MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No.: 454

FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ YAYIN No.: 7

# GENEL MATEMATİK ALIŞTIRMALARI

## İKİNCİ KISIM

Semin AKDOĞAN

Giacomo SABAN

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

İSTANBUL — 1987

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No. : 454

FEN - EDEBİYAT FAKÜLTESİ YAYIN No. : 7

# GENEL MATEMATİK ALIŞTIRMALARI

## İKİNCİ KISIM

Semin AKDOĞAN

Giacomo SABAN

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

İSTANBUL — 1987

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

FATİH YAYINEVİ MATBAASI — Tel. : 527 23 72
Allbaba Türbe Sokak No. 21/3 - Nuruosmaniye/İST.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

## ÖNSÖZ

*Bu kitap 1978 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi'nin teksir halinde, 1985 'te ise kitap halinde basmış olduğu Genel Matematik Alıştırmaları'nın İkinci Kısmıdır.*

*Yazarlar bu kitabın Marmara Üniversitesi Yayınları arasında yer almasını uygun gören Fen - Edebiyat Fakültesi'ne, şekilleri büyük bir itina ile çizen Cazibe Hoşgören'e ve titiz bir çalışma ile kitabı basan Fatih Basımevi'nin tüm personeline teşekkür ederler.*

*Semin AKDOĞAN*

*İstanbul, 10 Ağustos 1987.*

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# İÇİNDEKİLER

Önsöz ... III
İçindekiler ... V

Bölüm Yedi — SÜREKLİLİKLE İLGİLİ GLOBAL TEOREMLER

1 — Global Teoremler ... 1
2 — Önemli üç global teorem ... 1
3 — Sınırlı olma hakkında ... 2
4 — Ekstremumlar hakkında ... 4
5 — Bir Uyarı ... 7
6 — Alıştırmalar ... 9
7 — Aradeğer Teoremi ... 12
8 — Polinomlarla ilgili sonuçlar ... 14
9 — Alıştırmalar ... 17

Bölüm Sekiz — SUPREMUM KAVRAMI

1 — Üst sınır, alt sınır kavramları ... 21
2 — Minimal eleman, Maksimal eleman ... 24
3 — Supremum, infimum ... 28
4 — Alıştırmalar ... 31

Bölüm Dokuz — TÜREV KAVRAMI

1 — Türev tanımı ... 41
2 — Parçalı sürekli ve parçalı düzgün fonksiyonlar ... 46
3 — Türetilemeyen fonksiyonlar ... 49
4 — Teğet çizimi ile ilgili konular ... 52
5 — Türev tanımı ile ilgili bazı konular ... 60
6 — Yüksek mertebeden türev ... 62
7 — Alıştırmalar ... 67

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bölüm On — TÜREV ALMA İŞLEMİ

1 — Genel kurallar ... 83
2 — Uygulamalar ... 86
3 — Polinomların türetilmesi ... 87
4 — Rasyonel fonksiyonların türetilmesi ... 89
5 — Köklü ifadelerin türetilmesi ... 93
6 — Bileşke fonksiyonların türetilmesi - Zincir kuralı ... 100
7 — Bir alıştırma ... 105

Bölüm Onbir — TÜREV KAVRAMININ UYGULANMASI

1 — Bir fonksiyonun maksimum ve minumumları hakkında ... 107
2 — Türetilebilen fonksiyonlar hakkında esas teoremler ... 118
3 — Sonuçlar ... 119
4 — Rolle ve Ortalama Değer Teoremlerinin uygulanması ... 125
5 — Alıştırmalar ... 135
6 — Cauchy Ortalama Değer teoreminin uygulamaları - L'Hopital kuralı ... 138

Bölüm Oniki — KONVEKSLİK

1 — Konvekslik tanımı ... 147
2 — Konvekslik ile ilgili problemler ... 154
3 — Konveksliğin uygulamaları. Grafik çizimi ... 172

Bölüm Onüç — MAKÜS FONKSİYON KAVRAMI

1 — Makûs fonksiyonu ... 184
2 — İki makûs fonksiyonun türevi ... 192

Bölüm Ondört — İNTEGRAL KAVRAMI

1 — Alan ... 200
2 — Örnekler ... 202
3 — Çeşitli alıştırmalar ... 214

Bölüm Onbeş — İNTEGRAL HESABIN ESAS TEOREMLERİ

1 — İntegral Hesabın Esas Teoremleri ... 216
2 — Uygulamalar ... 217

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Bölüm Onaltı — ACISAL FONKSİYONLAR

1 — Açıklama ... 221
2 — Trigonometrik fonksiyonlarda limit ve süreklilik ... 221
3 — Trigonometrik fonksiyonlarda türev ... 224
4 — Bir n - inci türev hakkında ... 227
5 — Trigonometrik fonksiyonlarda grafik çizimi ... 228
6 — Maküs trigonometrik fonksiyonlar ... 240

Bölüm Onyedi — LOGARİTMİK VE ÜSTEL FONKSİYONLAR

1 — Logaritmik fonksiyon ... 266
2 — Uygulamalar ... 267
3 — Üstel fonksiyon ... 270
4 — Uygulamalar ... 276
5 — Alıştırmalar ... 289
6 — Grafik Çizimleri ... 294

Bölüm Onsekiz — HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

1 — Hiperbolik fonksiyonlar ... 299
2 — Hiperbolik fonksiyonlar arasındaki başlıca özdeşlikler ... 300
3 — Uygulamalar ... 301
4 — Alıştırmalar ... 303
5 — Denklem çözümleri ... 304
6 — Hiperbolik fonksiyonların türevleri ... 307
7 — Hiperbolik fonksiyonların grafikleri ... 308
8 — Hiperbolik fonksiyonlu kısımları bulunan fonksiyonların grafik çizimleri 322
9 — Hiperbolik fonksiyonların maküsleri ... 327
10 — Alıştırmalar ... 341
11 — Hiperbolik fonksiyonların maküsleri ile ilgili bağıntılar ... 342

Bölüm Ondokuz — İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

0 — İlkel fonksiyon cetveli ... 348
1 — Dönüşüm yöntemi ... 353
2 — Kısmi integrasyon yöntemi ... 364
3 — Rasyonel fonksiyonların integrasyonu - Basit kesirlere ayırma yöntemi 382
4 — Rasyonel fonksiyonların integrasyonuna indirgenebilen integraller ... 398
5 — İndirgeme formülleri ... 432

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Bölüm Yirmi — İNTEGRAL KAVRAMININ UYGULANMASI

1 — Alan hesapları ... 436
2 — Dönel cisimlerin hacimleri (1) ... 443
3 — Dönel cisimlerin hacimleri (2) ... 449
4 — Çeşitli uygulamalar ... 451

Bölüm Yirmibir — İNTEGRAL KAVRAMININ KAPSAMININ GENİŞLETİLMESİ - ÖZGÜ OLMAYAN İNTEGRALLER

0 — Amaç ... 458
1 — İki örnek ... 458
2 — Birinci cinsten özgü olmayan integraller ... 460
3 — İki örnek ... 465
4 — İkinci cinsten özgü olmayan integraller ... 466
5 — Özgü olmayan integraller için yakınsaklık koşulu ... 470
6 — Özgü olmayan bir integral ile tanımlanan bir fonksiyon ... 476

Bölüm Yirmi İki — ÖZGÜ OLMAYAYN İNTEGRALLERE ÖRNEKLER

1 — Birinci cinsten özgü olmayan integraller ... 484
2 — İkinci cinsten özgü olmayan integraller ... 488

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM YEDİ

## SÜREKLİLİKLE İLGİLİ GLOBAL TEOREMLER

### 1 — GLOBAL TEOREMLER

Bu bölümün konusu olan teoremleri şimdiye kadar ele alınan teoremlerden ayıran en önemli özelliklerinden bir tanesi şüphesiz *global* teoremler olmalarıdır. Gerçekten, süreklilik kavramının tanımından başlayarak, süreklilikle ilgili önceki bölümde yapılan bütün incelemeler, bir fonksiyonun bir noktada sürekli olup olmadığı konusunu ele almakta idi. Bu teoremlerdeki kanıtlama yöntemleri üzerinde durulacak olursa, fonksiyonun söz konusu noktayı içine alan istenildiği kadar küçük bir açık aralık üzerinde tanımlanmış olmasının gayeye ulaşmak için yeterli olduğu görülür. Fonksiyonun belli bir sayıyı içine alan istenildiği kadar küçük bir aralıkta verilmiş olmasının yeterli olduğu hallerde elde edilen teoremlere ve özelliklere *lokal* veya *yerel* denir.

Bu Bölümdeki teoremlerin hipotezlerinde ise incelenen fonksiyonun belirli bir kapalı aralığın tümü üzerinde verilmiş olması koşulu vazgeçilmez bir unsur olarak yer almaktadır. Bu teoremlerin ifadeleri ve bu teoremlerden elde edilen özellikler, hipotezlerindeki bu önemli değişiklikten dolayı şartlandırılmış olurlar. Sonuçlar, fonksiyonun tüm bir aralıkta belirli bazı koşulları sağlamasına bağlıdır ve dolayısıyle yerel değillerse bu türden sonuçlara *global* denir.

### 2 — ÖNEMLİ ÜÇ GLOBAL TEOREM

Sürekli fonksiyonlar için aşağıdaki üç önemli global teorem kanıtlanır(1).

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.1. *Teorem :* [a, b] *kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış ve sürekli olan f fonksiyonu aralığın uçlarında farklı işaretten değerler alırsa,* ]a, b[ *açık aralığına ait en azından bir* $x_0$ *değeri için sıfır değerini alır.*

2.2. *Teorem :* [a, b] *kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış ve sürekli bir f fonksiyonu alttan ve üstten sınırlıdır.*

2.3. *Teorem :* [a, b] *kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış ve sürekli bir f fonksiyonu bu aralığa ait en azından bir değer için maksimum ve en azından bir değer için minimum değerini alır.*

Ayrıca şunu da kaydetmek gerekir ki, Teorem 2.1. in sonucu olarak,

2.4. *Teorem :* [a, b] *kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış ve sürekli bir f fonksiyonu aralığın uçlarında aldığı iki değerin arasında kalan bütün değerleri alır* (2).

Bu teoremleri uygulamak suretiyle çok ilginç sonuçlara varmak olanakları vardır: bu nedenle bu teoremleri iyice anlamak ve ifadelerindeki kavramları, iyice bilmek gerekir.

## 3 — SINIRLI OLMA HAKKINDA

*f* ile gösterilecek olan bir fonksiyon bir C cümlesi üzerinde tanımlanmış olsun. C cümlesine ait her değişken değeri için f fonksiyonunun aldığı değerler ü gibi bir sayıdan küçük kalırlarsa, f fonksiyonuna *üstten sınırlı*, ü sayısına da f fonksiyonunun bir *üst sınırı* denir. ü sayısı, C üzerinde tanımlanmış f fonksiyonunun bir üst sınırını gösterecek olursa, $\ddot{U} > ü$ koşulunu sağlayan her Ü sayısı da aynı fonksiyonun bir üst sınırıdır.

Aynı şekilde, C cümlesine ait her değişken değeri için *f* fonksiyonunun aldığı değerler *a* gibi bir sayıdan büyük kalırlarsa, *f* fonksiyonuna *alttan sınırlı*, *a* sayısına da *f* fonksiyonunun bir *alt sınırı* denir. *a* sayısı, *C* üzerinde tanımlanmış *f* fonksiyonun bir alt sınırıdır.

---

(1) GS-AG, s. 115-123'e bakınız.
(2) Bu Teoreme Ara Değer Teoremi denir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Alttan ve üstten sınırlı olan bir fonksiyona kısaca *sınırlı* denir. Sınırlı, alttan sınırlı veya üstten sınırlı olma özellikleri aşağıdaki bazı örnekler üzerinde gösterilmiştir.

3.1. *Örnekler*

3.1.1. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $]-1, 1[$ aralığı üzerinde göz önüne alınsın. $]-1, 1[$ aralığında alınan her $x$ değeri için $f$ fonksiyonu pozitif değerler alır: şu halde bu $f$ fonksiyonunun söz konusu $]-1, 1[$ aralığında aldığı her değer $-1$ sayısından büyüktür ve dolayısiyle fonksiyon alttan sınırlıdır. Üstelik, yine $]-1, 1[$ aralığında alınan her değer için $f$ fonksiyonunun aldığı değer en fazla 1'e eşit olabileceğinden, 2 sayısı bu fonksiyon için bir üst sınırdır. Şu halde $f(x) = x^2$ fonksiyonu $]-1, 1[$ aralığı üzerinde sınırlıdır.

3.1.2. $f(x) = x^2$ fonksiyonu IR üzerinde göz önüne alınsın. Her $x$ reel sayısı için $x^2$ sayısı negatif olamayacağından, $f$ fonksiyonu yine IR üzerinde alttan sınırlıdır. Fakat fonksiyon üstten sınırlı değildir, çünkü M pozitif sayısı ne kadar büyük olursa olsun, $x_0 > \sqrt{M}$ için $f(x_0) > M$ dir. Şu halde $f(x) = x^2$ fonksiyonu IR üzerinde yalnızca alttan sınırlıdır.

3.1.3. $f(x) = x^3$ fonksiyonu $]-1, 1[$ aralığı üzerinde göz önüne alınsın. $]-1, 1[$ aralığında alınan her $x$ değeri için $f$ fonksiyonunun değerinin 2 sayısından küçük, $-2$ sayısından büyük olduğu kolayca görülür. Şu halde $f(x) = x^3$ fonksiyonu $]-1,1[$ aralığı üzerinde sınırlıdır.

3.1.4. $f(x) = x^3$ fonksiyonu IR üzerinde göz önüne alınacak olursa, M pozitif sayısı ne kadar büyük olursa olsun, $x_0 > M^{1/3}$ için $f(x_0) > M$ olur. Aynı şekilde, N negatif sayısı ne kadar küçük olursa olsun, $x_0 < N^{1/3}$ için $f(x_0) < N$ olur. Şu halde $f(x) = x^3$ fonksiyonu IR üzerinde sınırlı değildir.

3.1.5. $f(x) = \text{sgn } x$ fonksiyonu IR üzerinde göz önüne alınsın. sgn fonksiyonunun tanımına göre, değişkenin negatif değerler alması halinde fonksiyon $-1$ sayısına eşit olur, değişkenin pozitif değerler alması halinde fonksiyon $+1$ sayısına eşittir ve değişken sıfır değerini aldığı zaman fonksiyonun değeri sıfırdır. Şu halde sgn fonksiyonunun aldığı her değer 2 sayısından küçük ve $-2$ sayısından büyüktür: buna göre, sgn fonksiyonu IR üzerinde sınırlıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



3.2. *Sonuçlar*

3.1.1. ve 3.1.2 örnekleri karşılaştırılırsa, aynı cebirsel kural ile verilen bir fonksiyonun üstten sınırlı olma özeliğinin tanım cümlesine bağlı olduğu görülür.

Aynı şekilde, 3.1.3. ve 3.1.4. örnekleri karşılaştırılırsa, aynı cebirsel kural ile verilen bir fonksiyonun alttan sınırlı olma özeliğinin tanım cümlesine bağlı olduğu görülür.

Son olarak ele alınan 3.1.5. örneği ise, tanım cümlesinin sonsuz olmasının fonksiyonun sınırlı olmasına engel olmadığını ortaya koymaktadır.

## 4 — EKSTREMUMLAR HAKKINDA.

C cümlesi üzerinde tanımlanmış bir $f$ fonksiyonu verilmiş olsun. C cümlesine ait her $x$ değişken değeri için, yine C cümlesine ait bir (veya birkaç) $x_*$ değişken değeri için

$$f(x) \leq f(x_*)$$

bağıntısı sağlanacak olursa, $x_*$ değerine $f$ fonksiyonunun C üzerinde bir *maksimum noktası*, $f(x_*)$ değerine, $f$ fonksiyonunun C üzerinde bir *maksimum değeri* denir.

Benzer şekilde, C cümlesine ait her $x$ değişken değeri için, yine C cümlesine ait bir (veya birkaç) $x_*$ değişken değeri için

$$f(x) \geq f(x_*)$$

bağıntısı sağlanacak olursa, $x_*$ değerine $f$ fonksiyonunun C üzerindeki bir *minimum noktası*, $f(x_*)$ değerine, $f$ fonksiyonunun C üzerinde bir *minimum değeri* denir.

$f$ fonksiyonunun C üzerindeki maksimum ve minimum noktaları bir arada göz önüne alınacak olursa, bu noktalara $f$ fonksiyonunun C üzerindeki *ekstremum noktaları*, $f$ fonksiyonunun C üzerindeki maksimum ve minimum değerleri bir arada göz önüne alınacak olursa, bu değerlerin her ikisine birden $f$ fonksiyonunun C üzerindeki *ekstremum değerleri* denir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Maksimum, minimum veya ekstremum noktalarını haiz olma özelliğinin aşikâr olan özelliklerden olmadığı bazı örnekler üzerinde gösterilebilir.

4.1. *Örnekler*

4.1.1. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $]-1, 1[$ aralığı üzerinde göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun tanım cümlesi üzerinde negatif olmayan değerler aldığı meydandadır. Şu halde tanım cümlesine ait her $x$ değişken değeri için

$$f(x) \geqslant 0$$

dır. Ancak, $]-1,1[$ açık aralığına ait $x_* = 0$ için $f(x_*) = 0$ olduğundan, aralığa ait her $x$ için

$$f(x) \geqslant f(x_*)$$

dır. Şu halde $f$ fonksiyonunun $]-1, 1[$ aralığı üzerinde bir minimum noktası vardır. $f$ fonksiyonunun aynı aralık üzerinde bir maksimum noktası bulunmadığı aşikârdır, zira fonksiyon bu aralık üzerinde daima 1 değerinden küçük kalır fakat 1 sayısına istenildiği kadar yaklaştırılabilir: gerçekten, $\varepsilon$ pozitif sayısı nasıl seçilirse seçilsin, aralığa ait en az bir değer için fonksiyon 1-2$\varepsilon$ ile 1 arasında değerler alır çünkü $f(1-\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2$ dır ve $\varepsilon < 2$ seçilirse, $\varepsilon^2 < 2\varepsilon$, yani $\varepsilon^2 - \varepsilon < \varepsilon$ olup

$$1-2\varepsilon < 1-\varepsilon + (\varepsilon^2-\varepsilon) = 1-2\varepsilon + \varepsilon^2 < 1$$

elde edilir.

