii) Hava sürtünmesinin $980v$' ye eşit olması durumunda cismin hareketini inceleyiniz. (Yay sabiti $k = 700\ N\ m^{-1}$ ve v hızının birimi m/s olarak alınacaktır.)

Çözüm :

i) t anındaki net kuvvet , yay kuvveti $-kx$ eşittir. Bu kuvvet cismin x kadar yer değiştirmesine neden olacaktır. Böylece cismin hareketinin denklemi



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (5.71)$$

ile ifade edilir. Verilen değerler (5.71) de yerine koyulursa

$$\ddot{x} + 100x = 0 \qquad (5.72)$$

bulunur. (5.72) ikinci mertebeden homogen diferansiyel denklemdir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$r^2 + 100 = 0$ olup , kökleri $r_1 = -10i$ ve $r_2 = 10i$ dir. Denklemin çözümü

$$x_h = c_1 \sin 10t + c_2 \cos 10t \qquad (5.73)$$

ile verilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.73) denkleminin türevi alınırsa

$$v = \dot{x} = 10c_1 \cos t - 10c_2 \sin t \qquad (5.74)$$

bulunur. (5.73) ve (5.74) denklemlerine başlangıç koşulları $x(0) = 0{,}05$ ve $v(0) = 0$ uygulanarak $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0{,}05$ bulunur. c_1 ve c_2 nin değerleri (5.73) de yerine koyulursa

$$x_h = 0{,}05 \cos 10t \qquad (5.75)$$

bulunur. (5.75) denklemi cismin hareketinin basit harmonik hareket olduğunu gösterir. Hareketin genliği 0,05 , periyodu $T = \frac{2\pi}{10} = 0{,}628\ s$ ve frekansı $\frac{10}{2\pi} = 1{,}59\ s^{-1}$ dir.

ii) Hava sürtünmesinin $v/4$ 'e eşit olması durumunda , hareket denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{4m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (5.76)$$

biçiminde ifade edilir. (5.76) da verilen değerler yerine koyulursa

$$\ddot{x} + \frac{1}{28}\dot{x} + 100x = 0 \qquad (5.77)$$

bulunur. (5.77) ikinci mertebeden homogen diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$r^2 + \frac{1}{28}r + 100 = 0$ olup , kökleri $r_1 = -0{,}0179 + 10i$ ve $r_2 = -0{,}0179 - 10i$ olarak bulunur. Böylece (5.77) denkleminin genel çözümü

$$x = e^{-0{,}0179\,t}(c_1 \cos 10t + c_2 10t) \qquad (5.78)$$

ile verilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.78) denkleminin türevi alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\dot{x} = v = e^{-0,0179\,t}\left[(10c_2 - 0,0179c_1)\cos 10t - (10c_1 + 0,0179c_2)\sin 10t\right] \qquad (5.79)$$

bulunur. (5.78) ve (5.79) denklemlerine başlangıç koşulları $x(0) = 0,05$ ve $v(0) = 0$ uygulanarak $c_1 = 0,05$ ve $c_2 = 0,000895$ bulunur. c_1 ve c_2 nin değerleri (5.78) de yerine koyulursa

$$x = e^{-0,0179\,t}\,(0,05\cos 10t + 0,000895\sin 10t) \qquad (5.80)$$

ifadesi bulunur. Bu ise sönümlü salınım hareketini gösteren bir ifadedir. Bu hareketin frekansı $\frac{10}{2\pi} = 1,59\ s^{-1}$ olmasına karşın , hareketin genliği $e^{-0,0179\,t}$ lik sönüm çarpanından dolayı bir önceki salınıma göre azalır. $t = 0$ anında salınım çarpanı 1 'e eşittir.

iii) Hava sürtünmesinin $980\,v$ 'ye eşit olması durumunda , hareket denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - 980\frac{dx}{dt}$$

$$\ddot{x} + \frac{980}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (5.81)$$

biçiminde ifade edilir. (5.81) de verilen değerler yerine koyulursa

$$\ddot{x} + 140\dot{x} + 100x = 0 \qquad (5.82)$$

bulunur. (5.82) ikinci mertebeden homogen diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$r^2 + 140r + 100 = 0$ olup , kökleri $r_1 = -0,7$ ve $r_2 = -139,3$ olarak bulunur. Böylece (5.82) denkleminin genel çözümü

$$x = c_1 e^{-0,7\,t} + c_2 e^{-139,3\,t} \qquad (5.83)$$

elde edilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.83) denkleminin türevi alınırsa

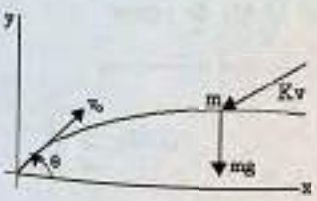
$$\dot{x} = v = -0,7c_1 e^{-0,7\,t} - 139,3c_2 e^{-139,3\,t} \qquad (5.84)$$

bulunur. (5.83) ve (5.84) denklemlerine başlangıç koşulları $x(0) = 0,05$ ve $v(0) = 0$ uygulanarak $c_1 = 0,0503$ ve $c_2 = -0,0003$ bulunur. c_1 ve c_2 nin değerleri (5.83) de yerine koyulursa

$$x = 0,0503\,e^{-0,7\,t} - 0,0003\,e^{-139,3\,t} \qquad (5.85)$$

hareketin denklemi bulunur. Bu denklemden hareketin titreşim hareketi olmadığı görülür. t arttıkça , başlangıçtaki yer değişiminden sonra kütle denge konumuna gelir.

(g) Kütlesi m olan bir mermi v_0 hızıyla düzlemle θ açısı yapacak şekilde ateşlenmektedir. Yerçekimi ve havanın sürtünme kuvveti dışında kalan tüm kuvvetlerin ihmal edildiği varsayılarak , merminin t anındaki yerini bulunuz. (Havanın sürtünme kuvveti merminin hızıyla orantılıdır. $t = 0$ anında $x = y = 0$ ve $\dot{x} = v_0\cos\theta$, $\dot{y} = v_0\sin\theta$ dır.)



Çözüm :

Merminin hareketinin yatay bileşeni , yalnızca havanın sürtünme kuvvetinden etkilenir. Böylece hareketin yatay bileşeninin denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K\frac{dx}{dt} = -mk\frac{dx}{dt}$$

veya $$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (5.86)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ile ifade edilir. Merminin hareketinin düşey bileşeni ise, yerçekimi ve havanın sürtünme kuvvetinden etkilenir. Böylece hareketin düşey bileşeninin denklemi

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - K\frac{dy}{dt} = -mg - km\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = -g \tag{5.87}$$

ile ifade edilir. (5.86) ve (5.87) diferansiyel denklemlerini sırasıyla çözelim. ((5.86) ikinci mertebeden homogen diferansiyel denklem olup karakteristik denklemi

$r^2 + kr = 0$ olup, kökleri $r_1 = 0$, $r_2 = -k$ dır. Denklemin çözümü ise

$$x = c_1 + c_2e^{-kt} \tag{5.88}$$

ile verilir. c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için (5.88) denkleminin türevi alınırsa

$$v = \frac{dx}{dt} = -kc_2e^{-kt} \tag{5.89}$$

bulunur. (5.88) ve (5.89) denklemlerine başlangıç koşulları $x(0) = 0$ ve $\dot{x}(0) = v_0\cos\theta$ uygulanarak $c_1 = -c_2 = \frac{v_0}{k}\cos\theta$ bulunur. c_1 ve c_2 nin değerleri (5.88) de yerine koyulursa

$$x = \frac{1}{k}(v_0\cos\theta)(1 - e^{-kt}) \tag{5.90}$$

ifadesi bulunur. (5.87) denklemi ise ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denklemdir. Homogen kısmı

$\ddot{y} + k\dot{y} = 0$ olup, kökleri $r_1 = 0$, $r_2 = -k$ dır. Denklemin çözümü

$$y = c_1 + c_2e^{-kt} \tag{5.91}$$

ile verilir. Homogen olmayan kısım $F(t) = -g$ olduğundan bu denklemin özel çözümü için (5.19) kullanılarak

$$y_\ddot{o} = -\frac{gt}{k} \tag{5.92}$$

bulunur. (5.87) denkleminin genel çözümü

$$y = c_3 + c_4e^{-kt} - \frac{g}{k}t \tag{5.93}$$

ile verilir. c_3 ve c_4 sabitlerini bulmak için (5.93) denkleminin türevi alınırsa

$$v = \frac{dy}{dt} = -kc_2e^{-kt} - \frac{g}{k} \tag{5.94}$$

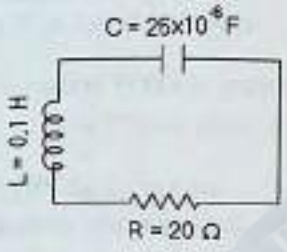
bulunur. (5.93) ve (5.94) denklemlerine başlangıç koşulları $y(0) = 0$ ve $\dot{y}(0) = v_0\sin\theta$ uygulanarak $c_3 = -c_4 = \frac{v_0\sin\theta}{k} + \frac{g}{k^2}$ bulunur. c_3 ve c_4 ün değerleri (5.93) de yerine koyulursa

$$y = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{g}{k} + v_0\sin\theta\right)(1 - e^{-kt}) - gt\right] \tag{5.95}$$

ifadesi bulunur. (5.90) ve (5.95) ifadeleri, merminin t anındaki yerini belirler.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(h) Şekildeki elektrik devresinde $L=0{,}1\,\mathrm{H}$ olan bobin, $R=20\,\Omega$ luk bir direnç teli ve $C=25x10^{-6}$ Farad 'lık sığaya sahip kondansatör bulunmaktadır. q yükünü ve herhangi bir t anındaki I akım şiddetini bulunuz. ($t=0$ anında devreden geçen akımın şiddeti sıfır ve $q=0{,}05$ coulomb alınacaktır.)



Çözüm :
Kirchoff yasasına göre

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E(t) \qquad (5.96)$$

yazılır. (5.96) denkleminde $E(t)=0$, $R=20\,\Omega$, $L=0{,}1\,\mathrm{H}$ ve $C=25x10^{-6}$ farad değerleri yerlerine koyulursa

$$\frac{d^2q}{dt^2}+200\frac{dq}{dt}+400000\,q=0 \qquad (5.97)$$

bulunur. (5.97) ikinci mertebeden homogen diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$r^2+200r+400000=0$ olup, kökleri $r_1=-100+100\sqrt{39}\,i$ ve $r_2=-100-100\sqrt{39}\,i$ olarak bulunur. (5.97) denkleminin genel çözümü ise

$$q=e^{-100t}(A\cos 100\sqrt{39}\,t+B\sin 100\sqrt{39}\,t) \qquad (5.98)$$

ile verilir. A ve B sabitlerini bulmak için (5.98) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{dq}{dt}=I=100e^{-100t}\left[(\sqrt{39}\,B-A)\cos 100\sqrt{39}\,t-(\sqrt{39}\,A+B)\sin 100\sqrt{39}\,t\right] \qquad (5.99)$$

bulunur. (5.98) ve (5.99) denklemlerine başlangıç koşulları $I(0)=0$ ve $q=0{,}05$ coulomb uygulanarak $A=0{,}05$ ve $B=0{,}008$ bulunur. A ve B nin değerleri sırasıyla (5.98) ve (5.99) da yerine koyulursa

$$q=e^{-100t}(0{,}05\cos 624{,}5t+0{,}008\sin 624{,}5t) \qquad (5.100)$$

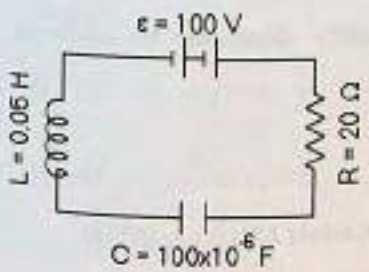
$$I=-0{,}32\,e^{-100t}\sin 624{,}5t \qquad (5.101)$$

istenilen değerler bulunur.

(ı) Şekildeki elektrik devresinde $L=0{,}05\,\mathrm{H}$ olan bobin, $R=20\,\Omega$ luk bir direnç teli ve $C=100x10^{-6}$ farad 'lık sığaya sahip kondansatör bulunmaktadır. Bu devredeki üretecin

i) Elektromotor kuvveti $\varepsilon=100\,\mathrm{V}$

ii) Elektromotor kuvveti $\varepsilon(t)=100\cos 200\,t$ olması durumlarında q yükünü ve herhangi bir t anındaki I akım şiddetini bulunuz. ($t=0$ anında, $I=0$ ve $q=0$ alınacaktır.)



Çözüm :
i) Kirchoff yasasına göre

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E(t) \qquad (5.102)$$

yazılır. (5.102) denkleminde $E(t)=100\,\mathrm{V}$, $R=20\,\Omega$, $L=0{,}05\,\mathrm{H}$ ve $C=100x10^{-6}$ farad değerleri yerlerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{d^2q}{dt^2}+400\frac{dq}{dt}+200000\,q=2000 \qquad (5.103)$$

bulunur. (5.103) denklemi, ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denklemdir. Homogen kısmı

$$\ddot{q}+400\,\dot{q}+200000\,q=0 \qquad (5.104)$$

dir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$r^2+400r+200000=0$ olup, kökleri $r_1=-200+400\,i$ ve $r_2=-200-400\,i$ olarak bulunur. (5.104) denkleminin genel çözümü

$$q_h=e^{-200t}(A\cos 400\,t+B\sin 400\,t) \qquad (5.105)$$

ile verilir. Homogen olmayan kısmı $F(t)=2000$ olduğundan bu denklemin özel çözümü için (5.17) kullanılarak

$q_o=0.01$

bulunur. Böylece (5.103) ün genel çözümü

$$q=e^{-200t}(A\cos 400\,t+B\sin 400\,t)+0{,}01 \qquad (5.106)$$

elde edilir. A ve B sabitlerini bulmak için (5.106) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{dq}{dt}=I=200\,e^{-200t}\left[(-A+2B)\cos 400\,t+(B-2A)\sin 400\,t\right] \qquad (5.107)$$

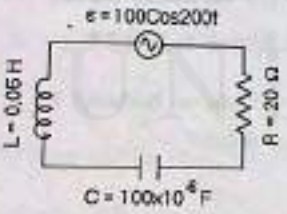
bulunur. (5.106) ve (5.107) denklemlerine başlangıç koşulları $I(0)=0$ ve $q(0)=0$ uygulanarak $A=-0{,}01$ ve $B=-0{,}005$ bulunur. A ve B nin değerleri sırasıyla (5.106) ve (5.107) de yerine koyulursa

$$q=e^{-200t}(-0{,}01\cos 400\,t-0{,}005\sin 400\,t)+0{,}01 \qquad (5.108)$$

$$I=5e^{-200t}\sin 400\,t \qquad (5.109)$$

istenilen değerler bulunur.

ii) Elektromotor kuvvetin değişken olması durumunda, şekildeki devreye Kirchoff yasası uygulanırsa



$$\ddot{q}+400\,\dot{q}+200000\,q=2000\cos 200\,t \qquad (5.110)$$

bulunur. (5.110) denklemi, ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen olmayan diferansiyel denklemdir. Homogen kısmının çözümünü (i) de

$$q_h=e^{-200t}(A\cos 400\,t+B\sin 400\,t) \qquad (5.11)$$

olarak bulmuştuk. Homogen olmayan kısmı $F(t)=2000\cos 200\,t$ olduğundan bu denklemin özel çözümü için Belirsiz Katsayılar Yöntemi kullanılarak

$$q_o=0.01\cos 200\,t+0{,}005\sin 200\,t$$

bulunur. Böylece (5.110) un genel çözümü

$$q=e^{-200t}(A\cos 400\,t+B\sin 400\,t)+0{,}01\cos 200\,t+0{,}005\sin 200\,t \qquad (5.112)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. A ve B sabitlerini bulmak için (5.112) denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{dq}{dt} = I = e^{-200t}\left[(-200A+400B)\cos 400t + (-200B-400A)\sin 400t\right] - 2\sin 200t + \cos 200t \qquad (5.113)$$

bulunur. (5.112) ve (5.113) denklemlerine başlangıç koşulları $I(0)=0$ ve $q(0)=0$ uygulanarak $A=-0{,}01$ ve $B=-0{,}0075$ bulunur. A ve B nin değerleri sırasıyla (5.112) ve (5.113) de yerine koyulursa

$$q = e^{-200t}(-0{,}01\cos 400t - 0{,}0075\sin 400t) + 0{,}01\cos 200t + 0{,}005\sin 200t$$
$$I = e^{-200t}(-\cos 400t + 5{,}5\sin 400t) - 2\sin 200t + \cos 200t$$

istenilen ifadeler bulunur.

5. BÖLÜMLE İLGİLİ PROBLEMLER

A. Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

(a) $y''-4y'+3y = 2\cos x + 4\sin x$ Y. $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x} + \cos x$

(b) $(D^2-D-2)y = 6x+6e^{-x}$ Y. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 3x + \frac{3}{2} - 2xe^{-x}$

(c) $(D^2+3D+2)y = 1+3x+x^2$ Y. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2$

(d) $(D^2+1)y = 12\cos^2 x$ Y. $y = c_1\cos x + c_2\sin x + 6 - 2\cos 2x$

(e) $(D^3+D^2-4D-4)y = 3e^{-x} - 4x - 6$ Y. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + (c_3-x)e^{-x} + x + \frac{1}{2}$

(f) $(D^3-D^2+D-1)y = 4\sin x$ Y. $y = c_1e^{x} + (c_2+x)\cos x + (c_3-x)\sin x$

(g) $(D^2+2D-3)y = 6$ Y. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x} - 2$

(h) $(D^3+5D)y = 15$ Y. $y = c_1 + c_2\cos 5x + c_3\sin 5x + 3x$

B. Aşağıdaki diferansiyel denklemleri "Parametrelerin Değişimi Yöntemini" kullanarak çözünüz.

(a) $(D^2-1)y = e^{x}+1$ Y. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe - \frac{1}{4}e^{x} - 1$

(b) $(D^2+1)y = \csc x\cot x$ Y. $y = c_1\cos x + c_2\sin x - x\sin x - \cos x\ln|\sin x|$

(c) $(D^2+1)y = \tan^2 x$ Y. $y = c_1\cos x + c_2\sin x - 2 + \sin x\ln|\sec x + \tan x|$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(d) $(D^2+1)y=\sec^2 x\tan x$

Y. $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}\cos x\ln|\sec x+\tan x|$

(e) $y''+3y'+2y=\frac{1}{1+e^x}$ Y. $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+(e^{-x}+e^{-2x})\left[\ln(1+e^x)\right]$

(f) $(D^2-1)y=2e^{-x}(1+e^{-2x})^{-2}$ Y. $y=c_1e^x+c_2e^{-x}-xe^{-x}-\frac{1}{2}e^{-x}\ln(1+e^{-2x})$

C. Aşağıdaki Cauchy – Euler denklemlerini çözünüz.

(a) $x^2y''-3xy'+3y=0$ Y. $y=c_1x+c_2x^3$

(b) $4x^2y''-4xy'+3y=0$ Y. $y=c_1x^{\frac{1}{2}}+c_2x^{\frac{3}{2}}$

(c) $x^3y'''-x^2y''-6xy'+18y=0$ Y. $y=(c_1+c_2\ln x)x^3+c_3x^{-2}$

(d) $x^2y''-5xy'+8y=2x^3$ Y. $y=c_1x^2+c_2x^4-2x^3$

(e) $x^2y''+xy'+4y=2x\ln x$ Y. $y=c_1\sin(\ln x^2)+c_2\cos(\ln x^2)+\frac{1}{5}\ln x^2-\frac{4}{25}x$

(f) $x^3y'''+2x^2y''=x+\sin(\ln x)$

Y. $y=c_1+c_2x+c_3\ln x+x\ln x+\frac{1}{2}[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$

(g) $x^2y''-3xy'+4y=x+x^2\ln x$ Y. $y=c_1x^2+c_2x^2\ln x+\frac{1}{6}x^2\ln^3 x$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 6. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİLERLE ÇÖZÜMÜ

6.1 Kuvvet Serileri

Tanım 6.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \qquad (6.1)$$

şeklinde bir ifade, **kuvvet serisi** olarak tanımlanır. (6.1) de, $x_0 \in R$ serinin açınım merkezi ve $a_i \in R$, $i = 0,1,2,\ldots$ kuvvet serisinin katsayılarıdır.

Eğer $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (x-x_0)^n$

mevcut ve sonlu ise, **kuvvet serisi yakınsaktır** denir. Limit tanımlı değil veya sonsuz ise, **kuvvet serisi ıraksaktır** denir. Her kuvvet serisi için öyle bir $r \in R$ bulunabilir ki, seri her $x \in I = (x_0 - r, x_0 + r)$ için yakınsak ve her $x \notin I$ için ıraksaktır.

$r \in R$ ve $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ sırasıyla, serinin **yakınsaklık yarıçapı** ve **yakınsaklık aralığı** olarak tanımlanır. (6.1) serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (6.2)$$

ile verilir.

Tanım 6.2 Taylor Serileri

$f(x)$, bir I aralığında

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (6.3)$$

kuvvet serisiyle tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun ardışık türevlerini alarak

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k}$$

elde ederiz. (6.3) ve yukarıdaki eşitliklerde $x = x_0$ koyarak

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

buluruz. Böylece, (6.3) eşitliği, $x \in I$ için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n \qquad (6.4)$$

şeklinde yazılabilir. (6.4) de verillen kuvvet serisi , $f(x)$ fonksiyonunun $x=x_0$ noktası yakınında **Taylor Serisi açılımı** olarak bilinir. $x_0=0$ özel durumunda

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n \qquad (6.5)$$

kuvvet serisi , $f(x)$ fonksiyonunun **Maclaurin Serisi Açılımı** olarak bilinir. Bir $f(x)$ fonksiyonunun , $(x-x_0)$ teriminin kuvvetlerinde bir Taylor serisine açılabilmesi için , $f(x)$ in $x=x_0$ noktasında bütün türevlerinin tanımlı olması gerekir. Bu durumda $f(x)$ **fonksiyonu** $x=x_0$ **noktasında analitikdir** denir.

Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını belirleyiniz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}(x-2)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{n!}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n(n-1)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^3(x-2)^n$

Çözümler :

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{3^n}(x-2)^n$

kuvvet serisinin açılım merkezi $x_0=2$ olup yakınsaklık yarıçapı (6.2) den

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)3^{n+1}}{(n+3)3^n}\right|=3$$

bulunur. Bu serinin yakınsaklık aralığı ise $I=(x_0-r,x_0+r)=(-1,5)$ dir.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı (6.2) den

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{(n+2)}}{\sqrt{(n+1)}}\right|=1$$

bulunur. Bu serinin yakınsaklık aralığı ise $I=(x_0-r,x_0+r)=(-1,1)$ dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+7)^n}{n!}$

kuvvet serisinin açılım merkezi $x_0=-7$ olup yakınsaklık yarıçapı (6.2) den bulunur.

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\infty$$

Bu serinin yakınsaklık aralığı ise $I=(x_0-r,x_0+r)=(-\infty,\infty)$ dir.

(d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n(n-1)}$

kuvvet serisinin açılım merkezi $x_0=1$ olup yakınsaklık yarıçapı (6.2) den bulunur.

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n}{n(n-1)}\right|=1$$

Bu serinin yakınsaklık aralığı ise $I=(x_0-r,x_0+r)=(0,2)$ dir.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3(x-2)^n$

kuvvet serisinin açılım merkezi $x_0=2$ olup yakınsaklık yarıçapı (6.2) den

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\right|=1$$

bulunur. Bu serinin yakınsaklık aralığı ise $I=(x_0-r,x_0+r)=(1,3)$ dir.

Tanım 6.3

İkinci mertebeden değişken katsayılı lineer ve homogen bir diferansiyel denklem,

$$a_0(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \qquad (6.6)$$

şeklinde verilmiş olsun. (6.6) denklemi normalize edilerek aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (6.7)$$

burada $P(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ ve $Q(x)=\frac{a_2(x)}{a_0(x)}$ olarak tanımlanmıştır.

Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu $x=x_0$ noktası yakınında Taylor Serisine açılabiliyorsa ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x in bütün değerleri için bu Taylor açılımı $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa, o zaman adı geçen fonksiyona $x=x_0$ noktasında **analitik fonksiyon** denir. Bu tanıma göre bütün polinom fonksiyonlar her yerde analitikdir. Ayrıca e^x, $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarıda her yerde analitikdir. $f(x)/g(x)$ şeklindeki bütün rasyonel fonksiyonlar ise, paydada bulunan $g(x)$ fonksiyonunu "sıfır" yapmayan her x değeri için analitikdir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tanım 6.4

(6.7) denkleminde eğer $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonlarının her ikiside, herhangi bir x noktasında, örneğin $x=x_0$ noktasında analitik ise, bu durumda $x=x_0$ noktasına **bayağı nokta** denir. Eğer bu fonksiyonların her ikisinde veya yalnız biri, $x=x_0$ noktasında analitik değilse o zaman $x=x_0$ noktasına diferansiyel denklemin **tekil noktası** denir.

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin her biri için tekil noktaları bulunuz

(a) $y''+\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}y'+\dfrac{1}{x(x-1)^2}y=0$

(b) $x(x+3)y''+x^2y'-y=0$

(c) $4y''+3xy'+2y=0$

(d) $x(x-1)^2y''+3xy'+(x-1)y=0$

Çözümler :

(a) $y''+\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}y'+\dfrac{1}{x(x-1)^2}y=0$

Denkleminde $P(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ ve $Q(x)=\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ dir. Tanım 6.3 'e göre $P(x)$ fonksiyonu $x=1$ ve $x=-2$ noktaları dışında analitikdir. $Q(x)$ fonksiyonu ise $x=1$ ve $x=0$ noktaları dışında analitikdir. Bu durumda Tanım 6.4 'e göre $x=-2, x=0$ ve $x=1$ noktaları tekil noktalardır. Bu üç noktanın dışında kalan her nokta denklemin bir bayağı noktasıdır.

(b) $x(x+3)y''+x^2y'-y=0$

Denkleminin tekil noktalarını bulmak için önce normalize edilmiş şekliyle yazalım.

$$y''+\frac{x}{(x+3)}y'-\frac{1}{x(x+3)}y=0$$

Burada $P(x)=\dfrac{x}{(x+3)}$ ve $Q(x)=-\dfrac{1}{(x+3)}$ dir. Tanım 6.3 'e göre $P(x)$ fonksiyonu $x=-3$ noktası dışında analitikdir. $Q(x)$ fonksiyonu ise $x=-3$ ve $x=0$ noktaları dışında analitikdir. Bu durumda Tanım 6.4 'e göre $x=-3$ ve $x=0$ noktaları tekil noktalardır. Bu iki noktanın dışında kalan her nokta denklemin bir bayağı noktasıdır.

(c) $4y''+3xy'+2y=0$

Burada, $P(x)=\dfrac{3}{4}x$ ve $Q(x)=\dfrac{1}{2}$ dir. Tanım 6.3 'e göre $P(x)$ ve $Q(x)$ analitik fonksiyonlar olup bu denklemin tekil noktaları yoktur.

(d) $x(x-1)^2y''+3xy'+(x-1)y=0$

denkleminin tekil noktalarını bulmak için önce normalize edilmiş şekliyle yazalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y'' + \frac{3}{(x-1)^2}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$$

Burada $P(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ ve $Q(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ dir.

Tanım 6.3 'e göre $P(x)$ fonksiyonu $x=1$ noktası dışında analitikdir. $Q(x)$ fonksiyonu ise $x=1$ ve $x=0$ noktaları dışında analitikdir. Bu durumda Tanım 6.4 ' e göre $x=1$ ve $x=0$ tekil noktalardır. Bu iki noktanın dışında kalan her nokta denklemin bir bayağı noktasıdır.

6.2 Bayağı Nokta Yakınında Çözüm

Teorem 6.1

$x = x_0$ noktası (6.6) denkleminin bir bayağı noktası ise bu denklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \qquad (6.8)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. $x = x_0$ noktasını içeren bir aralıkta bu kuvvet serisi (6.6) ile verilen diferansiyel denklemin çözümünü veren bir $y = f(x)$ fonksiyonuna yaklaşır. (6.6) ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem olduğu için bu denklemin genel çözümü iki keyfi sabiti içermektedir. Bu nedenle bu denklemin $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ gibi birbirinden lineer bağımsız iki kuvvet serisi çözümü olmalıdır ve bunların lineer kombinasyonu , denklemin genel çözümünü veren ve belirli bir aralıkta bir $y(x)$ fonksiyonuna yaklaşan bir kuvvet serisi olacaktır. (6.6) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \qquad (6.9)$$

olur. Denklemin çözümünü bulmak için önce $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin ayrı ayrı bulunması gerekir.

Aşağıdaki denklemlerin belirtilen bayağı noktalar yakınında seri çözümlerini bulunuz.

(a) $y'' + xy' + y = 0, x_0 = 0$

(b) $(2x+1)y'' + y' + 2y = 0, x_0 = 0$

(c) $y'' + xy' + (x^2+2)y = 0, x_0 = 0$

(d) $y'' + xy' + (3x+2)y = 0, x_0 = 0$

(e) $(2x^2+1)y'' + 3xy' - 3y = 0, x_0 = 0$

(f) $(x+1)y'' - y = 0, x_0 = 0$

(g) $y'' - x^2y' - 2xy = 0, x_0 = 0$

(h) $(x^2-1)y'' - 2xy' - 4y = 0, x_0 = 0$

(ı) $y'' - 2(x-1)y' - y = 0, x_0 = 1$

(i) $(x^2+2x)y'' + (x+1)y' - 4y = 0, x_0 = -1$

Çözümler :

(a) $y'' + xy' + y = 0$

Verilen diferansiyel denklem için $P(x) = x$ ve $Q(x) = 1$ dir. Görüldüğü gibi her $x \in R$ için bu fonksiyonlar analitikdir. Verilen denklemin seri çözümü her $x \in R$ için geçerlidir. Bunun için denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \qquad (1)$$

Şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada , toplamalardan birincisi $n=2$ 'den , ikincisi $n=1$ 'den ve üçüncüsü ise $n=0$' dan başlamaktadır. Ayrıca , x 'in üsleri de n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. Birinci seride n yerine $n+2$ yazılır ve toplamlarda 1'den başlatılıp düzenlenirse

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n\right]x^n = 0 \qquad (5)$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından yukardaki denklemden

$$2a_2 + a_0 = 0 \qquad (6)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0 \quad , \quad (n \geq 1) \qquad (7)$$

elde edilir. (7) bağıntısına a_n katsayılarının gerçekledigi **yineleme bağıntısı** denir. (6)' dan

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0 \qquad (8)$$

bulunur. Ayrıca (7) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)}a_n \quad , \quad n \geq 1 \qquad (9)$$

şeklinde yazılırsa , (8) ve (9)' dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde edilir.

Çift indisli katsayılar

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = \frac{1}{2.4}a_0$$

$$\vdots$$

Tek indisli katsayılar

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_1$$

$$a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = \frac{1}{3.5}a_1$$

$$\vdots$$

olarak bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü her x için yakınsak olan seri cinsinden

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2}a_0 x^2 - \frac{1}{3}a_1 x^3 + \frac{1}{2.4}a_0 x^4 + \frac{1}{3.5}a_1 x^5 + \cdots$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = a_0(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.4}x^4+\cdots)+a_1(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3.5}x^5-\cdots) \qquad (10)$$

bulunur. Burada parantez içinde verilen serilerin her biri , diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümünün seriye açılmış şekilleridir. Bu nedenle denklem (10) verilen diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

(b) $(2x+1)y''+y'+2y=0$

Verilen diferansiyel denklem için $P(x)=\dfrac{1}{(2x+1)}$ ve $Q(x)=\dfrac{2}{(2x+1)}$ dir.

Görüldüğü gibi $x_0=-1/2$ noktası diferansiyel denklemin bir tekil noktasıdır ve bu noktanın dışında her nokta , denklemin bir bayağı noktasıdır. $x_0=0$ noktası denklemin bir bayağı noktası olduğundan bu durumda denklemin $x_0=0$ noktası yakınında

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada , toplamalardan birincisi ve ikincisi $n=2$ ' den , üçüncüsü $n=1$ ' den ve dördüncüsü ise $n=0$ ' dan başlamaktadır. Ayrıca x ' in üsleri de n, $n-1$ ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. Birinci ve üçüncü serilerde n yerine $n-1$, dördüncü seride ise n yerine $n-2$ yazılır ve toplamlarda 3 ' den başlatılıp düzenlenirse

$$2\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-2}+2a_2+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+a_1+\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-2}$$
$$+2a_0+2\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=0$$

$$(2a_0+a_1+2a_2)+\sum_{n=3}^{\infty}\left[2(n-1)(n-2)a_{n-1}+n(n-1)a_n+(n-1)a_{n-1}+2a_{n-2}\right]x^{n-2}=0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x ' li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından , yukarıdaki denklemden

$$2a_0+a_1+2a_2=0 \qquad (5)$$

$$(n-1)(2n-3)a_{n-1}+n(n-1)a_n+2a_{n-2}=0 \quad , \quad n\geq 3 \qquad (6)$$

elde edilir. (6) bağıntısı , a_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısıdır. (5) ' den

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_2 = -a_0 - \frac{1}{2}a_1$$

ve (6) yineleme bağıntısı (7)

$$a_n = -\frac{(2n-3)}{n}a_{n-1} - \frac{2}{n(n-1)}a_{n-2}, \qquad n \geq 3 \qquad (8)$$

şeklinde yazılırsa (7) ve (8) den diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_3 = -a_2 - \frac{1}{3}a_1 = a_0 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{3}a_1 = a_0 + \frac{1}{6}a_1$$

$$a_4 = -\frac{1}{6}a_2 - \frac{5}{4}a_3 = -\frac{1}{6}(-a_0 - \frac{1}{2}a_1) - \frac{5}{4}(a_0 + \frac{1}{6}a_1) = -\frac{13}{12}a_0 - \frac{1}{8}a_1$$

$$\vdots$$

Buna göre, denklemin genel çözümü, a_0 ve a_1 cinsinden aşağıdaki şekilde

$$y = a_0 + a_1 x + (-a_0 - \frac{1}{2}a_1)x^2 + (a_0 + \frac{1}{6}a_1)x^3 + (-\frac{13}{12}a_0 - \frac{1}{8}a_1)x^4 + \cdots$$

veya

$$y = a_0\left[1 - x^2 + x^3 - \frac{13}{12}x^4 + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots\right] \qquad (9)$$

bulunur. Burada parantez içinde verilen serilerin her biri, diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümünün seriye açılmış şekilleridir. Bu nedenle denklem (9) verilen diferansiyel denklemin genel çözümüdür ve $|x| < \frac{1}{2}$ için geçerlidir.

(c) $y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$

Verilen diferansiyel denklem için $P(x) = x$ ve $Q(x) = x^2 + 2$ dir. Görüldüğü gibi, her $x \in R$ için bu fonksiyonlar analitikdir. Verilen denklemin seri çözümü her $x \in R$ için geçerlidir. Bu nedenle denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1), (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada, toplamalardan birincisi $n = 2$ 'den, ikincisi $n = 1$ 'den, üçüncü ve dördüncüsü ise $n = 0$'dan başlamaktadır. Ayrıca x 'in üsleri de $n+2$, n, ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Birinci seride n yerine $n+2$ ve üçüncü seride ise n yerine $n-2$ yazılır ve toplamlarda 2 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(2a_0+2a_2)+(3a_1+6a_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)a_n+a_{n-2}\right]x^n=0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$(2a_0+2a_2)=0 \tag{5}$$

$$(3a_1+6a_3)=0 \tag{6}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+2)a_n+a_{n-2}=0\ ,\quad n\geq 2 \tag{7}$$

elde edilir. (7) bağıntısı, a_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısıdır. (5) ve (6) 'dan

$$a_2=-a_0 \tag{8}$$

$$a_3=-\frac{1}{2}a_1 \tag{9}$$

bulunur. Ayrıca (7) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2}=-\frac{1}{(n+1)}a_n-\frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-2}\ ,\quad n\geq 2 \tag{10}$$

şeklinde yazılırsa (8), (9) ve (10) 'dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_4=-\frac{1}{3}a_2-\frac{1}{12}a_0=\frac{1}{3}a_0-\frac{1}{12}a_0=\frac{1}{4}a_0$$

$$a_5=-\frac{1}{4}a_3-\frac{1}{20}a_1=\frac{1}{8}a_1-\frac{1}{20}a_1=\frac{3}{40}a_1$$

$$\vdots$$

Buna göre denklemin genel çözümü, a_0 ve a_1 cinsinden

$$y=a_0+a_1x+-a_0x^2-\frac{1}{2}a_1x^3+\frac{1}{4}a_0x^4+\frac{3}{40}a_1x^5+\cdots,$$

veya

$$y=a_0\left[1-x^2+\frac{1}{4}x^4+\cdots\right]+a_1\left[x-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots\right] \tag{11}$$

elde edilir. Burada parantez içinde verilen serilerin her biri, diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümünün seriye açılmış şekilleridir. Bu nedenle denklem (11) verilen diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

(d) $y''+xy'+(3x+2)y=0$

Verilen diferansiyel denklem için $P(x)=x$, $Q(x)=3x+2$ dir. Görüldüğü gibi, her $x\in R$ için bu fonksiyonlar analitikdir. Verilen denklemin seri çözümü her $x\in R$ için geçerlidir. Bu nedenle denklemin $x_0=0$ noktası yakınında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n+3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada toplamalardan birincisi $n=2$ 'den , ikincisi $n=1$ 'den üçüncü ve dördüncüsü ise $n=0$' dan başlamaktadır. Ayrıca , x 'in üsleri de $n+1$, n , ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci seride n yerine $n-2$ ve üçüncü seride ise n yerine $n-3$ yazılır ve toplamlarda 3 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(2a_0+2a_2)+\sum_{n=3}^{\infty}\left[n(n-1)a_n+(n-2)a_{n-2}+3a_{n-3}+2a_{n-2}\right]x^{n-3}=0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından yukardaki denklemden

$$(2a_0+2a_2)=0 \qquad (5)$$

$$n(n-1)a_n+na_{n-2}+3a_{n-3}=0\ ,\quad n\geq 3 \qquad (6)$$

elde edilir. (6) bağıntısı a_n katsayılarının gerçekleştiği yineleme bağıntısıdır. (5) 'den

$$a_2=-a_0 \qquad (7)$$

bulunur. Ayrıca (6) yineleme bağıntısı

$$a_n=-\frac{1}{(n-1)}a_{n-2}-\frac{3}{n(n-1)}a_{n-3}\ ,\quad n\geq 3 \qquad (8)$$

şeklinde yazılırsa (7) ve (8)' den diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_3=-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}a_0$$

$$a_4=-\frac{1}{3}a_2-\frac{1}{4}a_1=\frac{1}{3}a_0-\frac{1}{4}a_1$$

$$a_5=-\frac{1}{4}a_3-\frac{3}{4.5}a_2=\frac{1}{8}a_1+\frac{11}{40}a_0$$

$$\vdots$$

Buna göre denklemin genel çözümü a_0 ve a_1 cinsinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = a_0 + a_1 x + -a_0 x^2 + \left(-\frac{1}{2}a_0 - \frac{1}{2}a_1\right)x^3 + \left(\frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{4}a_1\right)x^4 + \left(\frac{11}{40}a_0 + \frac{1}{8}a_1\right)x^5 + \cdots$$

veya

$$y = a_0\left[1 - x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{11}{40}x^5 + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right] \qquad (9)$$

elde edilir. Burada parantez içinde verilen serilerin her biri diferansiyel denklemin lineer bağımsız iki çözümünün seriye açılmış şekilleridir. Bu nedenle denklem (9) verilen diferansiyel denklemin genel çözümüdür.

(e) $(2x^2+1)y'' + 3xy' - 3y = 0$

Görüldüğü gibi $x_0 = 0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci ve ikincisi $n=2$ 'den, üçüncüsü $n=1$ 'den, dördüncüsü ise $n=0$ 'dan başlamaktadır. Ayrıca, x 'in üsleri de n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci seride n yerine $n+2$ yazılır ve toplamlarda 2'den başlatılıp düzenlenirse

$$2a_2 - 3a_0 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[2n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} + 3na_n - 3a_n\right]x^n = 0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukarıdaki denklemden

$$(2a_2 - 3a_0) = 0 \qquad (5)$$

$$6a_3 = 0 \qquad (6)$$

$$(n-1)(2n+3)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0\,, \quad n \geq 2 \qquad (7)$$

elde edilir. (7) bağıntısı a_n katsayılarının gerçekleştiği yineleme bağıntısıdır. (5) ve (6) 'dan

$$a_2 = \frac{3}{2}a_0 \qquad (8)$$

$$a_3 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Ayrıca (7) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2} = -\frac{(n-1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)} a_n \quad , \quad n \geq 2 \qquad (10)$$

şeklinde yazılırsa (8), (9) ve (10)'dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_4 = -\frac{7}{12} a_2 = -\frac{7}{8} a_0$$

$$a_5 = -\frac{9}{10} a_3 = 0$$

$$a_6 = -\frac{11}{10} a_4 = \frac{77}{80} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{k+1} 3.7.11...(4k-1)}{2^k.(2k-1)k!} \quad , \quad k \geq 1$$

Buna göre denklemin genel çözümü a_0 ve a_1 cinsinden

$$y = a_1 x + a_0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 3.7.11...(4k-1) x^{2k}}{2^k.(2k-1)k!} \right]$$

bulunur.

(f) $(x+1)y'' - y = 0$

Görüldüğü gibi $x_0 = 0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1), (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci ve ikincisi $n = 2$'den, üçüncüsü ise $n = 0$'dan başlamaktadır. Ayrıca x'in üsleri de n, $n-1$ ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci seride n yerine $n-1$ ve üçüncü seride ise n yerine $n-2$ yazılır ve toplamlarda 3'den başlatılıp düzenlenirse

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n(n-1) a_n + (n-1)(n-2) a_{n-1} - a_{n-2} \right] x^{n-2} = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$(2a_2 - a_0) = 0 \qquad (5)$$

$$n(n-1)a_n + (n-1)(n-2)a_{n-1} - a_{n-2} = 0\ ,\ n \geq 3 \qquad (6)$$

elde edilir. (6) bağıntısı a_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısıdır. (5) 'den

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0 \qquad (7)$$

bulunur. Ayrıca (6) yineleme bağıntısı

$$a_n = -\frac{(n-2)}{n}a_{n-1} + \frac{1}{n(n-1)}a_{n-2}\ ,\quad n \geq 3 \qquad (8)$$

şeklinde yazılırsa, (7) ve (8)' den diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{6}a_1 = -\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{6}a_1$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + \frac{1}{12}a_2 = \frac{1}{8}a_0 - \frac{1}{12}a_1$$

$$a_5 = -\frac{3}{5}a_4 + \frac{1}{4.5}a_3 = -\frac{1}{12}a_1 + \frac{37}{120}a_0$$

$$\vdots$$

Buna göre denklemin genel çözümü a_0 ve a_1 cinsinden

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}a_0 x^2 + \left(-\frac{1}{6}a_0 + \frac{1}{6}a_1\right)x^3 + \left(\frac{1}{8}a_0 - \frac{1}{12}a_1\right)x^4 + \left(-\frac{1}{12}a_0 + \frac{37}{120}a_1\right)x^5 + \cdots$$

veya

$$y = a_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \cdots\right] + a_1\left[x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{37}{120}x^5 + \cdots\right]$$

bulunur.

(g) $y'' - x^2 y' - 2xy = 0$

Görüldüğü gibi $x_0 = 0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{3}$$

elde edilir. (1) , (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \tag{4}$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci $n = 2$'den , ikinci $n = 1$'den ve üçüncüsü ise $n = 0$'dan başlamaktadır. Ayrıca x'in üsleri de $n+1$ ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci ve üçüncü serilerde n yerine $n-3$ yazılır ve toplamlarda 4'den başlatılıp düzenlenirse

$$2a_2 + (6a_3 - 2a_0)x + \sum_{n=4}^{\infty} \left[n(n-1)a_n - (n-3)a_{n-3} - 2a_{n-3} \right] x^{n-2} = 0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığındabütün x'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$a_2 = 0 \tag{5}$$

$$(6a_3 - 2a_0) = 0 \tag{6}$$

ve

$$n(n-1)a_n - (1-n)a_{n-3} = 0 \ , \quad n \geq 4 \tag{7}$$

elde edilir. (7) bağıntısı a_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısıdır. (6)'dan

$$a_3 = \frac{1}{3} a_0 \tag{8}$$

bulunur. Ayrıca (7) yineleme bağıntısı

$$a_n = \frac{1}{n} a_{n-3} \ , \quad n \geq 4 \tag{9}$$

şeklinde yazılırsa, (6), (8) ve (9)'dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

Çift indisli katsayılar	Tek indisli katsayılar
$a_2 = 0$	$a_1 = \frac{1}{3} a_0$
$a_4 = \frac{1}{4} a_1$	$a_5 = \frac{1}{5} a_2 = 0$
$a_6 = \frac{1}{3.6} a_0$	$a_7 = \frac{1}{4.7} a_1$
$a_8 = \frac{1}{8} a_5 = 0$	$a_9 = \frac{1}{3.6.9} a_0$
$\vdots$	$\vdots$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olarak bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü her x için yakınsak olan seri cinsinden

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{3}a_0 x^3 + \frac{1}{4}a_1 x^4 + \frac{1}{18}a_0 x^6 + \frac{1}{28}a_1 x^7 + \frac{1}{162}a_0 x^9 + \cdots$$

$$y = a_0\left[1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \cdots\right] + a_1\left[x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{28}x^7 + \frac{1}{162}x^9 + \cdots\right]$$

elde edilir.

(h) $(x^2-1)y'' - 2xy' - 4y = 0$

Görüldüğü gibi $x_0 = 0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) ve (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_{n+2}x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada , toplamalardan birinci ve ikincisi $n=2$ 'den , üçüncüsü $n=1$ 'den ve dördüncüsü ise $n=0$ 'dan başlamaktadır. Ayrıca x 'in üsleri de n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci seride n yerine $n+2$ yazılır ve toplamlarda 2 'den başlatılıp düzenlenirse

$$-2a_2 - 4a_0 - (6a_3 + 6a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+1)(n-4)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2}\right]x^n = 0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığındabütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından , yukardaki denklemden

$$-(2a_2 + 4a_0) = 0 \qquad (5)$$

$$-(6a_3 + 6a_1) = 0 \qquad (6)$$

ve

$$(n+1)(n-4)a_n - (n+1)(n+2)a_{n+2} = 0\ , \quad n \geq 1 \qquad (7)$$

elde edilir. (7) bağıntısı a_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısıdır. (5) ve (6) 'dan

$$a_2 = -2a_0 \qquad (8)$$

$$a_3 = -a_1 \qquad (9)$$

bulunur. Ayrıca (7) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2} = \frac{(n-4)}{(n+2)}a_n\ , \quad n \geq 1 \qquad (10)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde yazılırsa (8), (9) ve (10)'dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

Çift indisli katsayılar

$a_2 = -2a_0$

$a_4 = a_0$

$a_6 = 0$

$\vdots$

Tek indisli katsayılar

$a_3 = -a_1$

$a_5 = \frac{1}{5}a_1$

$a_7 = \frac{1}{5.7}a_1$

$\vdots$

olarak bulunur. Böylece verilen diferansiyel denklemin genel çözümü her x için yakınsak olan seri cinsinden

$$y = a_0 + a_1 x + -2a_0 x^2 - a_1 x^3 + a_0 x^4 + \frac{1}{5}a_1 x^5 + \cdots .$$

$$y = a_0\left[1 - 2x^2 + x^4\right] + a_1\left[x - x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right]$$

elde edilir.

(i) $y'' - 2(x-1)y' - y = 0$ (1)

denkleminin $x_0 = 1$ noktası yakınında kuvvet serisi çözümü istenmektedir. Bu durumda

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \qquad (2)$$

şeklinde Taylor serisi çözümü vardır. Burada $t = x - 1$ değişken dönüşümü yapılarak (1) denklemi

$$Y'' - 2tY' - Y = 0 \qquad (3)$$

şekline dönüşür. (3) denkleminin $t = 0$ noktası yakınında

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \qquad (4)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. $Y(t)$'nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$Y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^{n-1} \qquad (5)$$

$$Y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} \qquad (6)$$

elde edilir. (4), (5), (6)'nın (3) denkleminde yerine koyulmasıyla

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n = 0 \qquad (7)$$

bulunur. Burada toplamalardan birincisi $n = 2$'den, ikincisi $n = 1$'den ve üçüncüsü ise $n = 0$'dan başlamaktadır. Ayrıca t nin üsleri de n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (7) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci ve üçüncü seride n yerine $n-2$ yazılır ve toplamlarda 3'den başlatılıp düzenlenirse

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(2A_2 - A_0) + \sum_{n=3}^{\infty}\left[n(n-1)A_n + (-2n+3)A_{n-2}\right]t^{n-2} = 0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün t li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$2A_2 - A_0 = 0 \tag{8}$$

$$n(n-1)A_n + (-2n+3)A_{n-2} = 0\ ,\ n \geq 3 \tag{9}$$

elde edilir. (9) bağıntısı, A_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısıdır. (8)'den

$$A_2 = \frac{1}{2}A_0 \tag{10}$$

bulunur. Ayrıca (9) yineleme bağıntısı

$$A_n = \frac{2n-3}{n(n-1)}A_{n-2}\ ,\ n \geq 3 \tag{11}$$

şeklinde yazılırsa, (10) ve (11)'den diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

Çift indisli katsayılar

$$A_2 = \frac{1}{2}A_0$$

$$A_4 = \frac{5}{3.4}A_2 = \frac{1.5}{2.3.4}A_0$$

$$A_6 = \frac{9}{5.6}A_4 = \frac{1.5.9}{6!}A_0$$

$$\vdots$$

$$A_{2k} = \frac{1.5.9...(4k-3)}{(2k)!}A_0\ ,\ k \geq 1$$

Tek indisli katsayılar

$$A_3 = \frac{1}{2}A_1$$

$$A_5 = \frac{7}{4.5}A_3 = \frac{3.7}{2.3.4.5}A_1$$

$$A_7 = \frac{11}{7.6}A_5 = \frac{3.7.11}{7!}A_1$$

$$\vdots$$

$$A_{2k-1} = \frac{3.7...(4k-5)}{(2k-1)!}A_1\ ,\ k \geq 2$$

Buna göre denklemin genel çözümü, A_0 ve A_1 cinsinden aşağıdaki şekilde

$$Y(t) = A_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1.5.9...(4k-3)}{(2k)!}t^{2k}\right] + A_1\left[t + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{3.7...(4k-5)}{(2k-1)!}t^{2k-1}\right]$$

veya

$$y(x) = A_0\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1.5.9...(4k-3)}{(2k)!}(x-1)^{2k}\right] + A_1\left[(x-1) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{3.7...(4k-5)}{(2k-1)!}(x-1)^{2k-1}\right]$$

bulunur.

(i) $(x^2+2x)y'' + (x+1)y' - 4y = 0$ (1)

denkleminin $x_0 = -1$ noktası yakınında kuvvet serisi çözümü istenmektedir. Bu durumda

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n \tag{2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde Taylor serisi çözümü vardır. Burada $t = x + 1$ değişken dönüşümü yapılarak (1) denklemi

$$(t^2 - 1)Y'' + tY' - 4Y = 0 \tag{3}$$

şekline dönüşür. (3) denkleminin $t = 0$ noktası yakınında

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \tag{4}$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. $Y(t)$ nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$Y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^{n-1} \tag{5}$$

$$Y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} \tag{6}$$

elde edilir. (4), (5), (6)' nın (3) denkleminde yerine koyulmasıyla

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n = 0 \tag{7}$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci ve ikincisi $n = 2$ 'den, üçüncüsü $n = 1$ 'den ve dördüncüsü ise $n = 0$ 'dan başlamaktadır. Ayrıca, t 'nin üsleri de n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (7) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci seride n yerine $n+2$ yazılır ve toplamlar da 2'den başlatılıp düzenlenirse

$$(-2A_2 - 4A_0) - (6A_3 + 3A_1)t + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2 - 4)A_n - (n+2)(n+1)A_{n+2}\right]t^n = 0$$

elde ederiz. Bu toplama yapılırsa bütün t^n li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından yukardaki denklemden

$$-2A_2 - 4A_0 = 0 \tag{8}$$

$$-6A_3 - 3A_1 = 0 \tag{9}$$

$$\left[(n^2 - 4)A_n - (n+2)(n+1)A_{n+2}\right] = 0\,, \quad n \geq 2 \tag{10}$$

elde edilir. (10) bağıntısı A_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısıdır. (8) ve (9) 'dan

$$A_2 = -2A_0 \tag{11}$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}A_1 \tag{12}$$

bulunur. Ayrıca (10) yineleme bağıntısı

$$A_{n+2} = \frac{(n-2)}{(n+1)}A_n\,, \quad n \geq 2 \tag{13}$$

şeklinde yazılırsa (11), (12) ve (13)' den diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$A_4 = 0$$

$$A_5 = -\frac{1}{4}A_3 = -\frac{1}{8}A_1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$A_6 = 0$$
$$A_7 = \frac{1}{2}A_5 = -\frac{1}{16}A_1$$
$$\vdots$$

Bulduğumuz katsayılar (1) denkleminde yerlerine koyulursa, denklemin genel çözümü A_0 ve A_1 cinsinden aşağıdaki şekilde

$$Y(t) = A_0 + A_1 t - 2A_0 t^2 - \frac{1}{2}A_1 t^3 - \frac{1}{8}A_1 t^5 - \frac{1}{16}A_1 t^7 + \cdots$$

veya

$$y(x) = A_0 + (x+1)A_1 - 2A_0(x+1)^2 - \frac{1}{2}A_1(x+1)^3 - \frac{1}{8}A_1(x+1)^5 - \frac{1}{16}A_1(x+1)^7 + \cdots$$

$$y(x) = A_0\left[1 - 2(x+1)^2\right] + A_1\left[(x+1) - \frac{1}{2}(x+1)^3 - \frac{1}{8}(x+1)^5 - \frac{1}{16}(x+1)^7 + \cdots\right]$$

bulunur ve bulunan bu genel çözüm $|x+1|<1$ için geçerlidir.

Başlangıç şartları ile verilen aşağıdaki denklemlerin $x_0 = 0$ noktası yakınında seri çözümlerini bulunuz.

(a) $y'' - y' - y = 0$ $\quad y(0) = 1\ ,\ y'(0) = 0$

(b) $y'' + xy' + (2x+1)y = 0$ $\quad y(0) = 1\ ,\ y'(0) = -1$

(c) $(x^2+1)y'' + xy' + 2xy = 0$ $\quad y(0) = 2\ ,\ y'(0) = 3$

(d) $(x^2-1)y'' + 3xy' + xy = 0$ $\quad y(0) = 4\ ,\ y'(0) = 6$

Çözümler :

(a) $y'' - y' - y = 0$

Görüldüğü gibi $x_0 = 0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) , (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci $n = 2$' den , ikinci $n = 1$' den ve üçüncüsü ise $n = 0$' dan başlamaktadır. Ayrıca x ' in üsleri de n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir.Birinci seride n yerine $n+2$ yazılır ve toplamlarda 1 ' den başlatılıp düzenlenirse

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(2a_2-a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_n\right]x^n=0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x^n li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$2a_2-a_0=0 \tag{5}$$

$$(n+2)a_{n+2}-a_n=0\ ,\quad n\geq 1 \tag{6}$$

elde edilir. (6) bağıntısına a_n katsayılarının gerçekleştiği yineleme bağıntısı denir. (5)'den

$$a_2=\frac{1}{2}a_0\ , \tag{7}$$

bulunur. Ayrıca (6) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2}=\frac{1}{(n+2)}a_n\ ,\quad n\geq 1 \tag{8}$$

şeklinde yazılırsa (7) ve (8)'den diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

Çift indisli katsayılar

$$a_2=\frac{1}{2}a_0$$

$$a_4=\frac{1}{2.4}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2n}=\frac{1}{2.4.6...(2n)}a_0\ ,\quad n\geq 1$$

Tek indisli katsayılar

$$a_3=\frac{1}{3}a_1$$

$$a_5=\frac{1}{3.5}a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{2n+1}=\frac{1}{3.5.7...(2n+1)}a_1\ ,\quad n\geq 1$$

Bulduğumuz katsayılar (1) denkleminde yerlerine koyulursa, denklemin genel çözümü a_0 ve a_1 cinsinden aşağıdaki şekilde

$$y(x)=a_0\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.4}x^4+\cdots\right]+a_1\left[x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3.5}x^5+\cdots\right]\ , \tag{9}$$

veya

$$y(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2.4.6...(2n)}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3.5.7...(2n+1)} \tag{10}$$

bulunur. Başlangıç koşulları $y(0)=1$ ve $y'(0)=0$ kullanılarak a_0 ve a_1 katsayılarının değerleri, $a_0=1$ ve $a_1=0$ olarak bulunur. Bu değerler genel çözümde yerlerine koyulursa

$$y(x)=\left[1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.4}x^4+\cdots\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2.4.6...(2n)}$$

bulunur.

(b) $y''+xy'+(2x+1)y=0$

Görüldüğü gibi $x_0=0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0=0$ noktası yakınında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvet serisi çözümü vardır. y nin birici ve ikinci türevleri alınırsa

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1), (2), (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci $n=2$ 'den, ikinci $n=1$ 'den ve üçüncü ve dördüncüsü ise ise $n=0$ 'dan başlamaktadır. Ayrıca, x 'in üsleri de $n+1$, n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. Birinci seride n yerine $n+2$, üçüncü seride ise n yerine $n-1$ yazılır ve toplamlarda 1 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(2a_2+a_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+2a_{n-1}+(n+1)a_n\right]x^n=0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$2a_2+a_0=0 \qquad (5)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+2a_{n-1}+(n+1)a_n=0\ ,\quad n\geq 1 \qquad (6)$$

elde edilir. (6) bağıntısına a_n katsayılarının gerçekleştiği yineleme bağıntısı denir. (5) 'den

$$a_2=-\frac{1}{2}a_0 \qquad (7)$$

bulunur. Ayrıca (6) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2}=-\frac{2}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}-\frac{1}{(n+2)}a_n\ ,\quad n\geq 1 \qquad (8)$$

şeklinde yazılırsa (7) ve (8) 'den diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_3=-\frac{1}{3}a_0-\frac{1}{3}a_1$$

$$a_4=\frac{1}{2.4}a_0-\frac{2}{3.4}a_1$$

$$a_5=\frac{7}{3.4.5}a_0+\frac{1}{3.5}a_1$$

$$\vdots$$

Bulduğumuz katsayılar (1) denkleminde yerlerine koyulursa, denklemin genel çözümü a_0 ve a_1 cinsinden aşağıdaki şekilde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y(x)=a_0\left[1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2.4}x^4+\frac{7}{3.4.5}x^5+\cdots\right]+a_1\left[x-\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3.4}x^4+\frac{1}{3.5}x^5+\cdots\right]$$

bulunur. Başlangıç koşulları $y(0)=1$ ve $y'(0)=-1$ kullanılarak a_0 ve a_1 katsayılarının değerleri, $a_0=1$ ve $a_1=-1$ olarak bulunur. Bu değerler genel çözümde yerlerine koyulursa

$$y(x)=1-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{2.3.4}x^4+\frac{1}{4.5}x^5+\cdots$$

bulunur.

(c) $(x^2+1)y''+xy'+2xy=0$

Görüldüğü gibi $x_0=0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0=0$ noktası yakınında

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1} \qquad (2)$$

ve

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1), (2), (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci ve ikinci $n=2$ 'den, üçüncü $n=1$ 'den ve dördüncüsü ise $n=0$ 'dan başlamaktadır. Ayrıca x 'in üsleri $n+1$, n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci seride n yerine $n+2$, dördüncü seride ise n yerine $n-1$ yazılır ve toplamlar da 2'den başlatılıp düzenlenirse

$$2a_2+(2a_0+a_1+6a_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+n^2a_n+2a_{n-1}\right]x^n=0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x 'li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukarıdaki denklemden

$$2a_2=0 \qquad (5)$$

$$2a_0+a_1+6a_3=0 \qquad (6)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+2a_{n-1}+n^2a_n=0 \quad , \quad n\geq 2 \qquad (7)$$

elde edilir. (7) bağıntısına a_n katsayılarının gerçeklediği yineleme bağıntısı denir. (5) ve (6)' dan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_2 = 0 \qquad (8)$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}a_0 - \frac{1}{6}a_1 \qquad (9)$$

bulunur. Ayrıca (7) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2} = -\frac{2}{(n+2)(n+1)}a_{n-1} - \frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n \quad , \quad n \geq 1 \qquad (10)$$

şeklinde yazılırsa (8) , (9) ve (10)' dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_4 = -\frac{1}{6}a_1 - \frac{1}{3}a_2 = -\frac{1}{6}a_1$$

$$a_5 = \frac{1}{2.5}a_0 - \frac{3}{2.4.5}a_1$$

$$\vdots$$

Bulduğumuz katsayılar (1) denkleminde yerlerine koyulursa, denklemin genel çözümü a_0 ve a_1 cinsinden aşağıdaki şekilde

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2.5}x^5 + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{2.4.5}x^5 + \cdots\right]$$

bulunur. Başlangıç koşulları $y(0) = 2$ ve $y'(0) = 3$ kullanılarak a_0 ve a_1 katsayılarının değerleri $a_0 = 2$ ve $a_1 = 3$ olarak bulunur. Bu değerler genel çözümde yerlerine koyulursa

$$y(x) = 2 + 3x - \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{17}{40}x^5 + \cdots$$

bulunur.

(d) $(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0$

Görüldüğü gibi $x_0 = 0$ noktası denklemin bayağı bir noktasıdır. Bu durumda denklemin $x_0 = 0$ noktası yakınında

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \qquad (3)$$

elde edilir. (1) , (2) , (3) verilen diferansiyel denklemde yerlerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0 \qquad (4)$$

bulunur. Burada toplamalardan birinci ve ikinci $n = 2$ 'den , üçüncü $n = 1$ 'den ve dördüncüsü ise $n = 0$ 'dan başlamaktadır. Ayrıca, x 'in üsleri $n+1$, n ve $n-2$ olmak üzere birbirinden farklıdır. Bu durumda (4) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden düzenlemek gerekir. İkinci seride n yerine $n+2$, dördüncü seride ise n yerine $n-1$ yazılır ve toplamlarda 2'den başlatılıp düzenlenirse

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$-2a_2+(a_0+3a_1-6a_3)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[-(n+2)(n+1)a_{n+2}+n(n+2)a_n+a_{n-1}\right]x^n=0$$

elde ederiz. Bu toplama işlemi yapıldığında bütün x^n li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$-2a_2=0 \tag{5}$$

$$a_0+3a_1-6a_3=0 \tag{6}$$

$$-(n+2)(n+1)a_{n+2}+n(n+2)a_n+a_{n-1}=0\ ,\qquad n\geq 2 \tag{7}$$

elde edilir. (7) bağıntısına a_n katsayılarının gerçekliediği yineleme bağıntısı denir. (5) ve (6)'dan

$$a_2=0 \tag{8}$$

$$a_3=-\frac{1}{6}a_0+\frac{1}{2}a_1 \tag{9}$$

bulunur. Ayrıca (7) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+1)}a_{n-1}+\frac{n}{(n+1)}a_n\ ,\quad n\geq 2 \tag{10}$$

şeklinde yazılırsa (8), (9) ve (10)'dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_4=\frac{1}{12}a_1$$

$$a_5=\frac{1}{8}a_0+\frac{3}{8}a_1$$

$$\vdots$$

Bulduğumuz katsayılar (1) denkleminde yerlerine koyulursa, denklemin genel çözümü a_0 ve a_1 cinsinden aşağıdaki şekilde

$$y(x)=a_0\left[1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}x^5+\cdots\right]+a_1\left[x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{8}x^5+\cdots\right]$$

bulunur. Başlangıç koşulları $y(0)=4$ ve $y'(0)=6$ kullanılarak a_0 ve a_1 katsaylarının değerleri, $a_0=4$ ve $a_1=6$ olarak bulunur. Bu değerler genel çözümde yerlerine koyulursa

$$y(x)=4+6x+\frac{11}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{11}{4}x^5+\cdots$$

bulunur.

Tanım 6.5

(6.7) denklemini tekrar göz önüne alalım. Bu denklem

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{6.8}$$

dır. $x=x_0$ noktası bu denklemin bir tekil noktası olsun.

Eğer

$$(x-x_0)P(x) \qquad \text{ve} \quad (x-x_0)^2Q(x)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

fonksiyonları , x_0 noktasında analitik iseler, x_0 , (6.8) denkleminin bir **düzenli tekil** noktasıdır. Öteki tekil noktalar **düzensiz tekil** noktalar olarak adlandırılır. *

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin her biri için düzenli tekil noktaları bulunuz.

(a) $y''+\dfrac{(1-x)}{x(x+1)(x+2)}y'+\dfrac{(x+3)}{x^2(x+2)^3}y=0$

(b) $y''+\dfrac{2}{x(x-3)^2}y'+\dfrac{(x+3)}{x^2(x-3)^2}y=0$

(c) $y''+\dfrac{2}{x^2(x-2)}y'+\dfrac{(x+1)}{x^2(x-2)^2}y=0$

Çözümler :

(a) $y''+\dfrac{(1-x)}{x(x+1)(x+2)}y'+\dfrac{(x+3)}{x^2(x+2)^3}y=0$ (1)

Tanım 6.4 ' e göre $x_0=0$, $x_0=-1$ ve $x_0=-2$ noktaları (1) denkleminin tekil noktalardır. Bunların düzenli tekil noktalar olup olmadığını incelemek için bu noktaları tek tek göz önüne alalım

i) $x_0=0$ noktası için , Tanım 6.5 ' e göre , $(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2Q(x)$ yazalım

$$xP(x)=\frac{(1-x)}{(x+1)(x+2)} \quad \text{ve} \quad x^2Q(x)=\frac{(x+3)}{(x+2)^3}$$

Burada görüldüğü gibi $x_0=0$ noktası için $xP(x)$ ve $x^2Q(x)$ analitik fonksiyonlardır. Bu durumda Tanım 6.5 ' den $x_0=0$ noktasının düzgün tekil bir nokta olduğu söylenebilir.

ii) $x_0=-1$ noktası için , Tanım 6.5 ' e göre $(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2Q(x)$ yazalım

$$(x+1)P(x)=\frac{(1-x)}{x(x+2)} \quad \text{ve} \quad (x+1)^2Q(x)=\frac{(x+3)(x+1)^2}{x^2(x+2)^3}$$

Burada görüldüğü gibi $x_0=-1$ noktası için $(x+1)P(x)$ ve $(x+1)^2Q(x)$ analitik fonksiyonlardır. Bu durumda , Tanım 6.5 ' den $x_0=-1$ noktasının düzgün tekil bir nokta olduğu söylenebilir.

iii) $x_0=-2$ noktası için , Tanım 6.5 ' e göre $(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2Q(x)$ yazalım

$$(x+2)P(x)=\frac{(1-x)}{x(x+1)} \quad \text{ve} \quad (x+2)^2Q(x)=\frac{(x+3)}{x^2(x+2)}$$

Burada görüldüğü gibi $x_0=-2$ noktası için $(x+2)P(x)$ fonksiyonu analitik olduğu halde $(x+2)^2Q(x)$ fonksiyonunun analitik fonksiyon olmadığı görülür. İki fonksiyonun birlikte analitik olmaması durumunda $x_0=-2$ noktası Tanım 6.5 ' e göre düzensiz tekil noktadır.

---

* Kaynak 12

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(b) $y''+\frac{2}{x(x-3)^2}y'+\frac{(x+3)}{x^2(x-3)^2}y=0$ (1)

Tanım 6.4 ' e göre $x_0=0$ ve $x_0=3$ noktaları (1) denkleminin tekil noktalardır. Bunların düzenli tekil noktalar olup olmadığını incelemek için bu noktaları tek tek göz önüne alalım.
i) $x_0=0$ noktası için, Tanım 6.5 ' e göre $(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2Q(x)$ yazalım

$$xP(x)=\frac{2}{(x-3)^2} \quad \text{ve} \quad x^2Q(x)=\frac{(x+3)}{(x-3)^3}$$

Burada görüldüğü gibi $x_0=0$ noktası için $xP(x)$ ve $x^2Q(x)$ analitik fonksiyonlardır. Bu durumda, Tanım 6.5 'den $x_0=0$ noktasının düzgün tekil bir nokta olduğu söylenebilir.
ii) $x_0=3$ noktası için, Tanım 6.5 'e göre $(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2Q(x)$ yazalım

$$(x-3)P(x)=\frac{2}{x(x-3)} \quad \text{ve} \quad (x-3)^2Q(x)=\frac{(x+3)}{x^2}$$

Burada görüldüğü gibi $x_0=3$ noktası için $(x-3)P(x)$ analitik fonksiyon değildir. Buna karşın $(x-3)^2Q(x)$ analitiktir. İki fonksiyonun birlikte analitik olmaması durumunda $x_0=3$ noktası Tanım 6.5 ' e göre düzensiz tekil noktadır.

(c) $y''+\frac{2}{x^3(x-2)}y'+\frac{(x+1)}{x^2(x-2)^2}y=0$ (1)

Tanım 6.4 ' e göre $x_0=0$ ve $x_0=2$ noktaları (1) denkleminin tekil noktalardır. Bunların düzenli tekil noktalar olup olmadığını incelemek için bu noktaları tek tek göz önüne alalım.
i) $x_0=0$ noktası için, Tanım 6.5 ' e göre $(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2Q(x)$ yazalım

$$xP(x)=\frac{2}{x(x-2)} \quad \text{ve} \quad x^2Q(x)=\frac{(x+1)}{(x-2)^2}$$

Burada görüldüğü gibi $x_0=0$ noktası için $xP(x)$ analitik fonksiyon değildir. Buna karşın $x^2Q(x)$ analitiktir. İki fonksiyonun birlikte analitik olmaması durumunda $x_0=0$ noktası Tanım 6.5 ' e göre düzensiz tekil noktadır.
ii) $x_0=2$ noktası için, Tanım 6.5 ' e göre $(x-x_0)P(x)$ ve $(x-x_0)^2Q(x)$ yazalım.

$$(x-2)P(x)=\frac{2}{x^2} \quad \text{ve} \quad (x-2)^2Q(x)=\frac{(x+1)}{x^2}$$

Burada görüldüğü gibi $x_0=2$ noktası için $(x-2)P(x)$ ve $(x-2)^2Q(x)$ analitik fonksiyonlardır. Bu durumda Tanım 6.5 'den $x_0=2$ noktasının düzgün tekil bir nokta olduğu söylenebilir.

6.3 Düzenli Tekil Nokta Yakınında Çözüm : Frobenius Yöntemi

(6.8) denkleminin, düzenli tekil noktal yakınında seri çözümünün bulunması yöntemini inceleyelim. Bu yöntem; Frobenius Serisi olarak bilinen çözüm verdiğinden, Frobenius Yöntemi olarak tanınır.*

* Kaynak 6

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

x_0 , (6.8) denkleminin düzenli tekil noktası , $p(x)$ ve $q(x)$

$$p(x)=(x-x_0)P(x) \quad , \quad q(x)=(x-x_0)^2Q(x)$$

eşitlikleriyle tanımlanmış fonksiyonlar olsun. Bu durumda (6.8) denklemi

$$(x-x_0)^2y''+(x-x_0)\ p(x)y'+q(x)y=0 \tag{6.9}$$

şeklinde yazılabilir. (6.9) denkleminde $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları , x_0 noktasında analitik olduklarından , bir $I=(x_0-r,x_0+r)$ aralığında

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n \tag{6.10}$$

ve

$$q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n \tag{6.11}$$

Taylor Serileri 'ne açılabilirler. (6.9) denkleminin x_0 noktası yakınında , $s\in R$ ve $a_0(s)\neq 0$ olmak üzere

$$y=y(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)(x-x_0)^{n+s} \tag{6.12}$$

gibi bir seri çözümünün bulunduğunu varsayalım . y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa ;

$$y'=y'(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)(x-x_0)^{n+s-1} \tag{6.13}$$

ve

$$y''=y''(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)(x-x_0)^{n+s-2} \tag{6.14}$$

elde ederiz. y ile türevlerini (6.9) denkleminde yerine koyarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)(x-x_0)^{n+s}+p(x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)(x-x_0)^{n+s}$$
$$+q(x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)(x-x_0)^{n+s}=0$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik (6.10) ve (6.11) eşitliklerini kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+s)(n+s-1)a_n(s)+\sum_{k=0}^{n}\left[(k+s)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k(s)\right\}(x-x_0)^{n+s}=0$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitlikten , $n=0$ için

$$\left[s(s-1)+sp_0+q_0\right]a_0(s)=0 \tag{6.15}$$

ve $n\geq 1$ için

$$\left[(n+s)(n+s-1)-(n+s)p_0+q_0\right]a_n(s)+\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+s)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k(s)=0 \tag{6.16}$$

buluruz. f ve F_n , $n=1,2,3,\ldots$ fonksiyonlarını

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(s)=s^2+(p_0-1)s+q_0 \tag{6.17}$$

ve

$$F_n(s)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k+s)p_{n-k}+q_{n-k}\right]a_k(s) \tag{6.18}$$

ile tanımlarsak, $a_0(s)\neq 0$ olduğuna dikkat ederek, (6.17) ve (6.18) eşitlikleri sırasıyla

$$f(s)=0 \tag{6.19}$$

ve

$$f(n+s)a_n(s)=-F_n(s)\quad,\quad n\geq 1 \tag{6.20}$$

şeklinde yazılabilir. (6.19) eşitliği (6.9) denkleminin **indis denklemi** olarak adlandırılır. İndis denkleminin kökleri (s_1,s_2), (6.9) denkleminin **üsleri** olarak adlandırılır. (6.12) da verilen $y(x,s)$ fonksiyonu yalnız $s=s_1$ veya $s=s_2$ durumunda (6.9) denkleminin bir çözümü olabilir. Genel olarak s_1 ve s_2 reel veya kompleks olabilirler. Biz burada yalnız s_1 ve s_2'nin reel oldukları durumunu inceleyeceğiz ve $s_1\geq s_2$ olduğunu varsayacağız (6.20) denklemi $f(n+s)\neq 0$, durumunda, $a_n(s)$, $n=1,2,\ldots$, katsayılarını, s ve a_0 cinsinden veren bir **yineleme bağıntısıdır.** Sonuç olarak; s, (6.19) indis denkleminin bir kökü ve, $n=1,2,\ldots$ için $f(n+s)\neq 0$ ise, (6.12) de verilen $y=y(x,s)$ fonksiyonu (6.9) denkleminin bir çözümüdür.

Şimdi, seri çözümünün değişik şekillerini inceleyelim. s_1 ve s_2 indis denklemin kökleri olduğundan

$$f(s)=(s-s_1)(s-s_2)$$

yazabiliriz. Bu eşitlikten

$$f(n+s_1)=n(n+s_1-s_2)$$

ve

$$f(n+s_2)=n(n+s_2-s_1)$$

buluruz. $s_1\geq s_2$ varsayıldığından her n için $f(n+s_1)\neq 0$ dır. Dolayısıyla $a_n(s_1)$ katsayıları (6.20) denkleminden belirlenebilir. Böylece (6.9) denkleminin birinci seri çözümü

$$y_1=y(x,s_1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s_1)(x-x_0)^{n+s_1}\ , \tag{6.21}$$

olarak bulunur. Burada $a_0(s_1)$ keyfi bir sabittir. (6.9) denklemi, ikinci mertebeden bir denklem olduğundan (6.21) de verilen çözümden bağımsız bir seri çözümü daha vardır. Bu ikinci çözümü bulmak için aşağıdaki durumları inceleyelim:

(a) $s_1-s_2\neq 0,\ s_1-s_2\neq N$, N tamsayı

(b) $s_1=s_2$

(c) $s_1-s_2=N\neq 0$, N tamsayı

Durum (a) :

$s_1-s_2\neq 0, N$ ise, $n=1,2,\ldots$ için $f(n+s_2)\neq 0$ olduğu açıktır. Bu durumda, $a_0(s_2)$ keyfi bir sabit ve $a_n(s_2)$, $n=1,2,\ldots$, (6.20) denkleminde $a_0(s_2)$ cinsinden elde edilen katsayılar olmak üzere, ikinci seri çözüm

$$y_2=y(x,s_2)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s_2)(x-x_0)^{n+s_2} \tag{6.22}$$

olarak bulunur. Bu çözümün (6.21) de verilenden lineer bağımsız olduğu açıkça görülmektedir. (6.21) ve (6.22) de $a_0(s_1)=a_0(s_2)=1$ seçerek genel çözümü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

şeklinde yazabiliriz. (6.21) ve (6.22) de verilen seri çözümlerin r, (6.10) ve (6.11) serilerinin ortak yakınsaklık yarıçapı olmak üzere, $(x_0, x_0 + r)$ aralığında yakınsak oldukları gösterilebilir. $(x_0 - r, x_0)$ aralığında ise seri çözümler

$$y_1 = |x - x_0|^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1)(x - x_0)^n \tag{6.23}$$

$$y_2 = |x - x_0|^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_2)(x - x_0)^n \tag{6.24}$$

ile verilirler.

Durum (b) :
$s_1 = s_2$ ise, (6.21) ve (6.22) de verilen seri çözümler özdeştirler. İkinci bir lineer bağımsız çözüm elde etmek için (6.9) denklemini

$$P(D)y = 0 \tag{6.25}$$

biçiminde yazalım ve (6.12)' de verilen $y(x,s)$ fonksiyonunu düşünelim. (6.12) de $a_0(s) = c_1$ olsun, $a_n(s)$, $n = 1,2,\ldots$ (6.20) denklemini sağlasın. Bu durumda

$$f(s) = (s - s_1)^2 \tag{6.26}$$

$$P(D)y(x,s) = c_1 f(s)(x - x_0)^s \tag{6.27}$$

buluruz. (6.27) eşitliğinden görüldüğü gibi (6.21) de verilen $y(x,s_1)$, (6.25) denkleminin bir seri çözümüdür. (6.27) denkleminin her iki yanının s ye göre kısmi türevi alınır ve (6.26) eşitliğini kullanırsak

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[P(D)y(x,s)\right] = P(D)\frac{\partial}{\partial s}y(x,s)$$
$$= c_1\left[2(s - s_1) + (s - s_1)^2 \ln(x - x_0)\right](x - x_0)^s$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlik

$$y_2 = \left[\frac{\partial}{\partial s}y(x,s)\right]_{s=s_1}$$

ile tanımlanan y_2 fonksiyonunun, (6.25) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Bu çözüm daha açık olarak

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(s_1)(x - x_0)^{n+s_1} + \ln|x - x_0| \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1)(x - x_0)^{n+s_1}$$

veya, ikinci terimin (6.21) de verilen y_1 e eşit olduğu gözönüne alınırsa

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(s_1)(x - x_0)^{n+s_1} + y_1 \ln(x - x_0) \tag{6.28}$$

olarak yazılabilir. Burada $a_n'(s)$, $a_n(s)$ katsayısının s ye göre türevini göstermektedir.

Durum (c) :
N bir tam sayı olmak üzere $s_1 - s_2 = N$ ise, s_1' e karşılık gelen çözüm (6.21) de verildiği gibi bulunabilir. Ancak

$$f(N + s) = (N + s - s_1)(N + s - s_2) = (s - s_2)(N + s - s_2)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olduğundan $f(N+s_2)=0$, dolayısıyle $a_N(s_2)$ sayısının bulunmasında güçlükle karşılaşılır. Eğer $F_N(s_2)=0$ ise (6.20) denklemi $a_N(s_2)$ için

$$0.a_N(s_2)=0$$

özdeşliğine indirgenir. Buradan $a_N(s_2)$ nin keyfi seçilebileceği görülmektedir. Ayrıca, $n\neq N$ için $f(n+s_2)\neq 0$ olduğundan serinin öteki katsayılarında kolaylıkla belirlenebilir. Böylece s_2 ye
karşılık gelen ikinci çözüm elde edilir. Öte yandan, keyfi bir $a_0(s_2)$ için $F_N(s_2)\neq 0$ ise $a_N(s_2)$ katsayısı (6.20) denkleminden bulunamaz. Bu güçlüğü gidermek için

$$b_n(s)=(s-s_2)a_n(s)$$

fonksiyonunu tanımlıyalım. Bu fonksiyon $s=s_2$ de analitik olduğu gibi (6.20) yineleme bağıntısında sağlar. Ayrıca

$$\tilde{y}(x,s)=(s-s_2)y(x,s)=|x-x_0|^{s_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(s)(x-x_0)^{s_2}$$

olarak tanımlıyalım. $0\le n\le N-1$ için $b_n(s_2)=0$ olduğundan $\tilde{y}_1$ çözümü

$$\tilde{y}_1(x)=|x-x_0|^{s_2}\sum_{n=N}^{\infty}b_n(s_2)(x-x_0)^n=|x-x_0|^{s_2+N}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+N}(s_2)(x-x_0)^n$$

$$=|x-x_0|^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+N}(s_2)(x-x_0)^n \qquad (6.29)$$

şeklinde bulunur. Görüldüğü gibi (6.29) denklemi (6.21) de verilen serinin belirli bir sabitle çarpımıdır. Şöyle ki

$$\tilde{y}_1(x)=\frac{b_N(s_2)}{a_0}y_1$$

dir. Burada y_1 (6.21) denklemiyle verilmiştir. Ayrıca y_1, aşağıdaki formülde $s=s_2$ koyarak elde edilir.

$$\frac{\partial\tilde{y}(x,s)}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left[|x-x_0|^s\sum_{n=0}^{\infty}b_n(s)(x-x_0)^n\right]$$

$$=|x-x_0|^s\sum_{n=0}^{\infty}b_n(s)(x-x_0)^n\ln(x-x_0)+|x-x_0|^s\sum_{n=0}^{\infty}b_n'(s)(x-x_0)^n$$

Böylece $y_2(x)$

$$y_2(x)=\tilde{y}_1(x)\ln|x-x_0|+|x-x_0|^{s_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n'(s_2)(x-x_0)^n \qquad (6.30)$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin, $x_0 = 0$ noktası yakınındaki kuvvet serisi çözümünü Frobenius Yöntemi 'ni kullanarak bulunuz.