Şu halde $f$ fonksiyonu $]-1,1[$ aralığı üzerinde maksimum noktası bulunmayan bir fonksiyondur.

4.1.2. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ fonksiyonu IR üzerinde göz önüne alınsın.

$x$ değişkeninin her değeri için, $x^2$ daima negatif olmayan bir sayı gösterdiğine göre,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$$

dir. IR cümlesine ait $x_* = 0$ değeri için $f(x_*) = 1$ olduğundan,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

dır ve dolayısiyle $f$ fonksiyonunun IR üzerinde bir maksimum noktası vardır. $x$ ne olursa olsun $f$ fonksiyonu pozitif değerler aldığından,

$$f(x) > 0$$

yazılabilir. Ancak, hiçbir $x$ değeri için fonksiyon 0 değerini alamaz, fakat bu değere istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Dolayısiyle $f$ fonksiyonu IR üzerinde minimum noktası bulunamayan fonksiyonlardandır.

4.1.3. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ fonksiyonu IR üzerinde göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun tanımına göre, her $x < 0$ için $f(x) = -1$, her $x > 0$ için $f(x) = 1$ ve $f(0) = 0$ olduğundan, her $x < 0$ değeri fonksiyon için bir minimum noktası, her $x > 0$ değeri fonksiyonun bir maksimum noktasıdır.

4.1.4. $f(x) = x$ idantik fonksiyonu IR üzerinde göz önüne alınsın.

Bu fonksiyonun, önceden seçilecek her M sayısından büyük değerler alabildiği aynı şekilde seçilebilecek her N sayısından küçük değerler de alabildiği meydandadır. Şu halde bu fonksiyonunun IR üzerinde ekstremum noktaları yoktur.

4.1.5. $I(x) = x$ idantik fonksiyonu $]-1,1[$ açık aralığı üzerinde göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun aldığı değerlerin $-1$ ile 1 sayısı arasında olduğu, ancak $-1$ ve 1 sayılarına istenildiği kadar yaklaşmak mümkün olmakla beraber, hiç bir zaman bu değerlere erişilemediği görülmektedir. Dolayısiyle bu fonksiyonun da ekstremum noktaları yoktur.

4.1.6. $I(x) = x$ idantik fonksiyonu $[-1,1]$ kapalı aralığı üzerinde göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun aldığı değerlerin tekrar $-1$ ve $+1$ sayıları arasında oldukları, $x_1 = -1$ için $I(x_1) = -1$ ve $x_0 = 1$ için $I(x_0) = 1$ olduğu görülür. Şu halde $[-1,1]$ üzerinde $I(x) = x$ fonksiyonunun maksimum noktası $x_0 = 1$, minimum noktası $x_1 = -1$ dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



4.2 *Sonuçlar*

4.1.4. örneği, ekstremumları olmayan bir fonksiyon göstermektedir: Bu durumun, fonksiyonun tanım cümlesine bağlı olduğu 4.1.5. ve 4.1.6. örneklerinden görülmektedir.

4.1.3. örneği ise, bir fonksiyonun sonsuz bir cümle üzerinde tanımlanmış olmakla beraber ekstremum noktalarını haiz olabileceğini göstermektedir.

Nihayet 4.1.1. ve 4.1.2. örnekleri sadece minimum veya sadece maksimum noktaları olan fonksiyonların varlığını kanıtlamaktadır.

## 5 — BİR UYARI

Genel bir şekilde ifadeleri verilen Teorem 2.1, 2.2, 2.3 ve 2.4'ün belirttikleri özellikler bakımından gerek ve yeter koşullar olmadıklarını hatırlatmak yerinde olur.

Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1,0[ \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x \in ]0, +1] \end{cases} \tag{5.1}$$

fonksiyonu, $[-1, +1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış olmakla beraber, bu aralıkta sürekli değildir ($x = 0$ noktasında süreksizliği vardır!). Bununla beraber $0 \in ]-1, +1[$ açık aralığı için $f(0) = 0$ dır. Şu halde fonksiyonun bir kapalı aralık üzerinde sürekli olması, Teorem 2.1. de açıklanan özelliğin sağlanması için *gerek* bir koşul değil fakat *yeter* bir koşuldur.

Aynı şekilde, a ve b herhangi iki reel sayı olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b], \quad x \in Q \\ 0 & x \in [a,b], \quad x \notin Q \end{cases} \tag{5.2}$$

fonksiyonu, kapalı bir aralık üzerinde tanımlanmış fakat bu aralığın *her* noktasında süreksiz olan bir fonksiyondur. Bununla beraber, bu $f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlıdır. Şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



fonksiyonun bir kapalı aralık üzerinde sürekli olması, Teorem 2.2 de açıklanan özelliğin sağlanması için bir *gerek* koşul değil fakat bir *yeter* koşuldur.

Üstelik, gerek (5.1) gerekse (5.2) fonksiyonları, tanımlanmış oldukları kapalı aralıklar üzerinde sürekli olmadıkları halde, bu aralıklarda ekstremum değerlerini gerçekten almaktadırlar: (5.1) fonksiyonu maksimumunu her $x \in ]0, +1]$ ve minimumunu her $x \in [-1, 0[$ değerini için, (5.2) fonksiyonu maksimumuna $[a, b]$ deki her rasyonel sayı için ve minimumuna $[a, b]$ deki her irrasyonel sayı için erişir. Şu halde $f$ fonksiyonunun bir kapalı aralık üzerinde sürekli olması, fonksiyonun bu aralık üzerinde ekstremumlarına erişmesi için sadece *yeter* bir koşuldur, *gerek* bir koşul değildir.

5.1. *Alıştırmalar*

Aşağıda verilen fonksiyonlardan hangileri
i) tanım aralıkları üzerinde süreklidir,
ii) tanım aralıkları üzerinde sınırlıdır,
iii) tanım aralıklarında ekstremum değerlerini alır? Açıklayınız.

1) $f(x) = x^2$; $[-1, +1]$ aralığı üzerinde.

Yanıt : Süreklidir, sınırlıdır ekstremum değerlerini alır.

2) $f(x) = x^2$; $]-1, +1[$ aralığı üzerinde.

Yanıt : Süreklidir, sınırlıdır minimum değerini alır, maksimum değerini almaz.

3) $f(x) = x^2$; $]0, +1[$ aralığı üzerinde.

Yanıt : Süreklidir, sınırlıdır ekstremum değerlerini almaz.

4) $f(x) = \begin{cases} 4 - 3x - x^2 & -4 \leqslant x < 0 \\ x^3 - 3x - 4 & 0 \leqslant x \leqslant +4 \end{cases}$

Yanıt : Süreksizdir, sınırlıdır ekstremum değerlerini alır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



5) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ; $[-a, +a]$ aralığı üzerinde.

Yanıt : Süreksizdir, alttan sınırlıdır, minimum değerini alır, maksimum değerini almaz.

6) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ; $[-a, +a]$ aralığı üzerinde.

Yanıt : Süreksizdir, sınırlı değildir ve dolayısiyle ekstremum değerlerini alamaz.

*6. Alıştırmalar*

Aşağıda gösterilen fonksiyonların, yanlarında açıklanan aralıklarda

a) üstten veya alttan sınırlı olup olmadıklarını;

b) maksimum veya minimum noktalarının olup olmadığını açıklayınız. (*Uyarı :* Söz konusu fonksiyonlar, Teorem 2.1., 2.2., 2.3. ve 2.4 ün hipotezlerine aykırı olarak, *sürekli olmayıp*, a) ve b) ile gösterilen özellikleri haiz olabilir. Aynı şekilde, bu fonksiyonların tanım aralıkları, yukarıda sözü edilen teoremlerin hipotezlerine aykırı olarak, *açık* olup bu özellikleri haiz olabilirler.)

1) $]-1, 1[$ aralığı üzerinde $f(x) = \begin{cases} x & -1 < x < 0 \text{ için} \\ 1 - x & 0 \leqslant x < 1 \text{ için} \end{cases}$

2) $]-1, 1[$ aralığı üzerinde $f(x) = |x|$

3) IR cümlesi üzerinde $f(x) = |x|$

4) $[0, 1]$ aralığı üzerinde $f(x) = \begin{cases} 1 & x \notin \mathbb{Q} \text{ ise} \\ \frac{1}{q} & x \in \mathbb{Q} \text{ ve } x = \frac{p}{q} \text{ şeklinde ise} \end{cases}$

($\frac{p}{q}$ kesirinin sadeleştirilmiş olduğu kabul edilecektir!)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



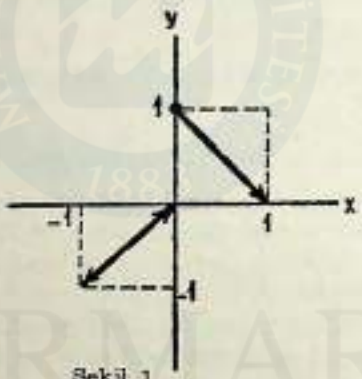
5) $[0, 2]$ aralığı üzerinde $f(x) = [x]$

6) $]-1, 1[$ aralığı üzerinde $f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leq 0 \text{ ise} \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

7) $]-1, 1[$ aralığı üzerinde $f(x) = \begin{cases} x^3 & -1 \leq x < 0 \text{ ise} \\ -x & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

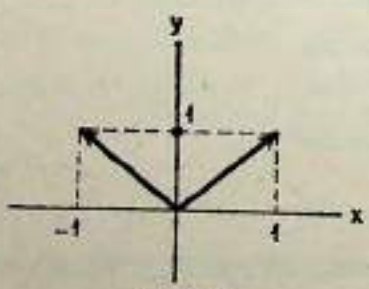
6.1. *Yanıtlar :*

1) Maksimum noktası var minimum noktası yok, alttan ve üstten sınırlı




Şekil 1.

2) Maksimum noktası var maksimum noktası yok, üstten ve alttan sınırlı




Şekil 2.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

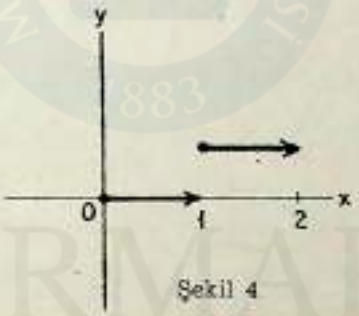


9) Minimum noktası var maksimum noktası yok, alttan sınırlı, üstten sınırlı değil



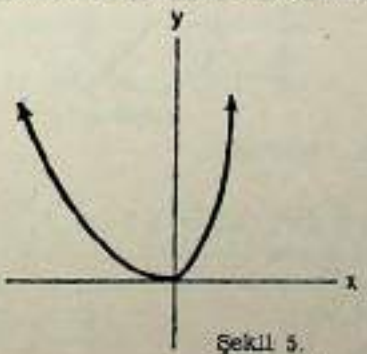

Şekil 3.

4) $x = 0$ noktası bir minimum noktası $x = 1$ ve $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ noktaları ise maksimum noktalarıdır.
Alttan ve üstten sınırlı.




Şekil 4

5) $[0, 1[$ aralığındaki bütün noktalar minimum noktaları $[1, 2[$ yarı açık aralığındaki bütün noktalar ise maksimum noktalarıdır. Alttan ve üstten sınırlı.




Şekil 5.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

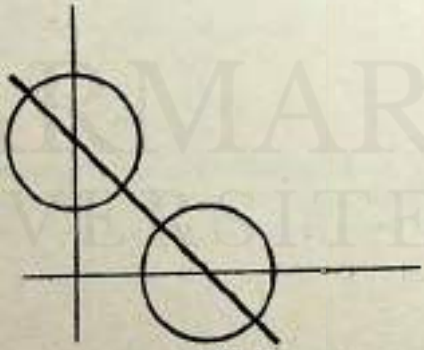


6) Minimum noktası var maksimum noktası yok, üstten ve alttan sınırlı




Şekil 6.

7) Bir maksimum, iki minimum noktası var, üstten ve alttan sınırlı.



Şekil 7.

## 7 — ARA DEĞER TEOREMİ.

Bu Bölümün 1. inde açıklanan Teorem 2.1. ve bunun bir genelleştirilmiş şekli olarak düşünülebilen Teorem 2.4. ün, köklerin yaklaşık değerlerini bulmak veya en azından mümkün olduğu kadar yaklaşık değer verecek bir aralığın saptanması açısından, büyük yararı vardır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Örneğin,

$$f(x) = x^5 - 329x + 2$$

şeklinde bir fonksiyon verilmiş olsun. Cebirin önemli bir bölümünü teşkil eden *Galois Teorisi*, beşinci ve daha yüksek dereceden denklemler için, köklerle ifade edilebilen genel bir çözüm formülünün bulunamayacağını açıkladığına göre, bu fonksiyonu sıfıra eşitlemek suretiyle elde edilen denklemin çözümlerini verecek genel bir yöntem yoktur. Ancak, yukarda hatırlatılan teoremden dolayı,

$$x^5 - 392x + 2 = 0$$

denkleminin 4 ve 5 arasında bulunan en az bir çözümü bulunduğunu kesin olarak ifade etmek mümkündür, zira

$$f(4) = 1025 - 1316 + 2 = -290 < 0$$

$$f(5) = 3125 - 1645 + 2 = \quad 1492 > 0$$

dır. Bu bilgi sayesinde Nümerik Analizin yöntemlerini uygulamak suretiyle, bu kökü istenildiği kadar kesin bir yaklaşımla elde etmek olanağı doğar. Aynı şekilde, bu denklemin $-5$ ile $-4$ arasında bulunan bir kökü vardır, zira

$$f(-5) = -3125 + 1645 + 2 = -1478 < 0$$

$$f(-4) = -1025 + 1316 + 2 = \quad 293 > 0$$

olduğuna göre, fonksiyonun $[-5, -4]$ aralığında önceki teoremden dolayı en az bir kökü kesin olarak vardır. Aynı nedenle $[0,1]$ aralığında da bu denklemin bir kökü bulunacaktır, çünkü

$$f(0) = 2 > 0$$

$$f(1) = 1 - 329 + 2 = -326 < 0$$

dır.

7.1. *Alıştırmalar*

1) $f$ fonksiyonu $[-1, 1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve

$$f(-1) = 2, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 3$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

koşullarını gerçekleyecek şekilde veriliyor. Bu fonksiyonun $[-1, 1]$ aralığında en az kaç kökü vardır? Bu fonksiyon için bir grafik çiziniz.

5) $[-2, 2]$ aralığı üzerinde $f$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & -2 \leqslant x < 0 \\ -(x^2 + 2) & 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Fonksiyonun $[-2, 2]$ aralığında bir kökü var mı?

## 8 — POLİNOMLARLA İLGİLİ SONUÇLAR

Teorem 2.1, Teorem 2.2 ve Teorem 2.3'ün sonucu olarak aşağıdaki teoremler ispat edilebilir (1):

*8.1. n doğal sayısı tek ise*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

*denkleminin en azından bir reel kökü vardır.*

*8.2. n doğal sayısı çift ise, her $x$ değeri için*

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

*olmak üzere*

$$f(y) \leqslant f(x)$$

*olacak şekilde bir $y$ reel sayısı vardır.*

*8.3. n doğal sayısı çift ise*

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = c$$

*denkleminin $c \geqslant p$ koşulunu sağlayan her $c$ için en az bir çözümü olacak şekilde, ve $c < p$ koşulunu sağlayan her $c$ için ise hiçbir çözümü olmayacak şekilde bir $p$ reel sayısı vardır.*

---

(1) GS-AG, s. 125-130 deki Teorem 3.2., Teorem 3.3. ve Teorem 3.4.e bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Söz konusu teoremlerin ispatlarını uygulamak suretiyle, yine polinomlarla tanımlanan denklemlerin çözümleri ile ilgili ilginç sonuçlar elde edilebilir.

Örneğin

$$x^5 - \frac{1}{392}x + 2 = 0$$

denklemi göz önüne alınsın.

$$f(x) = x^5 - \frac{1}{392}x + 2$$

yazılacak olursa,

$$f(-2) = -30 + \frac{2}{392} < 0,$$

$$f(0) = 2 > 0$$

olduğundan, verilen denklemin $[-2, 0]$ kapalı aralığında en azından bir kökü bulunduğu Ara Değer Teoreminin bir sonucudur. Fakat

$$f(x) = x^5\left(1 - \frac{1}{392}\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right)$$

yazıp,

$$\left|-\frac{1}{392}\frac{1}{x^4}\right| < \frac{1}{5} \quad , \quad \left|\frac{2}{x^5}\right| < \frac{1}{5}$$

koşullarının gerçekleşmesini sağlamak için

$$|x|^4 > \frac{5}{392} \; ; \quad |x|^5 > 10$$

olarak almak gerekir. Bu iki eşitsizlikten birincisi

$$|x| > 10^{-4}. (2{,}646889121\ldots)$$

ikincisi ise

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$|x| > 1{,}584893192\ldots$$

için sağlanır. Şu halde

$$k = 1{,}59 > \text{mak}\left\{1{,}58489319\ldots; \frac{2{,}6488213\ldots}{100000000}\right\} = m$$

alınırsa,

$$|x| > k$$

için her iki bağıntı da sağlanır.