(a) $2xy'' + 5(1-2x)y' - 5y = 0$
(b) $3xy'' - (x-2)y' - 2y = 0$
(c) $2xy'' - (1+2x^2)y' - xy = 0$
(ç) $2x^2y'' - 3xy' + (3-x)y = 0$
(e) $xy'' + y' - 2xy = 0$
(f) $4x^2y'' + (1-2x)y = 0$
(g) $(x^2 - x^3)y'' - 3xy' + 4y = 0$
(h) $xy'' + (1-x)y' - y = 0$
(ı) $x^2y'' + 3xy' + (1-x)y = 0$
(i) $xy'' + 2y' - y = 0$
(j) $x^2y'' + xy' - (2x+1)y = 0$
(k) $x^2y'' - 2xy' + (2-x)y = 0$
(l) $xy'' - y = 0$

Çözümler :

(a) $2xy'' + 5(1-2x)y' - 5y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır ve bu nokta yakınında denklemin bir Frobenius çözümü vardır. Seri çözümün

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n(s)x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-1} + 5\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)x^{n+s-1} - 10\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)x^{n+s} - 5\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)x^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada x in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x in kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n = 1$ den başlatılıp düzenlenirse

$$[2s(s-1)+5s]a_0x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[2(n+s-1)(n+s)a_n + 5(n+s)a_n - 10(n-1+s)a_{n-1} - 5a_{n-1}]x^{n+s-1} = 0 \tag{4}$$

elde edilir. (4) denkleminin sağlanması için x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$[2s(s-1)+5s]a_0 = 0 \tag{5}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\left[2(n+s)(n+s-1)a_n+5(n+s)a_n-10(n-1+s)a_{n-1}-5a_{n-1}\right]=0 \quad , \quad n\geq 1 \quad (6)$$

dir. $a_0\neq 0$ olduğundan (5) denkleminden

$$\left[2s(s-1)+5s\right]=0 \quad (7)$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (6) denklemi $n\geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (7) denkleminin kökleri $s_1=0$ ve $s_2=-\frac{3}{2}$ olarak verilir. Burada $s_1-s_2\neq 0$, $s_1-s_2\neq N$, N tam sayı olmak üzere diferansiyel denklemin , s_1 ve s_2 'ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır . (6) yineleme bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$a_n=\frac{5(2n+2s-1)}{(n+s)(2n+2s+3)}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1 \quad (8)$$

elde edilir.

(i) $s_1=0$ için yineleme bağıntısı

$$a_n=\frac{5(2n-1)}{n(2n+3)}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1 \quad (9)$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1=a_0$$
$$a_2=\frac{3.5}{2.7}a_0$$
$$a_3=\frac{3.5^3}{2.3.7.9}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n=\frac{3.5^n}{n!(2n+1)(2n+3)}$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0=1$ alınarak , $s_1=0$'a karşı gelen seri çözüm

$$y_1(x)=1+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!(2n+1)(2n+3)}x^n$$

olarak elde edilir. $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\infty$ olduğundan , seri her x için yakınsaktır.

(ii) $s_2=-\frac{3}{2}$ için , (8) yineleme bağıntısı

$$a_n=\frac{10(n-2)}{n(2n-3)}a_{n-1} \quad , n\geq 1$$

olur. Böylece ikinci seri çözümün katsayıları

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_1 = 10a_0$$
$$a_2 = 0.a_1 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 2$$

olarak elde edilir. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak

$$y_2(x) = x^{-\frac{3}{2}} + 10x^{-\frac{1}{2}}$$

ikinci seri çözüm elde edilir. Bu iki seri çözüm lineer bağımsızdır ve diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1\left[\ 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!(2n+1)(2n+3)} x^n\ \right] + c_2\left[\ x^{-\frac{3}{2}} + 10x^{-\frac{1}{2}}\ \right]$$

ile verilir.

(b) $3xy'' - (x-2)y' - 2y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır ve bu nokta yakınında denklemin bir Frobenius çözümü vardır. Seri çözümün

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

verildiğini varsayalım. y 'nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n(s) x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n(s) x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine konursa

$$3\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1}$$
$$-2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0 \tag{4}$$

bulunur. Burada x in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x in kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n = 1$ den başlatılıp düzenlenirse

$$[3s(s-1) + 2s] a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[3(n+s)(n+s-1) a_n - (n+s-1) a_{n-1} \right.$$
$$\left. + 2(n+s) a_n - 2a_{n-1}\ \right] x^{n+s-1} = 0 \tag{5}$$

elde edilir. (5) denkleminin sağlanması için x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$[3s(s-1) + 2s] a_0 = 0 \tag{6}$$

$$\left[3(n+s)(n+s-1) a_n - (n+s-1) a_{n-1} + 2(n+s) a_n - 2a_{n-1}\ \right] = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{7}$$

dir.. $a_0 \neq 0$ olduğundan (6) denkleminden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$s(3s-1)=0 \tag{8}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (7) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (8) denkleminin kökleri $s_1 = 0$ ve $s_2 = \frac{1}{3}$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 \neq 0, N$ oluğundan , iferansiyel denklemin , s_1 ve s_2 ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır . (7) yineleme bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$a_n = \frac{(n+s+1)}{(n+s)(3n+3s-1)} a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \tag{9}$$

elde edilir.

(i) $s_1 = 0$ için yineleme bağıntısı ;

$$a_n = \frac{(n+1)}{n(3n-1)} a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \tag{10}$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1 = a_0 \quad ,$$
$$a_2 = \frac{3}{2.5} a_0 \, ,$$
$$a_3 = \frac{1}{4.5} a_0 \, ,$$
$$\vdots$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak , $s_1 = 0$ için ; seri çözüm ,

$$y_1(x) = (1 + x + \frac{3}{10} x^2 + \frac{1}{20} x^3 + \cdots)$$

olarak elde edilir.

(ii) $s_2 = \frac{1}{3}$ için yineleme bağıntısı ;

$$a_n = \frac{(3n+4)}{3n(3n+1)} a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \tag{11}$$

olur. Böylece ikinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan ,

$$a_1 = \frac{7}{3.4} a_0$$
$$a_2 = \frac{5}{36} a_0 \, ,$$
$$a_3 = \frac{13}{18.36} a_0 \, .$$
$$\vdots$$

olarak elde edilir. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak ,

$s_2 = \frac{1}{3}$ için ; seri çözüm ,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. Bu iki seri çözüm lineer bağımsızdır ve diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1\left(1 + x + \frac{3}{10}x^2 + \cdots\right) + c_2 x^{1/2}\left(1 + \frac{7}{12}x + \frac{5}{36}x^2 + \cdots\right)$$

olarak bulunur.

(c) $2xy'' - (1+2x^2)y' - xy = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır ve bu nokta yakınında denklemin bir Frobenius çözümü vardır. Seri çözümün

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

verildiğini varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s+1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s+1} = 0 \tag{4}$$

bulunur. Burada x in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x in kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n=2$ den başlatılıp düzenlenirse

$$\left[2s(s-1)\right]a_0 x^{s-1} + 2s(s+1)a_1 x^s - sa_0 x^{s-1} - (s+1)a_1 x^s + \sum_{n=2}^{\infty}\left[2(n+s)(n+s-1)a_n - (n+s)a_n - 2(n+s-2)a_{n-2} - a_{n-2}\right]x^{n+s-1} = 0 \tag{5}$$

elde edilir. (5) denkleminin sağlanması için x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$\left[2s^2 - 3s\right]a_0 = 0 \tag{6}$$

$$\left[2s^2 + s - 1\right]a_1 = 0 \tag{7}$$

$$\left[2(n+s)(n+s-1)a_n - (n+s)a_n - 2(n+s-2)a_{n-2} - a_{n-2}\right] = 0 \quad , \quad n \geq 2 \tag{8}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (6) denkleminden

$$s(2s-3) = 0 \tag{9}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. (7) denkleminin kökleri $s_1 = 0$ ve $s_2 = \frac{3}{2}$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 \neq 0, N$ olduğundan diferansiyel denklemin, s_1 ve s_2 ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır. (8) yineleme bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$(n+s)(2n+2s-3)a_n + (-2n-2s+3)a_{n-2} = 0$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n+s}\ , \qquad n \geq 2 \tag{10}$$

elde edilir.

(i) $s_1 = 0$ için (7) bağıntısından $a_1 = 0$ bulunur. Ayrıca yineleme bağıntısından birinci seri çözümün katsayıları

$$a_2 = \frac{1}{2}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_1 = 0\ , \quad a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = 0$$

$$a_4 = \frac{1}{2.4}a_0$$

$$a_6 = \frac{1}{2.4.6}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n n!}a_0\ , \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak, $s_1 = 0$' a karşı gelen seri çözüm

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

olarak elde edilir.

(ii) $s_2 = \frac{3}{2}$ için yineleme bağıntısı

$$a_n = \frac{2}{2n+3}a_{n-2}\ , \ n \geq 2$$

olur. Böylece ikinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_2 = \frac{2}{7}a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{3}a_1 = 0\ , \quad a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = a_{2n+1} = 0$$

$$a_4 = \frac{2^2}{7.11}a_0$$

$$a_6 = \frac{2^3}{7.11.15}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2n} = \frac{2^n}{7.11.15\ldots(4n+3)}a_0\ , \ (n = 1,2,3,\ldots)$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak, $s_2 = \frac{3}{2}$ 'ye karşı gelen seri çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y_2(x) = x^{3/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+3/2}}{7.11.15....(4n+3)}$$

olarak bulunur.Bu iki seri çözüm lineer bağımsızdır ve diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}\right] + c_2\left[x^{3/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n+3/2}}{7.11.15....(4n+3)}\right]$$

ile verilir.

(ç) $2x^2y'' - 3xy' + (3-x)y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır ve bu nokta yakınında denklemin bir Frobenius çözümü vardır. Seri çözümün

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

verildiğini varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} + 3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s+1} = 0 \tag{4}$$

bulunur. Burada x in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x in kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n=1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$\left[2s(s-1) - 3s + 3\right]a_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+s)(n+s-1)a_n - 3(n+s)a_n + 3a_n - a_{n-1}\right]x^{n+s} = 0 \tag{5}$$

elde edilir. (5) denkleminin sağlanması için x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$\left[2s^2 - 5s + 3\right]a_0 = 0 \tag{6}$$

$$\left[2(n+s)(n+s-1)a_n - 3(n+s)a_n + 3a_n - a_{n-1}\right] = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{7}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (6) denkleminden

$$(2s^2 - 5s + 3) = 0 \tag{8}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (7) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (8) denkleminin kökleri $s_1 = \frac{3}{2}$ ve $s_2 = 1$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 \neq 0, N$, olmak üzere , diferansiyel denklemin , s_1 ve s_2 ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır .

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(i) $s_1=\frac{3}{2}$ için yineleme bağıntısı

$$a_n=\frac{1}{n(2n+1)}a_{n-1}\ ,\quad n\geq 1$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1=\frac{1}{1.3}a_0=\frac{2}{3!}a_0$$

$$a_2=\frac{1}{1.2.3.5}a_0=\frac{4}{5!}a_0$$

$$a_3=\frac{1}{1.2.3.3.5.7}a_0=\frac{8}{7!}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{2^n}{(2n+1)!}a_0$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0=1$ alınarak, $s_1=\frac{3}{2}$ 'ye karşı gelen seri çözüm

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}x^{n+3/2}$$

olarak elde edilir.

(ii) $s_2=1$ için yineleme bağıntısı

$$a_n=\frac{1}{n(2n-1)}\ ,\quad n\geq 1$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1=a_0$$

$$a_2=\frac{1}{2.3}a_0=\frac{4}{4!}a_0$$

$$a_3=\frac{1}{2.3.3.5}a_0=\frac{8}{6!}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{2^n}{(2n)!}a_0$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0=1$ alınarak, $s_2=1$'e karşı gelen seri çözüm

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^{n+1}$$

olarak bulunur. Bu iki seri çözüm lineer bağımsızdır ve diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y\ (x)=c_1x^{3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}x^n+c_2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^n$$

ile verilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(d) $2x(x+1)y'' + 3(x+1)y' - y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır ve bu nokta yakınında denklemin bir Frobenius çözümü vardır. Seri çözümün

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

verildiğini varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n(s) x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n(s) x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$$
$$+3\sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0 \tag{4}$$

bulunur. Burada x in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n = 1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(2s^2 + s) a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+s)(2n+2s+1) a_n + (n+s-1)(2n+2s-1) a_{n-1} \right] = 0 \tag{5}$$

elde edilir. (5) denkleminin sağlanması için x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$s(2s+1) a_0 = 0 \tag{6}$$

$$\left[(n+s)(2n+2s+1) a_n + (n+s-1)(2n+2s-1) a_{n-1} \right] = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{7}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (6) denkleminden,

$$s(2s+1) = 0 \tag{8}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (7) denklemi $n \geq 1$ için denklemin

yineleme bağıntısıdır. (8) denkleminin kökleri $s_1 = 0$ ve $s_2 = -\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 \neq 0, N$, olmak üzere, diferansiyel denklemin, s_1 ve s_2 ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır.

(i) $s_1 = 0$ için yineleme bağıntısı

$$a_n = -\frac{(2n-3)}{(2n+1)} a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1 = \frac{1}{1.3} a_0$$

$$a_2 = -\frac{1}{3.5} a_0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_3 = \frac{1}{5.7}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{1}{4n^2-1}a_0$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak, $s_1 = 0$ 'a karşı gelen seri çözüm

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^n$$

elde edilir.

(ii) $s_2 = -\frac{1}{2}$ için yinelenme bağıntısı

$$a_n = -\frac{(2n-3)(n-1)-1}{n(2n-1)}a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1 = a_0$$
$$a_2 = 0.a_0 = 0$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0 \quad , \quad n \geq 2$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (1) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak, $s_2 = -\frac{1}{2}$' a karşı gelen seri çözüm

$$y_2(x) = x^{-1/2} + x^{1/2}$$

bulunur. Bu iki seri çözüm lineer bağımsızdır ve diferansiyel denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^n\right] + c_2\left[x^{-1/2} + x^{1/2}\right]$$

ile verilir.

(e) $xy'' + y' - 2xy = 0$ denkleminin

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım, y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n(s)x^{n+s-1} \qquad (2)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-2} \qquad (3)$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+1} = 0 \qquad (4)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Burada x in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n=2$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$s^2a_0x^{s-1}+(s+1)^2a_1x^s+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+s)^2a_n-2a_{n-2}\right]x^{n+s-1}=0 \qquad (5)$$

elde edilir. (5) denkleminin sağlanması için x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$s^2a_0=0 \qquad (6)$$

$$(s+1)^2a_1=0 \qquad (7)$$

$$(n+s)^2a_n-2a_{n-2}=0 \quad , \quad n\geq 2 \qquad (8)$$

dir. $a_0\neq 0$ olduğundan (6) denkleminden

$$s^2=0 \qquad (9)$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (8) denklemi $n\geq 2$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (9) denkleminin kökleri $s_1=s_2=0$ olarak bulunur. Burada $s_1-s_2=0$ olduğundan , diferansiyel denklemin seri çözümleri ,

$$y_1=y(x,s_1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s_1)x^{n+s_1} \qquad (10)$$

$$y_2=y(x,s_2)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}a_n'(s_1)x^{n+s_1} \qquad (11)$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$ ve $a_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz. Ayrıca (7) denkleminden $a_1=0$ olduğu görülür. $a_n(s)$ katsayısını bulmak için (8) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_2(s)=\frac{2a_0}{(2+s)^2}$$

$$a_1=a_3=a_5=\cdots=a_{2n+1}=0$$

$$a_4(s)=\frac{2a_2}{(4+s)^2}=\frac{2^2a_0}{(2+s)^2(4+s)^2}$$

$$a_6(s)=\frac{2a_4}{(6+s)^2}=\frac{2^3a_0}{(2+s)^2(4+s)^2(6+s)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_{2n}(s)=\frac{2^na_0}{(2+s)^2(4+s)^2(6+s)^2\ldots(2n+s)^2} \qquad (12)$$

yazalım. (12) yineleme bağıntısında $s=s_1=0$ ve $a_0=1$ koyarsak ,

$$a_{2n}=\frac{2^n}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2}=\frac{1}{2^n(n!)^2} \qquad (13)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Böylece birinci seri çözüm

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n (n!)^2} \tag{14}$$

elde edilir. $a_n'(s)$ katsayısını bulmak için (13) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır,

$$\ln a_{2n}(s) = n \ln 2 - 2\left[\ln(2+s) + \ln(4+s) + \ln(s+6) + \cdots + \ln(2n+s)\right]$$

Bu eşitliğin her iki yanının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{a_{2n}'(s)}{a_{2n}(s)} = -2\left[\frac{1}{2+s} + \frac{1}{4+s} + \frac{1}{6+s} + \cdots + \frac{1}{2n+s}\right] \tag{15}$$

bulunur. (15) de $s = s_1 = 0$ ve $a_{2n}(s)$ de (13)' den yerine koyulursa

$$a_{2n}'(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right] \frac{1}{2^n (n!)^2}$$

veya

$$a_{2n}'(0) = -\frac{1}{2^n (n!)^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = -\frac{1}{2^n (n!)^2}\phi(n) \tag{16}$$

elde edilir. Burada $\phi(n) = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$ olarak tanımlanır. Böylece (11) denklemi ile verilen ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{2^n (n!)^2} x^{2n}$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir.

(f) $4x^2 y'' + (1-2x)y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n(s) x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n(s) x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$4\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+1} = 0 \tag{4}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n=1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(4s^2-4s+1)a_0x^s+\sum_{n=1}^{\infty}\left[4(n+s)(n+s-1)a_n+a_n-2a_{n-1}\right]x^{n+s}=0 \qquad (5)$$

elde edilir. (5) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$(4s^2-4s+1)a_0=(2s-1)^2a_0=0 \qquad (6)$$

$$(2n+2s-1)^2a_n-2a_{n-1}=0 \quad , \quad n\geq 1 \qquad (7)$$

dir. $a_0\neq 0$ olduğundan (6) denkleminden

$$(2s-1)^2=0 \qquad (8)$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (7) denklemi $n\geq 1$ için denklemin

yineleme bağıntısıdır. (8) denkleminin kökleri $s_1=s_2=\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Burada $s_1-s_2=0$ olduğundan, diferansiyel denklemin seri çözümleri,

$$y_1=y(x,s_1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s_1)x^{n+s_1} \qquad (9)$$

$$y_2=y(x,s_2)=y_1(x)\ln x+\sum_{n=0}^{\infty}a_n'(s_1)x^{n+s_1} \qquad (10)$$

ile verilir. $a_n(s)$ katsayısını bulmak için (7) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_1(s)=\frac{2a_0}{(2s+1)^2}$$

$$a_2(s)=\frac{2a_1}{(2s+3)^2}=\frac{2^2a_0}{(2s+1)^2(2s+3)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_n(s)=\frac{2^na_0}{(2s+1)^2(2s+3)^2\ldots(2s+2n-1)^2} \quad , \quad n\geq 1 \qquad (11)$$

yazalım. (11) yineleme bağıntısında $s=s_1=\frac{1}{2}$ ve $a_0=1$ koyarsak,

$$a_n=\frac{2^n}{2^2.4^2.6^2\ldots(2n)^2}$$

veya $$a_n=\frac{1}{2^n(n!)^2} \qquad (12)$$

bulunur. Böylece birinci seri çözüm

$$y_1(x)=x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n!)^2} \qquad (13)$$

elde edilir. $a_n'(s)$ katsayısını bulmak için (11) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\ln a_n(s) = n\ln 2 - 2[\ln(2s+1) + \ln(2s+3) + \cdots + \ln(2s+2n-1)]$$

Bu eşitliğin her iki yanının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{a_n'(s)}{a_n(s)} = -2\left[\frac{2}{2s+1} + \frac{2}{2s+3} + \cdots \frac{2}{2s+2n-1}\right] \tag{14}$$

bulunur. (14) de $s = s_1 = \frac{1}{2}$ ve $a_n(s)$ de (12)' den yerine koyulursa

$$a_n'(\tfrac{1}{2}) = -\frac{2}{2^n(n!)^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = -\frac{1}{2^{n-1}(n!)^2}\phi(n) \tag{15}$$

elde edilir. Burada $\phi(n) = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$ olarak tanımlanır. Böylece ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{2^{n-1}(n!)^2}x^n$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir

(g) $(x^2 - x^3)y'' - 3xy' + 4y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \quad , \; a_0 \neq 0 \tag{1}$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s+1} - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} + 4\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n = 1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(s-2)^2 a_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\,(n+s-2)a_n - (n+s-1)(n+s-2)a_{n-1}\,\right]x^{n+s} = 0 \tag{4}$$

elde edilir. (4) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$(s-2)^2 a_0 = 0 \tag{5}$$

$$(n+s-2)a_n - (n+s-1)a_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{6}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (5) denkleminden

$$(s-2)^2 = 0 \tag{7}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (6) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (7) denkleminin kökleri $s_1 = s_2 = 2$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 = 0$ olduğundan , diferansiyel denklemin seri çözümleri ,

$$y_1 = y(x, s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1) x^{n+s_1} \tag{8}$$

$$y_2 = y(x, s_2) = y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(s_1) x^{n+s_1} \tag{9}$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$ ve $a_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz.

$a_n(s)$ katsayısını bulmak için (6) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_1(s) = \frac{s a_0}{(s-1)}$$

$$a_2(s) = \frac{(s+1)a_1}{s} = \frac{(s+1)a_0}{(s-1)}$$

$$\vdots$$

$$a_n(s) = \frac{(s+n-1)a_0}{(s-1)} \quad , \quad n \geq 1 \tag{10}$$

yazalım. (10) yineleme bağıntısında $s = s_1 = 2$ ve $a_0 = 1$ koyarsak ,

$$a_n(2) = (n+1) \tag{11}$$

bulunur. Böylece birinci seri çözüm

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \tag{12}$$

elde edilir. $a_n'(s)$ katsayısını bulmak için (10) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln a_n(s) = \ln(s+n-1) - \ln(s-1) \tag{13}$$

Bu eşitliğin her iki yanının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{a_n'(s)}{a_n(s)} = \left[\frac{1}{(s+n-1)} - \frac{1}{s-1} \right] \tag{14}$$

buluruz. (14) de $s = s_1 = 2$ ve $a_n(s)$ de (11)' den yerine koyulursa

$$a_n'(2) = -(n+1)\frac{n}{(n+1)} = -n$$

elde edilir. Böylece (9) denklemi ile verilen ikinci çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - x^2\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir.

(b) $xy'' + (1-x)y' - y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n(s) x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n(s) x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine konursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n = 1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$s^2 a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+s)^2 a_n - (n+s-1) a_{n-1} \right] x^{n+s-1} = 0 \tag{4}$$

elde edilir. (4) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$s^2 a_0 = 0 \tag{5}$$

$$(n+s)^2 a_n - (n+s-1) a_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{6}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (5) denkleminden

$$s^2 = 0 \tag{7}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (6) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (7) denkleminin kökleri $s_1 = s_2 = 0$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 = 0$ olduğundan, diferansiyel denklemin seri çözümleri,

$$y_1 = y(x, s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1) x^{n+s_1} \quad , \tag{8}$$

$$y_2 = y(x, s_2) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(s_1) x^{n+s_1} \tag{9}$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$ ve $a_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz. $a_n(s)$ katsayısını bulmak için (6) bağıntısını art arda kullanarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_1(s)=\frac{a_0}{(s+1)}$$

$$a_2(s)=\frac{a_1}{(s+2)}=\frac{a_0}{(s+1)(s+2)}$$

$$\vdots$$

$$a_n(s)=\frac{a_0}{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}\quad,\quad n\geq 1 \tag{10}$$

yazalım. (10) yineleme bağıntısında $s=s_1=0$ ve $a_0=1$ koyarsak,

$$a_n(0)=\frac{a_0}{n!}\quad,\quad n\geq 1 \tag{11}$$

bulunur. Böylece birinci seri çözüm

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{12}$$

elde edilir. $a_n'(s)$ katsayısını bulmak için (10) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln a_n(s)=-\left[\ln(s+1)+\ln(s+2)+\cdots\ln(s+n)\right]$$

Bu eşitliğin her iki yanının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{a_n'(s)}{a_n(s)}=-\left[\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+2}+\cdots+\frac{1}{s+n}\right] \tag{13}$$

bulunur. (13) de $s=s_1=2$ ve $a_n(s)$'de (11)'den yerine koyulursa

$$a_n'(0)=-\frac{1}{n!}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]=-\frac{\phi(n)}{n!}$$

elde edilir. Burada $\phi(n)=\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]$ olarak tanımlanır. Böylece (9) denklemiyle verilen ikinci çözüm

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n!}x^n$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

ile verilir.

(i) $x^2y''+3xy'+(1-x)y=0$

$x_0=0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n(s)x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine konursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+1} = 0$$

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n=1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(s+1)^2 a_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+s+1)^2 a_n - a_{n-1} \right] x^{n+s} = 0 \tag{4}$$

elde edilir. (4) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$(s+1)^2 a_0 = 0 \tag{5}$$

$$(n+s+1)^2 a_n - a_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{6}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (5) denkleminden

$$(s+1)^2 = 0 \tag{7}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (6) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (7) denkleminin kökleri $s_1 = s_2 = -1$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 = 0$ olduğundan , diferansiyel denklemin seri çözümleri ,

$$y_1 = y(x,s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1)x^{n+s_1} \tag{8}$$

$$y_2 = y(x,s_2) = y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(s_1)x^{n+s_1} \tag{9}$$

ile verilir.Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$ ve $a_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz. $a_n(s)$ katsayısını bulmak için (6) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_1(s) = \frac{a_0}{(s+2)^2}$$

$$a_2(s) = \frac{a_1}{(s+3)^2} = \frac{a_0}{(s+2)^2(s+3)^2}$$

$$\vdots$$

$$a_n(s) = \frac{a_0}{(s+2)^2(s+3)^2 \ldots (s+n+1)^2} \quad , \quad n \geq 1 \tag{10}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yazalım. (10) yineleme bağıntısında $s = s_1 = -1$ ve $a_0 = 1$ koyarsak,

$$a_n(-1) = \frac{1}{1^2 2^2 3^2 \cdots n^2} = \frac{1}{(n!)^2}, \quad n \geq 1 \tag{11}$$

bulunur. Böylece birinci seri çözüm

$$y_1(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} \tag{12}$$

elde edilir. $a_n'(s)$ katsayısını bulmak için (10) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln a_n(s) = -2\left[\ln(s+2) + \ln(s+3) + \cdots + \ln(s+n+1)\right]$$

Bu eşitliğin her iki yanının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{a_n'(s)}{a_n(s)} = -2\left[\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \cdots + \frac{1}{s+n+1}\right] \tag{13}$$

bulunur. (13) de $s = s_1 = -1$ ve $a_n(s)$ de (11)'den yerine koyulursa

$$a_n'(-1) = -\frac{2}{(n!)^2}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = -\frac{2\phi(n)}{(n!)^2} \tag{14}$$

elde edilir. Burada $\phi(n) = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right]$ olarak tanımlanır. Böylece (9) denklemiyle verilen ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{(n!)^2} x^n$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir.

(i) $x\,y'' + 2y' - y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) x^{n+s}, \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n(s) x^{n+s-1} \tag{2}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n(s) x^{n+s-2} \tag{3}$$

bulunur. y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n x^{n+s-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n=1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$s(s+1)\ a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+s)(n+s+1)\ a_n - a_{n-1}\right]x^{n+s-1} = 0 \qquad (4)$$

elde edilir. (4) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$s(s+1)\ a_0 = 0 \qquad (5)$$

$$(n+s)(n+s+1)\ a_n - a_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 1 \qquad (6)$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (5) denkleminden

$$s(s+1) = 0 \qquad (7)$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (6) denklemi $n \geq 1$ için denklemin
yineleme bağıntısıdır. (7) denkleminin kökleri $s_1 = 0$ ve $s_2 = -1$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 = N = 1$ olduğundan, diferansiyel denklemin seri çözümleri,

$$y_1 = y(x, s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1)x^{n+s_1} \qquad (8)$$

$$y_2 = y(x, s_2) = \frac{b_N}{a_0} y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n'(s_2)x^{n+s_2} \qquad (9)$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$, b_N ve $b_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz Önce birinci çözüm için $a_n(s)$ katsayısı (6) bağıntısından

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+s)(n+s+1)} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (10)$$

bulunur. (10) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_1(s) = \frac{a_0}{(s+1)(s+2)}$$

$$a_2(s) = \frac{a_1}{(s+2)(s+3)} = \frac{a_0}{(s+1)(s+2)^2(s+3)}$$

$$\vdots$$

$$a_n(s) = \frac{a_0}{(s+1)(s+2)^2(s+3)^2\ldots(s+n)^2(s+n+1)} \quad , \quad n \geq 2 \qquad (11)$$

yazılır ve (11) bağıntısında $s = s_1 = 0$ ve $a_0 = 1$ konulduğunda

$$a_n(0) = \frac{1}{1.2^2.3^2\ldots n^2(n+1)} = \frac{1}{(n!)(n+1)!} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (12)$$

belirlenir. Böylece $s_1 = 0$ için birinci seri çözüm

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)\ (n+1)!} \qquad (13)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. $s = s_2 = -1$ için bulunacak ikinci seri çözüm logarimiktir ve b_N, $b_n(s)$ ve $b_n'(s)$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Aşağıda gösterildiği gibi $b_n(s)$'i tanımlayalım.

$$b_0(s) = (s+1)a_0 \tag{14}$$

$$b_1(s) = (s+1)a_1(s) = \frac{a_0}{s+2} \tag{15}$$

$$\vdots$$

$$b_n(s) = (s+1)a_n(s) = \frac{a_0}{(s+2)^2(s+3)^2\ldots(s+n)^2(s+n+1)} \quad , \; n \geq 2 \tag{16}$$

(16) yineleme bağıntısında $s = s_2 = -1$ ve $a_0 = 1$ koyulursa,

$$b_n(-1) = \frac{1}{1^2.2^2.3^2\ldots(n-1)^2.n} = \frac{1}{(n-1)!n!} \quad , \; n \geq 2 \tag{17}$$

belirlenir. Görüldüğü gibi (14), (15) ve (17) denklemleriyle verilen fonksiyonlar $s = s_2 = -1$ için analitiktirler. Bu fonksiyonlardan $b_0(s)$ ve $b_1(s)$ in türevleri alınırsa

$$b_0'(-1) = a_0 \tag{18}$$

$$b_1'(-1) = -\frac{a_0}{(s+2)^2} \tag{19}$$

bulunur $b_n'(s)$'i bulmak için (16) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln b_n(s) = \ln a_0 - 2\left[\ln(s+2) + \ln(s+3) + \cdots \ln(s+n)\right] - \ln(s+n+1)$$

Bu eşitliğin her iki tarafının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{b_n'(s)}{b_n(s)} = -2\left[\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \cdots + \frac{1}{s+n}\right] - \frac{1}{s+n+1} \tag{20}$$

bulunur. (20) de $s = s_2 = -1$ ve $b_n(s)$ de (17)'den yerine koyulursa

$$b_n'(-1) = \frac{1}{(n-1)!n!}\left[-2(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}) - \frac{1}{n}\right]$$

$$b_n'(-1) = -\frac{\phi(n-1)+\phi(n)}{(n-1)!n!} \quad , \; n \geq 2 \tag{21}$$

elde edilir. Burada $\phi(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ ve $\phi(n-1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$ olarak tanımlanırlar. Böylece (9) denklemiyle verilen ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\phi(n-1)+\phi(n)}{(n-1)!n!} x^n\right]$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir.

(j) $x^2y'' + xy' - (2x+1)y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) x^{n+s} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{1}$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alındıktan sonra, y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n x^{n+s} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n=1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(s^2-1)\, a_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[(n+s)^2 - 1 \right] a_n - 2a_{n-1} \right] x^{n+s} = 0 \tag{2}$$

elde edilir. (2) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır.

$$(s^2-1)\, a_0 = 0 \tag{3}$$

$$\left[(n+s)^2 - 1 \right] a_n - 2a_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{4}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (3) denkleminden

$$(s^2-1) = 0 \tag{5}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (4) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (5) denkleminin kökleri $s_1 = 1$ ve $s_2 = -1$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 = N = 2$ olduğundan, diferansiyel denklemin seri çözümleri,

$$y_1 = y(x,s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1) x^{n+s_1} \tag{6}$$

$$y_2 = y(x,s_2) = \frac{b_N}{a_0} y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n'(s_2) x^{n+s_2} \tag{7}$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$, b_N ve $b_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz. Önce birinci çözüm için $a_n(s)$ katsayısı (4) bağıntısından

$$a_n(s) = \frac{2a_{n-1}}{(n+s-1)(n+s+1)} \, , \quad n \geq 1 \tag{8}$$

bulunur. (8) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_1(s) = \frac{2a_0}{s(s+2)}$$

$$a_2(s) = \frac{2a_1}{(s+1)(s+3)} = \frac{2^2 a_0}{s(s+1)(s+2)\,(s+3)} \, ,$$

$$\vdots$$

$$a_n(s) = \frac{2^n a_0}{s(s+1)\left[(s+2)^2(s+3)^2 \ldots (s+n-1)^2\right](s+n)(s+n+1)} \quad , \quad n \geq 3 \tag{9}$$

yazılır ve (9) bağıntısında $s = s_1 = 1$ ve $a_0 = 1$ konulduğunda

$$a_n(1) = \frac{2^{n+1}}{(n!)(n+2)!} \quad , \quad n \geq 1 \tag{10}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

belirlenir. Böylece $s_1 = 1$ için birinci seri çözüm

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n!)(n+2)!} \tag{11}$$

bulunur. $s = s_2 = -1$ için bulunacak ikinci seri çözüm logarimiktir ve b_N, $b_n(s)$ ve $b_n'(s)$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Aşağıda gösterildiği gibi $b_n(s)$'i tanımlayalım.

$$b_0(s) = (s+1)a_0 \tag{12}$$

$$b_1(s) = (s+1)a_1(s) = \frac{2a_0(s+1)}{s(s+2)} \tag{13}$$

$$b_2(s) = (s+1)a_2(s) = \frac{2^2 a_0}{s(s+2)(s+3)} \tag{14}$$

$$\vdots$$

$$b_n(s) = (s+1)a_n(s) = \frac{2^n a_0}{s\left[(s+2)^2(s+3)^2 \ldots (s+n-1)^2\right](s+n)(s+n+1)} \quad , \; n \geq 3 \tag{15}$$

(15) yineleme bağıntısında $s = s_2 = -1$ ve $a_0 = 1$ koyulursa,

$$b_n(-1) = -\frac{2^n}{(n-2)!n!} \quad , \; n \geq 3 \tag{16}$$

bulunur. Görüldüğü gibi (12), (13) ve (14) ve (16) denklemleriyle verilen fonksiyonlar $s = s_2 = -1$ için analitiktirler. Bu fonksiyonlardan $b_0(s)$, $b_1(s)$ ve $b_2(s)$'in türevleri alınırsa

$$b_0'(s) = a_0 \tag{17}$$

$$b_1'(s) = -\frac{2a_0(s^2+2s+2)}{s^2(s+2)^2} \tag{18}$$

$$b_2'(s) = -\frac{4a_0(3s^2+10s+6)}{s^2(s+2)^2(s+3)^2} \tag{19}$$

bulunur. $b_n'(s)$ 'i bulmak için (15) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln b_n(s) = n\ln 2 + \ln a_0 - \ln s - \ln(s+n) - \ln(s+n+1) - 2\left[\ln(s+2) + \ln(s+3) + \cdots + \ln(s+n-1)\right]$$

Bu eşitliğin her iki tarafının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{b_n'(s)}{b_n(s)} = -\frac{1}{s} - \frac{1}{s+n} - \frac{1}{s+n+1} - 2\left[\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \cdots + \frac{1}{s+n-1}\right] \tag{20}$$

bulunur. (20) denkleminde $s = s_2 = -1$ ve $b_n(s)$ de (16)' dan yerine koyulursa

$$b_n'(-1) = \frac{2^n a_0}{(n-2)!n!}\left\{\left[1 - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right] - 2\left[1 + \cdots + \frac{1}{n-2}\right]\right\}$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$b_n'(-1)=\frac{2^n\left[\phi(n)+\phi(n-2)-1\right]}{(n-2)!n!} \quad , \quad n\geq 3 \tag{21}$$

elde edilir. Burada

$$\phi(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \phi(n-2)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}$$

olarak tanımlanırlar. (7) denklemiyle tanımlanan ikinci çözüm

$$y_2=\frac{b_N}{a_0}y_1(x)\ln x+b_0'(s_2)x^{s_2}+b_1'(s_2)x^{s_2+1}+b_2'(s_2)x^{s_2+2}+\sum_{n=3}^{\infty}b_n'(s_2)x^{n+s_2} \tag{22}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$b_N(s_2)=b_2(-1)=-2$$

$$b_1'(s_2)=b_1'(-1)=-2a_0$$

$$b_2'(s_2)=b_2'(-1)=a_0$$

dir. Ayrıca $a_0=1$ alınırsa ikinci çözüm

$$y_2(x)=-2y_1(x)\ln x+x^{-1}\left[1-2x+x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left[2^n\phi(n)+\phi(n-2)-1\right]}{(n-2)!n!}x^n\right]$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

ile verilir.

(k) $x^2y''-2xy'+(2-x)y=0$

$x_0=0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında denklemin

$$y=y(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)x^{n+s} \quad , \quad a_0\neq 0 \tag{1}$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alındıktan sonra, y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine konursa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nx^{n+s}-2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_nx^{n+s}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s+1}=0$$

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n=1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$(s^2-3s+2)\ a_0x^s+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[(n+s)(n+s-3)\ +2\right]a_n-a_{n-1}\right]x^{n+s}=0 \tag{2}$$

elde edilir. (2) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$(s^2-3s+2)\ a_0=(s-1)(s-2)a_0=0 \tag{3}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$[(n+s)(n+s-3)+2]a_n - a_{n-1} = 0 \quad , \quad n \geq 1$$

veya

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+s-2)(n+s-1)} \quad , \quad n \geq 1 \tag{4}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (3) denkleminden

$$(s-1)(s-2) = 0 \tag{5}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (4) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (5) denkleminin kökleri $s_1 = 2$ ve $s_2 = 1$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 = N = 1$ olduğundan diferansiyel denklemin seri çözümleri,

$$y_1 = y(x, s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1) x^{n+s_1} \quad , \tag{6}$$

$$y_2 = y(x, s_2) = \frac{b_N}{a_0} y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n'(s_2) x^{n+s_2} \tag{7}$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$, b_N ve $b_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz. Önce birinci çözüm için $a_n(s)$ katsayısı (4) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_1(s) = \frac{a_0}{s(s-1)} \quad ,$$

$$a_2(s) = \frac{a_1}{s(s+1)} = \frac{a_0}{(s-1)s^2(s+1)} \quad ,$$

$$\vdots$$

$$a_n(s) = \frac{a_0}{(s-1)\left[s^2(s+1)^2 \cdots (s+n-2)^2\right](s+n-1)} \quad , \quad n \geq 2 \tag{8}$$

yazılır ve (8) yineleme bağıntısında $s = s_1 = 2$ ve $a_0 = 1$ konulduğunda

$$a_n(2) = \frac{1}{\left[1.2^2.3^2 \ldots n^2\right](n+1)} \quad , \quad n \geq 2$$

$$a_n(2) = \frac{1}{(n!)(n+1)!} \quad , \quad n \geq 2 \tag{9}$$

belirlenir. Böylece $s_1 = 2$ için birinci seri çözüm

$$y_1(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)(n+1)!} \tag{10}$$

bulunur. $s = s_2 = 1$ için bulunacak ikinci seri çözüm logaritmiktir ve b_N , $b_n(s)$ ve $b_n'(s)$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Aşağıda gösterildiği gibi $b_n(s)'$ i tanımlayalım.

$$b_0(s) = (s-1)a_0 \tag{12}$$

$$b_1(s) = (s-1)a_1(s) = \frac{a_0}{s} \tag{13}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$b_2(s)=(s-1)a_2(s)=\frac{a_0}{s^2(s+1)} \tag{14}$$

$$\vdots$$

$$b_n(s)=(s-1)a_n(s)=\frac{a_0}{\left[s^2(s+1)^2(s+2)^2\ldots(s+n-2)^2\right](s+n-1)} \quad , \quad n\geq 2 \tag{15}$$

(15) yineleme bağıntısında $s=s_2=1$ ve $a_0=1$ koyulursa,

$$b_n(1)=\frac{1}{(n-1)!n!} \quad , \quad n\geq 2 \tag{16}$$

bulunur. Görüldüğü gibi (12), (13) ve (14) ve (15) denklemleriyle verilen fonksiyonlar $s=s_2=1$ için analitiktirler. Bu fonksiyonlardan $b_0(s)$, $b_1(s)$ ve $b_2(s)$'in türevleri alınırsa

$$b_0'(s)=a_0 \tag{17}$$

$$b_1'(s)=-\frac{a_0}{s^2} \tag{18}$$

$$b_2'(s)=-\frac{(3s+2)a_0}{s^3(s+1)^2} \tag{19}$$

bulunur. $b_n'(s)$' i bulmak için (15) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln b_n(s)=\ln a_0-2\left[\ln s+\ln(s+1)+\ln(s+2)+\cdots+\ln(s+n-2)\right]-\ln(s+n-1)$$

Bu eşitliğin her iki tarafının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{b_n'(s)}{b_n(s)}=-2\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\ldots+\frac{1}{s+n-2}\right]-\frac{1}{s+n-1} \tag{20}$$

bulunur. (20) denkleminde $s=s_2=1$ ve $b_n(s)$ de (16)'dan yerine koyulursa

$$b_n'(1)=\frac{a_0}{(n-1)!n!}\left\{-2\left[1+\frac{1}{2}\ldots+\frac{1}{n-1}\right]-\frac{1}{n}\right\}$$

$$b_n'(1)=-\frac{\left[\phi(n)+\phi(n-1)\right]}{(n-1)!n!}a_0 \quad , \quad n\geq 2 \tag{21}$$

elde edilir. Burada

$$\phi(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad \phi(n-1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

olarak tanımlanırlar. (7) denklemiyle tanımlanan ikinci çözüm

$$y_2=\frac{b_N}{a_0}y_1(x)\ln x+b_0'(s_2)x^{s_2}+b_1'(s_2)x^{s_2+1}+\sum_{n=2}^{\infty}b_n'(s_2)x^{n+s_2} \tag{22}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$b_N(s_2)=b_1(1)=1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$b_1'(s_2) = b_1'(1) = -a_0$$

dır. Ayrıca $a_0 = 1$ alınırsa ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x - x^2 - x\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\phi(n)+\phi(n-1)}{(n-1)!n!}x^n$$

bulunur. Genel çözüm ise

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir.