Bu koşullar altında

$$\left|-\frac{1}{392}\,\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^5}\right| \leq \left|\frac{-1}{392}\,\frac{1}{x^4}\right|+\left|\frac{2}{x^5}\right| < \frac{2}{5}$$

ve buradan

$$-\frac{2}{5} < -\frac{1}{392}\,\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^5} < \frac{2}{5}$$

yani

$$\frac{3}{5} < 1-\frac{1}{392}\,\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^5} \tag{8.4}$$

bulunur.

$x_1$ sayısı $|x_1| > k$ ve $x_1 > 0$, yani $x_1 > k$ olacak şekilde alınırsa, (8.4) geçerli olacak ve üstelik bu eşitsizliği pozitif bir sayı olan $x_1^5$ ile çarparak

$$0 < \frac{3}{5}\,x_1^5 < x_1^5\left(1-\frac{1}{392}\,\frac{1}{x_1^4}+\frac{2}{x_1^5}\right) = f(x_1)$$

veya

$$f(x_1) > 0$$

elde edilecektir.

$x_2$ sayısı $|x_2| > k$ ve $x_2 < 0$, yani $x_2 < -k$ olacak şekilde alınırsa, (8.4) yine geçerli olacak ve üstelik bu eşitsizlik bir negatif sayı olan $x_2^5$ ile çarpıldığından

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$0 > \frac{3}{5} x_2^5 > x_2^3 \left(1 - \frac{1}{392} \frac{1}{x_2^4} + \frac{2}{x_2^3}\right) = f(x_2)$$

veya

$$f(x_2) < 0$$

elde edilecektir. Polinomlar sürekli olduğundan, yukarda açıklanan şekilde seçilen $x_1$ ve $x_2$ ile tanımlanan $[x_1, x_2]$ kapalı aralığında verilen denklemin bir kökü vardır.

Daha önce $f(0) = 2 > 0$ olduğu saptandığından verilen denklemin $[-1, 59; 0]$ yarı açık aralığında en az bir kökü bulunduğu sonucu elde edilmiş olur: böylece bu yol, sadece Ara Değer teoremini kullanarak elde edilen aralıktan daha küçük bir aralık bulma olanağı sağlar.

9. *Alıştırmalar*

1) $f(x) = x^7 - 100\,x^4 + 3x^2 - 2$

fonksiyonunun $]-k, k[$ açık aralığında bir reel kökü bulunacak şekilde $k$ sayısını belirtiniz.

Yanıt : $k = 4$ alınabilir.

2) $f(x) = x^5 - 18\,x^3 + 333$

polinomunun bir $r$ reel kökü için $|r| < k$ olacak şekilde bir $k$ sayısı bulunuz.

Yanıt : $k = 10$ alınabilir.

3) $x^5 - 18\,x + 2 = 0$

denkleminin $[-1, 1]$ kapalı aralığında bir kökü var mı?

4) $x^3 - 3x + 1 = 0$

denkleminin $[1,2]$ kapalı aralığında reel bir kökü var mı?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

10. *Başka bazı uygulamalar.*

Bölümün başında hatırlatılan teoremlerden daha birçok sonuçlar elde edilebilir. Mümkün olan çeşitli uygulamalara iki örnek aşağıdaki problemlerle verilmiştir:

a) $f$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde verilmiş olsun ve bu fonksiyonun değerler cümlesinin aynı $[a, b]$ aralığı ile çakıştığı farzedilsin. En azından bir $x_0 \in [a, b]$ için

$$f(x_0) = x_0$$

bağıntısının sağlandığını gösteriniz.

*Çözüm :* $g(x) = f(x) - x$

yardımcı fonksiyonu göz önüne alınsın. f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde, $I(x) = x$ fonksiyonu ise IR üzerinde tanımlanmış ve sürekli olan iki fonksiyon olduğuna göre, $g$ fonksiyonu da $[a, b]$ üzerinde tanımlı ve süreklidir.

$f$ fonksiyonunun değerler cümlesi $[a, b]$ kapalı aralığı olduğuna göre,

$$f(x_1) = a$$

olacak şekilde en az bir $x_1 \in [a, b]$,

$$f(x_2) = b$$

olacak şekilde en az bir $x_2 \in [a, b]$ vardır. $x_1$ sayısının a'dan, $x_2$ sayısının b'den farklı oldukları farzedilebilir. Gerçekten, $x_1 = a$ olmuş olsa

$$f(a) = a$$

olup, $a$ sayısı, problemde aranan $x_0$ sayısı olarak seçilebilirdi; aynı şekilde $x_2 = b$ olsa

$$f(b) = b$$

olup, $b$ sayısı, problemde aranan $x_0$ sayısı olarak seçilebilirdi.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$x_1 \neq a$, $x_2 \neq b$ olması

$$x_1 > a, \quad x_2 < b$$

sonucunu doğurur. Şu halde

$$g(x_1) = f(x_1) - x_1 = a - x_1 < 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - x_2 = b - x_2 > 0$$

dır ve $x_1$, $x_2$ sayıları ile tanımlanan kapalı aralığa Ara Değer teoremini uygulayarak, $x_1$ ve $x_2$ sayıları arasında bulunan en az bir $x_0$ değeri için

$$g(x_0) = 0$$

bulunur. Buradan

$$f(x_0) - x_0 = 0$$

elde edilir, yani seçilen bu $x_0$ sayısı için

$$f(x_0) = x_0$$

dir ve dolayısiyle aranan sayıdır.

b) $f$ fonksiyonu $]a, b[$ açık aralığı üzerinde tanımlanmış ve bu aralıkta sürekli olan bir fonksiyon olsun. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sayıları $]a, b[$ aralığına ait herhangi $n$ tane sayı olmak üzere

$$f(\xi) = \frac{1}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

olacak şekilde, aynı aralıkta en az bir $\xi$ sayısı bulunduğunu gösteriniz.

*Çözüm :*

$$\min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\} \leq \frac{1}{n}\,[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

$$\leq \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

dır. Halbuki, min ve max yazılışlarının tanımından,

$$f(\xi) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(\xi) = \max \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$$

olacak şekilde

$$\xi_1 \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{ve} \quad \xi_2 \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

vardır. Şu halde

$$f(\xi_1) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] \leqslant f(\xi_2)$$

dır. $\xi_1$ ve $\xi_2$ ile belirlenen $[\xi_1, \xi_2]$ kapalı aralığına $f$ fonksiyonu için Ara Değer teoremi uygulanabilir: fonksiyon bu kapalı aralıkta $f(\xi_1)$ ve $f(\xi_2)$ arasındaki her değeri en azından bir defa almaktadır. Özellikle, $f(\xi_1)$ ve $f(\xi_2)$ arasında bulunan

$$\frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

değerini bu aralıkta alacaktır, yani $\xi_1$ ve $\xi_2$ ile belirlenen $[\xi_1, \xi_2]$ kapalı aralığına ait en az bir $\xi$ sayısı için

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

dır. $[\xi_1, \xi_2]$ kapalı aralığı, $]a, b[$ açık aralığının içinde olduğuna göre,

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]$$

bağıntısı, $]a, b[$ aralığında bulunan en az bir $\xi$ sayısı için gerçeklenir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM SEKİZ

## SUPREMUM KAVRAMI

### 1 — ÜST SINIR, ALT SINIR KAVRAMLARI

C ile herhangi bir sayı cümlesi gösterilsin.

C cümlesine ait her $c$ sayısı için

$$c \leqslant \ddot{u}$$

bağıntısını sağlayan bir $\ddot{u}$ sayısı varsa, bu $\ddot{u}$ sayısına C cümlesinin *üst sınırı* ve C cümlesine de *üstten sınırlı* denir.

C cümlesine ait her $c$ sayısı için

$$c \geqslant a$$

bağıntısını sağlayan bir $a$ sayısı varsa, bu $a$ sayısına C cümlesinin *alt sınırı* ve C cümlesine de *alttan sınırlı* denir.

1.1. *Örnekler :*

1.1.1. $]-\infty, -1000]$ yarı açık aralığı üstten sınırlıdır, çünkü $[-\infty, -1000]$ aralığına ait her $s$ sayısı negatiftir ve dolayısıyle

$$s < 0$$

bağıntısını sağlar. Bu sonuç, 0 sayısının bu yarı açık aralık için bir üst sınır olduğunu gösterir. Aynı aralık alttan sınırlı değildir, çünkü $]-\infty, -1000]$ aralığında olan her $s$ için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$s \geqslant a$$

bağıntısını sağlayabilecek bir sayı yoktur(1).

1.1.2 $[10, +\infty[$ yarı açık aralığı alttan sınırlıdır, çünkü aralığa ait bütün sayılar pozitif, yani $[10, +\infty[$ aralığında olan her $s$ için

$$s > 0$$

bağıntısı gerçeklenir. Şu halde 0 bu aralığın bir alt sınırıdır. Aynı aralık üstten sınırlı değildir çünkü

$$s \leqslant \ddot{u}$$

bağıntısını sağlayabilecek bir sayı yoktur(1).

1.1.3. $]-\infty, 3[$ aralığı üstten sınırlı bir aralıktır, çünkü bu aralığa ait bütün sayılar 3 sayısından küçüktür, yani 3 sayısı bu aralık için bir üst sınırdır. 3 sayısı bir üst sınır olduğu gibi

$$3{,}1 \ ; \ 3{,}11 \ ; \ 3{,}111 \ ; \ \ldots$$

$$4 \ ; \ \sqrt{10} \ ; \ \ldots$$

sayılarının hepsi aynı aralığın birer üst sınırını gösterir. Örnek 1.1.1. için açıklanan nedenden dolayı, bu aralık alttan sınırlı değildir.

1.1.4. $]-1, 2[$ aralığı hem üstten hem de alttan sınırlıdır: gerçekten, bu aralığa ait bütün sayılar, aralık tanımından dolayı 2 sayısından küçük, $-1$ sayısından büyüktür.

1.1.5.

$$C = \left\{1, \frac{1}{333}, 2', -89, 37, -\sqrt{122}\right\}$$

cümlesi hem alttan hem de üstten sınırlıdır. C cümlesi reel sayılardan oluştuğuna göre, bunlar aralarında ikişer ikişer karşılaştırılarak cümle sıralanabilir. Şu halde C cümlesi

(1) Örnek 1.1.1.de $-\infty$ bir alt sınır, örnek 1.1.2 de $+\infty$ bir üst sınır olarak kullanılabileceği zannedilebilir, fakat böyle bir yorum yanlıştır çünkü $-\infty$ ve $+\infty$ **sayı değillerdir.** (GSAG, s. 105'e bakınız!)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$C = \{-89, -\sqrt{122}, \frac{1}{333}, 1{,}37, 2'\}$$

şekline girer ve $-89$ (ve dolayısiyle $-89$'dan küçük bütün reel sayılar!) C cümlesinin alt sınırları, $2'$ (ve dolayısiyle $2'$'den büyük bütün reel sayılar!) C cümlesinin üst sınırlarıdır.

Sonlu sayıda sayılardan oluşan her cümlenin alttan ve üstten sınırlı olduğu genel olarak da kanıtlanabilir.

*1.2. Alıştırmalar*

1) $]-3, 1]$ aralığının, aralığa ait olan bir üst sınırı var mıdır?

Yanıt : Vardır : 1 sayısı.

2) $]-1, 0[$ aralığının bir üst sınırını bulunuz.

Yanıt : $\ddot{u} \geqslant 0$ koşulunu sağlayan her $\ddot{u}$ reel sayısı.

3) $[3, +\infty[$ aralığının bir alt sınırını bulunuz.

Yanıt : $a \leqslant 3$ koşulunu sağlayan her $a$ reel sayısı.

4) 5 sayısı, $]-1, 5[$ aralığının bir alt sınırı mıdır?

Yanıt : Aralığa ait her $x$ sayısı $x < 5$ koşulunu sağladığından, aynı zamanda $5 < x$ koşulunu sağlayamaz ve dolayısiyle 5 söz konusu aralığın alt sınırı olamaz.

5) 7 sayısı ile bölünebilen bütün doğal sayılardan oluşan cümle üstten sınırlı mıdır? Aynı cümle alttan sınırlı mıdır?

Yanıt : Her M reel sayısı için $7n > M$ olacak şekilde bir $n$ doğal sayısı bulunabileceğinden, cümle üstten sınırlı değildir. Aynı cümle $a \leqslant 7$ koşulunu sağlayan her $a$ sayısını alt sınır olarak kabul eder.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



6) $\mathbb{Z}$ cebirsel tam sayılarının karelerinden oluşan cümle üstten sınırlı mıdır? Aynı cümle alttan sınırlı mıdır?

Yanıt: Her $M$ reel sayısı için $n^2 > M$ olacak şekilde bir $n$ doğal sayısı bulunabileceğinden, cümle üstten sınırlı değildir. Aynı cümle $a \leqslant 0$ koşulunu sağlayan her $a$ reel sayısını alt sınır olarak kabul eder.

7) $C = \{\frac{5}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{9}, \frac{7}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{9}, \frac{6}{5}, \frac{7}{7}, \frac{5}{9}\}$ cümlesi alttan sınırlı mı? Aynı cümle üstten sınırlı mı?

Yanıt: $a \leqslant \frac{5}{9}$ koşulunu sağlayan her $a$ sayısı alt sınır,

$\ddot{u} \leqslant \frac{7}{5}$ koşulunu sağlayan her $\ddot{u}$ sayısı üst sınırdır.

## 2 — MİNİMAL ELEMAN, MAKSİMAL ELEMAN KAVRAMLARI

$C$ de herhangi bir sayı cümlesi gösterilsin.

$C$ cümlesine ait her $c$ sayısı için

$$c \geqslant m$$

bağıntısını sağlayan, $C$ cümlesine ait bir $m$ sayısı varsa, $m$ sayısına $C$ cümlesinin *minimal elemanı* denir (1).

1. de verilen tanımdan dolayı, $C$ cümlesinin bir minimal elemanı varsa, $C$ cümlesi alttan sınırlıdır. Buna karşılık, alttan sınırlı olan bir cümlenin minimal elemanı bulunmayabilir.

(1) GSAG, s. 29 ve 30'a bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Aynı şekilde, C cümlesine ait her $c$ sayısı için

$$c \leqslant M$$

bağıntısını sağlayan, C cümlesine ait bir M sayısı varsa, M sayısına C cümlesinin *maksimal elemanı* denir.

Yine 1. de verilen tanımdan dolayı, C cümlesinin bir maksimal elemanı varsa, C cümlesi üstten sınırlıdır. Buna karşılık, üstten sınırlı olan bir cümlenin maksimal elemanı bulunmayabilir.

Bir cümlenin minimal elemanı varsa, bu minimal elemanın tek olduğu, aynı şekilde maksimal elemanı varsa, bu maksimal elemanın da tek olduğu gösterilebilir.

2.1. *Örnekler :*

2.1.1. Örnek 1.1.4. te ele alınan $]-1, 2[$ açık aralığı, aralık tanımı gereğince

$$]-1, 2[ = \{r \in \mathbb{R} \mid -1 < r < 2\}$$

cümlesidir. Şu halde bu cümlede bulunan her $r$ reel sayısı $-1$ den büyüktür, yani $-1$ sayısı bir alt sınırdır. Aynı şekilde, cümleye ait her $r$ reel sayısı 2 sayısından küçüktür, dolayısıyla 2 sayısı bir üst sınırdır. $]-1, 2[$ aralığı, $-1$ sayısından büyük bir alt sınır kabul etmez, çünkü $\varepsilon$ herhangi bir pozitif reel sayıyı göstermek üzere, $-1 < -1 + \varepsilon$ olduğundan, $\varepsilon$ sayısı yeteri kadar küçük seçilmesi halinde $-1 + \varepsilon$ sayısı $]-1, 2[$ aralığına ait olur.

Aynı şekilde, 2 sayısından küçük olan bir sayı $]-1, 2[$ açık aralığının bir üst sınırı olamaz. Şu halde $]-1, 2[$ açık aralığı, gerek üstten, gerekse alttan sınırlı olan bir reel sayı cümlesidir. Bu cümlenin minimal elemanı olamaz: gerçekten, minimal eleman cümleye ait olacağından $-1$ sayısından büyük ve üstelik cümlenin bir alt sınırı olması gerekir, halbuki cümlenin $-1$ sayısından büyük alt sınırları bulunamayacağı az evvel gösterilmişti. Benzer şekilde, cümlenin bir maksimal elemanında bulunamayacağı görülür: gerçekten, cümlenin maksimal elemanı cümleye ait olacağından 2 sayısından küçük olmalıdır. Halbuki bu koşulu yerine getiren bir sayının cümlenin bir üst sınırı olamayacağı bilinmektedir. Bu örnek, alttan veya üstten sınırlı olmanın maksimal ve-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



ya minimal elemanın varlığını gerektirecek kadar kuvvetli bir koşul olmadığını gösterir.

2.1.2. $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin minimal elemanı vardır: bu minimal eleman 1 sayısıdır, çünkü 1 sayısı bir doğal sayıdır ve *bütün* doğal sayılar birden büyük veya bire eşittir.

2.1.3. Negatif olmayan reel sayılar cümlesinin minimal elemanı vardır ve bu sayı 0 sayısıdır, çünkü 0 sayısı negatif olmayan bir sayıdır ve negatif olmayan bütün reel sayılar 0 sayısından büyük veya ona eşittir.

2.1.4. Pozitif olmayan bütün cebirsel tam sayılar cümlesinin maksimal elemanı vardır, ve bu sayı 0 sayısıdır, çünkü 0 sayısı pozitif olmayan bir cebirsel tam sayıdır ve pozitif olmayan bütün cebirsel tam sayılar ya sıfır sayısından küçük veya ona eşittir.

2.1.5 $[a, b]$ kapalı aralığının gerek minimal, gerekse maksimal elemanı vardır. Gerçekten

$$[a, b] = \{r \in \mathbb{R} \mid a \leqslant r \leqslant b\}$$

olduğuna göre, $a$ sayısı hem cümlenin bir alt sınırı, hem de cümlenin elemanı yani $a$ sayısı cümlenin minimal elemanıdır; aynı şekilde $b$ sayısı hem cümlenin bir üst sınırı, hem de cümlenin elemanı, yani $b$ sayısı cümlenin maksimal elemanıdır.

2.2 *Alıştırmalar*

1) $[0,1[$ yarı açık aralığında bulunan rasyonel sayılardan oluşan cümlenin minimal elemanı var mıdır? Maksimal elemanı var mıdır?

Yanıt: Minimal eleman 0, maksimal eleman yoktur.

2) $[0,1[$ yarı açık aralığında bulunan irrasyonel sayılardan oluşan cümlenin minimal elemanı var mıdır?
Maksimal elemanı var mıdır?

Yanıt: Minimal ve maksimal eleman yoktur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



3) $[1, \sqrt{2}]$ kapalı aralığında bulunan rasyonel sayılardan oluşan cümlenin minimal elemanı var mıdır?
Maksimal elemanı var mıdır?

Yanıt : Minimal elemanı 1, maksimal elemanı yoktur.

4) $[1, \sqrt{2}]$ kapalı aralığında bulunan irrasyonel sayılardan oluşan cümlenin minimal elemanı var mıdır?
Maksimal elemanı var mıdır?

Yanıt : Minimal elemanı yoktur, maksimal elemanı $\sqrt{2}$ dir.

5) $$C = \{ \frac{n}{n+1} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

şeklinde tanımlanan, sonsuz sayıda rasyonel sayıdan oluşan C cümlesinin minimal elemanı var mıdır?
Maksimal elemanı var mıdır?

Yanıt : Maksimal elemanı yoktur fakat minimal elemanı vardır ve 1/2 dir.

6) $$C = \{ \frac{(-1)^n n}{n+1} \notin \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

şeklinde tanımlanan, sonsuz sayıda rasyonel sayıdan oluşan cümlenin minimal elemanı var mıdır? Maksimal elemanı var mıdır? Bu cümle üstten sınırlı mıdır?

Yanıt : Cümlenin maksimal veya minimal elemanı yoktur fakat $a \leq -1$ koşulunu sağlayan her $a$ sayısı cümlenin bir alt sınırı, $u \geq 1$ koşulunu sağlayan $u$ sayısı cümlenin bir üst sınırıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



## 3 — SUPREMUM, İNFİMUM

C ile herhangi bir sayı cümlesi gösterilsin.

C cümlesinin üst sınırlarından oluşan cümle Ü ile gösterilsin. C cümlesi üstten sınırlı değilse, Ü = Ø tur. C cümlesi üstten sınırlı ise, ve Ü cümlesinin minimal elemanı varsa, bu sayıyı C cümlesinin en küçük üst sınırı veya *supremumu* denir ve C cümlesinin supremumu

$$\sup C$$

şeklinde gösterilir.

C cümlesinin alt sınırlarından oluşan cümle A ile gösterilsin. C cümlesi alttan sınırlı değilse, A = Ø tur. C cümlesi alttan sınırlı ise ve A cümlesinin bir maksimal elemanı varsa, bu sayıya C cümlesinin en büyük alt sınırı veya *infimumu* denir ve C cümlesinin infimumu

$$\inf C$$

şeklinde gösterilir.

C cümlesinin infimumu veya supremumu varsa, bu sayı tektir (1). Üstelik, boş olmayan üstten sınırlı her reel sayı cümlesinin supremumu, boş olmayan alttan sınırlı her reel sayı cümlesinin infimumu vardır(2). Bu son özellik reel sayılar cümlesini rasyonel sayılar cümlesi, cebirsel tam sayılar cümlesi ve doğal sayılar cümlesinden ayırır.

3.1. *Örnekler :*

3.1.1. $C = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, p-1, p\}$ cümlesi için

$$\sup C = p, \quad \inf C = 1$$

dir. Bu sonuç C cümlesinin sonlu sayıda elemandan oluşmasından hareket edilerek elde edilir, çünkü eleman sayısının sonlu olmasından dolayı C cümlesi hem alttan hem de üstten sınırlıdır. C cümlesi boş değildir ve reel sayılardan oluşur. Şu halde (S) aksiyomundan dolayı C cümlesinin supremumu ve infimumu vardır.

---

(1) GSAG, s. 136'ya bakınız.

(2) GSAG, s. 137 ve s. 147-148'e bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$p$ sayısının cümlenin maksimal elemanı yani en küçük üst sınırı, 1 sayısının cümlenin minimal elemanı, yani en büyük alt sınırı olmasından dolayı bu sonuca ulaşılır.

3.1.2 $C = \{1 - \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlanan cümlenin supremum ve infimumu vardır. Gerçekten, $n$ sayısı ne olursa olsun

$$1 - \frac{1}{n} < 1$$

bağıntısının sağlanması, C cümlesinin üstten sınırlı olduğunu, C cümlesinin bütün elemanlarının negatif olmayan sayılardan oluşması ise, C cümlesinin alttan sınırlı olduğunu gösterir. Üstelik $n = 1$ almak suretiyle, C cümlesinde hiç olmazsa 0 sayısının bulunduğu görülür. Şu halde C cümlesi boş değildir (S) aksiyomundan dolayı gerek supremumu gerekse infimumu olan bir cümledir. C cümlesinin 0 sayısını minimal eleman olarak kabul etmesi ve bu sayının en büyük alt sınır olmasından

$$\inf C = 0$$

dır. Öte yandan

$$\sup C = 1$$

dir. Gerçekten, 1 sayısının cümlenin bir üst sınırı olduğu yukarda kaydedilmiştir; 1 sayısından küçük bir üst sınır olamaz, çünkü $\varepsilon$ pozitif sayısı ne kadar küçük seçilirse seçilsin

$$1 - \frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n$ sayısı daima bulunabilir; bunun için

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

almak yeter. Şu halde 1 sayısı C cümlesinin en küçük üst sınırıdır.

3.1.3 D ile, merkezi (2,0) noktasında olan ve yarıçapı 1 sayısına eşit olan çemberin içinde kalan noktaların cümlesi (yani *kenarsız daire*) gösterilsin. Tanımından hareket ederek

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$D = \{ (x, y) \mid x, y \in IR, (x - 2)^2 + y^2 < 1 \}$$

yazılabilir. $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ düzleme ait herhangi iki nokta ise, $u(P, Q)$ ile gösterlecek olan iki nokta arasındaki *uzaklığın*,

$$u(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

şeklinde tanımlandığı bilinmektedir. Buna göre

$$C = \{ u(P, Q) \in IR \mid P, Q \in D \}$$

cümlesi, göz önüne alınsın. $P, Q$ noktaları ne olursa olsun $u(P, Q) \geq 0$ olduğundan, C cümlesi alttan sınırlı olan bir cümledir. Üstelik, D dairesinin çapı 2 ye eşit olduğundan, P ve Q noktaları nasıl seçilirse seçilsin

$$u(P, Q) < 2$$

dir. P keyfi ve $Q = P$ almak suretiyle 0 alt sınırının C cümlesine ait olduğu, yani 0 sayısının C cümlesinin minimal elemanı, dolayısiyle en büyük alt sınırı olduğu görülür. Şu halde

$$\inf C = 0$$

dır. Öte yandan herhangi bir çap üzerinde, çembere istenildiği kadar yaklaşmak mümkündür. İfadelerin basit olmaları için çemberin merkezinden geçen $x$ ekseni üzerindeki çap ele alınacak olursa, $\varepsilon_1$ ve $\varepsilon_2$ sayıları istenildiği kadar küçük seçilebilir ve $P(1 + \varepsilon_1, 0)$, $Q(3 - \varepsilon_2, 0)$ noktaları D cümlesine ait olurlar.

$$u(P, Q) = 2 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

dir ve $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ istenildiği kadar küçük alınabilmesinin sonucu olarak, C cümlesinin üst sınırının 2 sayısından küçük olamayacağı göstermektedir. Buna göre C cümlesinin en küçük üst sınırı 2 dir yani

$$\sup C = 2$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


*3.2. Alıştırmalar*

1) $$C = \{\frac{2}{5} + \frac{5}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

cümlesinin IR cümlesine ait supremumu var mıdır? İnfimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = \frac{2}{5}$ ; $\sup C = \frac{27}{5}$

2) $$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 4 < 6\}$$

cümlesinin Q cümlesinde bulunan supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$;

$\sup C = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3) $$C = \{x \in Q \mid 2x^3 - 1 < 15\}$$

cümlesinin Q cümlesinde bulunan supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : inf C yoktur;

$\sup C = 2 \in \mathbb{Q}$ dir.

4) $$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 9\}$$

cümlesinin Q cümlesinde bulunan supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : inf C yoktur; $\sup C = \sqrt[3]{9} \notin \mathbb{Q}$

5) $$C = \{\frac{1}{p} \in \mathbb{R} \mid p \text{ asal sayı}\}$$

cümlesinin Q cümlesinde bulunan supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = 0 \in \mathbb{Q}$; $\sup C = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ dür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6) C cümlesi, ondalık açılımları 0,87 ile başlayan bütün reel sayılardan oluşan cümle olsun. Bu cümlenin supremumunu ve infimumunu bulunuz.

Yanıt : $\inf C = 0{,}87 \in C$; $\sup C = 0{,}88 \notin C$.

7) C cümlesi, $]1,3]$ yarı açık aralığındaki bütün irrasyonel sayılardan oluşan cümle olsun. Bu cümlenin irrasyonel olan supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = 1$ olup irrasyonel değildir.
$\sup C = 3$ olup irrasyonel değildir.

8) C cümlesi, $[0, 2[$ yarı açık aralığında bulunan bütün rasyonel sayıların cümlesi olsun. Bu cümlenin rasyonel olan supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = 0 \in Q$, $\sup C = 2 \in Q$.

9) C cümlesi, $x^3 + x < 2$ koşulunu sağlayan bütün irrasyonel sayıların cümlesi olsun. Bu cümlenin irrasyonel olan supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = -2$, irrasyonel değildir.
$\sup C = 1$, irrasyonel değildir.

10) C cümlesi, $x^{1/3} < 2$ koşulunu sağlayan bütün rasyonel sayılardan oluşan cümle olsun. Bu cümleninin rasyonel olan supremu ve infimumu var mıdır?

11) $D_1 = \{ (x, y) \mid x, y \in IR, \quad (x-2)^2 + y^2 < 1 \}$ ve

$D_2 = \{ (x, y) \mid x, y \in IR, \quad x^2 + (y-2)^2 < 1 \}$ nokta cümleleri veriliyor. Düzlemde herhangi iki $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ noktasının uzaklık fonksiyonu

$$u(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

şeklinde tanımlanması halinde

$$C = \{ u(P, Q) \in IR \mid P \in D_1, \quad Q \in D_2 \}$$

cümlesi göz önüne alınıyor. C cümlesinin supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = 2(\sqrt{2} - 1)$
$\sup C = 2(\sqrt{2} + 1)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



12) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 2\}$ cümlesinin supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = -\sqrt{2}$

$\sup C = \sqrt{2}$

13) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}$ cümlesinin supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : inf C yoktur

sup C yoktur

14) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ve } x^2 > 2\}$ cümlesinin supremumu ve infimumu var mıdır?

Yanıt : $\inf C = \sqrt{2}$

sup C yoktur

*1.2. Alıştırmaların Yanıtları :*

1. Tanıma göre $]-3, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 1\}$ olduğundan her $x \in ]-3, 1]$ için

$$x \leqslant 1$$

yani 1 üst sınırdır ve $1 \in ]-3, 1]$ dir.

2. $]-1, 0[ = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$ olduğundan, her $x \in ]-1, 0[$ için

$$x < \tfrac{1}{2}$$

dır, yani $\frac{1}{2}$ bir üst sınırdır. Aynı şekilde her $a \geqslant 0$ sayısı için

$$x < 0 < a$$

olacağından $a$ cümlenin bir üst sınırıdır. Şu halde $]-1, 0[$ aralığının üst sınırlarının cümlesi negatif olmayan sayıların cümlesidir.

3. $[3, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x\}$ olduğundan 3 bu cümlenin bir alt sınırıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. $]-1,5[ = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$ olduğundan $]-1,5[$ açık aralığına ait her $x$ için

$$x < 5$$

tir. Şu halde

$$5 < x$$

koşulu sağlanamaz ve 5 alt sınır olamaz.

5. $C = \{7p \in \mathbb{N} \mid p \in \mathbb{N}\}$ dir.

Her M reel sayısı için

$$7p > M$$

olacak şekilde p sayıları vardır ; bunun için

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{sayısını} \quad n > \frac{M}{7}$$

almak yeter. Buna göre C cümlesi üstten sınırlı değildir. 1 sayısı en küçük doğal sayı olduğundan, $p \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun.

$$1 \leqslant p$$

yani

$$7 \leqslant 7p$$

dir. Şu halde $7 \in C$ cümlesinin alt sınırıdır.

6. $C = \{z^2 \in \mathbb{N} \mid z \in \mathbb{Z}\}$ cümlesi göz önüne alınıyor. $z$ ne olursa olsun

$$0 \leqslant z^2$$

olduğundan C cümlesi alttan sınırlıdır. M sayısı ne olursa olsun

$$n^2 > M$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ bulunabileceğinden C cümlesi üstten sınırlı değildir.

7. $C = \{\frac{5}{3}, \frac{6}{7}, \frac{7}{9}, \frac{7}{5}, \frac{5}{7}, \frac{6}{9}, \frac{6}{5}, \frac{7}{7}, \frac{5}{9}\}$

cümlesi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$C = \{\frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, 1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}\}$$

şeklinde yazılabilir. İlk beş sayı 1'den küçük olduğundan C cümlesindeki en büyük sayı 7/5 tir yani 7/5 C cümlesi için bir üst sınırdır. İlk beş sayı da karşılaştırılarak 5/9'un C'nin bir alt sınırı olduğu görülür.

2.2. 1. $[0,1[$ için minimal eleman 0, maksimal eleman yok.

2. $[0,1[$ için minimal ve maksimal eleman yok.

3. $[1, \sqrt{2}]$ için minimal eleman 1, $\sqrt{2}$ irrasyonel bir sayı olduğundan maksimal eleman yok.

4. $[1, \sqrt{2}]$ için 1 rasyonel bir sayı olduğundan minimal eleman yok maksimal eleman $\sqrt{2}$ dir.

5. $C = \{\frac{n}{n+1} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ için maksimal eleman yok

çünkü

$$\frac{n}{n+1} < 1$$

ve

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

olduğundan C cümlesine ait elemanlar 1 sayısına istenildiği kadar yaklaştırılabilir fakat 1 sayısı C cümlesine ait değildir. Her $n$ doğal sayısı için

$$1 \leqslant n$$

yani $1 + n \leqslant 2n$

veya $$\frac{1}{2} \leqslant \frac{n}{n+1}$$

dir. Şu halde ½ sayısı C cümlesinin bir alt sınırdır. Üstelik C cümlesine aittir. Yani C cümlesinin minimal elemanıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



6. $C = \{(-1)^n \frac{n}{n+1} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$

cümlesine alt elemanlar için

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$$

yani bu cümleye ait elemanlar $]-1, +1[$ açık aralığına alttırler. Fakat C'nin maksimal veya minimal elemanı yoktur, çünkü $-1$ ve $+1$ sayılarına erişilmeden bunlara istenildiği kadar yaklaşılabilir. C cümlesi 1 ile üstten $-1$ ile de alttan sınırlıdır.

3.2. 1. $C = \{\frac{2}{5} + \frac{5}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{n} > 0$$

olduğundan C cümlesi alttan sınırlıdır.

$$\frac{2}{5} + 5 = \frac{27}{5} \in C$$

olduğundan C boş değildir. Şu halde C cümlesinin infimumu vardır.

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{n} > \frac{2}{5}$$

olduğundan $\frac{2}{5}$ C cümlesinin bir alt sınırıdır. Ayrıca en büyük alt sınırdır çünkü $\varepsilon > 0$ sayısı ne olursa olsun

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{5} + \frac{5}{n} < \frac{2}{5} + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(Bunun için

$$n > \frac{5}{\varepsilon}$$

almak yeter zira bu koşullar altında

$$\frac{5}{n} < \varepsilon$$

olur !) Şu halde

$$\inf C = \frac{2}{5}$$

tir.

Her $n$ doğal sayısı için

$$1 \leqslant n$$

olduğundan

$$5 \leqslant 5n$$

$$5/n \leqslant 5$$

tir. Şu halde

$$\frac{2}{5} + \frac{5}{n} \leqslant \frac{2}{5} + 5 = \frac{27}{5}$$

Yani $\frac{27}{5}$ sayısı C cümlesinin maksimal elemanıdır.

Şu halde

$$\sup C = \frac{27}{5}$$

tir.

2. $C = \{x \in Q \mid x^2 + 4 < 6\}$ dan

$$x^2 < 2$$

elde edilir yani

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olmalıdır. $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ ye istenildiği kadar yaklaşan rasyonel sayılar vardır. Şu halde

$$\inf C = -\sqrt{2} \notin Q \; ; \quad \sup C = \sqrt{2} \notin Q$$

dır.

3. $C = \{x \in Q \mid 2x^3 - 1 < 15\}$ cümlesinde bulunan rasyonel sayılar

$$2x^3 - 1 < 15$$

veya

$$x^3 < 8$$

koşulunu sağlar. Şu halde

$$x^3 - 8 = (x-2)\ (x^2 + 2x + 4) < 0$$

dır. $x^2 + 2x + 4$ daima pozitif olduğundan söz konusu koşul

$$x < 2$$

şeklindedir ve dolayısıyla

$$\inf C \text{ yoktur}; \quad \sup C = 2 \in Q$$

dır.