(I) $xy'' - y = 0$

$x_0 = 0$ noktası denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. Bu nokta yakınında denklemin

$$y = y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)x^{n+s} \quad , \ a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

şeklinde seri çözümü olduğunu varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alındıktan sonra, y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n x^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada x 'in kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. x 'in kuvvetlerini eşitlerken toplamlarda $n = 1$ 'den başlatılıp düzenlenirse

$$s(s-1)a_0 x^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+s)(n+s-1)a_n - a_{n-1}\right]x^{n+s-1} = 0 \qquad (2)$$

elde edilir. (2) denkleminin sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$s(s-1)a_0 = 0 \qquad (3)$$

$$(n+s)(n+s-1)a_n - a_{n-1} = 0 \quad , n \geq 1 \qquad (4)$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (3) denkleminden

$$s(s-1) = 0 \qquad (5)$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (4) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (5) denkleminin kökleri $s_1 = 1$ ve $s_2 = 0$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 = N = 1$ olduğundan diferansiyel denklemin seri çözümleri,

$$y_1 = y(x,s_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s_1)x^{n+s_1} \quad , \qquad (6)$$

$$y_2 = y(x,s_2) = \frac{b_N}{a_0}y_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n'(s_2)x^{n+s_2} \qquad (7)$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$, b_N ve $b_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz Önce birinci çözüm için $a_n(s)$ katsayısı (4) bağıntısını art arda kullanarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_1(s)=\frac{a_0}{s(s+1)}$$

$$a_2(s)=\frac{a_1}{(s+1)(s+2)}=\frac{a_0}{s(s+1)^2(s+2)}$$

$$\vdots$$

$$a_n(s)=\frac{a_0}{s\left[(s+1)^2(s+2)^2\ldots(s+n-1)^2\right](s+n)}\quad,\quad n\geq 2 \tag{8}$$

yazılır. (8) yineleme bağıntısında $s=s_1=1$ ve $a_0=1$ konulduğunda

$$a_n(1)=\frac{1}{(2^2.3^2\ldots n^2)(n+1)}=\frac{1}{(n!)(n+1)!}\quad,\quad n\geq 2 \tag{9}$$

belirlenir. Böylece $s_1=1$ için birinci seri çözüm

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n!)(n+1)!} \tag{10}$$

bulunur. $s=s_2=0$ için bulunacak ikinci seri çözüm logaritmiktir ve b_n , $b_n(s)$ ve $b_n'(s)$ katsayılarının belirlenmesi gerekir. Aşağıda gösterildiği gibi $b_n(s)$' i tanımlayalım.

$$b_0(s)=sa_0 \tag{11}$$

$$b_1(s)=sa_1(s)=\frac{a_0}{s+1} \tag{12}$$

$$b_2(s)=sa_2(s)=\frac{a_0}{(s+1)^2(s+2)} \tag{13}$$

$$\vdots$$

$$b_n(s)=sa_n(s)=\frac{a_0}{\left[(s+1)^2(s+2)^2\ldots(s+n-1)^2\right](s+n)}\quad,\quad n\geq 2\ , \tag{14}$$

(14) yineleme bağıntısında $s=s_2=0$ ve $a_0=1$ koyulursa ,

$$b_n(0)=\frac{1}{(n-1)!n!}\quad,\quad n\geq 2 \tag{15}$$

bulunur. Görüldüğü gibi (11), (12) ve (13) ve 14) denklemleriyle verilen fonksiyonlar $s=s_2=0$ için analitiktirler. Bu fonksiyonlardan $b_0(s)$, $b_1(s)$ ve $b_2(s)$ in türevleri alınırsa

$$b_0'(s)=a_0 \tag{16}$$

$$b_1'(s)=-\frac{a_0}{(s+1)^2} \tag{17}$$

$$b_2'(s)=-\frac{(2s+3)a_0}{(s+1)^3(s+2)^2} \tag{18}$$

bulunur. $b_n'(s)$' i bulmak için (14) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln b_n(s)=\ln a_0-2\left[\ln(s+1)+\ln(s+2)+\cdots+\ln(s+n-1)\right]-\ln(s+n)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu eşitliğin her iki tarafının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{b_n'(s)}{b_n(s)} = -2\left[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}+\cdots+\frac{1}{s+n-1}\right]-\frac{1}{s+n} \qquad (19)$$

bulunur. (19) da $s = s_2 = 0$ ve $b_n(s)$ de ((15))' den yerine koyulursa

$$b_n'(0) = \frac{a_0}{(n-1)!n!}\left\{-2\left[1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n-1}\right]-\frac{1}{n}\right\}$$

$$b_n'(0) = -\frac{[\phi(n)+\phi(n-1)]}{(n-1)!n!}a_0 \ , \quad n \geq 2 \qquad (20)$$

elde edilir. Burada $\phi(n) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ ve $\phi(n-1) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$

olarak tanımlanırlar. (7) denklemiyle tanımlanan ikinci çözüm

$$y_2 = \frac{b_N}{a_0}y_1(x)\ln x + b_0'(s_2)x^{s_2} + b_1'(s_2)x^{s_2+1} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n'(s_2)x^{n+s_2} \qquad (21)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$b_N(s_2) = b_1(0) = 1$$

$$b_1'(s_2) = b_1'(0) = -a_0$$

dır. Ayrıca $a_0 = 1$ alınırsa ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + 1 - x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\phi(n)+\phi(n-1)}{(n-1)!n!}x^n$$

bulunur. Genel çözüm

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

ile verilir.

6.4 Sonsuzda Nokta

$$\frac{d^2y}{dt^2}+P(x)\frac{dy}{dt}+Q(x)y = 0 \qquad (6.31)$$

denkleminin x bağımsız değişkeninin büyük pozitif ve negatif değerleri için çözümlerini bulmak isteyebiliriz. Örneğin değişken zaman ise (6.31) ile tanımlanan fiziksel bir sistemin $x \to \infty$ için davranışının incelenmesi olabilir. Böyle durumlarda $x = \frac{1}{t}$ değişken dönüşümü yapılır t değişkeni pozitif değerlerle sıfıra yaklaştığında x de pozitif değerlerle sonsuz değerine erişir.

$$Y(t) = y\left(\frac{1}{t}\right) = y(x) \quad \text{olsun.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Zincir kuralı ile türevler hesaplanırsa

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}\frac{dY}{dt}=-t^2\frac{dY}{dt} \tag{6.32}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{x^4}\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{2}{x^3}\frac{dY}{dt}=t^4\frac{d^2Y}{dt^2}+2t^3\frac{dY}{dt} \tag{6.33}$$

olur. Bu değerler (6.31) denkleminde yerine koyulursa

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+p(t)\frac{dY}{dt}+q(t)Y=0 \tag{6.34}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$p(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}P\left(\frac{1}{t}\right) \quad ; \quad q(t)=\frac{1}{t^4}Q\left(\frac{1}{t}\right) \tag{6.35}$$

dir. $x=\infty$ noktasına $t=0$ noktasının (6.34) denkleminin bayağı noktası, düzenli veya düzensiz tekil noktası olmasına göre bayağı nokta, düzenli veya düzensiz tekil nokta denir.

Aşağıda verilen diferansiyel denklemler için $x=\infty$ noktasının durumunu inceleyiniz. Genel çözümü $\frac{1}{x}$ in kuvvetleri cinsinden bulunuz.

(a) $2x^3y''+3x^2y'-y=0$

(b) $x^4y''+(2x^3+x)y'-y=0$

(c) $2x^3y''-x(2-5x)y'+y=0$

(d) $x^2y''+(3x-1)y'+y=0$

(e) $2x^2(x-1)y''+x(5x-3)y'+(x+1)y=0$

Çözümler :

(a) $2x^3y''+3x^2y'-y=0$ (1)

Denklemi için $x=\frac{1}{t}$ dönüşümü

$$\frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dY}{dt} \qquad \text{ve} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=t^4\frac{d^2Y}{dt^2}+2t^3\frac{dY}{dt}$$

denklemlerini kullanarak yapılırsa, (1) denklemi

$$2t\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{dY}{dt}-Y=0 \tag{2}$$

denklemine dönüşür. $t=0$ bu dönüşmüş denklemin düzenli tekil noktası olduğundan, $x=\infty$ yani sonsuzdaki nokta ilk denklemin düzenli tekil noktası olur. Bu durumda Frobenius yöntemi uygulanarak çözüm yapılır. Seri çözümün

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y = Y(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) t^{n+s} \quad , \; a_0 \neq 0 \tag{3}$$

verildiğini varsayalım. Y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$Y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n(s) t^{n+s-1} \tag{4}$$

$$Y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n(s) t^{n+s-2} \tag{5}$$

bulunur. Y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n t^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n t^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada t nin kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. t nin kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n=1$ den başlatılıp düzenlenirse

$$\left[2s(s-1)+s\right] a_0 t^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+s)(2n+2s-1) a_n - a_{n-1} \right] t^{n+s-1} = 0 \tag{6}$$

elde edilir. 6) denkleminin sağlanması için t nin her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$s(2s-1) a_0 = 0 \tag{7}$$

$$\left[(n+s)(2n+2s-1) a_n - a_{n-1} \right] = 0 \quad , \quad n \geq 1 \tag{8}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (7) denkleminden

$$s(2s-1) = 0 \tag{9}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (8) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (8) denkleminin kökleri $s_1 = 0$ ve $s_2 = \frac{1}{2}$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 \neq 0, N$ oluğundan , diferansiyel denklemin , s_1 ve s_2 'ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır. (8) yineleme bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+s)(2n+2s-1)} \quad , \; n \geq 1 \tag{10}$$

elde edilir.

(i) $s_1 = 0$ için yineleme bağıntısı

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \quad , \; n \geq 1 \tag{11}$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1 = a_0$$

$$a_2 = \frac{1}{2.3} a_0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_3 = \frac{1}{3.5.6} a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{2^n}{(2n)!} a_0$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (3) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak $s_1 = 0$ 'a karşı gelen seri çözüm

$$Y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} t^n \qquad (12)$$

olarak elde edilir.

(ii) $s_2 = \frac{1}{2}$ için yineleme bağıntısı

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n(2n+1)} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (13)$$

olur. Böylece ikinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1 = \frac{a_0}{3}$$
$$a_2 = \frac{1}{5.6} a_0$$
$$a_3 = \frac{1}{3.5.6.7} a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{2^n}{(2n+1)!} a_0$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (3) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak $s_2 = \frac{1}{2}$ 'a karşı gelen seri çözüm

$$Y_2(t) = t^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} t^n \qquad (14)$$

elde edilir. (13) ve (14) denklemlerinde $t = \frac{1}{x}$ koyarak (13) ve (14) denklemleri sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!} x^{-n} \qquad (15)$$

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!} x^{-n} \qquad (16)$$

(15) ve (16) denklemleri (1) denkleminin seri çözümleri olup , genel çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir.

(b) $x^4 y'' + (2x^3 + x)y' - y = 0$ (1)

denklemi için $x = \frac{1}{t}$ dönüşümü

$$\frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{dY}{dt} \quad \text{ve} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = t^4 \frac{d^2Y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dY}{dt}$$ denklemlerini kullanarak

yapılırsa, (1) denklemi

$$\frac{d^2Y}{dt^2} - t\frac{dY}{dt} - Y = 0 \quad (2)$$

denklemine dönüşür. $t = 0$ bu dönüşmüş denklemin bayağı bir noktası olduğundan, $x = \infty$ yani sonsuzdaki nokta ilk denklemin bayağı noktası olur. Bu durumda (2) denkleminin $t = 0$ noktası yakınında

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad (3)$$

şeklinde bir kuvvet serisi çözümü vardır. Y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$Y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad (4)$$

$$Y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} \quad (5)$$

bulunur. Y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

bulunur. Burada t nin kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. t nin kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n = 1$ den başlatılıp düzenlenirse

$$2a_2 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n a_n - a_n\right] t^n = 0 \quad (6)$$

elde ederiz. Bu toplama yapılsa bütün t li terimlerin katsayıları sıfıra eşit olacağından, yukardaki denklemden

$$2a_2 - a_0 = 0 \quad (7)$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0 \quad , \quad (n \geq 1) \quad (8)$$

elde edilir. (8) bağıntısına denklemin yineleme bağıntısı denir. (7) denkleminden

$$a_2 = \frac{1}{2} a_0 \quad (9)$$

bulunur. Ayrıca (8) yineleme bağıntısı

$$a_{n+2} = \frac{1}{n+2} a_n \quad , \quad (n \geq 1) \quad (10)$$

T.C. MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Kütüphane ve Dokümantasyon
Daire Başkanlığı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde yazılırsa , (9) ve (10) dan diğer katsayılar aşağıdaki şekilde edilir.

Çift indisli katsayılar

$$a_2=\frac{1}{2}a_0$$

$$a_4=\frac{1}{4}a_2=\frac{1}{2.4}a_0$$

$$a_6=\frac{1}{6}a_4=\frac{1}{2.4.6}a_0$$

$$\vdots$$

$$a_{2m}=\frac{1}{2^m m!}a_0 \quad , \; m\geq 1$$

Tek indisli katsayılar

$$a_3=\frac{1}{3}a_1$$

$$a_5=\frac{1}{5}a_3=\frac{1}{3.5}a_1$$

$$a_7=\frac{1}{5}a_5=\frac{1}{3.5.7}a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{2m-1}=\frac{1}{3.5...(2m-1)}a_1 \quad , \; m\geq 1$$

olarak bulunur. Böylece (3) denkleminin genel çözümü

$$Y(t)=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m m!}t^{2m}+a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{3.5...(2m-1)}t^{2m-1} \qquad (11)$$

şeklinde bulunur. (1) denkleminin genel çözümü ise (11) denkleminde $t=\frac{1}{x}$ koyularak

$$y(x)=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m m!}x^{-2m}+a_1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{3.5...(2m-1)}x^{-2m+1}$$

elde edilir.

(e) $2x^3y''-x(2-5x)y'+y=0$ (1)

denklemi için $x=\frac{1}{t}$ dönüşümü

$$\frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dY}{dt} \qquad \text{ve} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=t^4\frac{d^2Y}{dt^2}+2t^3\frac{dY}{dt}$$

denklemlerini kullanarak yapılırsa , (1) denklemi

$$2t\frac{d^2Y}{dt^2}+(2t-1)\frac{dY}{dt}+Y=0 \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. $t=0$ bu dönüşmüş denklemin düzenli tekil noktası olduğundan , $x=\infty$ yani sonsuzdaki nokta ilk denklemin düzenli tekil noktası olur. Bu durumda Frobenius yöntemi uygulanarak çözüm yapılır. Seri çözümün

$$Y=Y(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)t^{n+s} \quad , \; a_0\neq 0 \qquad (3)$$

verildiğini varsayalım. Y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$Y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)t^{n+s-1} \qquad (4)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)t^{n+s-2} \qquad (5)$$

bulunur. Y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n t^{n+s-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n t^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n t^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada t nin kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. t nin kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n=1$ den başlatılıp düzenlenirse

$$[s(2s-3)]a_0 t^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+s)(2n+2s-3)a_n + (2n+2s-1)a_{n-1}]t^{n+s-1} = 0 \qquad (6)$$

bulunur. (6) denkleminin sağlanması için t nin her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. Böylece

$$[s(2s-3)]a_0 = 0 \qquad (7)$$

$$[(n+s)(2n+2s-3)a_n + (2n+2s-1)a_{n-1}] = 0 \quad , \quad n \geq 1 \qquad (8)$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (7) denkleminden

$$s(2s-3) = 0 \qquad (9)$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (8) denklemi $n \geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (8) denkleminin kökleri $s_1 = 0$ ve $s_2 = \frac{3}{2}$ olarak bulunur. Burada $s_1 - s_2 \neq 0, N$ olduğundan , diferansiyel denklemin , s_1 ve s_2 ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır. (8) yineleme bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$a_n = -\frac{(2n+2s-1)}{(n+s)(2n+2s-3)}a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (10)$$

elde edilir.

(i) $s_1 = 0$ için yineleme bağıntısı

$$a_n = -\frac{(2n-1)}{n(2n-3)}a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (11)$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1 = a_0$$
$$a_2 = -\frac{3}{1.2}a_0$$
$$a_3 = \frac{5}{1.2.3}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{n!}a_0 \quad , \quad n \geq 1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (3) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak $s_1 = 0$ 'a karşı gelen seri çözüm

$$Y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{n!} t^n \qquad (12)$$

olarak elde edilir.

(ii) $s_2 = \frac{3}{2}$ için yineleme bağıntısı

$$a_n = -\frac{2(n+1)}{n(2n+3)} a_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (13)$$

olur. Böylece ikinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1 = -\frac{2^2}{1.5} a_0$$

$$a_2 = \frac{2^2.3}{5.7} a_0$$

$$a_3 = -\frac{2^3.4}{5.7.9} a_0$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{(-2)^n (n+1)}{5.7.9...(2n+3)} a_0 \quad , \quad n \geq 1$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (3) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak $s_2 = \frac{3}{2}$ için seri çözüm

$$Y_2(t) = t^{\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (n+1)}{5.7.9...(2n+3)} t^n \qquad (14)$$

şeklindedir.

(12) ve (13) denklemlerinde $t = \frac{1}{x}$ koyarak (12) ve (14) denklemleri sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{n!} x^{-n} \qquad (15)$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n (n+1)}{5.7.9...(2n+3)} x^{-n-\frac{3}{2}} \qquad (16)$$

(15) ve (16) denklemleri (1) denkleminin seri çözümleri olup , genel çözüm

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

ile verilir.

(d) $x^2 y'' + (3x-1)y' + y = 0 \qquad (1)$

denklemi için $x = \frac{1}{t}$ dönüşümü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dY}{dt} \qquad \text{ve} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=t^4\frac{d^2Y}{dt^2}+2t^3\frac{dY}{dt}$$

denklemlerini kullanarak yapılırsa, (1) denklemi

$$t^2\frac{d^2Y}{dt^2}-t(1-t)\frac{dY}{dt}+Y=0 \tag{2}$$

denklemine dönüşür. $t=0$ bu dönüşmüş denklemin düzenli tekil noktası olduğundan, $x=\infty$ yani sonsuzdaki nokta ilk denklemin düzenli tekil noktası olur. Bu durumda Frobenius yöntemi
uygulanarak çözüm yapılır. Seri çözümün

$$Y=Y(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)t^{n+s} \quad , \quad a_0\neq 0 \tag{3}$$

verildiğini varsayalım. Y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$Y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)t^{n+s-1} \tag{4}$$

$$Y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)t^{n+s-2} \tag{5}$$

bulunur. Y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_nt^{n+s}-\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_nt^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)a_nt^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^{n+s}=0$$

bulunur. Burada t nin kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. t nin kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n=1$ den başlatılıp düzenlenirse

$$(s-1)^2a_0t^s+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+s)(n+s-1)a_n-(n+s)a_n+(n+s-1)a_{n-1}+a_n\right]t^{n+s}=0 \tag{6}$$

elde edilir. (6) denkleminin sağlanması için t nin her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

$$(s-1)^2a_0=0 \tag{7}$$

$$(n+s-1)a_n+a_{n-1}=0 \quad , \quad n\geq 1 \tag{8}$$

dir. $a_0\neq 0$ olduğundan (7) denkleminden

$$(s-1)^2=0 \tag{9}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (8) denklemi $n\geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (9) denkleminin kökleri $s_1=s_2=1$ olarak bulunur. Burada $s_1-s_2=0$ olduğundan, (3) denkleminin seri çözümleri

$$Y_1=Y(t,s_1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s_1)t^{n+s_1} \tag{10}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y_2 = Y(t, s_2) = Y_1(t)\ln t + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(s_1)\, t^{n+s_1} \tag{11}$$

ile verilir. Bu iki çözümü bulmak için $a_n(s)$ ve $a_n'(s)$ katsayılarını belirlemeliyiz.

$a_n(s)$ katsayılarını bulmak için (8) bağıntısını art arda kullanarak

$$a_1(s) = -\frac{a_0}{s}$$

$$a_2(s) = -\frac{a_1}{(s+1)} = \frac{a_0}{s(s+1)}$$

$$\vdots$$

$$a_n(s) = \frac{(-1)^n a_0}{s(s+1)\ldots(s+n-1)} \quad , \quad n \geq 1 \tag{12}$$

yazalım. (12) yineleme bağıntısında $s = s_1 = 1$ ve $a_0 = 1$ koyarak

$$a_n(1) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad , \quad n \geq 1 \tag{13}$$

bulunur. Böylece birinci seri çözüm

$$Y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n!} \tag{14}$$

elde edilir. $a_n'(s)$ katsayısını bulmak için (12) denkleminin her iki tarafının logaritması alınır.

$$\ln a_n(s) = -\left[\ln(s) + \ln(s+1) + \cdots \ln(s+n-1)\right]$$

Bu eşitliğin her iki yanının s ye göre türevi alındığında

$$\frac{a_n'(s)}{a_n(s)} = -\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \cdots + \frac{1}{s+n-1}\right] \tag{15}$$

bulunur. (15) de $s = s_1 = 1$ ve $a_n(s)$ de (13) den yerine koyulursa

$$a_n'(1) = -\frac{(-1)^n}{n!}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right] = -\frac{\phi(n)}{n!} \tag{16}$$

elde edilir. Böylece (11) denklemiyle verilen ikinci çözüm

$$Y_2(t) = Y_1(t)\ln t - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi(n)}{n!}\, t^{n+1} \tag{17}$$

bulunur. (14) ve (17) denklemlerinde $t = \frac{1}{x}$ koyarak bu denklemler sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{-n-1}}{n!} = x^{-1} e^{-\frac{1}{x}} \tag{18}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y_2(x) = y_1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \phi(n)}{n!} x^{-n-1} \qquad (19)$$

(18) ve (19) denklemleri (1) denkleminin seri çözümleri olup , genel çözüm

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ile verilir.

(e) $2x^2(x-1)y'' + x(5x-3)y' + (x+1)y = 0$ (1)

denklemi için $x = \frac{1}{t}$ dönüşümü

$$\frac{dy}{dx} = -t^2 \frac{dY}{dt} \qquad \text{ve} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = t^4 \frac{d^2Y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dY}{dt}$$

denklemlerini kullanarak yapılırsa , (1) denklemi

$$2(t-t^2)\frac{d^2Y}{dt^2} - (t+1)\frac{dY}{dt} - \left(\frac{1}{t}+1\right)Y = 0 \qquad (2)$$

denklemine dönüşür. $t=0$ bu dönüşmüş denklemin düzenli tekil noktası olduğundan , $x=\infty$ yani sonsuzdaki nokta ilk denklemin düzenli tekil noktası olur. Bu durumda Frobenius yöntemi uygulanarak çözüm yapılır. Seri çözümün

$$Y = Y(t,s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) t^{n+s} \quad , \; a_0 \neq 0 \qquad (3)$$

verildiğini varsayalım. Y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$Y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) a_n(s) t^{n+s-1} \qquad (4)$$

$$Y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s-1) a_n(s) t^{n+s-2} \qquad (5)$$

bulunur. Y ve türevleri verilen diferansiyel denklemde yerine koyulursa

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n t^{n+s-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n t^{n+s} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n t^{n+s}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n t^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+s} = 0$$

bulunur. Burada t nin kuvvetlerinin farklı olduğu görülür. t nin kuvvetlerini eşitlerken toplamalarda $n=1$ den başlatılıp düzenlenirse

$$(2s^2 - 3s + 1)a_0 t^{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2(n+s)(n+s-1)a_n - 2(n+s-1)(n+s-2)a_{n-1}\right.$$

$$\left. -(n+s-1)a_{n-1} - (n+s)a_n + a_n + a_{n-1}\right] t^{n+s-1} = 0 \qquad (6)$$

elde edilir. (6) denkleminin sağlanması için t nin her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır. O halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(2s^2-3s+1)a_0=0 \tag{7}$$

$$[(2n^2+2s^2+4ns-3n-3s+1)a_n-(2n^2+2s^2+4ns-5n-5s+2)a_{n-1}=0 \quad , \quad n\geq 1 \tag{8}$$

dir. $a_0\neq 0$ olduğundan (7) denkleminden

$$(2s^2-3s+1)=0 \tag{9}$$

verilen diferansiyel denklemin indis denklemi bulunur. Ayrıca (8) denklemi $n\geq 1$ için denklemin yineleme bağıntısıdır. (8) denkleminin kökleri $s_1=1$ ve $s_2=\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Burada $s_1-s_2\neq 0$, N oluğundan , diferansiyel denklemin , s_1 ve s_2 'ye karşı gelen (6.21) ve (6.22) de verilen şekilde iki lineer bağımsız çözümü vardır . (8) yineleme bağıntısı yeniden düzenlenirse

$$a_n=\frac{(2n^2+2s^2+4ns-5n-5s+2)}{(2n^2+2s^2+4ns-3n-3s+1)}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1 \tag{10}$$

elde edilir.

(i) $s_1=1$ için yineleme bağıntısı

$$a_n=\frac{2n^2-n-1}{n(2n+1)}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1 \tag{11}$$

olur. Böylece birinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1=0.a_0$$
$$a_1=a_2=\ldots=a_n=0$$

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (3) denkleminde yerine koyarak ve $a_0=1$ alınarak $s_1=1$ için seri çözüm

$$Y_1(t)=t \tag{12}$$

olarak elde edilir.

(ii) $s_2=\frac{1}{2}$ için yineleme bağıntısı

$$a_n=\frac{2n-3}{(2n-1)}a_{n-1} \quad , \quad n\geq 1 \tag{13}$$

olur. Böylece ikinci seri çözümün katsayıları bu bağıntıdan

$$a_1=-a_0$$
$$a_2=-\frac{1}{3}a_0$$
$$a_3=-\frac{1}{5}a_0$$
$$\vdots$$
$$a_n=-\frac{1}{2n-1}a_0 \quad , \quad n\geq 1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olarak bulunur. Katsayıların bu değerleri (3) denkleminde yerine koyarak ve $a_0 = 1$ alınarak $s_2 = \frac{1}{2}$ için seri çözüm

$$Y_2(t) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1} t^{n+\frac{1}{2}} \tag{13}$$

elde edilir. (12) ve (13) denklemlerinde $t = \frac{1}{x}$ koyarak bu denklemler sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılır.

$$y_1(x) = x^{-1}$$
$$y_2(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{-n-\frac{1}{2}} \tag{14}$$

(15)

(15) ve (16) denklemleri (1) denkleminin seri çözümleri olup , genel çözüm

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ ile verilir.

6.5 Gamma ve Beta Fonksiyonları

Diferansiyel denklemlerin seri çözümleri bulunurken , gamma ve beta fonksiyonlarının özelliklerinden yararlanmak çoğu kez işlemleri büyük ölçüde basitleştirir. $p > 0$ iken

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \tag{6.36}$$

ile tanımlanan integral yakınsaktır ve gamma fonksiyonu denir. $p > 0$ kısıtlaması integralin yakınsaklığını garantilemek için geçerlidir. Bu fonksiyon , p sayısı kesirli bir sayı olduğunda $p!$'in genelleştirilmesinde önemli rol oynar. Dolayısıyle , kesirli sayıların faktöriyeli anlamlı olur. * $p, q > 0$ ise beta fonksiyonu

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \tag{6.37}$$

integrali ile tanımlanır. Beta fonksiyonu argümanlarına göre simetriktir.

$$B(p,q) = B(q,p) \tag{6.38}$$

Gamma fonksiyonunun aşağıda verilen özelliklerini ispatlayınız.

(a) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ (6.39)

(b) $\Gamma(1) = 1$ (6.40)

(c) $\Gamma(n+1) = n!$ (6.41)

(d) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (6.42)

* Kaynak 7

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (6.43)

Çözümler :

(a) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$

Bu özelliği ispatlamak için (6.36) denkleminde p yerine $(p+1)$ koyularak integral işlemi aşağıda gösterildiği şekilde gerçekleştirilir.

$$\Gamma(p+1)=\int_0^\infty t^{(p+1)-1}e^{-t}dt=\lim_{a\to\infty}\int_0^a t^p e^{-t}dt$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left[-t^p e^{-t}\right]_0^a+\lim_{a\to\infty}\int_0^a pt^{p-1}e^{-t}dt$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[-a^p e^{-a}+0\right]+p\int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt=p\Gamma(p)$$

Burada $\lim_{a\to\infty} a^p e^{-a}=0$ olduğu L' Hospital kaidesi uygulanarak bulunabilir .

(b) $\Gamma(1)=1$

Bu özelliği ispatlamak için (6.36) denkleminde $p=1$ koyularak integral işlemi aşağıda gösterildiği şekilde gerçekleştirilir.

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}dt=\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}dt=\lim_{a\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^a=\lim_{a\to\infty}\left[-e^{-a}+1\right]=1$$

(c) $\Gamma(n+1)=n!$

Bu özelliği ispatlamak için $\Gamma(1)=1$ sonucu göz önüne alınarak (6.39) bağıntısından

$$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2.1=2!$$
$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3.2.1=3!$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

ve genel olarak $n\geq 0$ için

$\Gamma(n+1)=n!$ ispatlanmış olur.

(d) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

Bu özelliği ispatlamak için (6.36) da $p=1/2$ konur ve $t=u^2$ dönüşümü yapılırsa

$$\Gamma(1/2)=\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt=2\int_0^\infty e^{-u^2}du \qquad (1)$$

olur. Burada u sessiz değişkendir. Diğer taraftan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv \qquad (2)$$

yazalım. (1) ve (2) yi taraf tarafa çarparsak

$$\left[\Gamma(\tfrac{1}{2})\right]^2 = \left[2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du\right]\left[2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv\right] = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv$$

elde edilir. Elde ettiğimiz çift katlı integrali $u = \rho\cos\phi$, $v = \rho\sin\phi$ kullanarak kutupsal koordinatlara dönüştürürsek

$$\left[\Gamma(\tfrac{1}{2})\right]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho\,d\phi = 4\int_0^{\pi/2} -1/2e^{-\rho^2}\Big|_0^\infty d\phi = \pi$$

$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ bulunur.

(e) $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Bu özelliği ispatlamak için (6.37) de $t = \sin\theta^2$ dönüşümü yapılırsa

$$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta \qquad (6.44)$$

şeklini alır. Ayrıca gamma fonksiyonunun tanımında $t = x^2$ koyulursa

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}\,dx \qquad (1)$$

bulunur. Benzer olarak

$$\Gamma(q) = 2\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}\,dy \qquad (2)$$

yazılır ve (1) ve (2) integralleri taraf tarafa çarpılırsa

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\left[\int_0^\infty x^{2p-1}e^{-x^2}\,dx\right]\left[\int_0^\infty y^{2q-1}e^{-y^2}\,dy\right]$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

bulunur. (r,θ) kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\left[\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}\,dr\right]\left[\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta\right]$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q)\left\{\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta\right\}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(q,p)$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$

elde edilir. Burada (6.44) bağıntısından yararlanılmıştır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki integralleri gamma ve beta fonksiyonlarından yararlanarak hesaplayınız.

(a) $\int_0^\infty \sqrt[4]{x}e^{-\sqrt{x}}dx$ (b) $\int_0^\infty 5^{-4z^2}dz$ (c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

(d) $\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$ (e) $\int_0^\infty e^{2ax-x^2}dx$ (f) $\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx$

Çözümler :

(a) $\int_0^\infty \sqrt[4]{x}e^{-\sqrt{x}}dx$ integralinde $u=\sqrt{x}$ konursa verilen integral aşağıdaki gibi yazılarak hesaplanır.

$$2\int_0^\infty u^{1/2}e^{-u}udu = 2\int_0^\infty u^{3/2}e^{-u}du = 2\Gamma(5/2) = 2(3/2)\Gamma(3/2) = 3(1/2)\Gamma(1/2) = 3/2\sqrt{\pi}$$

(b) $\int_0^\infty 5^{-4z^2}dz$ integralini aşağıdaki şekilde yeniden yazalım.

$$\int_0^\infty 5^{-4z^2}dz \int_0^\infty \left(e^{\ln 5}\right)^{-4z^2}dz = \int_0^\infty e^{-(4\ln 5)z^2}dz$$

integralin en son yazılımında $u=(4\ln 5)z^2$ konursa integral aşağıdaki gibi yazılarak hesaplanır.

$$\int_0^\infty e^{-u}d\left(\frac{u^{1/2}}{\sqrt{4\ln 5}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{4\ln 5}}\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du = \frac{\Gamma(1/2)}{2\sqrt{4\ln 5}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln 5}}$$

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ integralinde $u=-\ln x$ konursa ayrıca integral sınırları $x=1$' den $u=0$ 'a ve $x=0$ 'dan $u=\infty$ 'a dönüştürülürse verilen integral aşağıdaki gibi yazılarak hesaplanır.

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}du = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

(d) $\int_0^1 (\ln 1/x)^{a-1}dx$ integralinde $e^t = \frac{1}{x}$ konursa ve integral sınırları $x=0$' dan $t=\infty$ 'a ve $x=1$' den $t=0$ 'a dönüştürülürse verilen integral aşağıdaki gibi yazılarak hesaplanır.

$$\int_0^\infty (t)^{a-1}e^{-t}dt = \Gamma(a)$$

(e) $\int_0^\infty e^{2ax-x^2}dx$ integralini aşağıdaki şekilde yeniden yazalım.

$$\int_0^\infty e^{2ax-x^2}dx = \int_0^\infty e^{\left[(2ax-x^2-a^2)+a^2\right]}dx = \int_0^\infty e^{-(x-a)^2}e^{a^2}dx = e^{a^2}\int_0^\infty e^{-(x-a)^2}dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İntegralin en son yazılım şeklinde $t=(x-a)^2$ koyulursa , integral aşağıdaki gibi yazılarak hesaplanır.

$$e^{a^2}\int_0^\infty e^{-x}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}e^{a^2}\int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\frac{e^{a^2}}{2}\Gamma(1/2)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{a^2}$$

(f) $\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx$, integralinde $u=ax$ konursa ayrıca integral sınırları $x=0$ 'dan $u=0$ 'a ve $x=\infty$ dan $u=\infty$ 'a dönüştürülürse verilen integral aşağıdaki gibi yazılarak hesaplanır.

$$\int_0^\infty e^{-u}u^n\frac{1}{a^n}\frac{1}{a}du=\frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^n du=\frac{1}{a^{n+1}}\Gamma(n+1)$$

6.6 *Bessel Diferansiyel Denklemi*

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0 \qquad (6.45)$$

diferansiyel denklemine Bessel denklemi , çözümlerine de Bessel fonksiyonları denir. Matematiksel fizik , temel bilimler ve mühendislik bilimlerinin uygulamalarında bir çok problemin çözümünde bu denklem ve denklemin çözümü olan fonksiyonlarla sık sık karşılaşılır. (6.45) denklemine α 'nıncı mertebeden Bessel diferansiyel denklemi denir. Burada α , herhangi bir sabit sayı , bir parametredir. Bu denklemin çözümünede α 'nıncı mertebeden Bessel fonksiyonu denir. $x_0=0$ noktası (6.45) denkleminin bir düzgün tekil noktasıdır ve bu nokta yakınında denklemin bir Frobenius çözümü vardır.* Seri çözümün

$$y=y(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s)x^{n+s} \quad , \quad a_0\neq 0 \qquad (6.46)$$

verildiğini varsayalım. y nin birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)a_n(s)x^{n+s-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)a_n(s)x^{n+s-2}$$

bulunur. y , y' ve y'' verilen diferansiyel denklemde yerine konularak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left[s^2-\alpha^2\right]a_0x^s+\left[(s+1)^2-\alpha^2\right]a_1x^{s-1}+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(n+s)(n+s-1)+(n+s)-\alpha^2\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{n+s}=0 \qquad (6.47)$$

*Kaynak 5

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. (6.47) denkleminin sağlanması için x in her kuvvetinin katsayısı sıfır olmalıdır.

$$(s^2-\alpha^2)a_0=0 \tag{6.48}$$

$$\left[(s+1)^2-\alpha^2\right]a_1=0 \tag{6.49}$$

$$\left[(n+s)^2-\alpha^2\right]a_n=-a_{n-2} \quad , \quad n\geq 2 \tag{6.50}$$

dir. $a_0 \neq 0$ olduğundan (6.48) denkleminden

$$(s^2-\alpha^2)=0 \tag{6.51}$$

indis denklemi bulunur. Bu denklemin kökleri $s_1=\alpha$ ve $s_2=-\alpha$ dır. Eğer $s_1=\alpha$ ise (6.49) ve (6.50) bağıntıları

$$(2\alpha+1)a_1=0$$

$$n(n+2\alpha)a_n=-a_{n-2} \quad , \quad n\geq 2$$

şekline dönüşür. $\alpha \neq -1/2$ için $a_1=0$ olmalıdır. Buradan

$$a_1=a_3=\ldots=a_{2n+1}=0$$

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}m!(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+m)} \tag{6.52}$$

olur. Ayrıca (5.52) Gamma fonksiyonu cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m\Gamma(\alpha+1)}{2^{2m}m!\,\Gamma(\alpha+m+1)}a_0 \tag{6.53}$$

Böylece $s_1=\alpha$ ya karşılık gelen çözüm

$$y_1(x)=a_0\Gamma(\alpha+1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\alpha}}{2^{2m}m!\,\Gamma(\alpha+m+1)} \tag{6.54}$$

şeklinde bulunur. Bu kuvvet serisi x in tüm değerleri için yakınsar.

$$a_0=\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$$

şeklinde seçilirse (6.54) aşağıdaki şekilde yeniden yazılır.

$$y_1(x)=J_\alpha(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+\alpha}}{2^{2m+\alpha}m!\,\Gamma(\alpha+m+1)} \tag{6.55}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bessel denkleminin (6.55) ile ifade edilen çözümü α ncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olarak adlandırılır. (6.55) denkleminden

$J_0(0) = 1$ ve $\alpha)0$ için $J_\alpha(0) = 0$ olduğu açıkca görülür.

Eğer $s_2 = -\alpha$ ise (6.49) ve (6.50) bağıntıları

$$(1 - 2\alpha)a_1 = 0 \tag{6.56}$$

$$n(n - 2\alpha)a_n = -a_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \tag{6.57}$$

şeklini alır.

(i) $s_1 - s_2 = 2\alpha$ bir tam sayı olmasın. Bu durumda , denklemin ikinci bir özel çözümü , yukardakine benzer yolla elde edilir. (6.55) de α yerine $-\alpha$ yazılırsa

$$y_2(x) = J_{-\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-\alpha}}{2^{2m-\alpha} m!\,\Gamma(m - \alpha + 1)} \tag{6.58}$$

bulunur. Tam sayı olmayan α lar için J_α ve $J_{-\alpha}$ Bessel denkleminin lineer bağımsız çözümleridir.Bu nedenle , her çözüm c_1 ve c_2 sabitleri yardımıyla

$$y(x) = c_1 J_\alpha(x) + c_2 J_{-\alpha}(x)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca , α bir tam sayı değilse , J_α ve $J_{-\alpha}$ nın lineer toplamı olan

$$Y_\alpha(x) = \frac{1}{\sin \alpha\pi}\{\cos \alpha\pi\, J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)\} \tag{6.59}$$

fonksiyonuda Bessel denkleminin bir çözümüdür. $Y_\alpha(x)$ fonksiyonuna α ncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu denir. $J_\alpha(x)$ ve $Y_\alpha(x)$ fonksiyonları lineer bağımsızdır ve Bessel denkleminin genel çözümü , tam sayı olmayan α değeleri için , c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x) = c_1 J_\alpha(x) + c_2 Y_\alpha(x)$$

şeklinde ifade edilebilir.