4. $C = \{x \in Q \mid x^3 < 9\}$ cümlesinde bulunan rasyonel sayılar

$$x^3 < 9$$

koşulunu sağlar. Bu koşul

$$(x - \sqrt[3]{9})\ (x^2 + \sqrt[3]{9}\,x + (\sqrt[3]{9})^2) < 0$$

yani

$$x < \sqrt[3]{9}$$

şeklini alır. Şu halde

$$\inf C \text{ yoktur}; \quad \sup C = \sqrt[3]{9} = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \notin Q$$

dır.

5. $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}, \frac{1}{19}, \frac{1}{23}, \frac{1}{29}, \frac{1}{31}, \frac{1}{37}, \cdots\right\}$

için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\sup C = \frac{1}{2} \in Q; \quad \inf C = 0 \in Q$$

dır.

6. $\inf C = 0{,}87 \in C \; ; \quad \sup C = 0{,}88 \notin C$

dir.

7. $C = ]1, 3] = \{x \in IR \setminus Q \mid 1 < x \leq 3\}$ olduğuna göre

$$\inf C \in 1 \; ; \quad \sup C = 3$$

tür. Hiçbiri irrasyonel değildir.

8. $C = [0,2[ = \{x \in Q \mid 0 \leq x < 2\}$ olduğuna göre

$$\inf C = 0 \in Q \; ; \quad \sup C = 2 \in Q$$

dır.

9. $C = \{x \in IR \setminus Q \mid x^3 + x < 2\}$ olduğuna göre

$$x^3 + x - 2 < 0$$

$$(x-1)\,(x+2) < 0$$

$$-2 < x < 1$$

ve

$$\sup C = 1 \; ; \quad \inf C = -2$$

dir.

Hiçbiri irrasyonel değildir.

10. $C = \{x \in Q \mid \sqrt[3]{x} < 2\}$ cümlesine ait olan rasyonel sayılar

$$x < 8$$

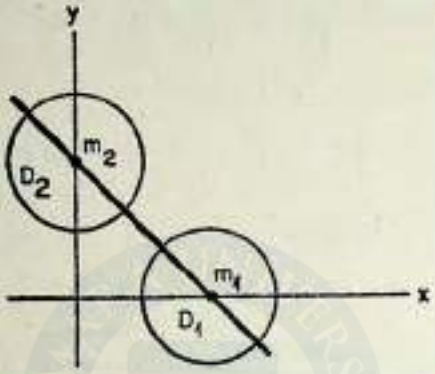
koşulunu sağlar. Şu halde

$$\inf C \text{ yoktur; } \sup C = 8 \in Q$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11.




Şekil 8

$u(M_1, M_2) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\sqrt{8} - 2 < u(P, Q) < \sqrt{8} + 2$ ve

$\inf C = 2(\sqrt{2}-1)$ ; $\sup C = 2(\sqrt{2}+1)$

dır.

12. $C = \{x \in IR \mid 0 < x^2 < 2\}$ cümlesi

$$0 < x < \sqrt{2} \quad ; \quad -\sqrt{2} < x < 0$$

koşulunu sağlayan $x$ lerden oluşur. Şu halde

$$\inf C = -\sqrt{2} \quad ; \quad \sup C = \sqrt{2}$$

dir.

13. $C = \{x \in IR \mid x^2 > 2\}$ cümlesi

$$x > \sqrt{2} \qquad x < -\sqrt{2}$$

koşulunu sağlayan $x$ lerden oluşur. Şu halde

inf C yoktur ; sup C yoktur.

14. $C = \{x \in IR \mid x > 0$ ve $x^2 > 2\}$ cümlesi

$$x > \sqrt{2} \qquad x > 0$$

koşullarını sağlayan $x$ lerden oluşur ($x < -\sqrt{2}$ koşulu $x > 0$ ile bağdaşmaz!) Şu halde

$$\inf C = \sqrt{2} \quad ; \quad \sup C \text{ yoktur.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM DOKUZ

# TÜREV KAVRAMI

## 1 — TÜREV TANIMI

Türev kavramının en basit açıklanış şekillerinden biri ve belkide en eskisi çizime bağlı olanıdır[1]. Bir fonksiyonun türevi ile eğrinin eğimi arasındaki ilişki bu bölümde ele alınacak ve bazı teoremlerin nasıl kullanıldıkları açıklanacaktır.

*1.1 Tanım : D, f fonksiyonunun tanım cümlesi, c'de D'nin D'ye ait bir yığılma noktası olsun. Keyfi seçilen bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşın*

$$0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$$

*koşulunu sağlayan* $\forall x \in D$ *için*

9.1. $$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

*olacak şekilde bir* $\delta(\varepsilon) > 0$ *sayısı bulunabilirse L'ye f'nin c noktasındaki türevi denir.*

*1.2. Sonuçlar*

*f* fonksiyonunun *c* noktasında sürekli olması, *f*'nin *c* noktasında türevinin var olması için gerek koşul, *f* fonksiyonunun *c* noktasında türevinin var olması ise *f*'nin aynı noktada sürekli olması için yeter koşuldur.

Bir fonksiyonun belli bir *c* noktasındaki türevi

(1) G.S. - A.G., s. 149

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=c}$$

herhangi bir noktadaki türevi ise

$$\frac{df}{dx} \quad \text{veya} \quad f'(x)$$

notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.1'de $x=c+h$ olarak alınırsa $f$ fonksiyonunun $c$ noktasındaki türevi

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

şeklinde ifade edilebilir.

1.3. *Örnekler :*

1.3.1. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki türev sayısı nedir?

$x = 0$ noktası verilen $g$ fonksiyonunun tanım cümlesinde bulunduğuna göre tanım uygulanabilir ve

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h+1}{x+h-1} - \dfrac{x+1}{x-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h+1)(x-1) - (x+1)(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+xh+x-x-h-1) - (x^2+xh-x+x+h-1)}{h(x^2+xh-x-x-h+1)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + xh - h - 1 - x^2 - xh - h + 1}{h(x^2 + xh - 2x + 1 - h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(x^2 + xh - 2x - h + 1)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{x^2 + xh - 2x - h + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

elde edilir. Şu halde

$$g'(x) + \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$g'(0) + \frac{-2}{(0-1)^2} = -2$$

dir.

1.3.2. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun, tanım cümlesine ait herhangi bir $x$ değeri için türev sayısı nedir?

Verilen fonksiyon ancak $1 - x^2 \geq 0$ olduğu değerler için tanımlanabildiğine göre, tanım cümlesi $-1 \leq x \leq 1$ koşulunu sağlayan $x$ sayılarının oluşturduğu cümle, yani $[-1, 1]$ kapalı aralığıdır. Bu aralığa ait herhangi bir $x$ noktasında türev sayısının aranabilmesi için $x$ sayısının $]-1, 1[$ açık aralığında alınması gerekir; aksi halde ancak tek taraflı bir limit alınabileceğinden türev tanımı uygulanamaz. $x$ sayısının bu koşulu sağladığı kabul edilsin. Bu takdirde

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1-(x+h)^2} - \sqrt{1-x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1-(x+h)^2} - \sqrt{1-x^2})\ (\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2})}{h\ (\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2})}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1-(x+h)^2})^2 - (\sqrt{1-x^2})^2}{h\,(\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-(x+h)^2 - (1-x^2)}{h\,(\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(2xh+h^2)}{h\,(\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{\sqrt{1-(x+h)^2} + \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

elde edilir yani

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

dir.

1.3.3. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

fonksiyonunun herhangi bir $x$ noktasındaki türev sayısı.

Fonksiyonun sadece pozitif $x$ sayıları için tanımlanmış olduğu göz önüne alınarak, türev sayısı tanımı uygulanabilir. Şu halde $x \in ]0, +\infty[$ olmak koşulu ile hareket edilecektir. Önce verilen fonksiyon tek bir kesir olarak

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

şeklinde ele alınsın.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x+h+1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}{h}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}\,(x+h+1) - \sqrt{x+h}\,(x+1)}{h\sqrt{x+h}\,\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x}\,(x+h+1) - \sqrt{x+h}\,(x+1))\,(\sqrt{x}\,(x+h+1)}{h\sqrt{x+h}\,\sqrt{x}\,(\sqrt{x}\,(x+h+1) + \sqrt{x+h}\,(x+1))}$$

$$+ \frac{\sqrt{x+h}\,(x+1))}{h\sqrt{x+h}\,\sqrt{x}\,(\sqrt{x}\,(x+h+1) + \sqrt{x+h}\,(x+1))}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x(x+h+1)^2 - (x+h)\,(x+1)^2}{h\sqrt{x+h}\,\sqrt{x}\,(\sqrt{x}\,(x+h+1) + \sqrt{x+h}\,(x+1))}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x(x^2+2xh+h^2+2h+1+2x) - (x+h)\,(x^2+2x+1)}{h\sqrt{x+h}\,\sqrt{x}\,(\sqrt{x}\,(x+h+1) + \sqrt{x+h}\,(x+1))}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2h + xh^2 - h}{h\sqrt{x+h}\,\sqrt{x}\,(\sqrt{x}\,(x+h+1) + \sqrt{x+h}\,(x+1))}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + xh - 1}{h\sqrt{x+h}\,\sqrt{x}\,(\sqrt{x}\,(x+h+1) + \sqrt{x+h}\,(x+1))}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}\,(\sqrt{x}\,(x+1) + \sqrt{x}\,(x+1))}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{2x\sqrt{x}\,(x+1)} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

olduğundan,

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x\sqrt{x}}$$

dir.

1.4. *Alıştırmalar*

Türev tanımını uygulayarak aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1. $f(x) = \sqrt{x}$ Yanıt : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$ Yanıt : $f'(x) = -\dfrac{2}{(2x-3)^2}$

3 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ Yanıt : $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

4. $f(x) = x^3$ Yanıt : $f'(x) = 3x^2$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ Yanıt : $f'(x) = -\left[\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}\right]$

6. $f(x) = x^2$ fonksiyonu veriliyor: $x$ değişkeninin hangi $x_0$ değerleri için $f'(x_0) = \sqrt{3}$ tür?

Yanıt : $x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. $f(x) = x^3$ fonksiyonu veriliyor: x değişkeninin hangi $x_0$ değerleri için $f'(x) = \dfrac{1}{3}$ tür?

Yanıt : $x_0 = \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}$.

## 2 — PARÇALI SÜREKLİ VE PARÇALI DÜZGÜN FONKSİYONLAR

$f$, $(a\ b)$ açık aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0$, $a < x_0 < b$ olacak şekilde bir nokta olsun. $x \to x_0^+$ notasyonu $x$'in $x_0$'a $x_0$'dan daha büyük değerlerin bulunduğu taraftan yaklaştığını veya $x$'in $x_0$'a sağdan yaklaştığını; benzer şekilde $x \to x_0^-$ ise $x$'in $x_0$'a $x_0$'dan daha küçük değerlerin bulunduğu taraftan yaklaştığını veya $x$'in $x_0$'a soldan yaklaştığını gösterir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



*2.1. Tanım :* Eğer

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

var ise, bu limite $f$ fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki *sağ limiti* denir ve $f(x_0^+)$ ile gösterilir. Benzer şekilde eğer

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

var ise, bu limite $f$ fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki *sol limiti* denir ve $f(x_0^-)$ ile gösterilir. Dolayısıyla

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$$

dır.

*2.2. Önerme : f fonksiyonunun $x_0$ noktasında limitinin var olması için g.y.k. f'nin sağ ve sol limitlerinin var olması ve değerlerinin birbirine eşit olmasıdır. Bu taktirde*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0^-)$$

*dır.*

*2.3. Tanım : Bir f fonksiyonunun bir [a, b] aralığı üzerinde parçalı sürekli olması için g.y.k.*

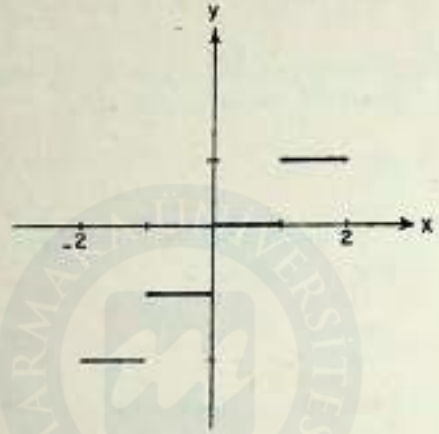
1) *f' nin [a, b] aralığı üzerinde tanımlı ve bu aralığa ait ancak sonlu sayıda nokta dışında, aralığa ait her noktada sürekli bir fonksiyon olması,*

2) *Süreksiz olduğu sonlu sayıdaki $x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ noktalarından her birinde f fonksiyonunun $f(x_i^+)$ sağ ve $f(x_i^-)$ sol limitlerinin var olmasıdır.*

*Bir [a, b] kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve bu aralık üzerinde sürekli olan her fonksiyon aynı aralık üzerinde parçalı süreklidir.*

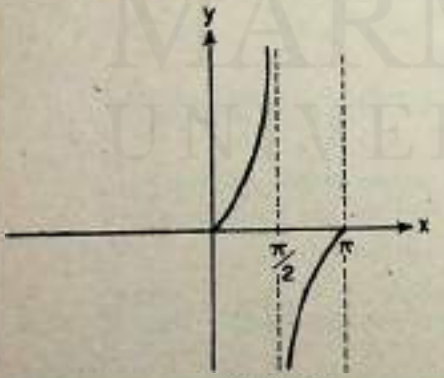
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örneğin, $f(x) = [x]$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığı üzerinde parçalı süreklidir:

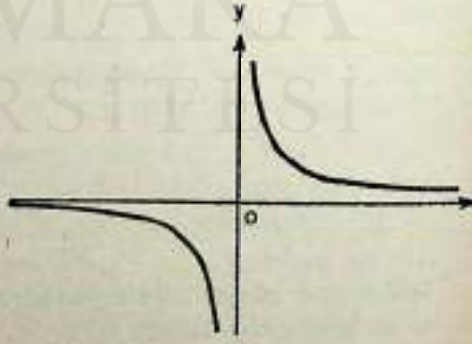



Şekil 9.

$f(x) = tgx$ fonksiyonu $[0, \pi]$ aralığı üzerinde, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu ise başlangıç noktasını içeren her aralık üzerinde parçalı sürekli değildir:




Şekil 10.




Şekil 11.

*2.4. Tanım : Bir $f$ fonksiyonunun bir $[a, b]$ aralığı üzerinde parçalı düzgün olması için g.y.k.*

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



*1) f' nin [a, b] üzerinde parçalı sürekli olması,*

*2) f'nin [a, b] üzerinde parçalı sürekli olan birinci mertebeden türevinin bulunmasıdır.*

## 3 — TÜRETİLEMEYEN FONKSİYONLAR

Bir fonksiyonun bir $x$ noktasında türetilebilmesi için fonksiyonun bu noktada sürekli olmasının gerekli olduğuna Sonuç 1.1'de değinilmişti. Sürekli olmayan bir fonksiyonun süreksiz olduğu noktalarda türetilemiyeceği aşikardır. Bu tür noktalarda bir teğet çizmenin olanaksız olduğu görülür. Fakat sadece fonksiyonların süreksiz olduğu noktalarda değil, sürekli olan fonksiyonların da bazı noktalarda türevi yoktur. Örneğin bir fonksiyonun sağ ve sol türevleri var fakat farklı değerde olabilir. Şu halde farklı sağ ve sol türev değerlerine sahip oldukları noktalarda bu fonksiyonlar türetilemez.

3.1. *Tanım: f [a, b] aralığı üzerinde parçalı sürekli bir fonksiyon, $x_0$ da (a, b) açık aralığına ait herhangi bir nokta olsun. Eğer*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+} \tag{3.1.1}$$

*limiti varsa bu limite f fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki sağ türevi denir.*

Yukardaki limiti

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{3.1.2}$$

olarak da göstermek mümkündür.

*Eğer*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-}$$

*limiti varsa bu limite f fonksiyonunun $x_0$ noktasındaki sol türevi denir.* Bu limit de

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

şeklinde gösterilebilir.

$f$ fonksiyonunun $x_0$ noktasında birinci mertebeden türevi $f'$ nin var olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

dır. Eğer $f$ fonksiyonu $x_0$ noktasında türetilebiliyorsa o noktada süreklidir. Dolayısıyla

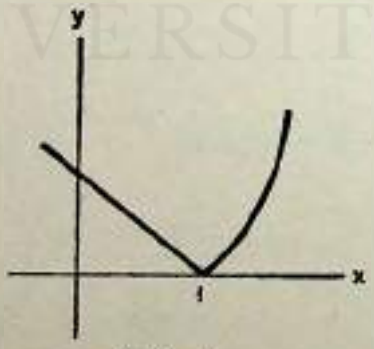
$$f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$$

elde edilir.

Bu bağıntılardan 9.3 ve 9.4. limitlerinin varlığı sonuç olarak elde edilir ve bu limitlerin $f'(x_0)$'a eşit olduğu görülür. Kısaca özetlenirse, bir $f$ fonksiyonunun $x_0$ noktasında türevi varsa yani $f'(x_0)$ varsa, $x_0$ noktasında $f$ fonksiyonunun sağ ve sol türevleri vardır ve $f'(x_0)$'a eşittir.

3.2. *Örnek:* Aşağıda verilen fonksiyon tanım aralığı üzerinde sürekli fakat aralığın tümü üzerinde türetilemiyen bir fonksiyona örnektir.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geqslant 1\\ 1-x & x\leqslant 1\end{cases}$$




Şekil 12.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 12'den de görüldüğü gibi $x = 1$ noktasına sağdan yaklaşırken elde edilen teğetlerin eğimi değişirken soldan yaklaşıldığında eğim sabit kalmaktadır. $f$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında türevinin var olup olmadığını araştırmak için sağ ve sol türevlerini hesaplamak gerekir. Sağ türevi

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2$$

Sol türevi ise

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1-(1-h)}{-h} = -1$$

dir.

Sağ ve sol türevler eşit olmadığından $f$ fonksiyonunun $x=1$ noktasında türevi yoktur. Fakat

$$f(1^+) = \lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$$

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1} 1 - x = 0 \quad \text{ve} \quad f(1) = 0$$

dolayısıyla $f(1) = f(1^+) = f(1^-)$

olduğundan $x = 1$ noktasında süreklidir.

3.8. *Örnek :*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

*şeklinde tanımlanan fonksiyonun* x = 1 *noktasındaki türev sayısı.*

Fonksiyonun tanımında 1 noktası özel bir durum arzeder ve fonksiyon 1'den küçük veya eşit değerler için bir ifade ile, 1 den büyük $x$ değerler için başka bir ifade ile gösterilmektedir. Bundan dolayı

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



kesirinin limitini ararken, $f$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki sağ ve sol türevlerini ayrı ayrı hesaplamak gerekir. $f$ fonksiyonunun sol türevi $f'(1^-)$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(1-h)^2-1}{-h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{-h^2+2h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} (2+h) = 2$$

dir. Sağ türevi $f'(1^+)$ ise

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2(1+h)-1-1}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2h}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 2 = 2$$

dir. Şu halde

$$f'(1) = 2$$

dir.

## 4 — TEĞET ÇİZİMİ İLE İLGİLİ KONULAR

Bir A cümlesi üzerinde tanımlanmış bir $f$ fonksiyonunun grafiği verildiğinde, $a \in A$ olmak üzere bu grafiğin $(a, f(a))$ noktasındaki teğet doğrusunun denkleminin

$$y = f'(a) \cdot x + (f(a) - f'(a) \cdot a)$$

olduğu bilinmektedir[1].

Şu halde grafiğin $(a, f(a))$ noktasındaki teğetinin belirlenebilmesi için $a$ noktasındaki $f'(a)$ türev sayısının bilinmesi gerekir.

### 4.1. *Örnekler :*

a) $f(x) = x^4$ fonksiyonunun herhangi bir noktasındaki teğet doğrusunun denkleminin bulunması.

---

(1) GAS - AG, s. 156, formül (4.1) e bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4hx^3+6h^2x^2+4h^3x+h^4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (4x^3+6hx^2+4h^2x+h^3) = 4x^3$$

olduğudan, grafiğin herhangi bir $(a, f(a)) = (a, a^4)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$y = 4a^3x + (a^4 - 4a^4) = 4a^3x - 3a^4$$

tür.

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun tanımlanmış olduğu her $a$ değeri için teğet doğrusunun denkleminin bulunması.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1/(x+h)^2) - 1/x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} \right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{-(2xh+h^2)}{(x+h)^2x^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(2x+h)}{(x+h)^2x^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

olduğundan, grafiğin herhangi bir $(a, f(a)) = (a, \frac{1}{a^2})$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$y = -\frac{2}{a^3}x + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3}a\right) = -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



*4.2. Uyarı :*

$f$ fonksiyonunun tanım cümlesine ait bir $a$ noktası için $f'(a)$ türev sayısı varsa, $f$ fonksiyonu $a$ noktasında süreklidir[1]. Şu halde, bir fonksiyonun süreksiz olduğu bir noktada türev sayısı olamaz (zîra olsaydı, yukarıda hatırlatılan teorem uyarınca fonksiyon sürekli olurduki, bu da fonksiyonun süreksiz olması hipotezine aykırı düşer!). Bundan dolayı, $f$ fonksiyonunun süreksiz olduğu bir noktada teğet doğrusu da yoktur.

*4.2.1. Örnekler :*

a) $[x]$ ile, $x$ sayısından küçük veya ona eşit en büyük cebirsel tam sayı gösterilsin. $]-2, 2[$ açık aralığı üzerinde tanımlanmış

$$f(x) = 2x^2 - 2\,[\,|x|\,]^2 \tag{4.2.1.1}$$

fonksiyonu göz önüne alınıyor. $x$ sayısı $]-2, 2[$ açık aralığında değerler aldığında, $|x|$ sayısı $[0, 2[$ yarı açık aralığında değerler alır. $|x|$, $[0, 1[$ yarı açık aralığında kaldığında, $[\,|x|\,]$ fonksiyonu 0 değerini alır; $|x|$, $[1, 2[$ yarı açık aralığında kaldığında, $[\,|x|\,]$ fonksiyonu 1 değerini alır. Şu halde (4.2.1.1) gösterilişinin yerine, aynı $f$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & |x| \in [0, 1[ \\ 2x^2 - 2 & |x| \in [1, 2[ \end{cases}$$

veya, $|x|$ fonksiyonundan da kurtararak

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & -2 < x \leqslant -1 \\ 2x^2 & -1 < x < 1 \\ 2x^2 - 2 & 1 \leqslant x < 2 \end{cases} \tag{4.2.1.2}$$

şeklinde yazılabilir. $]-2, -1]$, $]-1, 1[$ ve $[1, 2[$ aralıklarında, $f$ fonksiyonu bir polinom ile açıklandığından, fonksiyon bu aralıklarda sürekli olan parçalardan oluşur[2]. Fonksiyonun $]-2, 2[$

(1) GS - AG, s. 164, Teorem 8.1. e bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



aralığı üzerinde süreksizlikleri olup olmadığına dair incelemeyi tamamlamak için, bunun $-1$ ve $1$ noktalarındaki durumunu da ele almak gerekir. Halbuki

$$f(-1^-) = \lim_{h\to 0^-} f(-1+h) = \lim_{h\to 0^-} (2(-1+h)^3 - 2)$$

$$= \lim_{h\to 0^-} (2(1-2h+h^2) - 2)$$

$$= \lim_{h\to 0^-} (2h^2-4h) = 0$$

$$f(-1^+) = \lim_{h\to 0^+} f(-1+h) = \lim_{h\to 0^+} (2(-1+h)^3)$$

$$= \lim_{h\to 0^+} (2-4h+2h^2) = 2$$

$$f(1^-) = \lim_{h\to 0^-} f(1+h) = \lim_{h\to 0^-} (2(1+h)^3)$$

$$= \lim_{h\to 0^-} (2+4h+2h^2) = 2$$

$$f(1^+) = \lim_{h\to 0^+} f(1+h) = \lim_{h\to 0^+} (2(1+h)^3 - 2)$$

$$= \lim_{h\to 0^+} (2(1+2h+h^2) - 2)$$

$$= \lim_{h\to 0^+} (4h+h^2) = 0$$

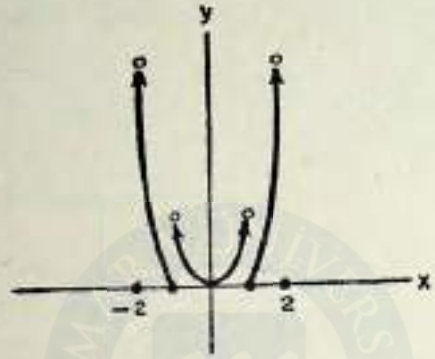
dır ve dolayısıyla $f$ fonksiyonunun $-1$ ve $1$ noktalarında birer süreksizliği vardır. Fonksiyonun (4.2.1.2) ile verilen açık ifadesinden ve parabol çizimleri ile ilgili elemanter bilgilerden[2] fonksiyonun grafiğinin aşağıda gösterilen şekilde olduğu görülür.

(1) GS - AG. s. 108 e bakınız.

(2) GS - AG. s. 51-63 e bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ






Şekil 13.

Uyarı 4.2. de açıklananlardan dolayı, $-1$ ve $1$ noktalarında bu grafiğin teğet doğrusunu çizmek olanağı olmadığı anlaşılır. Ancak, fonksiyon üç parçadan oluşmakta ve her biri basit bir cebirsel ifade ile verilmektedir. Bundan dolayı, $f$ fonksiyonunun $]-2,-1[$, $]-1,1[$ ve $]1,2[$ açık aralıklarının her noktasındaki türev sayısını hesaplamak olanağı vardır. Her $a \in ]-2,-1[$, $]-1,1[$ veya $]1,2[$ için[1]

$$f'(a) = 4a$$

elde edilir. Üstelik $f$ fonksiyonunun $]-2,2[$ açık aralığı üzerinde

$$\lim_{a\to -1^-} f'(a) = -4, \qquad \lim_{a\to -1^+} f'(a) = -4,$$

$$\lim_{a\to 1^-} f'(a) = 4, \qquad \lim_{a\to 1^+} f'(a) = 4$$

olması, $f$ fonksiyonunun $]-2,2[$ açık aralığı üzerindeki türev fonksiyonunun

$$f'(x) = 4x$$

olduğu fikrini doğurabilir. Halbuki böyle bir yazılış $f(-1) = -4$

(1) $f(x) = 2x^2$ ve $f(x) = 2x^2 - 2$ fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanması için GS-AG, s. 150 teki 5.3. te uygulanan yöntemi aynen tekrarlamak yeter.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


ve $f'(1) = 4$ olması demektir, bu ise $f$ fonksiyonunun $-1$ ve 1 noktalarındaki teğet doğrusunun denkleminin varlığını ifade eder ve bunun olanaksız olduğu yukarda hatırlatılmıştır.

Gerçekten, $-1$ noktasında sadece $f$ fonksiyonunun soldan türevi vardır ve bu da

$$f'(-1^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(-1-h) - f(-1)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2(-1-h)^2-2}{-h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{4h+2h^2}{-h} = -4$$

tür halbuki sağdan türev tanımlanamaz zira

$$f'(-1^+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2(-1+h)^2}{h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2-4h+2h^2}{h} = \infty$$

dır. Buna benzer şekilde

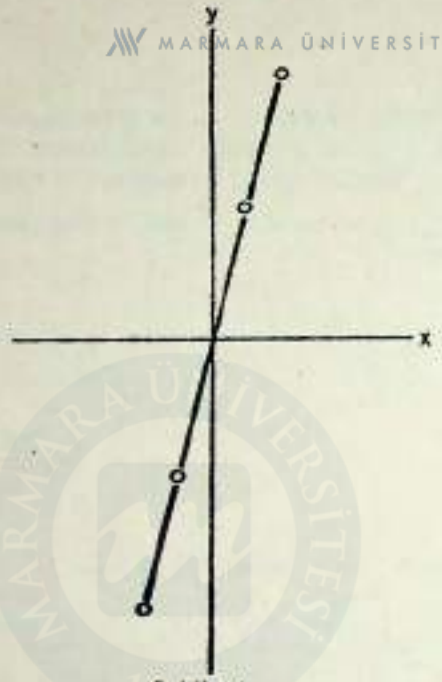
$$f'(1^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = -\infty$$

$$f'(1^+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 4$$

elde edilir.

Şu halde $]-2, 2[$ aralığı üzerinde $f$ fonksiyonundan elde edilen $f'$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için $-1$ ve 1 değerlerine $f'$ için bir değer tekabül etmediğini göstermek gerekir. Dolayısıyla $f$ fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilen şekildedir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

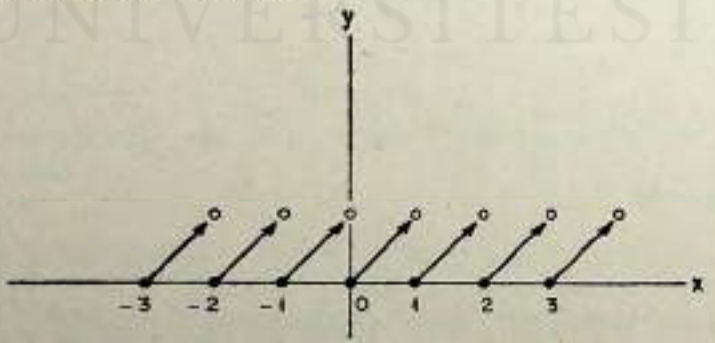



Şekil 14.

b) Bütün $\mathbb{R}$ cümlesi üzerinde tanımlanmış

$$f(x) = x - [x]$$

fonksiyonu göz önüne alınsın, $[x]$ fonksiyonu, her $z \in \mathbb{Z}$ için $[z, z+1[$ aralığı üzerinde $z$ sayısına eşit olduğundan, $f$ fonksiyonu aynı aralık üzerinde $x-z$'e eşit olur. Şu halde her $[z, z+1[$ aralığı üzerinde $f$ fonksiyonu




Şekil 15.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


şeklindedir. Türeve geçilmesi halinde, her $x \in ]z, z+1[$ için

$$f'(x) = 1$$

dir. Üstelik, her $z \in \mathbb{Z}$ için

$$\lim_{x \to z^-} f'(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to z^+} f'(x) = 1$$

bulunur fakat $f'(z)$ tanımlanamaz çünkü $h > 0$ ise

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{z+h-[z+h]-z+[z]}{h} = \frac{z+h-z}{h} = 1$$

ve

$$f'(z^+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 1$$

halbuki

$$\frac{f(z-h) - f(z)}{-h} = \frac{z+h-[z-h]-z+[z]}{-h}$$

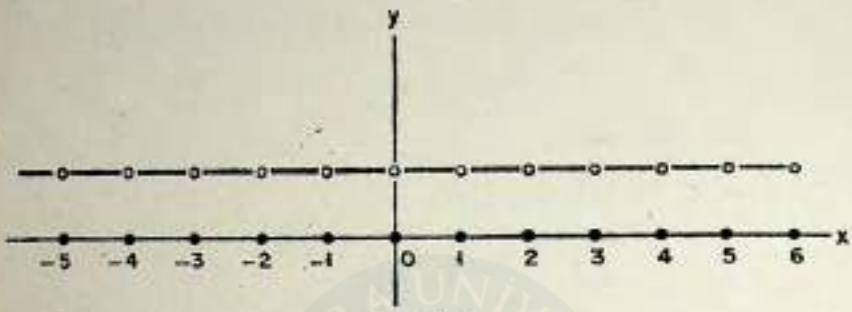
$$= \frac{z-h-(z-1)}{-h} = \frac{-h+1}{-h}$$

ve

$$f'(z^-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(z-h) - f(z)}{-h} = -\infty$$

elde edilir. Şu halde bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlanmış olan $f$ fonksiyonunun türev fonksiyonu bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlanamaz. IR cümlesinin $\mathbb{Z}$ alt cümlesi üzerinde tanımlanamayan bu fonksiyonun grafiği aşağıda gösterilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 16.

## 5 — TÜREV TANIMI İLE İLGİLİ BAZI KONULAR

$f$ fonksiyonu bir $]p, q[$ açık aralığı üzerinde tanımlanmış olsun. $a$ sayısı bu aralığa ait bir sayı ve $h$ sayısı

$$|h| < \min\{a - p, q - a\}$$

koşulunu sağlayan bir sayı olmak üzere,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

limiti bulunması halinde, bu limite $f$ fonksiyonunun $a$ noktasındaki türev sayısı denildi.

Yukardaki tanımı çeşitli şekillerde değiştirmek olanağı vardır. Örneğin, $f$ fonksiyonu, tekrar $]p, q[$ açık aralığı üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon, $a$ sayısı $]p, q[$ aralığına ait bir sayı ve $h$ sayısı *pozitif* ve

$$p < \min\{a - p, q - a\}$$

koşulunu sağlayan bir sayı olmak üzere

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

limiti bulunması halinde, bu limitin değeri

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'_s(a)$$

şeklinde gösterilir ve $f'_s(a)$ sayısına $f$ fonksiyonunun $a$ noktasındaki *simetrik türev sayısı* denir.

Simetrik türev ile ilgili olarak aşağıdaki sonuçlar kanıtlanır.

*5.1. $f$ fonksiyonunun $a$ noktasında sağ ve sol türevleri varsa, $a$ noktasında simetrik türevi de vardır.*

Gerçekten,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a-h)-f(a)}{h}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$$

olduğundan, $f$ fonksiyonunun $a$ noktasındaki sağ ve sol türevlerinin varlığı $f$ fonksiyonunun aynı noktadaki simetrik türevinin varlığını gerektirir. Üstelik, $f$ fonksiyonunun $a$ noktasındaki sağ ve sol türevlerinin sırası ile $f'(a^+)$ ve $f'(a^-)$ ile gösterilmeleri halinde

$$f'_s(a) = \frac{1}{2}\{f'(a^+) + f'(a^-)\}$$

bağıntısı geçerlidir.

*5.2. $f$ fonksiyonu, tanımlanmış olduğu aralıkta simetrik türevi olan çift bir fonksiyon ise, başlangıç noktasındaki simetrik türevi sıfırdır.*

Gerçekten, simetrik türev tanımına göre

$$f'_s(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(-h)}{2h}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



dır. Fonksiyon çift olması halinde $f(h) = f(-h)$ bağıntısı gerçekleneceğinden[1]

$$f'_s(0) = 0$$

dır.

*5.3. f fonksiyonunun bir ekstremum noktasında simetrik türevi sıfırdan farklı olabilir.*

Gerçekten, $a$ sayısı pozitif ve $a \neq 1$ koşulunu sağlayan herhangi bir reel sayı olmak üzere, bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlanmış

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -ax & x \leqslant 0 \end{cases}$$

fonksiyonu, her $x \in IR$ için

$$f(x) \geqslant f(0) = 0$$

bağıntısını sağlar, yani 0 noktası bu $f$ fonksiyonunun mutlak minimum noktasıdır. Üstelik

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(0-h) - f(0)}{-h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{ah}{-h} = -a$$

olup

$$f'_s(0) = \frac{1}{2}[f'(0^+) + f'(0^-)] = \frac{1}{2}(1-a) \neq 0$$

dır. Bu örnek yukarda ortaya atılan tezi doğrular.

## 6 — YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREV

Verilen bir $f$ fonksiyonunun türetilebileceği bir aralık varsa, bu aralığın her noktasına fonksiyonun o noktadaki türev sayısı te-

(1) GS-AG, s. 237 ye bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


kabül ettirilebileceğinden, söz konusu aralık üzerinde $f$ fonksiyonundan $f'$ birinci türev fonksiyonu elde edilir.