(ii) $s_1 - s_2 = 2\alpha$ bir tam sayı olsun , $2\alpha = N$ olmak üzere (6.57) denkleminden

$0.a_N = a_{N-2}$

olur. N , tek tam sayı ise α , bir tek tam sayının yarısıdır ve

$a_1 = a_3 = \cdots = a_{N-2} = 0$ dır.

Böylece $a_N = 0$ seçilebilir. Bu durumda (6.58) şeklinde ikinci bir çözüm elde edilir. N çift tam sayı ise α daima bir tam sayıdır ve ikinci lineer bağımsız çözüm logaritmiktir. N bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$J_{-N}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-N}}{2^{2m-N} m!\,\Gamma(m - N + 1)}$$

fonksiyonu gözönüne alınsın $m = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ için

$\frac{1}{\Gamma(m - n + 1)} = 0$ olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$J_{-N}(x) = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-N}}{2^{2m-N} m!\,\Gamma(m-N+1)}$$

bulunur. Toplamda saymanın düzenlenmesiyle

$$J_{-N}(x) = (-1)^N J_N(x) \text{ elde edilir.}$$

Bu nedenle , $\alpha = N$ iken $J_{-N}(x)$ de Bessel denkleminin bir çözümüdür. $J_N(x)$ ve $J_{-N}(x)$ çözümleri lineer bağımlı çözümlerdir. $\alpha = N$ iken Bessel denkleminin ikinci bir çözümü

$$y_2(x) = (A \ln x + B) J_N(x) + x^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x$$

şeklindedir. Burada $A \neq 0$ sabit olmak üzere A ve B keyfi sabitlerdir.

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu ispatlayınız.

(a) $\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha} J_{\alpha}(x)\right\} = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$

(b) $\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha} J_{\alpha}(x)\right\} = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$

(c) $J'_{\alpha}(x) = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x)$

(d) $J'_{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x) - J_{\alpha+1}(x)$

(e) $J'_{\alpha}(x) = \frac{1}{2}\left\{ J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) \right\}$

(f) $J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_{\alpha}(x)$

(g) $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

(h) $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$

(i) $\int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{\sin x}{x}$

(j) $\int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta) d\theta = \frac{1-\cos x}{x}$

Çözümler :

(a) $\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha} J_{\alpha}(x)\right\} = x^{\alpha} J_{\alpha-1}(x)$ bağıntısını göstermek için eşitliğin birinci tarafında bulunan Bessel fonksiyonu (6.55) den yerine koyulursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+2\alpha}}{2^{2m+\alpha}m!\Gamma(\alpha+m+1)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+2\alpha)}{2^{2m+\alpha}m!\,\Gamma(\alpha+m+1)}x^{2m+2\alpha-1}$$

$$=x^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2(\alpha+m)}{2^{2m+\alpha}m!(\alpha+m)\Gamma(\alpha+m)}x^{2m+\alpha-1}$$

Burada $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ bağıntısından yararlanıldı. Yukarıda gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=x^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m+(\alpha-1)}m!\,\Gamma(\alpha+m)}x^{2m+(\alpha-1)}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x) \qquad (6.59)$$

istenilen bağıntı elde edilir.

(b) $\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$ bağıntısını göstermek için eşitliğin birinci tarafında bulunan Bessel fonksiyonu (6.55) den yerine koyulursa

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\alpha}m!\Gamma(\alpha+m+1)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2mx^{2m-1}}{2^{2m+\alpha}m!\,\Gamma(\alpha+m+1)}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m mx^{2m-1}}{2^{2m+(\alpha-1)}m!\,\Gamma(\alpha+m+1)}$$

Yukardaki ifadenin ikinci tarafının payında bulunan m çarpanından dolayı toplamı $m=1$ den başlatmamız gerekti. Bu nedenle toplamda $s=m-1$ kullanacağız. Ayrıca $(s+1)!=(s+1)s!$ bağıntısını kullanacağız.

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}(s+1)x^{2s+1}}{2^{2s+\alpha+1}(s+1)!\Gamma(\alpha+s+2)}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+1}x^{2s+1}}{2^{2s+\alpha+1}s!\,\Gamma(\alpha+s+2)}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=-x^{-\alpha}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{2s+1+\alpha}}{2^{2s+\alpha+1}s!\,\Gamma(\alpha+s+2)}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right\}=-x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x) \qquad (6.60)$$

(c) $J'_{\alpha}(x)=J_{\alpha-1}(x)-\frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x)$ bağıntısını göstermek için (6.59) bağıntısının birinci tarafının diferansiyeli alınır ve

$$\alpha x^{\alpha-1}J_{\alpha}(x)+x^{\alpha}J'_{\alpha}(x)=x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

eşitliğin her terimi x^{α}' ya bölünürse

$$\frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x) + J'_{\alpha}(x) = J_{\alpha-1}(x)$$

$$J'_{\alpha}(x) = J_{\alpha-1}(x) - \frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x) \qquad (6.61)$$

istenilen bağıntı elde edilir.

(d) $J'_{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x) - J_{\alpha+1}(x)$ bağıntısını göstermek için (6.60) bağıntısının birinci tarafının diferansiyeli alınır

$$-\alpha x^{(-\alpha-1)} J_{\alpha}(x) + x^{-\alpha} J'_{\alpha}(x) = -x^{-\alpha} J_{\alpha+1}(x)$$

eşitliğin her terimi x^{α}' la çarpılarak

$$-\frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x) + J'_{\alpha}(x) = -J_{\alpha+1}(x)$$

$$J'_{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{x} J_{\alpha}(x) - J_{\alpha+1}(x) \qquad (6.62)$$

istenilen bağıntı elde edilir.

(e) $J'_{\alpha}(x) = \frac{1}{2}\{ J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) \}$ bağıntısını göstermek için (6.61) ile (6.62) bağıntıları taraf tarafa toplanırsa istenilen bağıntı elde edilir.

(f) $J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_{\alpha}(x)$ bağıntısını göstermek için (6.62) bağıntısından (6.61) bağıntısı taraf tarafa çıkartılırsa istenilen bağıntı elde edilir.

(g) $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$ bağıntısını göstermek için eşitliğin birinci tarafında bulunan Bessel fonksiyonu $\alpha = 1/2$ için (6.55) den yazılırsa

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{2m+1/2}}{m!\Gamma(m+1/2)}$$

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!\Gamma(5/2)} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!\Gamma(7/2)} - \cdots$$

Paydada bulunan Gamma fonksiyonlarına (6.17) de ispatladığımız aşağıdaki bağıntılar $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ kullanılırsa ,

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}} - \cdots$$

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots \right]$$

bulunur. Bu eşitliğin ikinci tarafında bulunan köşeli parantezin içi $\sin x/x$ fonksiyonunun açılımı

olduğundan yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenirse

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$J_{1/2}(x)=\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}}\frac{\sin x}{x}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

istenilen bağıntı bulunur.

(h) $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$ bağıntısını göstermek için eşitliğin birinci tarafında bulunan Bessel fonksiyonu $\alpha=-1/2$ için (6.55) den yazılırsa

$$J_{-1/2}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x/2)^{2m-1/2}}{m!\Gamma(m+1/2)}$$

$$J_{-1/2}(x)=\frac{(x/2)^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}-\frac{(x/2)^{3/2}}{1!\Gamma(3/2)}+\frac{(x/2)^{7/2}}{2!\Gamma(5/2)}-\cdots$$

Paydada bulunan Gamma fonksiyonlarına (6.17) de ispatladığımız aşağıdaki bağıntılar

$$\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)\ ,\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\quad \text{kullanılırsa}$$

$$J_{-1/2}(x)=\frac{(x/2)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{(x/2)^{3/2}}{1!(1/2)\sqrt{\pi}}+\frac{(x/2)^{5/2}}{2!(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}-\cdots$$

$$J_{-1/2}(x)=\frac{(x/2)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right]$$

bulunur. Bu eşitliğin ikinci tarafında bulunan köşeli parantezin içi $\cos x$ fonksiyonunun açılımı olduğundan yukardaki eşitlik yeniden düzenlenirse

$$J_{-1/2}(x)=\frac{(x/2)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\cos x=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

istenilen bağıntı bulunur.

(i) $\int_0^{\pi/2}J_0(x\cos\theta)\cos\theta d\theta=\frac{\sin x}{x}$ eşitliğini göstermek için eşitliğin birinci tarafında bulunan Bessel fonksiyonu $\alpha=0$ için (6.55) den yazılırsa

$$J_0(x\cos\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x\cos\theta/2)^{2m}}{m!\Gamma(m+1)}$$

elde edilir. Elde edilen bu fonksiyon integralde yerine koyulursa

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x)^{2m}}{m!\Gamma(m+1)2^{2m}}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2m+1}d\theta=\frac{\sin x}{x}\qquad(6.63)$$

Belirli integrali hesaplamak için (6.44) den yararlanacağız. (6.44)'ü aşağıdaki şekilde yazalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (6.64)$$

(6.64) den yararlanmak için belirli integrali yeniden aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m+1} d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta^0 (\cos\theta)^{2m+1} d\theta \qquad (6.65)$$

(6.65) , (6.64) ile kıyaslandığında $p = 1/2$, $q = m+1$ bulunur. Bu değerler (6.64) de yerine koyulursa

$$\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2m+1} d\theta = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+3/2)}$$

bulunur. Hesaplanan integral (6.63)'de yerine koyulursa

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x)^{2m}}{m!\Gamma(m+1)2^{2m+1}} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+3/2)} = \frac{\sin x}{x}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra seri açılımından

$$(-1)^0 \frac{\Gamma(1/2)}{0!\Gamma(3/2)}\frac{1}{2}x^0 + (-1)^1 \frac{\Gamma(1/2)}{1!\Gamma(5/2)}\frac{1}{2^3}x^2 +$$

$$(-1)^2 \frac{\Gamma(1/2)}{2!\Gamma(7/2)}\frac{1}{2^5}x^4 + \cdots = \frac{\sin x}{x}$$

bulunur. Seri açılımında $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ indirgeme bağıntısından da yararlanarak

$$\frac{\Gamma(1/2)}{1/2\,\Gamma(1/2)}\frac{1}{2} - \frac{\Gamma(1/2)}{1!(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}\frac{1}{2^3}x^2 +$$

$$+ \frac{\Gamma(1/2)}{2!(5/2)(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}\frac{1}{2^5}x^4 + \cdots = \frac{\sin x}{x}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$1 - \frac{1}{1.2.3}x^2 + \frac{1}{1.2.3.4.5}x^4 + \cdots = \frac{\sin x}{x}$$

bulunur. Görüldüğü gibi eşitliğin birinci tarafı $\sin x/x$ fonksiyonunun seri açılımıdır. Böylece istenen eşitlik ispatlanır.

(i) $\int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\theta)d\theta = \frac{1-\cos x}{x}$ eşitliğini göstermek için eşitliğin birinci tarafında bulunan Bessel fonksiyonu $\alpha = 1$ için (6.55)'den yazılırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$J_1(x\cos\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x\cos\theta/2)^{2m+1}}{m!\Gamma(m+2)}$$

elde edilir. Elde edilen bu fonksiyon integralde yerine koyulursa

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x)^{2m+1}}{m!\Gamma(m+2)2^{2m+1}}\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2m+1}d\theta=\frac{1-\cos x}{x} \qquad (6.66)$$

Belirli integrali hesaplamak için (6.64) den yararlanacağız. (6.64) aşağıdaki şekilde verilmişti

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (6.67)$$

(6.64) den yararlanmak için belirli integrali yeniden aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2m+1}d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin\theta^0(\cos\theta)^{2m+1}\theta\,d\theta \qquad (6.68)$$

(6.68) , (6.67) ile kıyaslandığında $p=1/2$, $q=m+1$ bulunur. Bu değerler (6.68) de yerine konursa ,

$$\int_0^{\pi/2}(\cos\theta)^{2m+1}d\theta=\frac{1-\cos x}{x}$$

bulunur. Hesaplanan integral (6.66) de yerine koyulursa

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(x)^{2m+1}}{m!\Gamma(m+2)2^{2m+1}}\frac{1}{2}\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+3/2)}=\frac{1-\cos x}{x}$$

bulunur. Bu eşitlikte $\Gamma(m+2)=(m+1)\Gamma(m+1)$ ve $(m+1)m!=(m+2)!$ kullanılıp ve gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m+2)!2^{2(m+1)}}\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(m+3/2)}(x)^{2m+1}=\frac{1-\cos x}{x}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte seri açılımı yapılırsa

$$(-1)^0\frac{\Gamma(1/2)}{1!\Gamma(3/2)}\frac{1}{2^2}x^1+(-1)^1\frac{\Gamma(1/2)}{2!\Gamma(5/2)}\frac{1}{2^4}x^3+$$

$$(-1)^2\frac{\Gamma(1/2)}{3!\Gamma(7/2)}\frac{1}{2^6}x^5+\cdots=\frac{1-\cos x}{x}$$

bulunur. Seri açılımında $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ indirgeme bağıntısından da yararlanarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{\Gamma(1/2)}{1/2\,\Gamma(1/2)}\frac{1}{2^2}x-\frac{\Gamma(1/2)}{2!(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}\frac{1}{2^4}x^3+$$

$$\frac{\Gamma(1/2)}{3!(5/2)(3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}\frac{1}{2^6}x^5+\cdots=\frac{(1-\cos)x}{x}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{4!}+\frac{x^5}{6!}-\cdots=\frac{1-\cos x}{x}$$

bulunur. Görüldüğü gibi eşitliğin birinci tarafı $(1-\cos x)/x$ fonksiyonunun seri açılımıdır. Böylece istenen eşitlik ispatlanır.

6. BÖLÜMLE İLGİLİ PROBLEMLER

A. Aşağıdaki denklemlerin belirtilen bayağı noktalar yakınında seri çözümlerini bulunuz.

(a) $y''+xy'+(2x^2+1)y=0, x_0=0$

Y. $y=a_0(1-x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+\frac{11}{40}x^5+\cdots)$

$+a_1(x-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^5+\cdots)$, tüm x değerleri için geçerlidir.

(b) $(x^2+1)y''+xy'+xy=0, x_0=0$

Y. $y=a_0(1-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots)+a_1(x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{40}x^5+\cdots)$,

$|x|<1$ için geçerlidir.

(c) $(1-4x^2)y''+8y=0, x_0=0$

Y. $y=a_0(1-4x^2)+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}x^{2k+1}}{4k^2-1}$, $|x|<\frac{1}{2}$ için geçerlidir.

(d) $(1+4x^2)y''-8y=0, x_0=0$

Y. $y=a_0(1+4x^2)+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}2^kx^{2k+1}}{4k^2-1}$, $|x|<\frac{1}{2}$ için geçerlidir.

(e) $y''+3xy'+3y=0, x_0=0$

Y. $y=a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^kx^{2k}}{2^k\,k!}\right]+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-3)^kx^{2k+1}}{3.5.7...(2k+1)}\right]$, tüm x değerleri için geçerlidir.

(f) $(x^2+4)y''+6xy'+4y=0, x_0=0$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Y. $y = a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)x^{2k}}{2^{2k}}\right]+a_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+3)x^{2k+1}}{3.2^{2k}}\right]$, $|x|<2$ için geçerlidir.

(g) $y''+(x-2)y=0, x_0=2$

Y. $y = a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-2)^{3k}}{3^{3k}k![2.5.8...(3k-1)]}\right]+a_1\left[(x-2)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(x-2)^{3k+1}}{3^k.k![4.7.10...(3k+1)]}\right]$,

tüm x değerleri için geçerlidir.

(h) $y''-(x^2+6x+9)y'-3(x+3)y=0, x_0=-3$

Y. $y = a_0\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(x+3)^{3m}}{2.5.8...(3m-1)}\right]+a_1\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x+3)^{3m+1}}{3^m.m!}\right]$,

tüm x değerleri için geçerlidir.

(i) $y''-2(x+3)y'-3y=0, x_0=-3$

Y. $y = a_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3.7.11...(4k-1)(x+3)^{2k}}{(2k)!}\right]$

$+a_1\left[(x+3)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5.9.13...(4k+1)(x+3)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$, tüm x değerleri için geçerlidir.

B. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin $x_0 = 0$ noktası yakınındaki kuvvet serisi çözümünü Frobenius yöntemini kullanarak bulunuz.

(a) $4x^2y''+4xy'+(4x^2-1)y=0$

Y. $y_1 = x^{-1/2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right)$,

$y_2 = x^{-1/2}\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)$

(b) $4xy''+3y'+3y=0$

Y. $y_1 = x^{1/4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^{n+1/4}}{n!5.9.13...(4n+1)}$,

$y_2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{n!3.7.11...(4n-1)}$

(c) $2x^2(1-x)y''-x(1+7x)y'+y=0$

Y. $y_1 = x+\frac{1}{15}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)(2n+5)x^{n+1}$,

$y_2 = x^{1/2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)x^{n+1/2}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(d) $x^2y''-x(1+x)y'+y=0$

Y. $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$, $y_2=y_1\ln x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_n x^{n+1}}{n!}$

(e) $x^2y''+x(x-3)y'+4y=0$

Y. $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^{n+2}}{n!}$,

$y_2=y_1\ln x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\left[n+(n+1)\phi_n\right]x^{n+2}}{n!}$

(f) $xy''+y=0$

Y. $y_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!(n-1)!}$,

$y_2=y_1\ln x+1+x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(\phi_n+\phi_{n-1})x^n}{n!(n-1)!}$

(g) $4x^2y''+2x(2-x)y'-(1+3x)y=0$

Y. $y_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1/2}}{2^{n-1}(n-1)!}$,

$y_2=y_1\ln x+2x^{-1/2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\phi_{n-1}x^{n-1/2}}{2^{n-1}(n-1)!}$

(h) $xy''-xy'-y=0$

Y. $y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=xe^x$, $y_2=y_1\ln x+1+-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\phi(n-1)x^n}{(n-1)!}$

(i) $x^2y''+x(3-x)y'-xy=0$

Y. $y_1=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$, $y_2=x^{-2}(1+x)$

C. Aşağıda verilen Diferansiyel denklemler için $x=\infty$ noktasının durumunu inceleyiniz. Genel çözümü $\frac{1}{x}$ 'in kuvvetleri cinsinden bulunuz.

(a) $2x^3y''+(5x^2-2x)y'+(x+3)y=0$

Y. $y_1=x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+3)x^{-n}}{3n!}$, $y_2=x^{-1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n(n+1)x^{-n}}{1.3.5...(2n-1)}\right]$

(b) $x^2(x^2-1)y''+(x^2+5x)y'-8y=0$

Y. $y(x)=c_1\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)x^{-2m}+c_2\left[y_1(x)\ln x+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}mx^{-2m}\right]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) $9x^2(4+x^2)y'' + 2x(4+x^2)y' + y = 0$

Y. $y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [(-1).3.7...(4k-5)]^2 x^{-2k}}{(2k)!}$,

$$y_2 = x^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k [1.5.9...(4k-3)]^2 x^{-2k-1}}{(2k+1)!}$$

C. Aşağıdaki Bessel Denklemlerini $x_0 = 0$ yakınında çözünüz

(a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$

Y. $y = c_1 x^{1/3}(1 - \frac{3x^2}{16} + \frac{9x^4}{896} - \cdots) + c_2 x^{-1/3}(1 - \frac{3x^2}{8} + \frac{9x^4}{320} - \cdots)$

(b) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$, $x > 0$

İp ucu : Bessel Denkleminin $y = x^{-1/2}v(x)$ değişken değiştirmesi ile $v'' + v = 0$ denklemine dönüşeceğini ve böylece $\alpha = 1/2$ ci mertebeden Bessel denkleminin genel çözümünün

$$y = c_1 x^{1/2}(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots) + c_2 x^{-1/2}(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots)$$

olduğunu gösteriniz

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 7. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

7.1 Eleminasyon Yöntemi

Tanım 7.1

Diferansiyel denklem sisteminde bilinmeyen fonksiyonların ardışık elenmesiyle sistemin, tek bir değişkene bağlı bir diferansiyel denkleme indirgenmesidir. Önce bu diferansiyel denklem integre edilir, daha sonra sistemden diğer bilinmeyen fonksiyonlar bulunur.

Aşağıdaki Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini Eleminasyon Yöntemiyle Çözünüz.

(a) $u' = 4u - v$
$v' = -4u + 4v$

(b) $y' = 2y + z$
$z' = -4y + 2z$

(c) $w' = w - y - z$
$y' = y + 3z$
$z' = 3y + z$

(d) $(D^2 + 6)y + Dv = 0$
$(D + 2)y + (D - 2)v = 2$

(e) $(D^2 - 3D)y - (D - 2)z = 14x + 7$
$(D - 3)y + Dz = 1$

(f) $(D^2 - 2)x - 3y = e^{2t}$
$(D^2 + 2)y + x = 0$, $t = 0$ iken $x = y = 1$, $Dx = Dy = 0$

(g) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x - 2\dfrac{dy}{dt} = 2t$
$2\dfrac{dx}{dt} - x + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 7$

Çözümler :

(a) $u' = 4u - v$ (1)
$v' = -4u + 4v$ (2)

(1) denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa

$$D^2u = 4Du - Dv \qquad (3)$$

olur. (3) denkleminde Dv nin değeri (2) denkleminden yerine koyulursa

$$D^2u = 4Du + 4u - 4v \qquad (4)$$

bulunur. (1) denkleminden v'nin değerini (4) de yerine koyarak v yok edilirse

$$D^2u - 8Du + 12u = 0 \qquad (5)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

sabit katsayılı lineer denklem elde edilir. Bu homogen denklemin çözümü

$$u = c_1e^{2x} + c_2e^{6x} \quad (6)$$

olarak bulunur. (1) denkleminde u ve türevi yerine koyulursa

$$v = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{6x} \quad (7)$$

elde edilir. (6) ve (7) denklemleri sistemin çözümünü verir.

(b) $y' = 2y + z$ (1)

$z' = -4y + 2z$ (2)

(1) denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa

$$D^2y - 2Dy - Dz = 0 \quad (3)$$

olur. (2) denkleminden Dz in değeri (3) de yerine koyulursa

$$D^2y - 2Dy + 4y - 2z = 0 \quad (4)$$

bulunur. (1) den z'in değeri (4) de yerine koyulursa

$$D^2y - 4Dy + 8y = 0 \quad (5)$$

sabit katsayılı lineer denklem elde edilir. Bu homogen denklemin çözümü

$$y = c_1e^{2x}\cos 2x + c_2e^{2x}\sin 2x \quad (6)$$

dir. (1) denkleminde y ve y' değerleri yerine koyulursa

$$z = 2c_2e^{2x}\cos 2x - 2c_1e^{2x}\sin 2x \quad (7)$$

elde edilir. (6) ve (7) denklemleri sistemin çözümünü verir.

(c) $w' = w - y - z$ (1)

$y' = y + 3z$ (2)

$z' = 3y + z$ (3)

(2) ve (3) denklemleri arasında y yok edilirse

$$z' = 3y' - 8z \quad (4)$$

bulunur. Ayrıca (1) denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa

$$D^2w = Dw - Dy - Dz \quad (5)$$

bulunur. (4) denkleminden z' ve (2) denkleminden y' (5) de yerine koyulursa

$$D^2w = Dw - 4y - 4z \quad (6)$$

bulunur. (6) denklemi (1)den yararlanarak aşağıdaki şekilde yeniden yazılarak sabit katsayılı lineer bir denklem elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$D^2w - 5Dw + 4w = 0 \qquad (7)$$

Bu homogen denklemin çözümü

$$w = c_1e^{x} + c_2e^{4x} \qquad (8)$$

olarak bulunur. (2) nin her iki tarafının türevi alınırsa

$$D^2y = Dy + 3Dz \qquad (9)$$

bulunur. Burada Dy (2)'den ve Dz ise (3)'den (9) da yerine koyulduğunda sabit katsayılı lineer bir denklem elde edilir.

$$D^2y - 2Dy - 8y = 0 \qquad (10)$$

Bu homogen denklemin çözümü

$$y = c_3e^{4x} + c_4e^{-2x} \qquad (11)$$

olarak bulunur. (2) denkleminde y ve y' nün değerleri yerine koyulursa

$$z = -3c_2e^{4x} - c_1e^{4x} - c_4e^{-2x} \qquad (12)$$

elde edilir. (8), (11) ve (12) denklem sisteminin çözümünü verir.

(d) $(D^2+6)y + Dv = 0 \qquad (1)$

$(D+2)y + (D-2)v = 2 \qquad (2)$

(1) ve (2) denklemlerinin her iki tarafının türevi alınıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$D^3y - D^2y + 4Dy + 2Dv = 0 \qquad (3)$$

bulunur. (2) denkleminden Dv nin değeri (3) denkleminde yerine konulduğunda sabit katsayılı lineer bir denklem elde edilir.

$$D^3y - 3D^2y + 4Dy - 12y = 0$$

$$(D^2 + 4)(D - 3)y = 0 \qquad (4)$$

Bu homogen denklemin çözümü

$$y = c_1e^{3x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x \qquad (5)$$

olarak bulunur. (1) ve (2) denklemleri taraf tarafa çıkartılırsa

$$D^2y - Dy + 4y + 2v = -2$$

$$v = -\frac{1}{2}D^2y + \frac{1}{2}Dy - 2y - 1 \qquad (6)$$

bulunur. (6) denkleminde y, y' ve y'' değerleri yerlerine koyulursa

$$v = -5c_1e^{3x} - c_2\cos 2x + c_3\sin 2x - 1 \qquad (7)$$

elde edilir. (5) ve (7) denklem sisteminin çözümünü verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $(D^2-3D)y-(D-2)z=14x+7$ (1)
$(D-3)y+Dz=1$ (2)

(1) ve (2) denklemlerinin her iki tarafının türevi alınıp taraf tarafa toplanırsa

$$D^3y - 2D^2y - 3Dy + 2Dz = 14 \qquad (3)$$

bulunur. (3) denkleminden iki katı alınmış (2) denklemini çıkartırsak sabit katsayılı lineer bir denklem elde edilir.

$$D^3y - 2D^2y - 5Dy + 6y = 12 \qquad (4)$$

Homogen olmayan bu denklemin genel çözümü

$$y_g = y = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3e^{-2x} + 2 \qquad (5)$$

olarak bulunur. (1) ve (2) taraf tarafa toplanarak elde edilen denklemden z çekilirse

$$z = -\frac{1}{2}D^2y + Dy + \frac{3}{2}y + 7x + 4 \qquad (6)$$

bulunur.(6)) denkleminde y, y' ve y'' değerleri yerlerine koyulursa

$$z = 2c_1e^x - \frac{5}{2}c_3e^{-2x} + 7x + 7 \qquad (7)$$

bulunur. (5), (6) ve (7) denklem sisteminin çözümleridir.

(f) $(D^2-2)x-3y=e^{2t}$ (1)
$(D^2+2)y+x=0$ (2)

(1) denkleminin her iki tarafının art arda iki kez türevi alınırsa

$$D^4x-2D^2x-3D^2y=4e^{2t} \qquad (3)$$

bulunur. (3) denkleminde , D^2x (1) den D^2y ise (2) den çekilip yerine koyulursa

$$(D^4-1)x = 6e^{2t} \qquad (4)$$

Sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem elde edilir. Homogen olmayan bu denklemin genel çözümü

$$x_g = x = b_1e^t + b_2e^{-t} + b_3\cos t + b_4\sin t + \frac{2}{5}e^{2t} \qquad (5)$$

olarak elde edilir. (1) den y çekilirse

$$y = \frac{1}{3}D^2x - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}e^{2t} \qquad (6)$$

bulunur. (6) denkleminde x'' ve x değerleri yerlerine koyulursa

$$y = -\frac{1}{3}(b_1e^t + b_2e^{-t}) - (b_3\cos t + b_4\sin t) - \frac{1}{15}e^{2t} \qquad (7)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. x, y, Dx, Dy denklemleriyle birlikte aşağıda verilen başlangıç koşulları kullanılarak

$$t = 0 \text{ iken } x = y = 1 \ , \ Dx = Dy = 0$$

sabitlerin değeri

$$b_1 = \frac{3}{4} \ , \ b_2 = \frac{7}{4} \ , \ b_3 = -\frac{19}{10} \ , \ b_4 = \frac{1}{5}$$

olarak bulunur. Sabitlerin bulunan değerleri (5) ve (7) denklemlerinde yerine koyulursa

$$x = \frac{1}{4}(3e^{t} + 7e^{-t}) - \frac{1}{10}(19\cos t - 2\sin t) + \frac{2}{5}e^{2t} \qquad (8)$$

$$y = -\frac{1}{12}(3e^{t} + 7e^{-t}) + \frac{1}{10}(19\cos t - 2\sin t) - \frac{1}{5}e^{2t} \qquad (9)$$

bulunur. (8) ve (9) denklem sisteminin istenilen özel çözümleridir.

(g) $$\frac{d^2x}{dt^2} + x - 2\frac{dy}{dt} = 2t \qquad (1)$$

$$2\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} - 2y = 7 \qquad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin her iki tarafının türevi alınıp taraf tarafa toplanırsa

$$D^3x + 4D^2x - Dx - 4Dy = 2 \qquad (3)$$

bulunur. Dy (2) den çekilip (3) de yerine koyulursa

$$D^3x + 2D^2x - Dx - 2x = 2 - 4t \qquad (4)$$

sabit katsayılı lineer bir denklem elde edilir. Homogen olmayan bu denklemin genel çözümü

$$x_g = x = b_1e^{t} + b_2e^{-t} + b_3e^{-2t} + 2t - 2 \qquad (5)$$

olarak bulunur. (1) den Dy yi çekip (2) de x, x' ve x'' nün değerleri ile birlikte koyulursa

$$y = b_1e^{t} - b_2e^{-t} - \frac{5}{4}b_3e^{-2t} - t - 1 \qquad (6)$$

bulunur. (5) ve (6) denklem sisteminin istenilen çözümleridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7.2 Bir Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri

Tanım 7.2

$\mathbf{A}=(a_{ij})$ bir n x n matrisi , $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{B}$ birer sütun vektörü olmak üzere

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B} \tag{7.1}$$

Vektör denklemini göz önüne alalım. $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ birer sütun vektörü veya birer n x 1 vektörü olduğundan , m bir orantılılık katsayısı olmak üzere

$$\mathbf{B}=m\mathbf{X}$$

yazılır. O zaman (7.1) denklemi

$$\mathbf{AX}=m\mathbf{X}$$

veya

$$(\mathbf{A}-m\mathbf{I})\mathbf{X}=0 \tag{7.2}$$

şeklini alır. Bu bir vektör denklemidir ve burada $\mathbf{I}$ bir n x n birim matrisidir. Bu denklem açık şekilde yazılırsa

$$\begin{pmatrix} a_{11}-m & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-m & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0 \tag{7.3}$$

elde edilir. (7.3) denklem sisteminin " sıfır " çözümünden başka bir çözümünün bulunabilmesi için , (7.3) denkleminin katsayı matrisi olan $(\mathbf{A}-m\mathbf{I})$ matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Öyle ise ,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-m & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-m & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-m \end{vmatrix}=0 \tag{7.4}$$

yazılır. (7.4) denklemi m ye göre n 'inci dereceden bir cebirsel denklemdir. Bu denkleme $\mathbf{A}$ matrisinin karakteristik denklemi denir. Denklemin kökleri $m_1,m_2,\ldots,m_n$ sayılarına da $\mathbf{A}$ matrisinin " özdeğerleri " veya " eigen değerleri " denir. m nin bu değerleri sıra ile (7.3) denkleminde yerine konularak her seferinde $x_1,x_2,\ldots,x_n$ değerleri bulunur. Böylece bulunan vektörlere de , $\mathbf{A}$ matrisinin " özvektörleri" denir.

Aşağıdaki matrislerin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) Matrisin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -2 & 3-m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri olan $m_1 = 1$ ve $m_2 = 2$ verilen matrisin özdeğerleridir. m_1 ve m_2 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulmak için bu özdeğerleri birer birer $(\mathbf{A} - m\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$ denklem sisteminde yerine koyup , elde edilen denklem sistemlerini çözeceğiz.

$m_1 = 1$ için

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

buradan

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde $m_2 = 2$ için

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

buradan , $\mathbf{X}_2$ özvektörü

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur.

(b) Matrisin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & -1 & -1 \\ 0 & 1-m & 3 \\ 0 & 3 & 1-m \end{vmatrix} = (1-m)(m-4)(m+2) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri olan $m_1 = 1$, $m_2 = 4$ ve $m_3 = -2$ verilen matrisin özdeğerleridir. m_1 , m_2 ve m_3 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulmak için bu özdeğerleri birer birer $(\mathbf{A} - m\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$ denklem sisteminde yerine koyup , elde edilen denklem sistemlerini çözeceğiz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$m_1 = 1$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

buradan

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde $m_2 = 4$ için

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

buradan

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$-3x_2 + 3x_3 = 0$$

bulunur. Bu sistemin çözümlerinden biri $m_2 = 4$ 'e karşılık gelen $\mathbf{X}_2$ özvektörü olup

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Son olarak $m_3 = -2$ için benzer şekilde

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$3x_2 + 3x_3 = 0$$

bulunur. Bu sistemin çözümlerinden biri $m_3 = -2$ 'e karşılık gelen $\mathbf{X}_3$ özvektörü olup

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) Matrisin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & -1 & -1 \\ 1 & -1-m & 0 \\ 1 & 0 & -1-m \end{vmatrix} = (1+m)(1+m^2) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri olan $m_1 = -1$, $m_2 = i$ ve $m_3 = -i$ verilen matrisin özdeğerleridir. m_1 , m_2 ve m_3 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulmak için bu özdeğerleri birer birer $(\mathbf{A} - m\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$ denklem sisteminde yerine koyup, elde edilen denklem sistemlerini çözeceğiz.

$m_1 = -1$ için

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$-x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 = 0$$

bulunur. Bu sistemin çözümlerinden biri $m_1 = -1$'e karşılık gelen $\mathbf{X}_1$ özvektörü olup

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde $m_2 = i$ sanal özdeğer için

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 & -1 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$(1-i)x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + (-1-i)x_2 = 0$$
$$x_1 + (-1-i)x_3 = 0$$

$\mathbf{X}_2$ özvektörünü veren denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $x_1 = 1+i$ ve $x_2 = x_3 = 1$ elde edilerek $\mathbf{X}_2$ özvektörü aşağıda gösterildiği şekilde yazılır.

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde $m_3 = -i$ sanal özdeğeri için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{pmatrix} 1+i & -1 & -1 \\ 1 & -1+i & 0 \\ 1 & 0 & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$(1+i)x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + (-1+i)x_2 = 0$$
$$x_1 + (-1+i)x_3 = 0$$

$\mathbf{X}_3$ özvektörünü veren denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $x_1 = 1-i$ ve $x_2 = x_3 = 1$ elde edilerek $\mathbf{X}_3$ özvektörü aşağıda gösterildiği

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur.

(d) Matrisin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ 2 & 1-m & -2 \\ 3 & 2 & 1-m \end{vmatrix} = (1-m)(m^2-2m+5) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri olan $m_1 = 1$, $m_2 = 1+2i$ ve $m_3 = 1-2i$ verilen matrisin özdeğerleridir. m_1 , m_2 ve m_3 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri bulmak için bu özdeğerleri birer birer $(\mathbf{A}-m\mathbf{I})\mathbf{X} = 0$ denklem sisteminde yerine koyup , elde edilen denklem sistemlerini çözeceğiz.

$m_1 = 1$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

buradan

$$2x_1 - 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 = 0$$

bulunur. Bu sistemin çözümlerinden biri $m_1 = 1$'e karşılık gelen $\mathbf{X}_1$ özvektörü olup

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$m_2 = 1+2i$ kompleks özdeğeri için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} -2ix_1 &= 0 \\ 2x_1 - 2ix_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2ix_3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\mathbf{X}_2$ özvektörünü veren denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = -i$ elde edilerek $\mathbf{X}_2$ özvektörü aşağıda gösterildiği şekilde

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde $m_3 = 1-2i$ kompleks özdeğeri için

$$\begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 3 & 2 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} 2ix_1 &= 0 \\ 2x_1 + 2ix_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2ix_3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\mathbf{X}_3$ özvektörünü veren denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = i$ elde edilerek $\mathbf{X}_3$ özvektörü aşağıda gösterildiği şekilde

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

bulunur.

(e) Matrisin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 2 & 3-m & 2 \\ 3 & 3 & 4-m \end{vmatrix} = (m-1)^2(7-m) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri olan $m_1 = m_2 = 1$ ve $m_3 = 7$ verilen matrisin özdeğerleridir. Önce $m_1 = m_2 = 1$ çift katlı özdeğerine karşılık gelen özvektörleri bulalım. Bazı durumlarda çift katlı özdeğere iki tane birbirinden bağımsız özvektör karşı gelir, bazı durumlarda ise bu mümkün değildir, yalnız bir tek özvektör bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$m_1 = m_2 = 1$ için

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem sisteminin keyfi çözümünden $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = -1$ elde edildiği gibi bir başka keyfi çözümden de $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ve $x_3 = 0$ bulunur. Bu çözümlerin belirlediği özvektörler lineer bağımsızdır olup $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_2$ aşağıda gösterildiği şekilde yazılır.

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde $m_3 = 7$ için

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} -5x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{X}_3$ özvektörünü veren denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ ve $x_3 = 3$ elde edilerek $\mathbf{X}_3$ özvektörü aşağıda gösterildiği şekilde.

$$\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bulunur.

(f) Matrisin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & 2 & 2 \\ 0 & 2-m & 1 \\ -1 & 2 & 2-m \end{vmatrix} = (m-1)(m-2)^2 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklindedir. Bu denklemin kökleri $m_1 = 1$ ve $m_2 = m_3 = 2$ verilen matrisin özdeğerleridir.

$m_1 = 1$ için

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sistemin çözümünden $x_1 = x_2 = -1$ ve $x_3 = 1$ elde edilerek $\mathbf{X}_1$ özvektörü aşağıda gösterildiği şekilde yazılır.

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Benzer şekilde $m_2 = m_3 = 2$ için

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem sisteminin bir tek çözümü vardır. Bu durumda

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir.

7.3 Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Matris Yöntemiyle Çözümü

Her biri, serbest değişken t'nin fonksiyonları olan $x_1, x_2, \ldots x_n$ gibi n sayıda bilinmeyen fonksiyon ve her defasında bu fonksiyonlardan yalnız birinin birinci mertebeden türevini içeren n sayıda lineer diferansiyel denklemden oluşan ve aşağıdaki şekilde verilen bir denklem sistemini göz önüne alalım.*

* Kaynak 1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + F_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + F_2(t)\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + F_n(t)
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Burada görülen $a_{ij}(t)$ ve $F_i(t)$ skalar fonksiyonları $(i=1,2,\ldots,n)$ ve $(j=1,2,\ldots,n)$ verilen bir $a \le t \le b$ reel aralığında t'nin her değeri için süreklidir. Eğer bu aralıkta bütün t değerleri için $F_i(t)=0$ ise, $(i=1,2,\ldots,n)$ (7.5) denklem sistemine homogen denklem sistemi, eğer böyle değilse bu sisteme homogen olmayan denklem sistemi denir. (7.5) denklemini vektör ve matris gösterimi kullanarak yazabiliriz. Bunun için, denklem sisteminde verilen $x_1, x_2, \ldots x_n$ fonksiyonlarının bir $\mathbf{X}(t)$ nx1 sütun vektörünün bileşenleri ve $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)$ fonksiyonlarının da bir $\mathbf{F}(t)$ nx1 vektörünün bileşenleri olduğu düşünülürse, bu denklem sistemi

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t) \tag{7.6}$$

(7.6) denklemi bir vektör diferansiyel denklem olduğu için bunun herhangibir çözümü de doğal olarak nx1 sütun vektörü olacaktır. O zaman $a \le t \le b$ reel aralığında t'nin her değeri için tanımlanmış olan ve (7.6) diferansiyel denklemini sağlayan bir $\mathbf{X} = \Phi(t)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri olan

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Phi_1(t)\\
x_2 &= \Phi_2(t)\\
&\vdots\\
x_n &= \Phi_n(t)
\end{aligned}$$

skalar fonksiyonları birlikte (7.5) diferansiyel denklem sistemini sağlar ve bu fonksiyonların türevleri $a \le t \le b$ aralığında sürekli fonksiyonlar olur. Ayrıca $\mathbf{X} = \Phi(t)$ fonksiyonu başlangıç şartlarını da sağlar. $a \le t \le b$ aralığında t'nin bir t_0 değeri için $\mathbf{X}$ in aldığı değer $\mathbf{C} = \Phi(t_0)$ sabit nx1 vektörü ile gösterilirse $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bu vektörün bileşenleri olmak üzere

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7.4 Birinci Mertebeden Homogen Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

(7.7) denkleminde $\mathbf{F}(t)=0$ ise bu denklem *

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{X} \tag{7.8}$$

şeklini alır. (7.8) birinci mertebeden lineer ve homogen bir vektör diferansiyel denklemidir. Bu denklem sisteminin çözümü için sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri göz önüne alınırsa

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{u}e^{mt} \tag{7.9}$$

şeklinde bir çözümü olacağı anlaşılır. Burada m bir sabit sayı ve $\mathbf{u}$, sıfır vektörü dışında bir sabit vektördür. (7.9) denklemi ile verilen $\mathbf{X}(t)$ fonksiyonu ve türevi , (7.8) vektör diferansiyel denkleminde yerine koyulursa

$$me^{mt}\mathbf{u}=e^{mt}\mathbf{A}\mathbf{u}$$

veya

$$(\mathbf{A}-m\mathbf{I})\mathbf{u}=0 \tag{7.10}$$

elde edilir. (7.10) denkleminin (7.8) denkleminin bir çözümü olması için bu denklemlerde görülen $\mathbf{u}$ sabit vektörünün bir özvektör olması gerekmektedir. Katsayılar matrisi bir nxn matrisi olduğuna göre bunun $m_1, m_2, \ldots, m_n$ gibi n sayıda özdeğeri vardır. Her özdeğere karşılık özvektör bulunduğundan $\mathbf{A}(t)$ matrisinin $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ gibi n sayıda özvektörü vardır ve bu vektörler kendi aralarında lineer bağımsızdır. Bunun anlamı (7.8) denkleminin n sayıda özel çözümünün var olmasıdır. Bu çözümler genel olarak

$$\mathbf{X}_i=e^{m_i t}\mathbf{u}_i \qquad (1,2,\ldots,n) \tag{7.11}$$

şeklindedir. (7.11) fonksiyonlarının her biri kendi aralarında lineer bağımsız oldukları için $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları , reel veya kompleks n keyfi sayı olmak üzere , bunların lineer kombinasyonu olan

$$\mathbf{X}(t)=c_1e^{m_1 t}\mathbf{u}_1+c_2e^{m_2 t}\mathbf{u}_2+\ldots+c_ne^{m_n t}\mathbf{u}_n \tag{7.12}$$

fonksiyonu (7.8) denkleminin genel çözümünü verir.