$f'$ birinci türev fonksiyonunun, tanımlı olduğu aralığın her noktasında, herhangi bir fonksiyonmuş gibi, türetilip türetilemeyeceği araştırılabilir. Türetilebilmesi halinde aralığın söz gelişi $a$ gibi bir noktasında, $(f')'(a)$ türev sayısı elde edilecektir. Bir yazılış olarak

$$(f')'(a) = f''(a)$$

notasyonu tanımlanır ve $f''(a)$ sayısına *$f$ fonksiyonunun $a$ noktasındaki ikinci türev sayısı* denir.

$f'$ birinci türev fonksiyonu, bütün bir aralık üzerinde türetilebilen bir fonksiyon olması halinde, bu aralığın her noktasına $f$ fonksiyonunun ikinci türev sayısını tekabül ettirmek suretiyle elde edilen fonksiyon $f''$ fonksiyonu olarak gösterilir ve bu fonksiyona *$f$ fonksiyonunun ikinci türev fonksiyonu* denir.

$f''$ ikinci türev fonksiyonunun yine tanımlı olduğu aralığın her noktasında türetilip türetilemeyeceği araştırılabilir. Aralığa ait bir $a$ noktasında $f''$ fonksiyonu türetilebilirse

$$(f'')'(a) = f'''(a)$$

yazılır ve bu sayıya *$f$ fonksiyonunun $a$ noktasındaki üçüncü türev sayısı* denir.

$f''$ ikinci türev fonksiyonu, bütün bir aralık üzerinde türetilebilen bir fonksiyon olması halinde, bu aralığın her noktasına $f$ fonksiyonunun üçüncü türev sayısını tekabül ettirmek suretiyle elde edilen fonksiyon $f'''$ fonksiyonu olarak gösterilir ve bu fonksiyona *$f$ fonksiyonunun üçüncü türev fonksiyonu* denir.

Bu şekilde devam edilebileceği aşikardır: böylece $f$ fonksiyonunun $n$ -inci türev fonksiyonu da açıklanabilir. Ancak, yukarda gösterilen notasyon, üçüncü türeve kadar olan türev fonksiyonları için kullanışlı olup, daha yüksek mertebeden türev fonksiyonları için kullanışlı olmadığından

$f'$ yerine $f^{(1)}$, $f''$ yerine $f^{(2)}$, $f'''$ yerine $f^{(3)}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



ve genel olarak $f$ fonksiyonunun $n$ - inci türev fonksiyonu için $f^{(n)}$ notasyonu uygulanır. Nihayet, bu notasyonlara uymak için, $f$ yazılışının yerine de $f^{(0)}$ yazılışı kullanılır[1].

6.1. *Örnekler* :

a) $$f(x) = x^2$$

fonksiyonu verilmiş olsun.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h^2+2hx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (h+2x) = 2x$$

olduğundan IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı $f(x) = f^{(0)}(x) = x^2$ fonksiyonunun yine bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı olan bir $f'(x) = f^{(1)}(x) = 2x$ türev fonksiyonu vardır. Bu fonksiyona aynı yöntemler uygulanabilir ve

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f^{(1)}(x+h)-f^{(1)}(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2(x+h)-2x}{h} = 2$$

elde edilir, yani $f^{(1)}(x)$ birinci türev fonksiyonunun türev fonksiyonu vardır ve bu da bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı olan sabit bir fonksiyondur yani

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = 2$$

dir. Aynı yöntemi bu fonksiyona uygulamak suretiyle bu defa

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 0$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $n \geqslant 3$ için

$$f^{(n)}(x) = 0$$

(1) GS-AG. s. 167-169.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


bulunur. Şu halde verilen fonksiyonun IR cümlesinin her noktasında her mertebeden türev sayısı vardır.

b) Böyle bir durum daima gerçeklenmeyebilir. Örneğin, bütün IR cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & x \geqslant 1 \end{cases} \tag{6.2}$$

fonksiyonunun $a = 1$ noktasında ikinci türevi tanımlanamaz. Gerçekten $x < 1$ koşulunu sağlayan bütün $x$ sayıları için, (a) daki sonuçtan $f'(x) = 2x$ olduğu görülür. $x > 1$ koşulunu sağlayan $x$ sayıları için

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h) - 1 - (2x-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

elde edilir ve

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} = 2; \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$$

olduğundan

$$f'(1) = 2$$

dir. Şu halde (6.2) de açıklanan $f$ fonksiyonunun birinci türev fonksiyonu bütün IR cümlesi üzerinde tanımlanmıştır ve

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \begin{cases} 2x & x \leqslant 1 \\ 2 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

dir. Aynı yöntemle bu fonksiyonun türev fonksiyonu araştırılsın: $x < 1$ olma koşulu ile

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2(x-h) - 2x}{-h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2h}{h} = 2$$

halbuki $x > 1$ olma koşulu ile

$$f'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2-2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 0 = 0$$

elde edilir. Üstelik

$$f'(1^-) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f'(1-h) - f'(1)}{-h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2(1-h) - 2}{-h}$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 2 = 2$$

$$f'(1^+) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{2-2}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} 0 = 0$$

olduğundan $f''(1)$ tanımlanamaz. Şu halde $x$ (6.2) ile verilen $f$ fonksiyonunun ikinci türev fonksiyonu, $a = 1$ noktası hariç, bütün IR cümlesi üzerinde tanımlıdır. $f$ fonksiyonunun daha yüksek mertebeden türevleri için de aynı durumun devam edeceği, bunların $a = 1$ noktası hariç bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlanabilecekleri görülür.

c) Diğer bir örnek olarak

$$(6.3) \qquad f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3x + 1 & x \geq 1 \\ x^3 & x \leq 1 \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun kendisi, birinci ve ikinci mertebeden türev fonksiyonları bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı fakat üçüncü türev fonksiyonu $a = 1$ için tanımlı değildir. Gerçekten, türev tanımını uygulayarak

$$f^{(1)}(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leqslant 1 \\ 6x - 3 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$f^{(2)}(x) = \begin{cases} 6x & x \leqslant 1 \\ 6 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

ve

$$f^{(3)}(x) = \begin{cases} 6 & x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

olduğu görülür: üstelik $f^{(3)}(1)$ tanımlanamaz.

7.1. *Alıştırmalar.*

1) Yukardaki örneklerden yararlanarak kendisi ve birinci, ikinci, üçüncü bertebeden türevleri IR cümlesinin tümü üzerinde tanımlı fakat $a = 1$ noktasında dördüncü türevi tanımlanamayan bir fonksiyon örneği veriniz.

Yanıt : $f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 4x - 1 & x \geqslant 1 \\ x^4 & x \leqslant 1 \end{cases}$

2) Yukardaki örneklerden yararlanarak bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı olan fakat ikinci türevi $a = 1$ ve $b = -1$ noktalarında tanımlanamayan bir fonksiyon örneği veriniz.

Yanıt : $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & x \leqslant -1 \\ x^2 & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & x \leqslant 1 \end{cases}$

8.1. *Örnekler*

8.1.1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü türev fonksiyonlarının bulunması.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$f$ fonksiyonu bir polinom olduğundan, bütün IR cümlesi üzerinde tanımlıdır ve IR cümlesinin her noktasında türev sayısı olan bir fonksiyondur. Birinci türev fonksiyonu

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

olup, yine bir polinomdur ve bu nedenle IR reel sayılar cümlesinin her noktasında türetilebilir. Dolayısıyla $f$ fonksiyonunun ikinci türev fonksiyonu

$$f''(x) = 6x - 6$$

dir. Bu fonksiyon için aynı durum geçerlidir ve

$$f'''(x) = 6$$

dir.

8.1.2. $$f(x) = x^4 - 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{x}$$

fonksiyonunun dördüncü türev fonksiyonunun bulunması.

$f$ fonksiyonu, ikinci teriminin getirdiği sınırlamadan dolayı sadece $x \geq 0$ reel sayıları için tanımlanabilir; üstelik üçüncü teriminden dolayı $x \neq 0$ olmak zorundadır, yani fonksiyon $x > 0$ koşulunu sağlayan $x$ reel sayıları için tanımlıdır. Birinci türev fonksiyonu

$$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{x^2}$$

olup yine aynı cümlenin her noktasında tanımlı olan bir fonksiyondur. Bu cümleye ait her $x$ reel sayısı için türetilebilen bu fonksiyondan, $f$ fonksiyonunun ikinci türev fonksiyonu olan

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 6x^{-3}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon yine bütün pozitif reel sayılar için tanımlı ve türetilebilen bir fonksiyon olup

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f^{(3)}(x) = 24x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{4}} - 18x^{-4}$$

bulunur. Yine bütün pozitif reel sayılar için tanımlı ve türetilebilir olan $f^{(3)}$ ten, aranan

$$f^{(4)}(x) = 24 - \frac{9}{8}x^{-\frac{13}{4}} + 72x^{-5}$$

elde edilir.

8.2. *n - inci türev hesabı için genel formüller*

*f ve g, belirli bir aralık üzerinde istenildiği mertebeden türev fonksiyonu tanımlanabilen iki fonksiyon ise, f + g ve f · g fonksiyonlarının da aynı aralık üzerinde istenildiği mertebeden türev fonksiyonları vardır ve bu fonksiyonlar her n ∈ ℕ için*

8.2.1. $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$

8.2.2. $(f\cdot g)^{(n)}(x) = \binom{n}{0} f^{(n)}(x)\cdot g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f^{(1)}(x)\cdot g^{(n-1)}(x)$

$$+ \binom{n}{2} f^{(2)}(x)\cdot g^{(n-2)}(x) + \ldots + \binom{n}{n} f^{(n)}(x)\cdot g^{(0)}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x)\cdot g^{(n-j)}(x)$$

*dir*[1].

Bu formüllerden ikincisinde yer alan $\binom{n}{j}$ sembolü

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!}$$

şeklinde hesaplanır[2].

---

(1) GS-AG, s. 189-190 ve s. 193-195.

(2) GS-AG, s. 190-191.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(8.2.2.) formülü *Leibniz formülü* olarak bilinir.

8.3. *Uygulamalar*

(8.2.1) ve (8.2.2) formülleri yardımıyla bir çok fonksiyonun $n$-inci mertebeden türev fonksiyonları hesaplanabilir.

8.3.1. *Kuvvet fonksiyonları*

$\rho$ herhangi bir rasyonel sayı olmak üzere

$$f(x) = x^{\rho}$$

fonksiyonu ele alınsın. Teorem 2.4. e göre, $f$ fonksiyonunun tanımlı olduğu cümleye ait her $x$ noktasında türetilebilmekte ve

$$f^{(1)}(x) = \rho\, x^{\rho-1}$$

dır[1]: bu ikinci fonksiyon bir sabit fonksiyonun aynı türden bir kuvvet fonksiyonu ile çarpımına eşittir. Teorem 2.3. ü uygulamak suretiyle

$$f^{(2)}(x) = \rho(\rho-1)\, x^{\rho-2}$$

elde edilir[2]. Yine $f^{(1)}$ fonksiyonunun tipinde bir fonksiyon olan $f^{(2)}$ fonksiyonunun türev fonksiyonu benzer yöntemle hesaplanır ve

$$f^{(3)}(x) = \rho(\rho-1)\,(\rho-2)\, x^{\rho-3}$$

elde edilir. Bu sonuçlar göz önünde tutularak $f$ kuvvet fonksiyonunun $n$-inci mertebeden türev fonksiyonu, Matematik İndüksiyon Prensibini uygulamak suretiyle elde edilebilir. Gerçekten, indüksiyon hipotezi olarak, $s$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere,

$$f^{(s-1)}(x) = \rho(\rho-1)\,(\rho-2)\,\ldots\,(\rho-(s-2))\, x^{\rho-(s-1)}$$

olduğu kabul edilsin. $\rho(\rho-1)\,(\rho-2)\,\ldots(\rho-(s-2))$ çarpımına sabit bir fonksiyon gözü ile bakılabilir ve dolayısıyla bu $f^{(s-1)}$ fonksiyonu bir sabit fonksiyonun bir kuvvet fonksiyonu ile çarpımına eşittir. Tekrar Teorem 2.3 ü uygulamak suretiyle

---

(1) GS-AG, s. 178

(2) GS-AG, s. 174

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$p^{(s)}(x) = \rho(\rho-1)\ (\rho-2)\ \ldots\ (\rho-(s-2))\ (\rho-(s-1))\ x^{\rho-s}$$

elde edilir. Şu halde, $n$ sayısı herhangi bir doğal sayı olmak üzere, $f$ kuvvet fonksiyonunun $n$-inci türevi

8.3.1.1 $$f^{(n)}(x) = \rho(\rho-1)\ (\rho-2)\ \ldots\ (\rho-(n-2))\ (\rho-(n-1))\ x^{\rho-n}$$

dir.

8.3.2. *Polinomlar*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

şeklinde bir polinom verilmiş olsun. Polinomun ikinci şekli, bunun bir takım kuvvet fonksiyonlarının toplamı olduğunu gösterir. Şu halde (8.2.1) formülü ile (8.3.1.1) formülünü birlikte göz önüne alarak, $n$-inci dereceden $P$ polinomunun $m$-inci türev fonksiyonunun

$$P^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{n} j(j-1)\ \ldots\ (j-m+1)\ a_j x^{j-m}$$

şeklinde yazılabileceği sonucuna varılır.

$$j(j-1\ (j-2)\ \ldots\ (j+m+1)\ a_j x^{j-m}$$

genel terimi üzerinde durulacak olursa, bu terimin sayısal katsayısı

$$j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

için sıfıra eşit bir çarpan ihtiva [illegible] dolayısıyla sıfıra eşit olacağı sonucu çıkar. Şu halde

8.3.2.1 $$P^{(m)}(x) = \sum_{j=m}^{n} j(j-1)\ (j-2)\ \ldots\ (j-m+1)\ a_j x^{j-m}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



dir. Dolayısıyla $P$ polinomunun $m$ - inci türev fonksiyonunun derecesi $n-m$ olan bir polinom olduğu görülür. Bunun sonucu olarak, $n$ - inci dereceden bir polinomun $n$-inci türev fonksiyonunun derecesi sıfırdır, yani $n$-inci türev fonksiyonu bir sabit fonksiyondur, çünkü (8.3.2.1) formülünden de görüleceği gibi,

$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.a_n x^0$$
$$= n!\, a_n$$

dir. Bu nedenle, $n$-inci dereceden her polinomun $n$-inci dereceden yüksek türev fonksiyonlarının hepsi sıfıra eşit olur.

8.3.3. *Rasyonel fonksiyonlar*

$P(x)$ ve $Q(x)$, $x$ değişkeninin birer polinomunu göstermek üzere,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

şeklinde tanımlanan rasyonel fonksiyon ele alınsın. $k_1, k_2, \ldots, k_s$ reel sayılarının $Q(x)$ polinomunun reel sıfırlarını göstermesi halinde

$$R(x) = P^*(x) + \frac{A_{1,1}}{(x-k_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-k_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-k_1)^{m_1}}$$
$$+ \frac{A_{2,1}}{(x-k_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x-k_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2,m_2}}{(x-k_2)^{m_2}}$$
$$+ \frac{A_{s,1}}{(x-k_s)} + \frac{A_{s,2}}{(x-k_s)^2} + \ldots + \frac{A_{s,m_s}}{(x-k_s)^{m_s}}$$

şeklinde yazılabileceği Cebir derslerinde kanıtlanır: bu ifadede $P^*(x)$, $x$ değişkeninin bir polinomudur. Şu halde $Q^*(x) = 1$ olması halinde $R(x)$ rasyonel fonksiyonu bir polinomla

$$\frac{A}{(x-k)^r}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



şeklinde bir takım terimlerin toplamı olarak yazılabilir ve bu ifade de $k, Q$ polinomunun bir kökü, $r$ bir doğal sayı ve $A$ bir reel sayıdır.

Buna göre, bu türden rasyonel fonksiyonların yüksek mertebeden türevlerini hesaplamak için (8.2.1) formülünde açıklanan özelliği ve 8.3.1 ile 8.3.2. de açıklanenları uygulamak yeter.

$$g(x) = \frac{A}{(x-k)^r} = A\,(x-k)^{-r}$$

olduğuna göre (8.3.1.1) den dolayı

$$g^{(n)}(x) = A(-r)\,(-r-1)\,\ldots\,(-r-n+1)\,x^{-r-n}$$

dir.

8.3.4. *Örnekler*

8.3.4.1. $$f(x) = x^{-1}$$

fonksiyonunun $n$-inci türevinin bulunması.

$$f^{(1)}(x) = -x^{-2},$$

$$f^{(2)}(x) = (-1)^2\,2x^{-3}$$

ve Matematiktik İndüksiyon Prensibini uygulayarak veya doğrudan doğruya (8.3.1.1) formülünden

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\;x^{-(n+1)}$$

bulunur.

8.3.4.2. $$f(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

fonksiyonunun $n$-inci türevinin bulunması.

$$f^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f^{(3)}(x) = (-1)^2 \frac{1}{2} \frac{3}{2} (x+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)^3 \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} (x+1)^{-\frac{7}{2}}$$

ve Matematik İndüksiyon Prensibini Uygulayarak veya doğrudan doğruya (8.3.1.1) formülünden

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} (x+1)^{-\frac{(2n+1)}{2}}$$

elde edilir.

8.3.4.3 $$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

fonksiyonunun $n$-inci türevinin bulunması.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

şeklinde yazılabileceğinden

$$f(x) = (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1}$$

dir.

$$g(x) = (x-2)^{-1} \quad \text{ve} \quad h(x) = -(x-1)^{-1}$$

yazılacak olursa

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

olur ve dolayısıyla

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) + h^{(n)}(x)$$

dir. Daha önceki örneğe benzer şekilde

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! (x-2)^{-n-1}$$

$$h^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! (x-1)^{-n-1}$$

elde edileceğinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$f^{(n)}(x) = (-1)\, n! \left[(x-2)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}\right]$$

dir. Buradan

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{(x-1)^{n+1} - (x-2)^{n+1}}{(x^2 - 3x + 2)^{n+1}}$$

elde edilir.