Bir nxn kare matrisi olan $\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin $m_1, m_2, \ldots, m_n$ özdeğerleri üç ayrı grupta toplanabilir:

(i) Bütün özdeğerler birbirinden farklı , pozitif veya negatif reel sayılardır.

(ii) Bazı özdeğerler , eşlenikleri ile birlikte eşlenik kompleks sayı çiftleri şeklinde olabilir.

(iii) Bazı özdeğerler tekrar eden sayılar olabilir.

---

* Kaynak 1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 7.1

$\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)$, (7.8) denkleminin $a \le t \le b$ reel aralığında tanımlı n çözümü ve $W(t)$ bunların Wronskiyeni ise aşağıdakiler eşdeğerdir.

(a) Her $t \in a \le t \le b$ için $W(t) \neq 0$ ise $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)$ bu aralıkta lineer bağımsızdır.
(b) Herhangi bir $t_0 \in a \le t \le b$ için $W(t_0) \neq 0$ ise $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \ldots, \mathbf{X}_n(t)$ bu aralıkta lineer bağımsızdır.

7.5 Özdeğerlerin birbirinden farklı, pozitif veya negatif reel sayılar olması durumu

Aşağıdaki diferensiyel denklem sistemlerini çözünüz.

(a) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2$

(b) $\dfrac{dx_1}{dt} = 6x_1 - 3x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2$

(c) $\dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 - x_2 + 6x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -10x_1 + 4x_2 - 12x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3$

(d) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2 - x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + 3x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = 3x_2 + x_3$

(e) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 + x_2$

(f) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + 3x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = 2x_3$

Çözümler :

(a) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{rt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 1-m & 1 \\ 4 & 1-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & 1 \\ 4 & 1-m \end{vmatrix}=(1-m)^2-4=m^2-2m-3=0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1=3$ ve $m_2=-1$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1=3$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-2u_1+u_2=0$$

tek bir denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümlerinden biri $u_1=1$ ve $u_2=2$ dir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2=-1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_1+u_2=0$$

tek bir denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümlerinden biri $u_1=1$ ve $u_2=-2$ dir. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

belirlenir. (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t} \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t}$$

ile verilir. Bu çözümlerin Wronskiyeni ise

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$W\{\mathbf{X}_1(t),\mathbf{X}_2(t)\}=\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix}=-4e^{2t}\neq 0$$

olduğundan bulduğumuz çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$$

olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

(b) $\dfrac{dx_1}{dt}=6x_1-3x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=2x_1+x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}6-m & -3\\ 2 & 1-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix}6-m & -3\\ 2 & 1-m\end{vmatrix}=m^2-7m+12=0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1=3$ ve $m_2=4$ dür. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1=3$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$3u_1 - 3u_2 = 0$$
$$2u_1 - 2u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = u_2 = 1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 4$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_1 - 3u_2 = 0$$

tek bir denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümlerinden biri $u_1 = 3$ ve $u_2 = 2$ dir. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

belirlenir. (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

ile verilir. Bu çözümlerin Wronskiyeni ise

$$W\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t)\} = \begin{vmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{vmatrix} = -e^{7t} \neq 0$$

olduğundan bulduğumuz çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

(c) $\dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 - x_2 + 6x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -10x_1 + 4x_2 - 12x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 7-m & -1 & 6 \\ -10 & 4-m & -12 \\ -2 & 1 & -1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 7-m & -1 & 6 \\ -10 & 4-m & -12 \\ -2 & 1 & -1-m \end{vmatrix} = m^3 - 10m^2 + 31m - 30 = (m-2)(m-3)(m-5) = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ ve $m_3 = 5$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerler ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur. $m_1 = 2$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -10 & 2 & -12 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$\begin{aligned} 5u_1 - u_2 + 6u_3 &= 0 \\ -10u_1 + 2u_2 - 12u_3 &= 0 \\ -2u_1 + u_2 - 3u_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$ ve $u_2 = u_3 = -1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 3$ için (3) denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ -10 & 1 & -12 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$\begin{aligned} 4u_1-u_2+6u_3&=0\\ -10u_1+u_2-12u_3&=0\\ -2u_1+u_2-4u_3&=0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1=1$, $u_2=-2$ ve $u_3=-1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Son olarak , $m_3=5$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -10 & -1 & -12 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$\begin{aligned} 2u_1-u_2+6u_3&=0\\ -10u_1-u_2-12u_3&=0\\ -2u_1+u_2-6u_3&=0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1=3$, $u_2=-6$ ve $u_3=-2$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_3$ özvektörü

$$\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bulunur. (1) denkleminin $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} \quad , \quad \mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_3(t)=\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}e^{5t}$$

şeklindedir. Bulduğumuz çözümlerin lineer bağımsızlığını gösterebilmek $t=0$ da Wronskiyenini buluruz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$W\{\mathbf{X}_1(0),\mathbf{X}_2(0),\mathbf{X}_3(0)\}=\begin{vmatrix}1&1&3\\-1&-2&-6\\-1&-1&-2\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Wronskiyenin sıfırdan farklı olması çözümlerin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}e^{3t}+c_3\begin{pmatrix}3\\-6\\-2\end{pmatrix}e^{3t}$$

olur. Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.

(d) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2-x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt}=x_2+3x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=3x_2+x_3$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&3\\0&3&1\end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&3\\0&3&1\end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}1-m&-1&-1\\0&1-m&3\\0&3&1-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix}1-m&-1&-1\\0&1-m&3\\0&3&1-m\end{vmatrix}=(m+2)(1-m)(m-4)=0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1=-2$, $m_2=1$ ve $m_3=4$ dür. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerler ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$m_1 = -2$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$3u_1 - u_2 - u_3 = 0$$
$$3u_2 + 3u_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminde keyfi olarak $u_1 = 0$ seçersek $u_2 = 1$ ve $u_3 = -1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-u_2 - u_3 = 0$$
$$3u_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminde keyfi olarak $u_1 = 1$ seçersek $u_2 = u_3 = 0$ olduğu görülür. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

belirlenir. Son olarak, $m_3 = 4$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-3u_1 - u_2 - u_3 = 0$$
$$-3u_2 + 3u_3 = 0$$
$$3u_2 - 3u_3 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 2$ ve $u_2 = u_3 = -3$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_3$ özvektörü

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

bulunur. (1) denkleminin $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad , \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t}$$

şeklindedir. Bulduğumuz çözümlerin lineer bağımsızlığını gösterebilmek için $t = 0$ da Wronskiyenini buluruz.

$$W\{\mathbf{X}_1(0), \mathbf{X}_2(0), \mathbf{X}_3(0)\} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Wronskiyenin sıfırdan farklı olması çözümlerin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} e^{4t}$$

olur. Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.

(e) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 + x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 2 & 1-m & 1 \\ -1 & 1 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 2 & 1-m & 1 \\ -1 & 1 & -m \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)(m-3) = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = -2$, $m_2 = 1$ ve $m_3 = 3$ dür. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerler ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur. $m_1 = -2$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$3u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$$
$$2u_1 + 3u_2 + u_3 = 0$$
$$-u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ ve $u_3 = 1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_2 - u_3 = 0$$
$$2u_1 + u_3 = 0$$
$$-u_1 + u_2 - u_3 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminde $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ ve $u_3 = -2$ olarak bulunur. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

belirlenir. Son olarak , $m_3 = 3$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$\begin{aligned} -2u_1 + 2u_2 - u_3 &= 0 \\ 2u_1 - 2u_2 + u_3 &= 0 \\ -u_1 + u_2 - 3u_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = u_2 = 1$ ve $u_3 = 0$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_3$ özvektörü

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. (1) denkleminin $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \quad , \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$

şeklindedir. Bulduğumuz çözümlerin lineer bağımsızlığını gösterebilmek $t = 0$ da Wronskiyenini buluruz.

$$W\{\mathbf{X}_1(0), \mathbf{X}_2(0), \mathbf{X}_3(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Wronskiyenin sıfırdan farklı olması çözümlerin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olur. Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.

(f) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -x_2 + 3x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = 2x_3$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 0 & -1-m & 3 \\ 0 & 3 & 2-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 0 & -1-m & 3 \\ 0 & 3 & 2-m \end{vmatrix} = (-1-m)(1-m)(2-m) = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = -1$, $m_2 = 1$ ve $m_3 = 2$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerler ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur. $m_1 = -1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$$
$$u_3 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ ve $u_3 = 0$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_2 - u_3 = 0$$
$$u_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminde keyfi olarak $u_1 = 1$ seçersek $u_2 = u_3 = 0$ olduğu görülür. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

belirlenir. Son olarak, $m_3 = 2$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$$
$$-3u_2 + 3u_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminden $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_3$ özvektörü

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. (1) denkleminin $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \quad , \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklindedir. Bulduğumuz çözümlerin lineer bağımsızlığını gösterebilmek $t=0$ da Wronskiyenini buluruz.

$$W\{\mathbf{X}_1(0),\mathbf{X}_2(0),\mathbf{X}_3(0)\}=\begin{vmatrix}1&1&2\\-1&0&1\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Wronskiyenin sıfırdan farklı olması çözümlerin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}e^{-t}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t}+c_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$$

olur. Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.

7.6 Özdeğerlerin Kompleks Olması Durumu

Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemlerini çözünüz

(a) $\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-4x_1+2x_2$

(b) $\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{1}{2}x_1+x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-\dfrac{1}{2}x_2$

(c) $\dfrac{dx_1}{dt}=4x_1+5x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-4x_1-4x_2$

(d) $\dfrac{dx_1}{dt}=3x_1+5x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-x_2$

(e) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1$

$\dfrac{dx_2}{dt}=2x_1+x_2-2x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=3x_1+2x_2+x_3$

(f) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_2-x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt}=x_2+x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=-x_2+x_3$

Çözümler:

(a) $\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-4x_1+2x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 2-m & 1 \\ -4 & 2-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 \\ -4 & 2-m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 8 = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = 2+2i$ ve $m_2 = 2-2i$ gibi iki eşlenik kompleks sayıdır. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1 = 2+2i$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-2iu_1 + u_2 = 0$$
$$-4u_1 - 2iu_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$ ve $u_2 = 2i$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 2-2i$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ -4 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2iu_1 + u_2 = 0$$
$$-4u_1 + 2iu_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$ ve $u_2 = -2i$ bulunur. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} i$$

bulunur. (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{(2+2i)t} \quad \text{ve} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{(2-2i)t}$$

şeklindedir. Denklemin genel çözümü

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{(2+2i)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{(2-2i)t}$$

ile verilir. Bulduğumuz bu genel çözüm $e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$ Euler formülünden yararlanarak aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos 2t + i \sin 2t) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos 2t - i \sin 2t)$$

Burada reel ve sanal kısımları gruplayarak bu denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\mathbf{X}(t) = e^{2t}\left[(c_1 + c_2)\begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + i(c_1 - c_2)\begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}\right]$$

Ayrıca yukarıdaki denklemde $b_1 = c_1 + c_2$ ve $b_2 = i(c_1 - c_2)$ konulursa genel çözüm

$$X(t) = e^{2t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\sin 2t\right\} + b_2\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right] \qquad (4)$$

son şeklini alır. Burada b_1 ve b_2 keyfi sabitlerdir.

Karakteristik denklemin köklerinin kompleks olması durumunda çözüm ile ilgili sonuçları sırasıyla aşağıdaki şekilde özetliyebiliriz :

(A) Özdeğerler eşlenikleriyle birlikte bulunurlar.
(B) Eşlenik özdeğerlere karşılık gelen özvektörler de eşlenikleri ile bulunur.
(C) Birinci özvektör $\mathbf{u}_1$,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i = \mathrm{Re}\,\mathbf{u}_1 + i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{u}_1$$

reel ve sanal kısımları ile birlikte genel çözüm (4) de

$$X(t) = e^{2t}\left[b_1\{\mathrm{Re}\,\mathbf{u}_1 \cos 2t - \mathrm{Im}\,\mathbf{u}_1 \sin 2t\} + b_2\{\mathrm{Im}\,\mathbf{u}_1 \cos 2t + \mathrm{Re}\,\mathbf{u}_1 \sin 2t\}\right] \qquad (5)$$

şeklinde bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(D) İki çözümün de Wronskiyeni (5) de $t=0$ için

$$W=|\mathrm{Re}\,\mathbf{u}_1\ \mathrm{Im}\,\mathbf{u}_1| \tag{6}$$

şeklindeki determinantla verilir. Bulduğumuz çözümler için Wronskiyeni kullanacak olursak

$$W=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür.

(b) $\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{1}{2}x_1+x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-\dfrac{1}{2}x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\mathbf{X} \tag{1}$$

burada $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{mt} \tag{2}$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}-m & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{3}$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}-m & 1\\ -1 & -\frac{1}{2}-m\end{vmatrix}=m^2+m+\frac{5}{4}=0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1=-\frac{1}{2}+i$ ve $m_2=-\frac{1}{2}-i$ gibi iki eşlenik kompleks sayıdır. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1=-\frac{1}{2}+i$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-iu_1+u_2=0$$
$$-u_1-iu_2=0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$ ve $u_2 = i$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$$

şeklindedir. (7.7) - a da çözüm için özetlenen (A) dan (D) ye kadar maddeler göz önüne alındığında $m_2 = -\frac{1}{2} - i$ için özvektör

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} i$$

şeklinde yazılır. Böylece (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

şeklinde olur. Ayrıca bu çözümlerin lineer bağımsızlığını göstermek için yalnızca birinin, örneğin birinci çözümün reel ve sanal kısımlarının Wronskiyeninin alınması yeterlidir. Buna göre

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}+i\right)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{\left(-\frac{1}{2}-i\right)t}$$

ile verilir. Bulduğumuz bu genel çözümü Euler formülünden yararlanarak aşağıdaki görünümü alır.

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}(\cos t + i \sin t) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}(\cos t - i \sin t)$$

Burada reel ve sanal kısımları gruplayarak bu denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[(c_1 + c_2)\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i(c_1 - c_2)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\right]$$

Ayrıca yukarıdaki denklemde $b_1 = c_1 + c_2$ ve $b_2 = i(c_1 - c_2)$ konulursa genel çözüm

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t\right\} + b_2\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right\}\right] \qquad (4)$$

son şeklini alır. Burada b_1 ve b_2 keyfi sabitlerdir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) $\dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + 5x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 4x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

biçiminde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 4-m & 5 \\ -4 & -4-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 4-m & 5 \\ -4 & -4-m \end{vmatrix} = m^2 + 4 = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = 2i$ ve $m_2 = -2i$ gibi iki eşlenik kompleks sayıdır. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1 = 2i$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 4-2i & 5 \\ -4 & -4-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$(4-2i)u_1 + 5u_2 = 0$$
$$-4u_1 - (4+2i)u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 5$ ve $u_2 = -4 + 2i$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i$$

şeklindedir. Benzer şekilde, $m_2 = -2i$ için $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} i$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t)=\begin{pmatrix}5\\-4+2i\end{pmatrix}e^{2it} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix}5\\-4-2i\end{pmatrix}e^{-2it}$$

şeklinde olur. Ayrıca bu çözümlerin lineer bağımsızlığını göstermek için yalnızca birinin , örneğin birinci çözümün reel ve sanal kısımlarının Wronskiyeninin alınması yeterlidir. Buna göre

$$W(0)=\begin{vmatrix}5 & 0\\-4 & 2\end{vmatrix}=10\neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}5\\-4+2i\end{pmatrix}e^{2it}+c_2\begin{pmatrix}5\\-4-2i\end{pmatrix}e^{-2it}$$

ile verilir. Bulduğumuz bu genel çözüm Euler formülünden yararlanarak aşağıdaki görünümü alır.

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}5\\-4+2i\end{pmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t)+c_2\begin{pmatrix}5\\-4-2i\end{pmatrix}(\cos 2t-i\sin 2t)$$

Burada reel ve sanal kısımları gruplayarak bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\mathbf{X}(t)=\left[(c_1+c_2)\begin{pmatrix}5\cos 2t\\-4\cos 2t-2\sin 2t\end{pmatrix}+(c_1-c_2)i\begin{pmatrix}5\sin 2t\\-4\sin 2t+2\cos 2t\end{pmatrix}\right]$$

Ayrıca yukarıdaki denklemde $b_1=c_1+c_2$ ve $b_2=i(c_1-c_2)$ konulursa genel çözüm

$$\boldsymbol{X}(t)=\left[b_1\left\{\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}\cos 2t-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\sin 2t\right\}+b_2\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\cos 2t+\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}\sin 2t\right\}\right] \qquad (4)$$

son şeklini alır. Burada b_1 ve b_2 keyfi sabitlerdir.

(d) $\dfrac{dx_1}{dt}=3x_1+5x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}3 & 5\\-1 & -1\end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 5\\-1 & -1\end{pmatrix}$$

katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{\alpha t} \qquad (2)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 3-m & 5 \\ -1 & -1-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 3-m & 5 \\ -1 & -1-m \end{vmatrix}=m^2-2m+2=0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1=1+i$ ve $m_2=1-i$ gibi iki eşlenik kompleks sayıdır. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1=1+i$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$(2-i)u_1+5u_2=0$$
$$-u_1-(2+i)u_2=0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1=5$ ve $u_2=-2+i$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 5 \\ -2+i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}i$$

bulunur. Benzer şekilde $m_2=1-i$ için $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} 5 \\ -2-i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}i$$

şeklinde yazılır. (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1(t)=\begin{pmatrix} 5 \\ -2+i \end{pmatrix}e^{(1+i)t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix} 5 \\ -2-i \end{pmatrix}e^{(1-i)t}$$

ile verilir. Ayrıca bu çözümlerin lineer bağımsızlığını göstermek için yalnızca birinin, örneğin birinci çözümün reel ve sanal kısımlarının Wronskiyeninin alınması yeterlidir. Buna göre

$$W(0)=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}5\\-2+i\end{pmatrix}e^{(1+i)t}+c_2\begin{pmatrix}5\\-2-i\end{pmatrix}e^{(1-i)t}$$

ile verilir. Bulduğumuz bu genel çözüm Euler formülünden yararlanarak aşağıdaki görünümü alır.

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}5\\-2+i\end{pmatrix}e^{t}(\cos t+i\sin t)+c_2\begin{pmatrix}5\\-2-i\end{pmatrix}e^{t}(\cos t-i\sin t)$$

Burada reel ve sanal kısımları gruplayarak bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\mathbf{X}(t)=e^{t}\left[(c_1+c_2)\begin{pmatrix}5\cos t\\-2\cos t-\sin t\end{pmatrix}+(c_1-c_2)i\begin{pmatrix}5\sin t\\-2\sin t+\cos t\end{pmatrix}\right]$$

Ayrıca yukarıdaki denklemde $b_1=c_1+c_2$ ve $b_2=i(c_1-c_2)$ konulursa genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=e^{t}\left[b_1\left\{\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}\cos t-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\sin t\right\}+b_2\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}\sin t\right\}\right] \qquad (4)$$

son şeklini alır. Burada b_1 ve b_2 keyfi sabitlerdir.

(e) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1$

$\dfrac{dx_2}{dt}=2x_1+x_2-2x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=3x_1+2x_2+x_3$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}$$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

biçiminde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}1-m&0&0\\2&1-m&-2\\3&2&1-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. (3) cebirsel denklem sistemini bulmak için Katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ 2 & 1-m & -2 \\ 3 & 2 & 1-m \end{vmatrix} = (1-m)(m^2-2m+5) = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = 1$ reel ve $m_2 = 1+2i$, $m_3 = 1-2i$ gibi eşlenik kompleks sayılardır. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.
$m_1 = 1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_1 - 2u_3 = 0$$
$$3u_1 + 2u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminde keyfi olarak $u_1 = -2$ seçersek, $u_2 = 3$ ve $u_3 = -2$ değerlerini aldığı görülür. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bulunur. $m_2 = 1+2i$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_1 - 2iu_2 - 2u_3 = 0$$
$$3u_1 + 2u_2 - 2iu_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminden $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ ve $u_3 = -i$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_3 = 1-2i$ için $\mathbf{u}_3$ özvektörü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$$

şeklinde yazılır. (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^t \quad , \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1-2i)t}$$

ile verilir. Ayrıca bu çözümlerin lineer bağımsızlığı $t = 0$ için Wronskiyenin alınmasıyla gösterilebilir . Buna göre

$$W(0) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(1-2i)t}$$

ile verilir. Bulduğumuz bu genel çözümde Euler formülünden yararlanarak aşağıdaki görünümü alır.

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^t (\cos 2t + i \sin 2t) + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^t (\cos 2t - i \sin 2t)$$

Burada reel sanal kısımları gruplayarak bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + e^t \left[(c_2 + c_3) \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + (c_2 - c_3) i \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} \right]$$

Ayrıca yukarıdaki denklemde $b_1 = c_2 + c_3$ ve $b_2 = i(c_2 - c_3)$ koyulursa genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + e^t \left\{ b_1 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \sin 2t \right] + b_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t \right] \right\}$$

son şeklini alır. Burada b_1 ve b_2 keyfi sabitlerdir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(f) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 2x_2 - x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt} = x_2 + x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt} = -x_2 + x_3$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 0 & 1-m & 1 \\ 0 & -1 & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sistemini bulmak için Katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 1-m & 2 & -1 \\ 0 & 1-m & 1 \\ 0 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = (1-m)(m^2 - 2m + 2) = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = 1$ reel ve $m_2 = 1+i$, $m_3 = 1-i$ gibi eşlenik kompleks sayılardır. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (3) denkleminde yerine koyulmasıyla özvektörler bulunur.
$m_1 = 1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılırsa, $u_1 = 1$ seçimi ile $u_2 = u_3 = 0$ değerlerini aldığı görülür. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. $m_2 = 1+i$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -i & 2 & -1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-iu_1 + 2u_2 - u_3 = 0$$
$$-iu_2 + u_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminden $u_1 = 2-i$, $u_2 = i$ ve $u_3 = -1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} i$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_3 = 1-i$ için $\mathbf{u}_3$ özvektörü

$$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} i$$

şeklinde yazılır. (1) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \quad , \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 2+i \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} e^{(1-i)t}$$

ile verilir. Ayrıca bu çözümlerin lineer bağımsızlığı $t = 0$ için Wronskiyenin alınmasıyla gösterilebilir. Buna göre

$$W[\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \mathbf{X}_3(t)] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}2-i\\i\\-1\end{pmatrix}e^{(1+i)t}+c_3\begin{pmatrix}2+i\\-i\\-1\end{pmatrix}e^{(1-i)t}$$

şeklinde elde edilir. Bulduğumuz bu çözüm Euler formülünden yararlanarak aşağıdaki görünümü alır.

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t}+c_2\begin{pmatrix}2-i\\i\\-1\end{pmatrix}e^{t}(\cos t+i\sin t)+c_3\begin{pmatrix}2+i\\-i\\-1\end{pmatrix}e^{t}(\cos t-i\sin t)$$

Burada reel ve sanal kısımları gruplayarak bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazabiliriz.

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t}+e^{t}\left[(c_2+c_3)\begin{pmatrix}2\cos t+\sin t\\-\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}+i(c_2-c_3)\begin{pmatrix}2\sin t-\cos t\\\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}\right]$$

ayrıca yukarıdaki denklemde $b_1=c_2+c_3$ ve $b_2=i(c_2-c_3)$ konulursa genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^{t}+e^{t}\left\{b_1\left[\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\cos t-\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\sin t\right]+b_2\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\sin t\right]\right\}$$

son şeklini alır. Burada b_1 ve b_2 keyfi sabitlerdir.

7.7 Özdeğerlerin Tekrarlanması Durumu

Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemlerini çözünüz.

(a) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-4x_1+4x_2$

(b) $\dfrac{dx_1}{dt}=4x_1+x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-4x_1+8x_2$

(c) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+9x_2\,,\quad x_1(0)=1$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-5x_2\,,\quad x_2(0)=-1$

(d) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_2-x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt}=x_2+x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=2x_3$

(e) $\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2+2x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt}=x_1+2x_2+2x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+3x_3$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 4x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

biçiminde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \\ -4 & 4-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -4 & 4-m \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$$

yazılır.. Bu denklemin kökleri $m_1 = m_2 = 2$ dir. 2 sayısı iki kez tekrar eden bir özdeğerdir. $m_1 = 2$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-2u_1 + u_2 = 0$$
$$-4u_1 + 2u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$ seçilirse $u_2 = 2$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_1$ özvektörüne karşılık gelen çözüm

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} \qquad (4)$$

şeklindedir. Tekrarlayan özdeğere karşılık gelen ikinci çözümü bulmak için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}te^{2t} \tag{5}$$

biçiminde bir çözümün olacağını varsayalım. (5) denkleminin (1) denklem sisteminde yerine konulduğunda istenen u_1 ve u_2 değerlerinin $u_1=u_2=0$ olduğu görülür. Buradan (5) denkleminden sıfırdan farklı bir çözümün bulunamayacağı görülür. Bu nedenle (5) denklemi yerine ikinci çözümün ,

$$\mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}e^{2t} \tag{6}$$

biçiminde olacağını varsayalım. (6) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}2e^{2t}+\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}0&1\\-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix}e^{2t} \tag{7}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2u_1(t)\\-2u_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_2(t)\\-4u_1(t)+4u_2(t)\end{pmatrix}$$

veya

$$\begin{pmatrix}u_1'(t)\\u_2'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\end{pmatrix} \tag{8}$$

elde edilir. (8) sistemi aşağıdaki biçimde yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}u_1'(t)&=-2u_1(t)+u_2(t)\\u_2'(t)&=-4u_1(t)+2u_2(t)\end{aligned} \tag{9}$$

bulunur. Bu denklem sisteminden görüldüğü gibi

$u_2'(t)=2u_1'(t)$ dir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$u_2(t)=2u_1(t)+a \tag{10}$$

bulunur. Burada a keyfi bir sabittir. $u_2(t)$ nin değeri (9) denklem sisteminde yerine konursa

$u_1'(t)=a$

eşitliği elde edilir. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$u_1(t)=at+b \tag{11}$$

elde edilir. $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ nin değerlerinin (6) denkleminde yerine koyulmasıyla istenen ikinci çözüm ,

$$\mathbf{X}_2(t)=\begin{pmatrix}at+b\\2at+2b+a\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}ate^{2t}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}be^{2t}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}ae^{2t} \tag{12}$$

bulunur. Burada keyfi olarak $a=1$ ve $b=0$ seçersek ikinci çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad (12)$$

şeklinde elde edilir. Bulunan iki çözümün lineer bağımsızlığını gösterebilmek için her ikisinin $t = 0$ da Wronskiyenini alırsak

$$W\{\mathbf{X}_1(0), \mathbf{X}_2(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

(b) $\dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 + x_2$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 8x_2$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 4-m & 1 \\ -4 & 8-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 4-m & 1 \\ -4 & 8-m \end{vmatrix} = m^2 - 12m + 36 = (m-6)^2 = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = m_2 = 6$ dır. Özdeğerlerin tekrarlaması durumunun olduğu görülür.

Önce $m_1 = 6$ özdeğeri için (3) denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-2u_1+u_2=0$$
$$-4u_1+2u_2=0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1=1$ seçilirse $u_2=2$ bulunur. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_1$ özvektörüne karşılık gelen çözüm

$$\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{6t} \tag{4}$$

ile verilir. Tekrarlayan özdeğere karşılık gelen ikinci çözümü (a) denklem sisteminin çözümünden yararlanarak doğrudan doğruya

$$\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}te^{6t}+\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}e^{6t} \tag{5}$$

şeklinde olacağını varsayalım. (5) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}6te^{6t}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{6t}+\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}6e^{6t}=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}te^{6t}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}e^{6t} \tag{6}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin iki tarafında bulunan te^{6t} li terimlerin birbirini götürdüğünden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{6t}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}e^{6t}$$

veya

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

sistemine indirgenir. (7) sistemin çözümlerinden biri $u_3=0$ ve $u_4=1$ dir. Bu değerlerin (5) denkleminde yerine konulmasıyla ikinci çözüm,

$$\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}te^{6t}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{6t} \tag{8}$$

şeklinde bulunur. Bulunan iki çözümün lineer bağımsızlığını göstermek için her ikisinin $t=0$ da Wronskiyenini alırsak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$W\{\mathbf{X}_1(0),\mathbf{X}_2(0)\}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{6t}+c_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]e^{6t}$$

olur. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

(c) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+9x_2\,,\qquad x_1(0)=1$

$\dfrac{dx_2}{dt}=-x_1-5x_2\,,\qquad x_2(0)=-1$

verilen bu başlangıç değer problemini çözmek için önce denklem sistemi matris formda yazılır.

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1 & 9\\ -1 & -5\end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ -1 & -5\end{pmatrix}$$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}1-m & 9\\ -1 & -5-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix}1-m & 9\\ -1 & -5-m\end{vmatrix}=m^2+4m+4=(m+2)^2=0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1=m_2=-2$ dir. -2 sayısı iki kez tekrar eden bir özdeğerdir. $m_1=-2$ özdeğeri için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$3u_1+9u_2=0$$
$$-u_1-3u_2=0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 3$ seçilirse $u_2 = -1$ olur. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_1$ özvektörüne karşılık gelen çözüm

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \tag{4}$$

şeklindedir. Tekrarlayan özdeğere karşılık gelen ikinci çözümü (a) denklem sisteminin çözümünden yararlanarak doğrudan doğruya

$$\mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e^{-2t} \tag{5}$$

biçiminde olacağını varsayalım. (5) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$-\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} 2te^{-2t} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} - \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} 2e^{-2t} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e^{-2t} \tag{6}$$

bulunur. Bu eşitliğin iki tarafında bulunan te^{-2t} li terimlerin birbirini götürdüğünden

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

veya

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

sistemine indirgenir. (7) sistemin çözümlerinden biri $u_3 = 1$ ve $u_4 = 0$ dır. Bu değerlerin (5) denkleminde yerine konulmasıyla ikinci çözüm,

$$\mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \tag{8}$$

şeklinde bulunur. Bulunan iki çözümün lineer bağımsızlığını göstermek için her ikisinin $t = 0$ da Wronskiyenini alırsak

$$W\{\mathbf{X}_1(0), \mathbf{X}_2(0)\} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} te^{-2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \right] \tag{9}$$

ile verilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Problemimiz başlangıç değer problemi olduğu için verilen başlangıç koşulları $x_1(0)=1$ ve $x_2(0)=-1$ kullanılarak , (9) denkleminden

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $c_1=1$ ve $c_2=-2$ elde edilir. Bu değerler (9) denkleminde yerine konulursa

$$\mathbf{X}(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}-2\left[\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}te^{-2t}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-2t}\right]=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t}-2\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}te^{-2t}$$

istenilen çözüm bulunur.

(d) $\dfrac{dx_1}{dt}=x_1+2x_2-x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt}=x_2+x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=2x_3$

denklem sistemi matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa , (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}1-m&2&-1\\0&1-m&1\\0&0&2-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix}1-m&2&-1\\0&1-m&1\\0&0&2-m\end{vmatrix}=(2-m)(1-m)^2=0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Bu denklemin kökleri $m_1 = 2$ ve $m_2 = m_3 = 1$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerler ayrı ayrı (3) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur. $m_1 = 2$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$$
$$-u_2 + u_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminden $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_1$ özvektörüne karşılık gelen çözüm

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad (4)$$

ile verilir. İkinci özdeğer $m_2 = 1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$2u_2 - u_3 = 0$$
$$u_3 = 0$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$ seçersek $u_2 = u_3 = 0$ olur. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_2$ özvektörüne karşılık gelen çözüm

$$\mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \qquad (5)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tekrarlayan özvektör $m_3 = 1$'e karşılık gelen üçüncü çözümü bulmak için çözümün

$$\mathbf{X}_3(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} e^t \tag{6}$$

biçiminde olacağını varsayalım. (6) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} e^t$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -u_1(t) \\ -u_2(t) \\ -u_3(t) \end{pmatrix} e^t$$

veya

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_2(t) - u_3(t) \\ u_3(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

elde edilir. (7) sistemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= 2u_2(t) - u_3(t) \\ u_2'(t) &= u_3(t) \\ u_3'(t) &= u_3(t) \end{aligned} \tag{8}$$

bulunur. Bu denklem sisteminde $u_3(t) = 0$ seçilirse, (8) denklem sisteminde

$u_2'(t) = 0$ olur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$u_2(t) = a \tag{9}$$

bulunur. Burada a keyfi bir sabittir. $u_2(t)$ nin değeri (8) denklem sisteminde yerine konulursa

$u_1'(t) = 2a$ bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$u_1(t) = 2at + b$

elde edilir. $u_1(t)$, $u_2(t)$ ve $u_3(t)$ nin değeri (6) denkleminde yerine konulmasıyla istenen üçüncü çözüm

$$\mathbf{X}_3(t) = \begin{pmatrix} 2at + b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} e^t \tag{10}$$

şeklinde bulunur. Burada keyfi olarak $a = 1$ ve $b = 0$ seçersek üçüncü çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X}_3(t)=\begin{pmatrix}2t\\1\\0\end{pmatrix}e^t=\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]e^t \qquad (11)$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu çözümlerin lineer bağımsızlığını $t=0$ da Wronskiyeni alınarak gösterilebilir.

$$W\{\mathbf{X}_1(0),\mathbf{X}_2(0),\mathbf{X}_3(0)\}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t)=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}e^t+c_3\left[\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]e^t$$

olur. Burada c_1 , c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.

(e) $\dfrac{dx_1}{dt}=2x_1+x_2+2x_3$

$\dfrac{dx_2}{dt}=x_1+2x_2+2x_3$

$\dfrac{dx_3}{dt}=x_1+x_2+3x_3$

denklem sistemin matris formda yazılırsa

$$\mathbf{X}'=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (1)$$

burada $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$ katsayılar matrisidir. (1) denklem sisteminin

$$\mathbf{X}=\mathbf{u}e^{mt} \qquad (2)$$

biçiminde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (2) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix}2-m&1&2\\1&2-m&2\\1&1&3-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad (3)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bulunur. (3) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 2-m & 1 & 2 \\ 1 & 2-m & 2 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix} = -(m-1)^2(m-5) = 0$$

bulunur. Bu denklemin kökleri $m_1 = 5$ ve $m_2 = m_3 = 1$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerler ayrı ayrı (3) denkleminde yerine koyulmasıyla özvektörler bulunur. $m_1 = 5$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$\begin{aligned} -3u_1 + u_2 + 2u_3 &= 0 \\ u_1 - 3u_2 + 2u_3 &= 0 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemine indirgenir. Bu denklem sisteminden $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_1$ özvektörüne karşılık gelen çözüm ise

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} \tag{4}$$

ile verilir. Bu problemde tekrarlayan özdeğerler için bulunacak çözümler bir önceki problemden daha farklı ve daha kolay olacaktır. Şöyle ki, $m_2 = m_3 = 1$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan u_1, u_2 ve u_3 cinsinden ve birbirinin tamamen aynı üç denklem elde edilir. Bu denklemler birbirinden bağımsız değildirler. Bunlardan biri alınırsa

$$u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olur. Açıkça görülüyor ki, bu denklemin birbirinden farklı iki çözümü vardır. Bileşenleri $u_1 = -1$, $u_2 = 1$ ve $u_3 = 0$ olan özvektör ile bileşenleri $u_1 = -2$, $u_2 = 0$ ve $u_3 = 1$ olan özvektör aralarında lineer bağımsız olan iki vektördür. Bu özvektörler sırasıyla

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca bu özvektörlere karşılık gelen çözümler sırasıyla

$$\boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{X}_3(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

ile verilir. Bulunan bu çözümlerin lineer bağımsızlığını $t = 0$ da Wronskiyeni alınarak gösterilebilir.

$$W\{\boldsymbol{X}_1(0), \boldsymbol{X}_2(0), \boldsymbol{X}_3(0)\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

olduğundan çözümlerin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu durumda genel çözüm

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

olur. Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitlerdir.

7.8 Birinci Mertebeden Homogen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü

Birinci mertebeden homogen olmayan lineer diferansiyel denklem sistemini (7.7) denklemiyle

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{F}(t)$$

şeklinde tanımlamıştık. Bu denklem sistemini çözmek için, önce homogen kısmını göz önüne alacağız. Homogen kısmın çözümü $\boldsymbol{X}_h$ bulunduktan sonra, homogen olmayan kısmın çözümü bulunur. Homogen olmayan denklem sisteminin özel çözümü $\boldsymbol{X}_g$ Bölüm 5' de detaylı olarak verilen **Parametrelerin Değişimi Metodu** ile bulunur. Genel çözüm ise

$$\mathbf{X}_g = \mathbf{X}_h + \boldsymbol{X}_g$$

ile verilir*.

* Kaynak 11

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki Homogen olmayan Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini Çözünüz.

(a) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + f(t)$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 + g(t)$

(b) $\dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 5x_2 - \cos t$

$\dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 + \sin t$

(c) $\dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2 + t^{-3}$

$\dfrac{dx_2}{dt} = 8x_1 - 4x_2 - t^{-2}$

(d) $\dfrac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 3x_2 + t$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + 1$

Çözümler :

(a) $\dfrac{dx_1}{dt} = x_2 + f(t)$

$\dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 + 3x_2 + g(t)$

denklem sistemini matris formda yazalım

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

burada

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{X} \qquad (2)$$

denklem sisteminin homogen kısmıdır. Önce homogen denklem sistemini çözeceğiz. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (2) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (3)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (3) denkleminin (2) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \\ -2 & 3-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

bulunur. (4) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} -m & 1 \\ -2 & 3-m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = 1$ ve $m_2 = 2$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (4) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1 = 1$ için (4) denklemi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-u_1 + u_2 = 0$$
$$-2u_1 + 2u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = u_2 = 1$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 2$ için (4) denklemi

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$-2u_1 + u_2 = 0$$

tek bir denkleme indirgenir. Bu denklemin çözümlerinden biri $u_1 = 1$ ve $u_2 = 2$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_2$ özvektörü

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. (2) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

ile verilir. Buradan homogen denklem sisteminin çözümü

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_h = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad (5)$$

bulunur. Burada a_1 ve a_2 keyfi sabitlerdir. (1) denklem sisteminin aşağıda tanımlandığı şekilde özel çözümü olduğunu varsayalım.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_h = a_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + a_2(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} \qquad (6)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(6) denklemi (1) denklem sisteminde yerine konursa

$$a_1(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}+2a_2(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}+a_1'(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}+a_2'(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}a_1(t)\,e^{t}$$

$$+\begin{pmatrix}0&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}a_2(t)\,e^{2t}+\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur. Burada gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$a_1'(t)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}+a_2'(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{2t}=\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix} \tag{7}$$

yazılır. Ayrıca (7) eşitliğini yeniden aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1'(t)e^{t}\\a_2'(t)e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\end{pmatrix}$$

Burada Cramer Kuralı uygulanırsa

$$a_1'(t)e^{t}=\frac{\begin{vmatrix}f(t)&1\\g(t)&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}}=2f(t)-g(t)$$

$$a_2'(t)e^{2t}=\frac{\begin{vmatrix}1&f(t)\\1&g(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}}=g(t)-f(t)$$

bulunur. Böylece

$$a_1'(t)=\left[2f(t)-g(t)\right]e^{-t} \tag{8}$$

$$a_2'(t)=\left[g(t)-f(t)\right]e^{-2t} \tag{9}$$

elde edilir. (8) ve (9) denklemlerinde $f(t)=e^{t}$ ve $g(t)=1$ olarak seçilip , yerlerine konulursa

$$a_1'(t)=(2e^{t}-1)e^{-t}=2-e^{-t} \tag{10}$$

$$a_2'(t)=(1-e^{t})e^{-2t}=e^{-2t}+e^{-t} \tag{11}$$

bulunur. (10) ve (11) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_1(t) = 2t + e^{-t}$$

$$a_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t}$$

bulunur. $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ nin bulduğumuz değerleri (6) denkleminde yerine konulursa denklem sisteminin özel çözümü

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_a = (2t + e^{-t})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + (-\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-t})\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t}$$

veya

$$X_a = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_a = (2te^t + 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (e^t - \frac{1}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ile verilir. (1) denklem sisteminin genel çözümü ise

$$X_g = X_h + X_a = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^t + a_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{2t} + (2te^t + 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (e^t - \frac{1}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

olur.

(b) $\dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 - 5x_2 - \cos t$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - 2x_2 + \sin t$$

denklem sistemini matris formda yazalım

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Burada

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}X \qquad (2)$$

denklem sisteminin homogen kısmıdır. Önce homogen denklem sistemini çözeceğiz. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (2) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \qquad (3)$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (3) denkleminin (2) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 2-m & -5 \\ 1 & -2-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. (4) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 2-m & -5 \\ 1 & -2-m \end{vmatrix} = m^2+1=0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = i$ ve $m_2 = -i$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (4) denkleminde yerine koyulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1 = i$ için (4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$(2-i)u_1 - 5u_2 = 0$$
$$u_1 + (-2-i)u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 5$ ve $u_2 = 2-i$ elde edilir. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = -i$ için u_2 özvektörü

$$u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

elde edilir. (2) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri ise

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{it} \quad \text{ve} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2+i \end{pmatrix} e^{-it}$$

ile verilir. Buradan homogen denklem sisteminin genel çözümü

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_h = c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{it} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2+i \end{pmatrix} e^{-it}$$

bulunur. Ayrıca bulduğumuz bu çözüm Euler formülünden yararlanarak da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_h = b_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} \qquad (5)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yazılabilir. Burada $b_1 = c_1 + c_2$ ve $b_2 = i(c_1 - c_2)$ olup , keyfi sabitlerdir. (1) denklem sisteminin aşağıda tanımlandığı biçimde özel çözümü olduğunu varsayalım.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_s = b_1(t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + b_2(t)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} \tag{6}$$

(6) denklemi (1) denklem sisteminde yerine konulursa

$$b_1'(t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + b_1(t)\begin{pmatrix} -5\sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{pmatrix} + b_2'(t)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

$$+ b_2(t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ \sin t + 2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} b_1(t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} b_2(t)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur. Burada gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$b_1'(t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + b_2'(t)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \tag{7}$$

yazılır. Ayrıca (7) eşitliğini yeniden aşağıdaki biçimde yazalım.

$$\begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 2\cos t + \sin t & -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1'(t) \\ b_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Burada Cramer Kuralı uygulanırsa

$$b_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} -\cos t & 5\sin t \\ \sin t & -\cos t + 2\sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 2\cos t + \sin t & -\cos t + 2\sin t \end{vmatrix}} = -\frac{1}{5}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t - 5\sin^2 t) \tag{8}$$

$$b_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 5\cos t & -\cos t \\ 2\cos t + \sin t & \sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 2\cos t + \sin t & -\cos t + 2\sin t \end{vmatrix}} = -\frac{1}{5}(5\sin t\cos t + \cos^2 t + \cos t\sin t) \tag{9}$$

bulunur. Böylece

$$b_1'(t) = -\frac{1}{5}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t - 5\sin^2 t) = \frac{1}{5}(-1 + 6\sin^2 t + \sin 2t) \tag{10}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$b_2'(t) = -\frac{1}{5}(5\sin t\cos t + \cos^2 t + \cos t\sin t) = \frac{1}{5}(-3\sin 2t - 2\cos^2 t) \tag{11}$$

elde edilir. (10) ve (11) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$b_1(t) = \frac{1}{5}(2t - 3/2\sin t - 1/2\cos 2t) \tag{12}$$

$$b_2(t) = \frac{1}{5}(-t - 1/2\sin t + 3/2\cos 2t) \tag{13}$$

bulunur. $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ nin bulduğumuz değerleri (6) denkleminde yerine konursa denklem sisteminin özel çözümü

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_0 = \frac{1}{5}(2t - 3/2\sin t - 1/2\cos 2t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{5}(-t - 1/2\sin t + 3/2\cos 2t)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix} \tag{14}$$

bulunur. (1) denklem sisteminin genel çözümü ise

$$\boldsymbol{X}_g = \boldsymbol{X}_h + \boldsymbol{X}_g = \frac{1}{5}(2t - 3/2\sin t - 1/2\cos 2t + c_1)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{5}(-t - 1/2\sin t + 3/2\cos 2t + c_2)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$$

ile verilir.

(c) $\dfrac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2 + t^{-3}$

$$\frac{dx_2}{dt} = 8x_1 - 4x_2 - t^{-2}$$

denklem sistemini matris formda yazalım.

$$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Burada $$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\boldsymbol{X} \tag{2}$$

denklem sisteminin homogen kısmıdır. Önce Homogen denklem sistemini çözeceğiz. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (2) denklem sisteminin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \tag{3}$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (3) denkleminin (2) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 4-m & -2 \\ 8 & -4-m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

bulunur. (4) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 4-m & -2 \\ 8 & -4-m \end{vmatrix} = m^2 = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = m_2 = 0$ dır. Özdeğerlerin tekrarlaması durumunun olduğu görülür.

$m_1 = 0$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$4u_1 - 2u_2 = 0$$
$$8u_1 - 4u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminde $u_1 = 1$ seçilirse, $u_2 = 2$ bulunur. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_1$ özvektörüne karşılık gelen çözüm

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

şeklindedir. Tekrarlayan özdeğere karşılık gelen ikinci çözümün

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

şeklinde olacağını varsayalım. (6) denkleminin (1) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

bulunur. Buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u_1'(t) = 4u_1(t) - 2u_2(t)$$
$$u_2'(t) = 8u_1(t) - 4u_2(t) \qquad (8)$$

yazılır. Bu denklem sisteminden görüldüğü gibi

$u_1'(t) = \frac{1}{2}u_2'(t)$ dir Her iki tarafın integrali alınırsa

$$u_1(t) = \frac{1}{2}u_2(t) + a \qquad (9)$$

bulunur. Burada a keyfi bir sabittir. $u_1(t)$ nin değeri (8) denklem sisteminde yerine konulursa

$u_1'(t) = 4a$ bulunur. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$u_1(t) = 4at + b \qquad (10)$$

elde edilir. (9) ve (10) denklemlerinde $a = 1$ ve $b = 0$ alırsak, sırasıyla $u_1(t) = 4t$ ve $u_2(t) = 8t - 2$ bulunur. Bu değerler (6) denkleminde yerine konulursa

$$\boldsymbol{X}_2(t) = 4\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] \qquad (11)$$

bulunur. Böylece homogen denklem sisteminin çözümü

$$\boldsymbol{X}_h(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right] \qquad (12)$$

ile verilir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. (2) denklem sisteminin aşağıda tanımlandığı şekilde özel çözümü olduğunu varsayalım.

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_0 = c_1(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2(t)\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right] \qquad (13)$$

(13) denklemi (1) denklem sisteminde yerine konulursa

$$c_1'(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2'(t)\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right] + c_2(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -2\\8 & -4\end{pmatrix}\left\{c_1(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2(t)\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]\right\} + \begin{pmatrix}t^{-3}\\-t^{-2}\end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur. Burada gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$c_1'(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2'(t)\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}t^{-3}\\-t^{-2}\end{pmatrix} \qquad (14)$$

yazılır. Ayrıca (14) eşitliğni yeniden aşağıdaki şekilde yazalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t-\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$$

Burada Cramer Kuralı uygulanırsa

$$c_1'(t)=\frac{\begin{vmatrix} t^{-3} & t \\ -t^{-2} & 2t-\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t-\frac{1}{2} \end{vmatrix}}=-4t^{-2}+t^{-3}-2t^{-1}$$

$$c_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & t^{-3} \\ 2 & -t^{-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t \\ 2 & 2t-\frac{1}{2} \end{vmatrix}}=2t^{-2}+4t^{-3}$$

bulunur. Böylece

$$c_1'(t)=-4t^{-2}+t^{-3}-2t^{-1} \qquad (15)$$

$$c_2'(t)=2t^{-2}+4t^{-3} \qquad (16)$$

elde edilir. (15) ve (16) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$c_1(t)=4t^{-1}-1/2t^{-2}-2\ln t$$

$$c_2(t)=-2t^{-1}-2t^{-2}$$

bulunur. $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ nin bulduğumuz değerleri (13) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_6=-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ln t+\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}t^{-1}-\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}t^{-2}$$

bulunur. (1) denklem sisteminin çözümü ise

$$\boldsymbol{X}_g=\boldsymbol{X}_h+\boldsymbol{X}_\phi=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t-\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]-2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ln t+\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}t^{-1}-\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}t^{-2}$$

ile verilir.

(d) $\dfrac{dx_1}{dt}=3x_1+3x_2+t$

$$\frac{dx_2}{dt}=-x_1-x_2+1$$

denklem sistemini matris formda yazalım

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

burada $$X' = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X \tag{2}$$

denklem sisteminin homogen kısmıdır. Önce homogen denklem sistemini çözeceğiz. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. (2) denklem sisteminin

$$\mathbf{X} = \mathbf{u}e^{mt} \tag{3}$$

şeklinde bir çözümü olacağı varsayılırsa, (3) denkleminin (2) de yerine konulmasıyla

$$\begin{pmatrix} 3-m & 3 \\ -1 & -1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

bulunur. (4) cebirsel denklem sisteminin çözümünü bulmak için katsayılar matrisinin karakteristik denklemi

$$\begin{vmatrix} 3-m & 3 \\ -1 & -1-m \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m(m-2) = 0$$

yazılır. Bu denklemin kökleri $m_1 = 0$ ve $m_2 = 2$ dir. Bunlar katsayılar matrisinin özdeğerleridir. Bu değerlerin ayrı ayrı (4) denkleminde yerine konulmasıyla özvektörler bulunur.

$m_1 = 0$ için (3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılarak

$$3u_1 + 3u_2 = 0$$
$$-u_1 - u_2 = 0$$

denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminden $u_1 = 1$ seçilirse, $u_2 = -1$ bulunur. Buradan $\mathbf{u}_1$ özvektörü

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bulunur. $\mathbf{u}_1$ özvektörüne karşılık gelen çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

bulunur. Benzer şekilde, $m_2 = 2$ için ikinci çözüm

$$\boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \tag{6}$$

ile verilir. (2) denklem sisteminin $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ özvektörlerine karşılık gelen çözümleri

$$\boldsymbol{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

şeklindedir. Buradan homogen denklem sisteminin çözümü

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_h = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \tag{7}$$

bulunur. Burada a_1 ve a_2 keyfi sabitlerdir. (2) denklem sisteminin aşağıda tanımlandığı biçimde özel çözümü olduğunu varsayalım.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_p = a_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2(t) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \tag{8}$$

(8) denklemi (2) denklem sisteminde yerine konulursa

$$a_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2'(t) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} a_1(t) + e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} a_2(t) \right] + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$a_1'(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2'(t) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

yazılır. Ayrıca (9) eşitliğini yeniden aşağıdaki şekilde yazalım.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1'(t) \\ a_2'(t) e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Burada Cramer Kuralı uygulanırsa

$$a_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} t & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}(-t-3)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_1'(t)\,e^{2t} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & t \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}(t+1)$$

bulunur. Böylece

$$a_1'(t) = \frac{1}{2}(-t-3), \tag{10}$$

$$a_2'(t) = \frac{1}{2}(t+1)e^{-2t} \tag{11}$$

bulunur. (10) ve (11) denklemlerinin her iki taraflarının integralleri alınırsa

$$a_1(t) = -\frac{t^2}{4} - \frac{3}{2}t,$$

$$a_2(t) = -\frac{3}{8}e^{-2t} - \frac{1}{4}te^{-2t}$$

bulunur. $a_1(t)$ ve $a_2(t)$ nin bulduğumuz değerleri (6) denkleminde yerine konursa denklem sisteminin özel çözümü

$$X_g = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_g = (-\frac{t^2}{4} - \frac{3}{2}t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (-\frac{3}{8} - \frac{1}{4}t)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. (1) denklem sisteminin çözümü ise

$$X_g = X_h + X_g = a_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2t^2 - 18t - 9 \\ 2t^2 + 14t + 3 \end{pmatrix}$$

ile verilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6. BÖLÜMLE İLGİLİ PROBLEMLER

A. ***Aşağıdaki Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini Eleminasyon Yöntemiyle Çözünüz.***

(a) $\dfrac{dx}{dt} = y$

$\dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y$

Y. $x = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$, $y = 2c_1 e^{2t} + c_2(2te^{2t} + e^{2t})$

(b) $v' - 2v + 2w' = 2 - 4e^{2x}$

$2v' - 3v + 3w' - w = 0$

Y. $v = a_1 e^{x} + a_2 e^{-2x} + 5e^{2x} - 1$

$w = 1/2\, a_1 e^{x} - a_2 e^{-2x} - e^{2x} + 3$

(c) $D^2 y - (2D-1)v = 1$

$(2D+1)y + (D^2 - 4)v = 0$

Y. $v = 1 + a_1 e^{x} + a_2 e^{-x} + a_3 \cos x + a_4 \sin x$

$y = 4 + a_1 e^{x} - 3a_2 e^{-x} + (a_3 - 2a_4)\cos x + (2a_3 + a_4)\sin x$

(d) $(D^2 + 1)y + 4(D-1)v = 4e^{x}$

$(D-1)y + (D+9)v = 0$; $x = 0$ iken $y = 5$, $y' = 0$, $v = 1/2$

Y. $y = 2e^{x} + 2e^{-x} + e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$

$v = 1/2\, e^{-x} + e^{-3x}\sin x$

B. Aşağıda verilen Birinci Mertebeden Homogen Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini çözünüz.

(a) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} X$

Y. $X = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$

(b) $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} X$

Y. $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

(c) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$

Y. $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

(d) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} X$

Y. $X = c_1 e^{-t}\left[\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\sin t\right] + c_2 e^{-t}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}\sin t\right]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $X' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} X$

Y. $X = c_1 e^t \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin t \right] + c_2 e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \sin t \right]$

(f) $X' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$

Y. $X = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \sqrt{2}\, t \\ \cos \sqrt{2}\, t \\ -\cos \sqrt{2}\, t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2}\, t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, t \\ \sin \sqrt{2}\, t \\ \sqrt{2} \cos \sqrt{2}\, t - \sin \sqrt{2}\, t \end{pmatrix}$

(g) $X' = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} X$ Y. $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} e^{-t/2} \right]$

(h) $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$

Y. $X = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$

C. Aşağıda verilen Birinci Mertebeden Homogen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini çözünüz.

(a) $X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$

Y. $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $X' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}, \quad t > 0$

Y. $X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) $X' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi$

Y. $X = (\frac{1}{2}\sin^2 t + c_1 t)\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin t \cos t + c_2)\begin{pmatrix} 5\sin t \\ -\cos t + 2\sin t \end{pmatrix}$

(d) $X' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 6t \end{pmatrix} e^{6t}$

Y. $X = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{6t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] e^{6t} + \begin{pmatrix} t^3 - t^2 + t \\ 2t^3 + t^2 \end{pmatrix} e^{6t}$

(e) $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^t$

Y. $X = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} - 3te^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 8. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

8.1 Giriş

Tanım 8.1

$t > 0$ için tanımlanan $f(t)$ fonksiyonunun $L\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ile gösterilen Laplace dönüşümü

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \quad (s>0) \tag{8.1}$$

denklemi ile tanımlanır.

Aşağıda verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(a) $f(t) = 1$
(b) $f(t) = t$
(c) $f(t) = e^{at}$
(d) $f(t) = \cos at$
(e) $f(t) = \sin at$
(f) $f(t) = t^n$

Çözümler:

(a) $f(t) = 1$ $(t > 0)$ fonksiyonu (8.1) de yerine konularak integral aşağıda gösterildiği biçimde hesaplanır.

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st}dt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^{T} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}\right] = \frac{1}{s}$$

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \quad (s>0) \tag{8.2}$$

bulunur.

(b) $f(t) = t$ $(t > 0)$ fonksiyonu (8.1) de yerine konularak integral aşağıda gösterildiği biçimde hesaplanır.

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st}tdt = \lim_{T\to\infty}\int_0^{T} e^{-st}tdt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2}(st+1)\right]_0^{T}$$

$$L\{t\} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2}(sT+1)\right] = \frac{1}{s^2}$$

$$L\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad (s>0) \tag{8.3}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) $f(t) = e^{at}$ $(t > 0)$ fonksiyonu (8.1) de yerine koyularak integral aşağıda gösterildiği biçimde hesaplanır.

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-(s-a)t}\, dt$$

$$L\{e^{at}\} = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^T = \frac{1}{s-a}$$

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \qquad (s > 0) \tag{8.4}$$

bulunur.

(d) $f(t) = \cos at$ $(t > 0)$ fonksiyonu (8.1) de yerine koyularak integral aşağıda gösterildiği biçimde hesaplanır.

$$L\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \cos at\, dt$$

yukardaki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$L\{\cos at\} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (-s\cos at + a\sin at) \right]_0^T$$

$$L\{\cos at\} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{e^{-sT}}{s^2 + a^2} (-s\cos aT + a\sin aT) + \frac{s}{s^2 + a^2} \right]$$

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \qquad (s > 0) \tag{8.5}$$

bulunur.

(e) $f(t) = \sin at$, $(t > 0)$ fonksiyonu (8.1) de yerine koyularak integral aşağıda gösterildiği biçimde hesaplanır.

$$L\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} \sin at\, dt$$

yukardaki integrale kısmi integrasyon uygulanırsa

$$L\{\sin at\} = \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (s\sin at + a\cos at) \right]_0^T$$

$$L\{\sin at\} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{a}{s^2 + a^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2 + a^2} (s\sin aT + a\cos aT) \right]$$

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad (s > 0) \tag{8.6}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $f(t) = t^n$ şeklindeki fonksiyonun Laplace dönüşümü Gamma fonksiyonunun özelliklerinden yararlanarak hesaplanır. $n > -1$ ve $s > 0$ için

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u} s^{-1}\,du \qquad (u = st)$$

$$L\{t^n\} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \tag{8.7}$$

bulunur. Burada (6.36) ve (6.39) dan yararlanıldı. Eğer n pozitif tam sayı ise (6.41) den

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (n = 1,2,\ldots) \tag{8.8}$$

bulunur.

8.2 Laplace Dönüşümlerinin Özellikleri

Aşağıda verilen özelliklerin her birinde f ve g fonksiyonlarının $[0, T]$ şeklindeki her aralık üzerinde kısmi sürekli ve üstel mertebeli oldukları varsayılacaktır. Bu koşullar altında f ve g fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri vardır. Bu dönüşümler sırasıyla, $F(s)$ ve $G(s)$ ile gösterilirse

(A) $$L\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1 L\{f(t)\} + c_2 L\{g(t)\} \tag{8.9}$$

(B) $h(t) = f(t)e^{at}$ ise $H(s) = F(s-a)$, $s > a$ (8.10)

(C) $k(t) = \int_0^t f(u)\,du$ ise $K(s) = \frac{1}{s} F(s)$ (8.11)

(D) $$q(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a, \\ f(t-a), & t > a, \end{cases} \text{ise } Q(s) = e^{-as} F(s),\ s > a \tag{8.12}$$

(E) $p_n(t) = t^n f(t)$ ise $P_n(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$, $s > a$ (8.13)

(F) Herhangi bir $[0, A]$ aralığında $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ fonksiyonları sürekli ve $f^{(n)}$ kısmi sürekli olsun. Bundan başka $t \geq T$ için

$$|f(t)| \leq Me^{at}, |f'(t)| \leq Me^{at}, \ldots, |f^{(n-1)}(t)| \leq Me^{at}$$

gerçeklenmek üzere M, T ve a sabitleri var olsun. Bu koşullar altında $s > a$ için n. mertebeden $f^{(n)}$ türevinin Laplace dönüşümü

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{8.14}$$

bağıntısı ile verilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıda verilen fonksiyonların Laplace dönüşümlerini Laplace özelliklerinden yararlanarak bulunuz.

(a) $f(t) = \sinh at$

(b) $h(t) = e^{-2t}\cos 3t$

(c) $g(t) = t^2 \sin t$

(d) $g(t) = t^2 \cos t$

(e) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ (t-1)^2, & t > 1 \end{cases}$

(f) $q(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(g) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 5 \\ (t-3), & t > 5 \end{cases}$

(h) $\int_0^t x^2 e^x dx$

Çözümler :

(a) $f(t) = \sinh at$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için (A) özelliğinden yararlanacağız. Bunun için fonksiyon üstel fonksiyon cinsinden yazılır.

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{at} - \frac{1}{2}e^{-at}$$

$$L\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{2}L\{e^{at}\} - \frac{1}{2}L\{e^{-at}\}$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s-a)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+a)}$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

bulunur.

(b) $h(t) = e^{-2t}\cos 3t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için (B) özelliğinden yararlanacağız.

$f(t) = \cos 3t$ ise

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2 + 3^2} \quad (s > 0)$$

olduğundan, (B) özelliğine göre

$$H(s) = L\{e^{-2t}\cos 3t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} \quad (s > 0)$$

bulunur.

(c) $g(t) = t^2 \sin t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için (E) özelliğinden yararlanacağız.

$f(t) = \sin t$ ise

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (s > 0)$$

olduğundan, (E) özelliğine göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$G(s) = L\{g(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{2(3s^2-1)}{(s^2+1)^3}$$

bulunur.

(d) $g(t) = t^2 \cos t$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için (E) özelliğinden yararlanacağız.
$f(t) = \cos t$ ise

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1} \qquad (s>0)$$

olduğundan, (E) özelliğine göre

$$G(s) = L\{g(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}$$

bulunur.

(e) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0<t<1 \\ (t-1)^2, & t>1 \end{cases}$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için özellik (D) den yararlanılır.
$g(t) = t^2$ ise

$$L\{g(t)\} = L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

olduğundan, (D) özelliğine göre

$$L\{f(t)\} = e^{-t} L\{g(t)\} = e^{-t}\frac{2}{s^3}$$

bulunur.

(f) $q(t) = \begin{cases} 0, & 0<t<\frac{\pi}{2} \\ \sin t, & t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için önce verilen fonksiyonu aşağıdaki biçimde yeniden yazalım,

$$q(t) = \begin{cases} 0, & 0<t<\frac{\pi}{2} \\ \cos(t-\frac{\pi}{2}), & t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

dönüşüm için özellik (D) den yararlanılır.

$f(t) = \cos t$ ise

$$L\{f(t)\} = L\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$$

olduğundan, (D) özelliğine göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Q(s) = L\{q(t)\} = e^{-1} L\{f(t)\} = e^{-1} \frac{s}{s^2+1}$$

bulunur.

(g) $g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 5 \\ (t-3), & t > 5 \end{cases}$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için önce verilen fonksiyonu aşağıdaki biçimde yeniden yazalım.

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 5 \\ (t-5)+2, & t > 5 \end{cases}$$

burada özellik (D) ve özellik (A) dan yararlanılır.

$f_1(t) = t$ ise

$$L\{f_1(t)\} = L\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

olduğundan, (D) özelliğine göre

$$Q_1(s) = L\{q_1(t)\} = e^{-5s} L\{f_1(t)\} = e^{-5s} \frac{1}{s^2}$$

$f_2(t) = 2$ ise

$$L\{f_2(t)\} = 2L\{1\} = \frac{2}{s}$$

olduğundan, (D) özelliğine göre

$$Q_2(s) = L\{q_2(t)\} = e^{-5s} L\{f_2(t)\} = e^{-5s} \frac{2}{s}$$

Özellik (A) uygulanırsa

$$Q(s) = e^{-5s}\left[\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right]$$

bulunur.

(h) $\int_0^t x^2 e^x dx$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulmak için (C) ve (E) özelliğinden yararlanacağız.

$f(u) = x^2 e^x$ ise, özellik (E) den

$$F(s) = (-1)^2 d^2\left(\frac{1}{s-1}\right) = \frac{2}{(s-1)^3}$$

bulunur. (C) özelliğine göre

$$K(s) = \frac{1}{s} F(s) = \frac{1}{s} \frac{2}{(s-1)^3}$$

bulunur.

T.C. MARMARA ÜNİVERSİTESİ
Kütüphane ve Dokümantasyon
Daire Başkanlığı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8.3 Ters Dönüşüm

Tanım 8.2
Laplace dönüşümü $F(s)$ olan $f(t)$ fonksiyonuna, $F(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü denir. Ters dönüşüm L^{-1} ile gösterilir.

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

Ters Dönüşümün Özellikleri

c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere aşağıda verildiği şekilde sıralanabilir.

(A) $$L^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1L^{-1}\{F(s)\} + c_2L^{-1}\{G(s)\} \qquad (8.17)$$

(B) $$e^{at}L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\{F(s-a)\} \qquad (8.18)$$

Aşağıda Laplace dönüşümleri verilen $f(t)$ fonksiyonlarını bulunuz.

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 10}$ **(b)** $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2 + 6s + 25}$

(c) $F(s) = \dfrac{3s}{(s^2+4s+5)}$ **(d)** $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

(e) $F(s) = \dfrac{16}{s(s^2+4)^2}$ **(f)** $F(s) = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

Çözümler :

Bu işlemler iki şekilde gerçekleştirilebilir. Birinci yöntemde fonksiyonların tanımından ve ters dönüşüm özelliklerinden yararlanılır. İkinci yöntemde ise doğrudan kesirlere ayırma yöntemi ile gerçekleştirilir.

(a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 10}$

Verilen bu fonksiyonun ters dönüşümünü bulmak için birinci yöntemi kullanalım.
Önce paydayı tam kareye tamamlıyalım,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+10}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+3^2}\right\}$$

özellik (B) den yararlanılarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+10}\right\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\}=\frac{1}{3}e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}$$

elde edilir.

$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at$ olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+10}\right\}=\frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$

bulunur.

(b) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+6s+25}$

Verilen bu fonksiyonun ters dönüşümünü bulmak için birinci yöntemi kullanalım. Önce paydayı tam kareye tamamlıyalım,

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+3)^2+4^2}\right\}$$

özellik (B) den yararlanılarak

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}=e^{-3t}L^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+4^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}=e^{-3t}\left[L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4^2}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+4^2}\right\}\right]$$

bulunur. Burada

$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at$ ve $L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at$ olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+6s+25}\right\}=e^{-3t}\left\{\cos 4t-\frac{1}{2}\sin 4t\right\}$$

bulunur.

(c) $F(s)=\dfrac{3s}{(s^2+4s+5)}$

Verilen bu fonksiyonun ters dönüşümünü bulmak için birinci yöntemi kullanalım. Önce paydayı tam kareye tamamlıyalım,

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+4s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{3s}{(s+2)^2+1^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+4s+5}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+1^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{6}{(s+2)^2+1^2}\right\}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Özellik (B) den yararlanılarak

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+4s+5}\right\}=3e^{-2t}\left[L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\right]$$

bulunur. Burada

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at \quad \text{ve} \quad L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at \quad \text{olduğundan}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{s^2+4s+5}\right\}=3e^{-2t}\left[\cos t-2\sin t\right]$$

bulunur.

(d) $F(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$

Verilen fonksiyon basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılırsa,

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} \equiv \frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$1 \equiv (A+B)s^2+(B+C)s+(A+C)$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$(A+B)=0$, $(B+C)=0$, $(A+C)=1$ elde edilir. Buradan $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$, $C=\dfrac{1}{2}$ bulunur. Bu değerler yukarıda yerine konursa

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}=\frac{1}{2(s+1)}+\frac{-1/2s+1/2}{s^2+1}$$

bulunur. Basit kesirlere ayırdıktan sonra eşitliğin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}=L^{-1}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \quad \text{bulunur.}$$

Burada $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+a}\right\}=e^{-at}$, $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin at$, $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at$ olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $F(s)=\dfrac{16}{s(s^2+4)^2}$

Verilen fonksiyon basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılırsa,

$$\frac{16}{s(s^2+4)^2}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4}+\frac{Ds+E}{(s^2+4)^2}$$

$$16=(A+B)s^4+Cs^3+(8A+4B+D)s^2+(4C+E)s+16A$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$$A+B=0\ ,\ C=0\ ,\ 8A+4B+D=0\ ,\ 4C+E=0\ ,\ E=0$$

elde edilir. Buradan $A=1$, $B=-1$, $C=0$, $D=-4$, $E=0$ bulunur. Bu değerler yukarıda yerine konursa

$$\frac{16}{s(s^2+4)^2}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}-\frac{4}{(s^2+4)^2}$$

bulunur. Basit kesirlere ayırdıktan sonra eşitliğin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\left\{\frac{16}{s(s^2+4)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right\}$$ bulunur.

Burada $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}=1$, $L^{-1}\left\{\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}\right\}=t\sin at$, $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at$ olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{16}{s(s^2+4)^2}\right\}=1-\cos 2t-t\sin 2t$$

bulunur.

(f) $F(s)=\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

Verilen fonksiyon basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılırsa,

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{s^2+1}$$

$$1=(A+D)s^4+(B+E)s^3+(A+C)s^2+Bs+C$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafında bulunan aynı fonksiyonların katsayıları birbirine eşitlenirse

$A+D=0$, $B+E=0$, $A+C=0$, $B=0$, $C=1$ elde edilir. Buradan

$A=-1$, $B=0$, $C=1$, $D=1$, $E=0$ bulunur. Bu değerler yukarıda yerine konursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{1}{s^3(s^2+1)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} + \frac{s}{s^2+1}$$

bulunur. Basit kesirlere ayırdıktan sonra eşitliğin her iki tarafının ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}$$ bulunur.

Burada $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$, $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\}=\frac{t^n}{n!}$, $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at$ olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \frac{1}{2}t^2 - 1 + \cos t$$

elde edilir.

8.4 Konvolüsyon

Tanım 8.3

f ve g her sonlu $[0, N]$ kapalı aralığı üzerinde kısmi sürekli ve üstel mertebeli iki fonksiyon olsun.

$$\int_0^t f(t-u)g(u)du \qquad (8.15)$$

integrali ile tanımlanan ve $f * g$ ile gösterilen fonksiyona f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir. * işlemi, bayağı çarpma işleminin bazı özelliklerine sahiptir.

(a) $f*(g*h) = f*g*h$

(b) $f*g = g*f$

(c) $f*(g+h) = f*g + f*h$

Teore 8.1 (Konvolüsyon Teoremi)

f ve g, $s > a$ için Laplacedönüşümleri var olan iki fonksiyon ise

$L\{f\}L\{g\} = L\{f*g\}$ dir.

Aşağıda değerleri verilen $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyolarının $f(t)*g(t)$ konvolüsyonunu bulunuz.

(a) $f(t) = g(t) = t$ (b) $f(t) = t$, $g(t) = t^2$

(c) $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = e^{2t}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(a) $f(t) = g(t) = t$ ise bu fonksiyonların konvolüsyonunu bulmak için (8.15) den yararlanarak aşağıda gösterildiği şekilde bulunur.

$$f(u) = u \quad \text{ve} \quad g(t-u) = t-u \quad \text{olsun},$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t u(t-u)du$$

$$f(t) * g(t) = t\int_0^t u du - \int_0^t u^2 du = \frac{t^3}{6}$$

bulunur.

(b) $f(t) = t$, $g(t) = t^2$ ise bu fonksiyonların konvolüsyonunu bulmak için (8.15) den yararlanarak aşağıda gösterildiği şekilde bulunur.

$$f(u) = u \quad \text{ve} \quad g(t-u) = (t-u)^2 \quad \text{olsun},$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t u(t-u)^2 du$$

$$f(t) * g(t) = t^2\int_0^t u du - 2t\int_0^t u^2 du + \int_0^t u^3 du = \frac{1}{12}t^4$$

bulunur.

(c) $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = e^{2t}$ ise bu fonksiyonların konvolüsyonunu bulmak için (8.15) den yararlanarak aşağıda gösterildiği şekilde bulunur.

$$f(u) = e^{3u} \quad \text{ve} \quad g(t-u) = e^{2(t-u)} \quad \text{olsun},$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t e^{3u}e^{2(t-u)}du$$

$$f(t) * g(t) = e^{2t}\int_0^t e^u du = e^{2t}e^u\Big|_0^t = e^{3t} - e^{2t}$$

bulunur.

Aşağıdaki fonksiyonların Ters Laplace Dönüşümlerini Konvolüsyon Teoremini kullanarak bulunuz.

(a) $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$ (b) $\dfrac{1}{s(s+2)}$

(c) $\dfrac{4}{s^2(s-2)}$ (d) $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

Çözümler :

(a) $\dfrac{1}{s(s^2+4)}$ fonksiyonu yeniden yazılarak Konvolüsyon Teoremi aşağıda gösterildiği şekilde uygulanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{s}\frac{1}{(s^2+4)}$$

Burada $F(s) = \frac{1}{s}$ ve $G(s) = \frac{1}{(s^2+4)}$ olarak tanımlanırsa

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1\ ,\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin 2t \quad \text{olduğundan}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}=L^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}=\int_0^t g(t)f(t-u)du=\int_0^t (1/2\sin 2u)(1)du$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

bulunur.

(b) $\frac{1}{s(s+2)}$ fonksiyonu yeniden yazılarak Konvolüsyon Teoremi aşağıda gösterildiği şekilde uygulanır.

$$\frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{s}\frac{1}{(s+2)}$$

Burada $F(s) = \frac{1}{s}$ ve $G(s) = \frac{1}{(s+2)}$ olarak tanımlanırsa

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1\ ,\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t} \quad \text{olduğundan}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}=L^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}=\int_0^t g(t)f(t-u)du=\int_0^t e^{-2u}(1)du$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(c) $\frac{4}{s^2(s-2)}$ fonksiyonu yeniden yazılarak Konvolüsyon Teoremi aşağıda gösterildiği şekilde uygulanır.

$$\frac{4}{s^2(s-2)} = \frac{4}{s^2}\frac{1}{(s-2)}$$

Burada $F(s) = \frac{4}{s^2}$ ve $G(s) = \frac{1}{(s-2)}$ olarak tanımlanırsa

$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2}\right\} = 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = 4t$, $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$ olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2(s-2)}\right\} = L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2(s-2)}\right\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t 4ue^{2(t-u)}du$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2(s-2)}\right\} = 4e^{2t}\int_0^t ue^{-2u}du = 4e^{2t}\left[-1/2ue^{-2u}\Big|_0^t + 1/2\int_0^t e^{-2u}du\right]$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{s^2(s-2)}\right\} = \left[-1/2te^{-2t} - 1/4e^{-2t} + 1/4\right] = e^{2t} - 2t - 1$$

bulunur.

(d) $\frac{1}{(s^2+1)^2}$ fonksiyonu yeniden yazılarak Konvolüsyon Teoremi aşağıda gösterildiği şekilde uygulanır. Burada $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+1}$ olarak tanımlanırsa

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t \sin u \sin(t-u)du$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t [\cos(2u-t) - \cos t]du = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Laplace Dönüşümleri Tablosu

	$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = L\{f(t)\}$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t^n, n pozitif tam sayı	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
4.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad s > 0$
7.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2} \quad s > \lvert a\rvert$
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2} \quad s > \lvert a\rvert$
9.	$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \quad s > 0$
10.	$t \cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2} \quad s > 0$
11.	$e^{-at} \sin bt$	$\frac{b}{(s+a)^2+b^2} \quad s > 0$
12.	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \quad s > 0$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8.5 Diferansiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümüyle Çözümü

Lineer denklemler Laplace dönüşümleri yardımıyla çözülebilir*.

$$a_0(t)y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y(t) = b(t)$$

$$y(0) = k_0 \ , \ y'(0) = k_1 \ , \ \ldots \ , \ y^{(n-1)}(0) = k_{n-1} \qquad (8.16)$$

başlangıç değer problemi verilmiş olsun. (8.16) sabit katsayılı bir diferansiyel denklem ise, bu denklemin Laplace dönüşümü alındığında $Y(s)$ e göre çözülebilir cebirsel bir denklem

$$a_0\left[s^nY(s) - k_0s^{n-1} - \ldots - k_{n-1}\right] + a_1\left[s^{n-1}Y(s) - k_0s^{n-2} - \ldots - k_{n-2}\right]$$
$$+ \ldots + a_{n-1}\left[sY(s) - k_0\right] + a_nY(s) = B(s) \qquad (8.17)$$

elde edilir. Burada $L\{b(t)\} = B(s)$ dir. (8.17) denklemini yeniden yazalım.

$$P(s)Y(s) = B(s) + Q(s) \qquad (8.18)$$

Burada $Q(s)$ katsayıları k_i sabitlerine bağlı bir polinomdur. (8.18) den Y(s) yalnız bırakılırsa

$$Y(s) = \frac{B(s) + Q(s)}{P(s)} \qquad (8.19)$$

bulunur. Buradan ters Laplace dönüşümü alınarak (8.16) başlangıç değer probleminin çözümü elde edilir.

Aşağıdaki Başlangıç Değer Problemlerini Laplace Dönüşümünü kullanarak çözünüz.

(a) $x''(t) - 2x'(t) - 8x(t) = 0 \quad ; \ x(0) = 3 \ , \ x'(0) = 6$

(b) $x''(t) - 2x'(t) = 6 - 4t \quad ; \ x(0) = 2 \ , \ x'(0) = 0$

(c) $x'''(t) - x''(t) - 6x'(t) = 6 \quad ; \ x(0) = x'(0) = 0 \ , \ x''(0) = 3$

(d) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 3te^{-t} \quad ; \ x(0) = 4 \ , \ x'(0) = 2$

(e) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 4\cos 2t \quad ; \ x(0) = 2 \ , \ x'(0) = 5$

(f) $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = \sin t \quad ; \ y(0) = y'(0) = 0$

(g) $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}\sin t \quad ; \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$

---

* Kaynak 1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümler :

(a) $x''(t)-2x'(t)-8x(t)=0 \quad ; \quad x(0)=3 \ , \ x'(0)=6$

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x''(t)\}-2L\{x'(t)\}-8L\{x(t)\}=0$$

bulunur. $L\{x(t)\}=X(s)$ olmak üzere (8.14)' den yararlanarak ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$L\{x'(t)\}=sX(s)-x(0)=sX(s)-3$$

$$L\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-3s-6$$

elde edilir. $L\{x(t)\}$, $L\{x'(t)\}$ ve $L\{x''(t)\}$ denklemde yerine koyulursa

$$s^2X(s)-3s-6-2sX(s)+6-8X(s)=0$$
$$X(s)(s^2-2s-8)-3s=0 \quad \text{buradan}$$
$$X(s)=\frac{3s}{(s-4)(s+2)}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci tarafın Ters Laplace dönüşümünü bulmak için basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılır.

$$\frac{3s}{(s-4)(s+2)}=\frac{A}{s-4}+\frac{B}{s+2}$$

$3s=(A+B)s+(2A-4B)$ elde edilir. Buradan $A=2$ ve $B=1$ bulunarak

$$X(s)=\frac{2}{s-4}+\frac{1}{s+2}$$

ifadesi elde edilir. Her iki tarafın Ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{X(s)\}=2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

bulunur. Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak

$$x(t)=2e^{4t}+e^{-2t}$$

denklemin çözümü bulunur.

(b) $x''(t)-2x'(t)=6-4t \quad ; \quad x(0)=2 \ , \ x'(0)=0$

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x''(t)\}-2L\{x'(t)\}=6L\{1\}-4L\{t\}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. $L\{x(t)\}=X(s)$ olmak üzere (8.14)' den yararlanarak ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$L\{x'(t)\}=sX(s)-x(0)=sX(s)-2$$

$$L\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-2s$$

elde edilir. Ayrıca Laplace Dönüşüm tablosundan $L\{1\}=\frac{1}{s}$ ve $L(t)=\frac{1}{s^2}$ dir.

$L\{x''(t)\}, L\{x'(t)\}, L\{x(t)\}, L\{1\}$, $L\{t\}$ denklemde yerine koyulursa

$$s^2X(s)-2s-2sX(s)+4=6\frac{1}{s}-4\frac{1}{s^2}$$

$$X(s)(s^2-2s)=\frac{6}{s}-\frac{4}{s^2}+2s-4 \quad \text{buradan}$$

$$X(s)=\frac{6}{s^2(s-2)}-\frac{4}{s^3(s-2)}+\frac{2}{s}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci tarafın Ters Laplace dönüşümünü bulmak için birinci ve ikinci terimler basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılır.

$$\frac{6}{s^3(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s-2}$$

$6=(A+C)s^2+(B-2A)s-2B$ elde edilir. Buradan $A=-3/2$, $B=-3$ ve $C=3/2$ bulunur. Katsayılar yerine koyulursa

$$\frac{6}{s^3(s-2)}=-\frac{3}{2}\frac{1}{s}-\frac{3}{s^2}+\frac{3}{2}\frac{1}{s-2}$$

Ayrıca ikinci terimde benzer şekilde basit kesirlere ayrılırsa

$$\frac{-4}{s^3(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s-2}$$

$-4=(A+D)s^3+(-2A+B)s^2+(-2B+C)s-2C$ elde edilir.

Buradan $A=1/2$, $B=1$, $C=2$ ve $D=-1/2$ bulunarak

$$\frac{-4}{s^3(s-2)}=\frac{1}{2}\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}-\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$$

ikinci terimde basit kesirlere ayrılmış olur. Böylece

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$L^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{6}{s^2(s-2)}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{4}{s^3(s-2)}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\}$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=-\frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$
$$+\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

veya

$$L^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

bulunur. Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak

$$x(t) = 1 - 2t + t^2 + e^{2t}$$

denklemin çözümü bulunur.

(c) $x'''(t)-x''(t)-6x'(t)=6 \;;\; x(0)=x'(0)=0 \;,\; x''(0)=3$

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x'''(t)\}-L\{x''(t)\}-6L\{x'(t)\}=6$$

bulunur. $L\{x(t)\}=X(s)$ olmak üzere (8.14)' den yararlanarak ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$L\{x'(t)\}=sX(s)-x(0)=sX(s)$$
$$L\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$$
$$L\{x'''(t)\}=s^3X(s)-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)=s^3X(s)-3$$

elde edilir. Ayrıca Laplace Dönüşüm tablosundan $L\{1\}=\frac{1}{s}$ dir.

$L\{x'''(t)\}$, $L\{x''(t)\}, L\{x'(t)\}, L\{x(t)\}, L\{1\}$ denklemde yerine koyulursa

$$s^3X(s) - s^2X(s) - 6sX(s) - 3 = 6.\frac{1}{s}$$

$$X(s)(s^3-s^2-6s)=\frac{6}{s}+3 \quad \text{buradan}$$

$$X(s)=\frac{6+3s}{s^2(s^2-s-6)}=\frac{3(s+2)}{s^2(s-3)(s+2)}=\frac{3}{s^2(s-3)}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci tarafın ters Laplace dönüşümünü bulmak için basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{3}{s^2(s-3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3}$$

$3 = (A+C)s^2 + (-3A+B)s - 3B = 3$ elde edilir. Buradan $A = -1/3$, $B = -1$ ve $C = 1/3$ bulunarak

$$X(s) = -\frac{1}{3s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)}$$

ifadesi elde edilir. Her iki tarafın Ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{X(s)\} = -\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)}\right\}$$

bulunur. Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak

$$x(t) = -\frac{1}{3} - t + \frac{1}{3}e^{3t}$$

denklemin çözümü bulunur.

(d) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 3te^{-t}$; $x(0) = 4$, $x'(0) = 2$

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x''(t)\} + 2L\{x'(t)\} + L\{x(t)\} = L\{3te^{-t}\}$$

bulunur. $L\{x(t)\} = X(s)$ olmak üzere (8.14)' den yararlanarak ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$L\{x'(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - 4$$

$$L\{x''(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 4s - 2$$

elde edilir. Ayrıca Laplace Dönüşüm tablosundan $L\{te^{-t}\} = \frac{3}{(s+1)^2}$ dir.

$L\{x''(t)\}$, $L\{x'(t)\}$, $L\{x(t)\}$, $L\{te^{-t}\}$ denklemde yerine koyulursa

$$s^2X(s) - 4s - 2 + 2sX(s) - 8 + X(s) = \frac{3}{(s+1)^2}$$

$$X(s)(s^2 + 2s + 1) = \frac{3}{(s+1)^2} + 4s + 10$$

buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

buradan

$$X(s)=\frac{4s^3+18s^2+24s+13}{(s+1)^4}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci tarafın ters Laplace dönüşümünü bulmak için basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılır.

$$\frac{4s^3+18s^2+24s+13}{(s+1)^4}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)^3}+\frac{D}{(s+1)^4}$$

$$4s^3+18s^2+24s+13=As^3+(3A+B)s^2 +(3A+2B+C)s+(A+B+C+D)$$

elde edilir. Buradan $A=4$, $B=6$, $C=0$, $D=3$ bulunarak

$$X(s)=\frac{4}{s+1}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

ifadesi elde edilir. Her iki tarafın Ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{X(s)\}=4L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+6L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+3L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\}$$

bulunur. Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak

$$x(t)=4e^{-t}+6te^{-t}+\frac{1}{2}t^3e^{-t}$$

denklemin çözümü bulunur.

(d) $x''(t)-4x'(t)+4x(t)=4\cos 2t \quad ; x(0)=2 \ , \ x'(0)=5$

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x''(t)\}-4L\{x'(t)\}+4L\{x(t)\}=4L\{\cos 2t\}$$

bulunur. $L\{x(t)\}=X(s)$ olmak üzere (8.14)' den yararlanarak ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$L\{x'(t)\}=sX(s)-x(0)=sX(s)-2$$

$$L\{x''(t)\}=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-2s-5$$

elde edilir. Ayrıca Laplace Dönüşüm tablosundan $L\{\cos 2t\}=\frac{s}{s^2+4}$ dır.

$L\{x''(t)\}$, $L\{x'(t)\}$, $L\{x(t)\}$, $L\{\cos 2t\}$ denklemde yerine koyulursa

$$s^2X(s)-2s-5-4sX(s)+8+4X(s)=\frac{4s}{s^2+4}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$X(s)(s^2-4s+4)=\frac{4s}{s^2+4}+2s-3$$

$$X(s)=\frac{4s}{(s^2+4)(s-2)^2}+\frac{2s-3}{(s-2)^2}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci tarafın ters Laplace dönüşümünü bulmak için birinci ve ikinci terimler basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılır.

$$\frac{4s}{(s^2+4)(s-2)^2}=\frac{A}{(s-2)}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$4s=(A+C)s^3+(-2A+B-4C+D)s^2$$
$$+(4A+4C-4D)s+(-8A+4D)$$

elde edilir. Buradan $A=0, B=1$, $C=0$ ve $D=-1$ bulunur. Katsayılar yerine koyulursa

$$X(s)=\frac{4s}{(s^2+4)(s-2)^2}=+\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{(s^2+4)}$$

bulunur. Ayrıca ikinci terimde benzer şekilde basit kesirlere ayrılırsa

$$\frac{2s-3}{(s-2)^2}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}$$

$2s-3=As-(2A-B)$ elde edilir. Buradan $A=2$ ve $B=1$ bulunarak

$$\frac{2s-3}{(s-2)^2}=\frac{2}{s-2}+\frac{1}{(s-2)^2}$$

ikinci terimde basit kesirlere ayrılmış olur. Böylece

$$L^{-1}\{X(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{s-2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

$$L^{-1}\{X(s)\}=2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$

bulunur. Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak

$$x(t)=2te^{2t}-\frac{1}{2}\sin 2t+2e^{2t}$$

denklemin çözümü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(e) $y''(t)-y'(t)-2y(t)=\sin t \quad ; \quad y(0)=y'(0)=0$

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{y''(t)\}-L\{y'(t)\}+2L\{y(t)\}=L\{\sin t\}$$

bulunur. $L\{x(t)\}=X(s)$ olmak üzere (8.14)' den yararlanarak ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$L\{y'(t)\}=sY(s)-y(0)=sY(s)$$
$$L\{y''(t)\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$$

elde edilir. Ayrıca Laplace Dönüşüm tablosundan $L\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$ dır.

$L\{y''(t)\}, L\{y'(t)\}, L\{y(t)\}, L\{\sin t\}$ denklemde yerine koyulursa

$$s^2Y(s)-sY(s)-2Y(s)=\frac{1}{s^2+1}$$
$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2-s-2)}=\frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s-2)}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci tarafın ters Laplace dönüşümünü bulmak için basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılır.

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s-2)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$1=(A+B+C)s^3+(A-2B-C+D)s^2+(A+B-2C-D)s+(A-2B-2D)$$

elde edilir. Buradan $A=1/15$, $B=-1/6$, $C=1/10$, $D=-3/10$ bulunarak

$$Y(s)=\frac{1}{15}\frac{1}{(s-2)}-\frac{1}{6}\frac{1}{(s+1)}+\frac{1}{10}\frac{s}{(s^2+1)}-\frac{3}{10}\frac{1}{(s^2+1)}$$

ifadesi elde edilir. Her iki tarafın Ters Laplace dönüşümü alınırsa

$$L^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{15}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}-\frac{3}{10}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

bulunur. Laplace Dönüşüm Tablosu kullanarak

$$y(t)=\frac{1}{15}e^{2t}-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{1}{10}\cos t-\frac{3}{10}\sin t$$

denklemin çözümü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(f) $y''(t)+2y'(t)+5y(t)=e^{-t}\sin t \quad ; \quad y(0)=0 \ , \ y'(0)=1$

Denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{y''(t)\}+2L\{y'(t)\}+5L\{y(t)\}=L\{e^{-t}\sin t\}$$

bulunur. $L\{x(t)\}=X(s)$ olmak üzere (8.14)' den yararlanarak ve başlangıç koşulları kullanılarak

$$L\{y'(t)\}=sY(s)-y(0)=sY(s)$$

$$L\{y''(t)\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-1$$

elde edilir. Ayrıca Laplace Dönüşüm tablosundan $L\{e^{-t}\sin t\}=\dfrac{1}{(s+1)^2+1}$ dır.

$L\{y''(t)\}$, $L\{y'(t)\}$, $L\{y(t)\}$, $L\{e^{-t}\sin t\}$ denklemde yerine koyulursa

$$s^2Y(s)-1+2sY(s)+5Y(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$Y(s)\left[s^2-2s+5\right]=\frac{1}{(s^2+2s+2)}+1$$

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}+\frac{1}{(s^2+2s+5)}$$

$$Y(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci tarafın ters Laplace dönüşümünü bulmak için basit kesirlere aşağıda gösterildiği şekilde ayrılır.

$$Y(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{As+B}{s^2+2s+2}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+5}$$

$$s^2+2s+3=(A+C)s^3+(2A+B+2C+D)s^2$$
$$+(5A+2B+2C+2D)s+5B+2D$$

elde edilir. Buradan $A=0$, $B=1/3$, $C=0$, $D=2/3$ bulunarak

$$Y(s)=\frac{1/3}{s^2+2s+2}+\frac{2/3}{s^2+2s+5}$$

ifadesi elde edilir.

$$L^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+2}\right\}+\frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$L^{-1}\{Y(s)\}=\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\}+\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}$$

bulunur. Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

denklemin çözümü bulunur.

8.6 *Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Laplace Dönüşümüyle Çözümü*

Birinci mertebeden sabit katsayılı iki bilinmeyenli

$$\begin{aligned} a_0x' + a_1x + b_0y' + b_1y &= f_1(t) \\ c_0x' + c_1x + d_0y' + d_1y &= f_2(t) \end{aligned} \qquad (8.20)$$

denklem sistemini düşünelim. Burada $a_0, b_0, c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, d_1$ sabitleri reel sayılar kümesinin elemanlarıdır*. Ayrıca

$$x(0) = k_0 \ , \ y(0) = k_1 \qquad (8.21)$$

başlangıç koşulları verilmiş olsun. Başlangıç değer problemini çözmek için sistemde her iki denklemin, her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} L\{x'\} &= sX(s) - k_0 \ , \quad L\{x\} = X(s) \ , \quad L\{f_1(t)\} = G_1(s) \\ L\{y'\} &= sY(s) - k_1 \ , \quad L\{y\} = Y(s) \ , \quad L\{f_2(t)\} = G_2(s) \end{aligned}$$

olduğundan

$$a_0[sX(s)-k_0] + a_1X(s) + b_0[sY(s)-k_1] + b_1Y(s) = G_1(s)$$

$$c_0[sX(s)-k_0] + c_1X(s) + d_0[sY(s)-k_1] + d_1Y(s) = G_2(s)$$

elde edilir. Bu denklemler $X(s)$ ile $Y(s)$ bilinmeyenlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} [a_0s + a_1]X(s) + [b_0s + b_1]Y(s) &= G_1(s) + a_0k_0 + b_0k_1 \\ [c_0s + c_1]X(s) + [d_0s + d_1]Y(s) &= G_2(s) + c_0k_0 + d_0k_1 \end{aligned} \qquad (8.22)$$

bulunur. Bu iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine **Cramer Kuralı** uygulanırsa

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} G_1(s) + a_0k_0 + b_0k_1 & b_0s + b_1 \\ G_2(s) + c_0k_0 + d_0k_1 & d_0s + d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0s + a_1 & b_0s + b_1 \\ c_0s + c_1 & d_0s + d_1 \end{vmatrix}} \qquad (8.23)$$

* Kaynak 15

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} a_0s+a_1 & G_1(s)+a_0k_0+b_0k_1 \\ c_0s+c_1 & G_2(s)+c_0k_0+d_0k_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0s+a_1 & b_0s+b_1 \\ c_0s+c_1 & d_0s+d_1 \end{vmatrix}}, \qquad (8.24)$$

elde edilir. Burada determinant işlemi yapıldıktan sonra **Ters Laplace Dönüşümüne** geçilerek

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\} \quad \text{ve} \quad y(t)=L^{-1}\{Y(s)\} \qquad (8.25)$$

fonksiyonları bulunur.

Aşağıdaki Başlangıç Değer Problemlerini Laplace Dönüşümünü kullanarak çözünüz.

(a)

$$\begin{aligned}(D+3)x+5y&=2\\ -x+(D-1)y&=1\end{aligned} \quad ; \quad x(0)=1,\ y(0)=0$$

(b)

$$\begin{aligned}(D+2)x-2y&=0\\ -x+(D+1)y&=2e^t\end{aligned} \quad ; \quad x(0)=0,\ y(0)=1$$

(c)

$$\begin{aligned}(D+2)x+y&=e^{-t}\\ -2x+Dy&=-e^{-t}\end{aligned} \quad ; \quad x(0)=2,\ y(0)=0$$

(d)

$$\begin{aligned}-4x+(D^2+D+4)y&=2\\ (D+1)x-y&=2\end{aligned} \quad ; \quad x(0)=2,\ y(0)=4,\ y'(0)=2$$

(e)

$$\begin{aligned}x''(t)-x(t)+5y'(t)&=t\\ y''(t)-4y(t)-2x'(t)&=-2\end{aligned} \quad ; \quad x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0$$

Çözümler :

(a) $$\begin{aligned}(D+3)x+5y&=2\\ -x+(D-1)y&=1\end{aligned} \quad ; \quad x(0)=1,\ y(0)=0$$

Denklem sisteminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x'\}=sX(s)-1 \quad , \quad L\{x\}=X(s) \quad , \quad L\{2\}=2\cdot\frac{1}{s}$$

$$L\{y'\}=sY(s) \quad , \quad L\{y\}=Y(s) \quad , \quad L\{1\}=\frac{1}{s}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olmak üzere, denklem sistemi

$$(s+3)X(s)+5Y(s)=\frac{s+2}{s}$$

$$-X(s)+(s-1)Y(s)=\frac{1}{s}$$

iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine Cramer Kuralı uygulanırsa, $X(s)$ ve $Y(s)$ aşağıdaki şekilde

$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{s+2}{s} & 5\\ \frac{1}{s} & s-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s+3 & 5\\ -1 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{s^2+s-7}{s(s^2+2s+2)}$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix}s+3 & \frac{s+2}{s}\\ -1 & \frac{1}{s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s+3 & 5\\ -1 & s-1\end{vmatrix}}=\frac{2s+5}{s(s^2+2s+2)}$$

bulunur. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci taraflarının Ters Laplace Dönüşümlerini bulmak için önce aşağıda gösterildiği biçimde basit kesirlere ayrılırlar.

$$\frac{s^2+s-7}{s(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{(2s+2)B+C}{s^2+2s+2}$$

buradan $A=-7/2$, $B=9/4$ ve $C=7/2$ bulunarak

$$X(s)=-\frac{7}{2}\frac{1}{s}+\frac{9}{2}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1^2}+\frac{7}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{2s+5}{s(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{(2s+2)B+C}{s^2+2s+2}$$

buradan $A=5/2$, $B=-5/4$ ve $C=-1/2$ bulunarak

$$Y(s)=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{5}{2}\cdot\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ifadesi elde edilir. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü , Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak ,

$$x(t) = -\frac{7}{2} + \frac{9}{2}e^{-t}\cos t + \frac{7}{2}e^{-t}\sin t$$

$$y(t) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}e^{-t}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t$$

denklem sisteminin çözümü bulunur. Bulunan çözümler $x(0)=1$ ve $y(0)=0$ kullanılarak kontrol edilebilir.

(b)

$$\begin{aligned} &(D+2)x - 2y = 0 \\ &-x + (D+1)y = 2e^{t} \end{aligned} \quad ; \quad x(0)=0, \quad y(0)=1$$

Denklem sisteminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x'\} = sX(s) \quad , \quad L\{x\} = X(s)$$

$$L\{y'\} = sY(s) - 1 \quad , \quad L\{y\} = Y(s) \quad , \quad L\{2e^{t}\} = 2\cdot\frac{1}{s-1}$$

olmak üzere , denklem sistemi

$$(s+2)X(s) - 2Y(s) = 0$$

$$-X(s) + (s+1)Y(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine Cramer Kuralı uygulanırsa , $X(s)$ ve $Y(s)$ aşağıdaki şekilde

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ \frac{s+1}{s-1} & s+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{2(s+1)}{s(s-1)(s+3)}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+2 & 0 \\ -1 & \frac{s+1}{s-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & -2 \\ -1 & s+1 \end{vmatrix}} = \frac{s^2+3s+2}{s(s-1)(s+3)}$$

bulunur. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci taraflarının Ters Laplace Dönüşümlerini bulmak için önce aşağıda gösterildiği şekilde basit kesirlere ayrılırlar.

$$\frac{2(s+1)}{s(s-1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+3}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

buradan $A=-2/3$, $B=1$ ve $C=-1/3$ bulunarak

$$X(s)=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-1}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{s^2+3s+2}{s(s+3)(s-1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s-1}$$

buradan $A=-2/3$, $B=1/6$ ve $C=3/2$ bulunarak

$$Y(s)=-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(s+3)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(s-1)}$$

ifadesi elde edilir. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü , Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak

$$x(t)=e^{t}-\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{2}{3}$$

$$y(t)=\frac{3}{2}e^{t}+\frac{1}{6}e^{-3t}-\frac{2}{3}$$

denklem sisteminin çözümü bulunur. Bulunan çözümler $x(0)=0$ ve $y(0)=1$ kullanılarak kontrol edilir.

(c)

$$\begin{aligned}&(D+2)x+y=e^{-t}\\&-2x+Dy=-e^{-t}\end{aligned}\quad :\quad x(0)=2,\ y(0)=0$$

Denklem sisteminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x'\}=sX(s)-2\ ,\ L\{x\}=X(s)\ ,\ L\{e^{-t}\}=\frac{1}{s+1}$$

$$L\{y'\}=sY(s)\ ,\ L\{y\}=Y(s)\ ,\ L\{-e^{-t}\}=-\frac{1}{s-1}$$

olmak üzere , denklem sistemi

$$(s+2)X(s)+Y(s)=\frac{2s+3}{s+1}$$

$$-2X(s)+sY(s)=-\frac{1}{s+1}$$

iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine Cramer Kuralı uygulanırsa , $X(s)$ ve $Y(s)$ aşağıdaki şekilde

$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{2s+3}{s+1} & 1\\ -\frac{1}{s+1} & s\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s+2 & 1\\ -2 & s\end{vmatrix}}=\frac{2s^2+3s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+2 & \dfrac{2s+3}{s+1} \\ -2 & -\dfrac{1}{s+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+2 & 1 \\ -2 & s \end{vmatrix}}=\frac{3s+4}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

bulunur. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci taraflarının Ters Laplace Dönüşümlerini bulmak için önce aşağıda gösterildiği şekilde basit kesirlere ayrılırlar.

$$\frac{2s^2+3s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{(2s+2)B+C}{s^2+2s+2}$$

buradan $A=0$, $B=1$ ve $C=-1$ bulunarak

$$X(s)=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2+1^2}-\frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{3s+4}{(s+1)(s^2+2s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{(2s+2)B+C}{s^2+2s+2}$$

buradan $A=1$, $B=-1/2$ ve $C=3$ bulunarak

$$Y(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1^2}+\frac{3}{(s+1)^2+1^2}$$

ifadesi elde edilir. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü, Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak,

$$x(t)=e^{-t}(2\cos t-\sin t)$$
$$y(t)=e^{-t}(1-\cos t+3\sin t)$$

denklem sisteminin çözümü bulunur. Bulunan çözümler başlangıç koşulları $x(0)=2$, $y(0)=0$ kullanılarak kontrol edilebilir.

(d)

$$\begin{aligned} -4x+(D^2+D+4)y&=2 \\ (D+1)x-y&=2 \end{aligned} \quad ; \quad x(0)=2\ ,\ y(0)=4\ ,\ y'(0)=2$$

Denklem sisteminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x'\}=sX(s)-2 \quad , \quad L\{x\}=X(s) \quad , \quad L\{2\}=2\cdot\frac{1}{s}$$
$$L\{y''\}=s^2Y(s)-4s-2\ , \quad L\{y'\}=sY(s)-4 \quad , \quad L\{y\}=Y(s)$$

olmak üzere, denklem sistemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olmak üzere, denklem sistemi

$$-4X(s)+(s^2+s+4)Y(s)=\frac{4s^2+6s+2}{s}$$

$$(s+1)X(s)-Y(s)=\frac{2(s+1)}{s}$$

iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine Cramer Kuralı uygulanırsa, $X(s)$ ve $Y(s)$ aşağıdaki şekilde

$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix}\frac{4s^2+6s+2}{s} & s^2+s+4\\ \frac{2(s+1)}{s} & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & s^2+s+4\\ s+1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{2s^3+8s^2+16s+10}{s^2(s^2+2s+5)}$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix}-4 & \frac{4s^3+6s42}{s}\\ s+1 & \frac{2(s+1)}{s}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-4 & s^2+s+4\\ s+1 & -1\end{vmatrix}}=\frac{4s^3+10s^2+16s+10}{s^2(s^2+2s+5)}$$

bulunur. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci taraflarının Ters Laplace Dönüşümlerini bulmak için önce aşağıda gösterildiği şekilde basit kesirlere ayrılırlar.

$$\frac{2s^3+8s^2+16s+10}{s^2(s^2+2s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{(2s+2)C+D}{s^2+2s+5}$$

buradan $A=12/5$, $B=2$, $C=-1/5$ ve $D=8/5$ bulunarak

$$X(s)=\frac{12}{5}\frac{1}{s}+2\frac{1}{s^2}-\frac{2}{5}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}-\frac{8}{5}\frac{1}{(s+1)^2+2^2}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{4s^3+10s^2+16s+10}{s^2(s^2+2s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{(2s+2)C+D}{s^2+2s+5}$$

buradan $A=12/5$, $B=2$, $C4/5=$ ve $D=-2/5$ bulunarak

$$Y(s)=\frac{12}{5}\frac{1}{s}+2\frac{1}{s^2}-\frac{8}{5}\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}-\frac{2}{5}\frac{1}{(s+1)^2+2^2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ifadesi elde edilir. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü , Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak ,

$$x(t) = -\frac{2}{5}e^{-t}\cos 2t + \frac{4}{5}e^{-t}\sin 2t + 2t + \frac{12}{5}$$

$$y(t) = \frac{8}{5}e^{-t}\cos 2t + \frac{4}{5}e^{-t}\sin 2t + 2t + \frac{12}{5}$$

denklem sisteminin çözümü bulunur. Bulunan çözümler başlangıç koşulları $x(0)=2$, $y(0)=4$ ve $y'(0)=2$ kullanılarak kontrol edilebilir.

(e)

$$\begin{aligned} x''(t) - x(t) + 5y'(t) &= t \\ y''(t) - 4y(t) - 2x'(t) &= -2 \end{aligned} \quad ; \quad x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0$$

Denklem sisteminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{x''\}=s^2X(s)\ ,\ L\{x'\}=sX(s)\ ,\ L\{x\}=X(s)\ ,\ L\{t\}=\frac{1}{s^2}$$

$$L\{y''\}=s^2Y(s)\ ,\ L\{y'\}=sY(s)\ ,\ L\{y\}=Y(s)\ ,\ L\{-2\}=-\frac{2}{s}$$

olmak üzere , denklem sistemi

$$(s^2-1)X(s)+5sY(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$-2sX(s)+(s^2-4)Y(s)=-\frac{2}{s}$$

iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine Cramer Kuralı uygulanırsa , $X(s)$ ve $Y(s)$ aşağıdaki şekilde

$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2} & 5s \\ -\frac{2}{s} & s^2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2-1 & 5s \\ -2s & s^2-4 \end{vmatrix}}=\frac{11s^2-4}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^2-1 & \frac{1}{s^2} \\ -2s & -\frac{2}{s} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2-1 & 5s \\ -2s & s^2-4 \end{vmatrix}}=\frac{-2s^2+4}{s\,(s^2+1)(s^2+4)}$$

bulunur. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci taraflarının Ters Laplace Dönüşümlerini bulmak için önce aşağıda gösterildiği şekilde basit kesirlere ayrılırlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{11s^2-4}{s^2(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{2As+B}{s^2}+\frac{2Cs+D}{s^2+1}+\frac{2Es+F}{s^2+4}$$

buradan $A=0$, $B=-1$, $C=E=0$, $D=5$ ve $F=-4$ bulunarak

$$X(s)=-\frac{1}{s^2}+\frac{5}{s^2+1}-\frac{4}{s^2+4}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{-2s^2+4}{s\,(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{2Bs+C}{s^2+1}+\frac{2Ds+E}{s^2+4}$$

buradan $A=1$, $B=-1$, $C=E=0$ ve $D=1/2$ bulunarak

$$Y(s)=\frac{1}{s}-\frac{2s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}$$

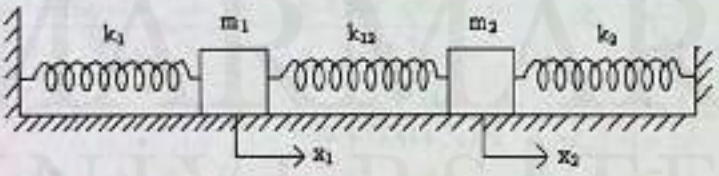
ifadesi elde edilir. $X(s)$ ve $Y(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü , Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak ,

$$x(t)=-t+5\sin t-2\sin t$$
$$y(t)=1-2\cos t+\cos 2t$$

denklem sisteminin çözümü bulunur. Bulunan çözümler başlangıç koşulları $x(0)=y(0)=x'(0)=y'(0)=0$ kullanılarak kontrol edilebilir.

8.7 Laplace Dönüşümü Uygulamaları

(a)



Yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde hareket etmekte olan $m_1=1\,kg$ ve $m_2=2\,kg$ olan Cisimler şekilde görüldüğü gibi , ağırlıksız yaylarla birbirine tutturulmuş olarak denge konumları etrafında salınım hareketi yapmaktadırlar. Yayların esneklik katsayıları sırasıyla $k_1=1\,N/m$, $k_{12}=2\,N/m$ ve $k_2=2\,N/m$ olduğu ve başlangıç koşullarının ise $x_1(0)=-1$, $x_2(0)=2$ ve $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ olduğu biliniyor. Herhangi $t>0$ anında cisimlerin her birinin denge konumundan hangi uzaklıkta olduğunu bulunuz.

Çözüm:

m_1 kütlesine soldaki yay F_1 kuvveti ile ortadaki yay ise F_2 kuvveti ile etki ettiğinden ,

m_2 kütlesine Newton yasası uygulanırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_1 + F_2$$

burada $F_1 = k_1 x_1$ ve $F_2 = k_{12}(x_2 - x_1)$ (Hook yasası) dir. Verilen değerler yukarıda yerine koyulursa m_1 cisminin hareket denklemi

$$1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -x_1 + 2(x_2 - x_1)$$

veya

$$(D^2 + 3)x_1 - 2x_2 = 0 \qquad (8.26)$$

bulunur. Benzer şekilde m_2 kütlesine ortadaki yay F_3 kuvveti ile sağdaki yay ise F_4 kuvveti ile etkiler. m_2 kütlesine Newton yasası uygulanırsa

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = F_3 + F_4$$

burada $F_3 = -k_{12}(x_2 - x_1)$ ve $F_4 = -k_3 x_2$ dir. Verilen değerler yukarıda yerine koyulursa m_2 cisminin hareket denklemi

$$2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -2(x_2 - x_1) - 2x_2$$

veya

$$-2x_1 + (2D^2 + 4)x_2 = 0 \qquad (8.27)$$

bulunur. (8.26) ve (8.27) denklemleri aşağıdaki şekilde tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned} &(D^2 + 3)x_1 - 2x_2 = 0\,, \\ &-2x_1 + (2D^2 + 4)x_2 = 0\,, \end{aligned} \qquad (8.28)$$

denklem sistemi elde edilir. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu sistem , sabit katsayılı lineer ve homogendir. Bu denklem sistemini 8.6 da verilen Laplace Dönüşümü yöntemiyle çözeceğiz. Başlangıç koşullarının $x_1(0) = -1$, $x_2(0) = 2$ ve $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ olduğu bilindiğine göre , denklem sisteminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} &L\{x_1''\} = s^2X_1(s) + s\,,\ L\{x'\} = X_1(s)\ ,\ L\{x_1\} = X_1(s) \\ &L\{x_2''\} = s^2X_2(s) - 2s\ ,\ L\{x_2'\} = X_2(s)\ ,\ L\{x_2\} = X_2(s) \end{aligned}$$

olmak üzere , denklem sistemi

$$\begin{aligned} &(s^2 + 3)X_1(s) - 2X_2(s) = -s \\ &-2X_1(s) + (2s^2 + 4)X_2(s) = 4s \end{aligned}$$

iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine Cramer Kuralı uygulanırsa , $X_1(s)$ ve $X_2(s)$ aşağıdaki şekilde

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} -s & -2 \\ 4s & 2s^2 + 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 + 3 & -2 \\ -2 & 2s^2 + 4 \end{vmatrix}} = \frac{-s^3 + 2s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$X_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & -s \\ -2 & 4s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & -2 \\ -2 & 2s^2+4 \end{vmatrix}}=\frac{2s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

bulunur. $X_1(s)$ ve $X_2(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci taraflarının Ters Laplace Dönüşümlerini bulmak için önce aşağıda gösterildiği şekilde basit kesirlere ayrılırlar.

$$\frac{-s^3+2s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{2As+B}{s^2+1}+\frac{2Cs+D}{s^2+4}$$

buradan $A=1/2$, $B=D=0$ ve $C=-1$ bulunarak

$$X_1(s)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{2s}{s^2+4}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{2s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{2As+B}{s^2+1}+\frac{2Cs+D}{s^2+4}$$

buradan $A=1/2$, $B=D=0$ ve $C=1/2$ bulunarak

$$X_2(s)=\frac{s}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+4}$$

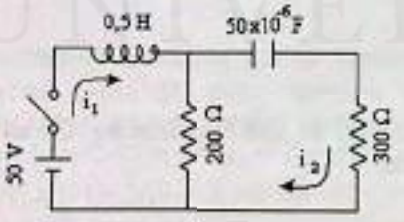
ifadesi elde edilir. $X_1(s)$ ve $X_2(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü, Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak,

$$x_1(t)=\cos t-2\cos 2t \qquad (8.28)$$

$$x_2(t)=\cos t+\cos 2t \qquad (8.29)$$

denklem sisteminin çözümü bulunur. (8.28) ve (8.29) ifadeleri herhangi $t>0$ anında cisimlerin her birinin denge konumundan hangi uzaklıkta olduğunu verir.

(b)



Şekildeki devrede herhangi bir t anı için kollardaki i_1 ve i_2 akım fonksiyonlarını hesaplayınız. (Anahtar $t=0$ anında kapatıldığında yükler ve akımlar sıfırdır.)

Çözüm :

i_1 ve i_2 akımları şekilde gösterildiği kollara ait akımlar olduğu gibi ortak kolda ise akım i_1-i_2 olduğu görülür.

Her bir kola Kirchoff' un ikinci yasası uygulanırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$0.5\frac{di_1}{dt}+200(i_1-i_2)=50$$

$$300\,i_2+200(i_2-i_1)+\frac{1}{5x10^{-6}}\int_0^t i_2\,dt=0$$

Bu denklem sistemi yeniden düzenlenerek aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(D+400)i_1-400\,i_2=100$$

$$-2\,i_1+5\,i_2-200\int_0^t i_2\,dt=0 \qquad (8.30)$$

İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu sistem, sabit katsayılı lineer ve homogendir. Bu denklem sistemini 8.6 da verilen Laplace Dönüşümü yöntemi ile çözeceğiz. Başlangıç koşullarının $i_1(0)=i_2(0)=0$ olduğu bilindiğine göre, denklem sisteminde her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$L\{i_1'\}=sI_1(s)+s,\quad L\{i_1\}=I_1(s)\quad,\quad L[100]=\frac{1}{s}100$$

$$L\{i_2'\}=I_2(s),\quad L\left\{\int_0^t i_1\,dt\right\}=\frac{1}{s}I_2(s)\ \text{(özellik C)}$$

olmak üzere, denklem sistemi

$$(s^2+400s)I_1(s)-400s\,I_2(s)=100$$
$$-2s\,I_1(s)+(5s+200)I_2(s)=0$$

iki bilinmeyenli cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sistemine Cramer Kuralı uygulanırsa, $I_1(s)$ ve $I_2(s)$ aşağıdaki şekilde

$$I_1(s)=\frac{\begin{vmatrix}100 & -400s\\ 0 & 5s+200\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+400s & 400s\\ -2s & 5s+20\end{vmatrix}}=\frac{100s+4000}{s(s+80)(s+200)}$$

$$I_2(s)=\frac{\begin{vmatrix}s^2+400s & 100\\ -2s & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}s^2+400s & 400s\\ -2s & 5s+20\end{vmatrix}}=\frac{40}{(s+80)(s+200)}$$

bulunur. $I_1(s)$ ve $I_2(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü alınarak çözüme gidilir. İkinci taraflarının Ters Laplace Dönüşümlerini bulmak için önce aşağıda gösterildiği şekildebasit kesirlere ayrılırlar.

$$I_1(s)=\frac{100s+4000}{s(s+80)(s+200)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+80}+\frac{C}{s+200}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

buradan $A=1/4$, $B=5/12$ ve $C=-2/3$ bulunarak

$$I_1(s)=\frac{1}{4}\frac{1}{s}+\frac{5}{12}\frac{1}{(s+80)}-\frac{2}{3}\frac{1}{(s+200)}$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde ,

$$I_2(s)=\frac{40}{(s+80)(s+200)}=\frac{A}{s+80}+\frac{B}{s+200}$$

buradan $A=1/3$ ve $B=-1/3$ bulunarak

$$I_2(s)=\frac{1}{3}\frac{1}{(s+80)}-\frac{1}{3}\frac{1}{(s+200)}$$

ifadesi elde edilir. $I_1(s)$ ve $I_2(s)$ in her iki tarafının Ters Laplace Dönüşümü , Laplace Dönüşüm Tablosunu kullanarak ,

$$i_1(t)=\frac{1}{4}+\frac{5}{12}e^{-80t}-\frac{2}{3}e^{-200t} \qquad (8.31)$$

$$i_2(t)=\frac{1}{3}e^{-80t}-\frac{1}{3}e^{-200t} \qquad (8.32)$$

denklem siteminin çözümü bulunur. (8.31) ve (8.32) ifadeleri herhangi bir t anında kollardaki akım fonksiyonlarını verir.

8. BÖLÜMLE İLGİLİ PROBLEMLER

A. Aşağıda Laplace Dönüşümleri verilen $f(t)$ fonksiyonlarını bulunuz.

(a) $F(s)=\dfrac{2}{s^2+3s-4}$ Y. $\dfrac{2}{5}e^{t}-\dfrac{2}{5}e^{-4t}$

(b) $F(s)=\dfrac{3s}{s^2-s-6}$ Y. $\dfrac{9}{5}e^{3t}+\dfrac{6}{5}e^{-2t}$

(c) $F(s)=\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$ Y. $2e^{-t}\cos 2t$

(d) $F(s)=\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$ Y. $-2e^{-t}\cos t+5e^{-2t}\sin t$

(e) $F(s)=\dfrac{4s+4}{s^2(s-2)}$ Y. $3e^{2t}-3-2t$

(f) $F(s)=\dfrac{5s-2}{s^2(s+2)(s-1)}$ Y. $t-2+e^{t}+e^{-2t}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

B. Aşağıdaki fonksiyonların Ters Laplace dönüşümlerini Konvolüsyon Teoremini kullanarak bulunuz.

(a) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+5s+6}$ **Y.** $e^{-2t}-e^{-3t}$

(b) $F(s)=\dfrac{1}{s(s^2+9)}$ **Y.** $1-\cos 3t/9$

(c) $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s+3)}$ **Y.** $-1+3t-e^{-3t}/9$

(d) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$ **Y.** $\dfrac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$

C. Aşağıdaki Başlangıç Değer Problemlerini Laplace Dönüşümüyle çözünüz.

(a) $x''(t)-5x'(t)+6x(t)=0 \;;\; x(0)=1 \;,\; x'(0)=2$ **Y.** $x(t)=e^{2t}$

(b) $x''(t)+4x(t)=8 \;;\; x(0)=0 \;,\; x'(0)=6$ **Y.** $x(t)=2-2\cos 2t+3\sin 2t$

(c) $y''(t)-y'(t)-2y(t)=18e^{-t}\sin 3t \;;\; y(0)=0 \;,\; y'(0)=3$

Y. $y(t)=2e^{2t}-3e^{-t}-e^{-t}\sin 3t+e^{-t}\cos 3t$

(d) $x''(t)+7x'(t)+10x(t)=4te^{-3t} \;;\; x(0)=0 \;,\; x'(0)=-1$

Y. $x(t)=e^{-2t}-e^{-3t}-2te^{-3t}$

(e) $x''(t)+3x'(t)+2x(t)=4t^2 \;;\; x(0)=0 \;,\; x'(0)=0$

Y. $x(t)=2t^2-6t+7-8e^{-t}+e^{-2t}$

(f) $y''(t)-6y'(t)+9y(t)=6t^2e^{3t} \;;\; y(0)=0 \;,\; y'(0)=0$ **Y.** $y(t)=\dfrac{1}{2}t^4e^{3t}$

(g) $y'''(t)-5y''(t)+7y'(t)-3y(t)=20\sin t \;;\; y(0)=0 \;,\; y'(0)=0 \;,\; y''(0)=-2$

Y. $y(t)=(3-4t)e^{t}+\sin t-3\cos t$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

YARARLANILAN KAYNAKLAR

1. Aydın M., Kuryel B., Gündüz G. ve Oturanç G., Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Fakülteler Kitapevi, İzmir, 1995.
2. Ayres J R F., Differential Equations, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Company, 1972.
3. Bell, W.W., Special Functions for Scientist and Engineers, Von Nostrand Reinhold Company, London, 1968.
4. Boyce,W.E. ve Di Prima, R. C., Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons Inc., 1986.
5. Demek A. N. ve Demek A., Diferansiyel Denklemler, Deniz Yayınevi, 1995.
6. Hüseyin O. ve Sezer E., Matrisler ve Türevsel Denklemler, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, 1977.
7. Güngör F., Diferansiyel Denklemler, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen – Edebiyat Fakültesi, 1995.
8. Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley & Sons Inc., 1993.
9. Nielsen, K.L., Differential Equations, Banes & Noble College Outline Series, 1966.
10. Rabenstein A. L., Introduction to Ordinary Differential Equations, Academic Press, Newyork, 1972.
11. Rainville E. D., ve Bedient P. E., Elementary Differential Equations, Macmillan Publishing Co.,Inc., 1963.
12. Ross S. L., Differential Equations, John Wiley & Sons Inc., 1984.
13. Spigel M. R., Theory and Problems of Advanced Calculus, Schaum's Outline Series, Mc Graw Hill Book Company, 1962.
14. Tuncer T., Diferansiyel Denklemler, Araştırma, Eğitim Ekin Yayınları,
15. Yaşar İ. B., Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, Siyasal Kitabevi, Ankara, 1997.
16. Wylie C. R, Differential Equations, Mc Graw Hill Book Company, 1985.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

M.Ü. Kütüphane ve
Dokümantasyon Daire Başkanlığı



CEM KİTAPEVİ
MÜHÜRDAR CAD. AKMAR PASAJI 31/A
KADIKÖY - İST. TEL: (0.216) 349 49 50