8.3.4.4. $f(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$ $\quad (bc - ad \neq 0)$

fonksiyonunun $n$-inci türevi.

Payı paydaya bölmek suretiyle

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\,(cx + d)^{-1}$$

elde edilir. Buradan

$$f^{(1)}(x) = \frac{bc - ad}{c}\,(-1)\,c(cx + d)^{-2}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{bc - ad}{c}\,(-1)^2 c^2\,(cx + d)^{-3}\,2$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{bc - ad}{c}\,(-1)^3 c^3\,(cx + d)^{-4}\,2.3$$

ve Matematik İndüksiyon Prensibini uygulayarak

$$f^{(n)}(x) = \frac{bc - ad}{c}\,(-1)^n c^n\,(cx + d)^{-n-1}\,n!$$

$$= (-1)^n n!\,\frac{c^{n-1}(bc - ad)}{(cx + d)^{n+1}}$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



8.3.4.5. $$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$$

fonksiyonunun $n$-inci türevinin hesaplanması.

$$f(x) = (1+x)\,(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

olduğuna göre, bu türevin hesaplanması için Leibniz formülü uygulanabilir.

$$g(x) = 1 + x \quad ; \quad h(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

olduğundan

$$g^{(2)}(x) = 1 + x$$

$$g^{(1)}(x) = 1$$

ve her $n \geqslant 2$ için

$$g^{(n)}(x) = 0$$

dır. Şu halde Leibniz formülü kendiliğinden kısalır ve ( (8.2.2) de $f$ yerine $g$, $g$ yerine $h$ yazmak suretiyle)

$$f^{(n)}(x) = (g \cdot h)^{(n)}(x) = \binom{n}{0} g^{(0)}(x) \cdot h^{(n)}(x)$$

$$+ \binom{n}{1} g^{(1)}(x) \cdot h^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} g^{(2)}(x) \cdot h^{(n-2)}(x) + \ldots$$

$$+ \binom{n}{n} g^{(n)}(x) \cdot h^{(0)}(x) = \binom{n}{0} g^{(0)}(x) \cdot h^{(n)}(x)$$

$$+ \binom{n}{1} g^{(1)}(x) \cdot h^{(n-1)}(x)$$

$$= (1+x)\,h^{(n)}(x) + n \cdot h^{(n-1)}(x)$$

şeklini alır. Buna göre,

$$h^{(n)}(x) = \frac{1.3.5. \ldots (2n-1)}{2^n}\,(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$f^{(n)}(x) = \frac{1.3.5. \ldots (2n-1)}{2^n} (1+x)\ (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$+ \frac{1.3.5. \ldots (2n-3)}{2^{n-1}} n\ (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$= \frac{1.3.5. \ldots (2n-3)}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} \left( (2n-1)\ (1+x) + 2n\ (1-x) \right)$$

$$= \frac{1.3.5. \ldots (2n-3)}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} (4n-1-x)$$

dir.

Aynı problem Leibniz formülü kullanılmaksızın da çözülebilir. Gerçekten

$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x}} = \frac{2-1+x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x} = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

yazılabilmektedir.

$$g(x) = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}};\ h(x) = -(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

yazılacak olursa

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

ve dolayısıyla

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) + h^{(n)}(x)$$

dir. Halbuki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$g^{(n)}(x) = \frac{1.3.5. \ldots (2n-1)}{2^{n-1}} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$h^{(n)}(x) = \frac{1.3.5. \ldots (2n-3)}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

ve dolayısıyla

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.3.5. \ldots (2n-3)}{2^{n-1}} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} \left\{(2n-1) + \frac{1}{2}(1-x)\right\}$$

$$= \frac{1.3.5. \ldots (2n-3)}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} (4n-2+1-x)$$

$$= \frac{1.3.5. \ldots (2n-3)}{2^n} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} (4n-1-x)$$

elde edilir.

8.3.4.6. $$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-2x+5}$$

fonksiyonunun $n$-inci türevini hesaplamaya yarayan bir formülün bulunması.

Verilen fonksiyondan hareket ederek

$$3x + 2 = (x^2 - 2x + 5) \cdot f(x)$$

yazılabilir. Şu halde

$$h(x) = 3x + 2, \quad g(x) = x^2 - 2x + 5$$

yazılacak olursa

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

dir. $h$ fonksiyonunun $n$-inci türevini hem doğrudan doğruya, hem de Leibniz formülünü uygulayarak hesaplamak mümkündür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$h^{(0)}(x) = 3x + 2$$

$$h^{(1)}(x) = 3$$

$$h^{(2)}(x) = 0$$

$$h^{(n)}(x) = 0 \qquad (n \geqslant 2)$$

olduğuna göre, $n \geqslant 2$ olması halinde, Leibniz formülü

$$0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x) \cdot g^{(n-j)}(x)$$

şeklinde yazılabilir. Ancak

$$g^{(0)}(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$g^{(1)}(x) = 2x - 2$$

$$g^{(2)}(x) = 2$$

$$g^{(3)}(x) = 0$$

$$g^{(n)}(x) = 0 \qquad (n \geqslant 3)$$

olduğundan, yukarıdaki toplamda $j = 0$ dan $j = n - 3$'e kadar olan endis değerleri için bütün terimler sıfıra eşit bir çarpan ihtiva ettiklerinden sıfıra eşit olurlar. Dolayısıyla önceki formül

$$0 = \sum_{j=n-2}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x) \cdot g^{(n-j)}(x) \qquad (n \geqslant 2)$$

şekline indirgenir, yani

$$0 = \binom{n}{n-2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{n-1}$$

$$f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \binom{n}{n} f^{(n)}(x) \cdot g^{(0)}(x)$$

veya, katsayıları hesaplıyarak ve $g^{(0)}$, $g^{(1)}$ ve $g^{(2)}$ nin değerlerini yerlerine koyarak,

$$0 = \frac{n(n-1)}{2} 2f^{(n-2)}(x) + n(2x-2) f^{(n-1)}(x)$$
$$+ (x^2 - 2x + 5) f^{(n)}(x)$$

elde edilir ve buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^2-2x+5}\left(2n(1-x)\,f^{(n-1)}(x) + (1-n)\,n f^{(n-2)}(x)\right)$$

formülü elde edilir. Bu formül bir rekürans bağıntısı olup, $f$ fonksiyonunun türevlerinin hesaplanmasına imkan verir.

8.3.4.7. $f$ fonksiyonunun $n$-inci mertebeden türevi varsa

$$(f(ax+b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b)$$

bağıntısını kanıtlayınız.

$f(ax+b)$, $f$ fonksiyonu ile $g(x) = ax+b$ fonksiyonunun bileşke fonksiyonu olarak düşünülebilir. Dolayısıyla

$$(f(ax+b))^{(0)} = (f \circ g)(x) = f(ax+b) = a^0 f^{(0)}(ax+b)$$

dir. Zincir kuralından dolayı

$$\begin{aligned}(f(ax+b))^{(1)} &= f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= f^{(1)}(ax+b)\cdot a = a^1 f^{(1)}(ax+b)\end{aligned}$$

dir. Şu halde verilen formül $n = 0,\ 1$ değerleri için sağlanmaktadır.

$$(f(ax+b))^{(k-1)} = a^{k-1} f^{(k-1)}(ax+b)$$

olduğu farzedilsin. Bu bağıntının türevini zincir kuralına göre hesaplamak suretiyle

$$(f(ax+b))^{(k)} = a^{k-1} f^{(k)}(ax+b)\cdot a = a^k f^{(k)}(ax+b)$$

elde edilir, yani formül $k-1$ için doğru ise $k$ için de doğrudur. Matematik İndüksiyon Prensibine göre, formül her $n$ doğal sayısı için doğrudur.

## 8.4. *Alıştırmalar*

8.4.1. Aşağıdaki fonksiyonların $n$-inci türev fonksiyonlarını hesaplayınız:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


a) $f(x) = (x+1)^{-1/2}$

Yanıt : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \dfrac{1.3. \ldots (2n-1)}{2^n} \cdot (x+1)^{-(2n+1)/2}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Yanıt : $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}(-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)}$

$+ \dfrac{1}{2}(-1)^n n! (x-1)^{-(n+1)}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Yanıt : $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}(n!)\{(1-x)^{-(n+1)}$

$+ (-1)^n (1+x)^{-(n+1)}\}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$

Yanıt : $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{4}\{3(x-2)^{-(n+1)}$

$+ (x+2)^{-(n+1)}\}$

e) $f(x) = \dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)}$

Uyarı : İlk olarak bölmeye geçiniz!

Yanıt : $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \{16(x-2)^{-(n+1)} - (x-1)^{-(n+1)}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



f) $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2\,(x+2)}$

Yanıt : $f^{(n)}(x) = \dfrac{4}{3}(-1)^n n!\,\{(n+1)(x-1)^{-(n+2)}$

$+ \dfrac{2}{3}(x-1)^{-(n+1)} - \dfrac{2}{3}(x+2)^{-(n+1)}\}$

10.4.2. $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $n$ tane türetilebilen fonksiyon olması halinde,

$$F = f_1 f_2 \cdots f_n$$

ise,

$$\frac{1}{F(x)} F^{(1)}(x) = \frac{1}{f_1(x)} f_1^{(1)}(x) + \frac{1}{f_2(x)} f_2^{(1)}(x)$$

$$+ \ldots + \frac{1}{f_n(x)} f_n^{(1)}(x)$$

olduğunu kanıtlayınız. (Uyarı : Teorem 1.2.2. den hareket ediniz!)

10.4.3. $$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki $n$-inci türev sayısının $n$ çift olması halinde sıfır, $n$ tek olması halinde $-(n!)$ e eşit olduğunu gösteriniz. (Uyarı : $n \neq 1$ kabul edilmiştir.)

10.4.4. $$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

olduğuna göre, $Q_n(x)$, $x$ cinsinden $n$-inci dereceden bir polinom göstermek üzere,

$$f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(1 + x^2)^{n+1}}$$

olduğunu gösteriniz. Ayrıca

$$Q_{n+1}(x) = (1 + x^2)\,Q'_n(x) - 2(n+1)\,x\,Q_n(x)$$

olduğunu kanıtlayınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM ON

## TÜREV ALMA İŞLEMİ

### 1 — GENEL KURALLAR

Tek değişkenli reel değerli fonksiyonların türevlerinin hesaplanmasında aşağıdaki teoremlerden yararlanılır.

1.1. *Teorem : f ve g fonksiyonları aynı bir aralık üzerinde tanımlanmış ve bu aralığa ait bir a noktasında türetilebilen iki fonksiyon ise, f + g fonksiyonu a noktasında türetilebilir ve*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \tag{1.1}$$

*dır*[1].

1.2. *Teorem : f ve g fonksiyonları aynı bir aralık üzerinde tanımlanmış ve bu aralığa ait bir a noktasında türetilebilen iki fonksiyon ise, f·g fonksiyonu a noktasında türetilebilir ve*

$$(f\cdot g)'(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a) \tag{1.2}$$

*dır*[2].

1.3. *Teorem : f fonksiyonu tanım aralığına ait bir a noktasında türetilebilen ve f(a) ≠ 0 koşulunu sağlayan bir fonksiyon ise, $\frac{1}{f}$ fonksiyonu a noktasında türetilebilir ve*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2} \tag{1.3}$$

*dır*[3].

---

(1) GS-AG, s. 173
(2) GS-AG, s. 173-174.
(3) GS-AG, s. 178-179.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



1.1. *Sonuçlar*

Türev tanımını uygulamak suretiyle tanım cümlesine ait her noktada sabit fonksiyonun türevinin sıfır olduğu kanıtlanır. Gerçekten, $f(x) = c$ gibi sabit bir fonksiyondan hareket ederek

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

elde edilir ve

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

bulunur. Buna dayanarak aşağıdaki iki sonuca varılır:

1.1.1 *Teorem*: c *reel bir sabit ve* f *tanım aralığına ait bir* a *noktasında türetilebilen bir fonksiyon ise,* $c \cdot f$ *fonksiyonu* a *noktasında türetilebilir ve*

$$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a) \tag{1.4}$$

*dır*[1].

1.1.2. *Teorem*: p *ve* q *iki reel sabit ve* f, g *aynı bir aralık üzerinde tanımlanmış ve bu aralığa ait bir* a *noktasında türetilebilen iki fonksiyon ise,* $p \cdot f + q \cdot g$ *fonksiyonu* a *noktasında türetilebilir ve*

$$(p \cdot f + q \cdot g)'(a) = p \cdot f'(a) + q \cdot g'(a) \tag{1.5}$$

*dır.*

(Bu Teoremi kanıtlamak için Teorem 1.1.1. i ve Teorem 1.1. birleştirmek yeterlidir.)

Ayrıca, Teorem 1.2. ile Teorem 1.3. ü birleştirmek suretiyle aşağıdaki teorem elde edilir:

1.1.3. *Teorem*: f *ve* g *fonksiyonları aynı bir aralık üzerinde tanımlanmış ve bu aralığa ait bir* a *noktasında türetilebilen ve üs-*

(1) GS-AG, s. 174

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


*telik* $g(a) \neq 0$ *koşulunu sağlayan iki fonksiyon ise,* $\frac{f}{g}$ *fonksiyonu* a *noktasında türetilebilir ve*

$$(1.6) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

*dır*[2].

1.2. *Genelleştirmeler*

Matematik İndüksiyon Prensibini uygulayarak, Teorem 1.1. ve Teorem 1.2. den genelleştirilmiş şekiller elde edilir:

1.2.1. *Teorem :* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *aynı bir aralık üzerinde tanımlanmış ve bu aralığa ait bir* a *noktasında türetilebilen* n *tane fonksiyon ise,* $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ *fonksiyonu* a *noktasında türetilebilir ve*

$$(1.7) \qquad (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(a) = f'_1(a) + f'_2(a) + \ldots + f'_n(a)$$

*dir.*

1.2.2. *Teorem :* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *aynı bir aralık üzerinde tanımlanmış ve bu aralığa ait bir* a *noktasında türetilebilen* n *tane fonksiyon ise,* $f_1 . f_2 . \ldots f_n$ *fonksiyonu* a *noktasında türetilebilir ve*

$$\begin{aligned}(f_1 . f_2 . f_3 \ldots f_{n-1} . f_n)'(a) &= f'_1(a)\, f_2(a)\, f_3(a) \ldots f_{n-1}(a)\, f_n(a) \\ &+ f_1(a)\, f'_2(a)\, f_3(a) \ldots f_{n-1}(a)\, f_n(a) \\ &+ \ldots \\ &+ f_1(a)\, f_2(a)\, f_3(a) \ldots f_{n-1}(a)\, f'_n(a)\end{aligned} \qquad (1.8)$$

*dir.*

Teorem 1.2.1. ile Teorem 1.1.1. i uygulayarak ayrıca aşağıdaki Teorem elde edilir:

1.2.3. *Teorem :* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n *tane reel sabit ve* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *aynı bir aralık üzerinde tanımlanmış ve bu aralığa ait bir* a *noktasında türetilebilen* n *tane fonksiyon ise* $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$ *fonksiyonu* a *noktasında türetilebilir ve*

(2) GS-AG, s. 178-180.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(1.9) $$(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n)'(a) = c_1 f_1'(a) + c_2 f_2'(a) + \ldots + c_n f_n'$$

*dir.*

## 2 — UYGULAMALAR

Türev tanımından hareket ederek, $I(x) = x$ idantik fonksiyonun türevi hesaplanabilir:

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

olduğuna göre

$$I'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

elde edilir.

Bu sonucu Teorem 1.2.2. ile birleştirerek aşağıdaki Teorem elde edilir:

2.1. *Teorem: Bütün reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı olan* $f(x) = x^n$ (*n herhangi bir doğal sayı*) *kuvvet fonksiyonunun her* $a \in \mathbb{R}$ *için türev sayısı*

(1.10) $$f'(a) = n \cdot a^{n-1}$$

*dir*[1].

Teorem 1.2. göz önüne alınarak yukardaki Teorem 3.1. genelleştirilebilir:

2.2. *Teorem: p herhangi bir cebirsel tam sayı olmak üzere, sıfırdan farklı bütün reel sayılar için tanımlı olan* $f(x) = x^p$ *fonksiyonu sıfırdan farklı her a reel sayısı için türetilebilir ve*

(1.11) $$f'(a) = p \cdot a^{p-1}$$

*dir*[2].

---

(1) GS-AG, s. 175-176.

(2) GS-AG, s. 180-182.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


## 3 — POLİNOMLARIN TÜRETİLMESİ

$x$ reel değişkeninin $n$-inci dereceden bir polinomu $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ $n+1$ tane reel sabit olmak üzere

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

genel ifadesi ile verilir[3]. $f_j(x) = x^j$ yazılacak olursa

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j(x)$$

dir, yani

$$P_n = \sum_{j=0}^{n} a_j f_j$$

elde edilir. Şu halde $P_n$ fonksiyonunun türevinin hesabında Teorem 1.2.3. uygulanabilir.

$P_n$ polinomu bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı bir fonksiyondur ve herhangi bir $a$ reel sayısı için, yukardaki ifadeye göre,

$$P'_n = \sum_{j=0}^{n} a_j f'_j(a)$$

yazılabilir. $f_j(x) = x^j$ olduğuna göre, Teorem 2.1. den dolayı $f'_j(a) = j \cdot a^{j-1}$ dir yani

$$P'_n(a) = \sum_{j=0}^{n} a_j j a^{j-1} = \sum_{j=0}^{n} (j \cdot a_j)\, a^{j-1}$$

elde edilir. Bu sonuç, $n$-inci dereceden olan $P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ polinomunun türev fonksiyonunun

$$P'_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (j \cdot a_j)\, x^{j-1} \tag{3.1}$$

---

(3) GS-AG. s. 40.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



olduğunu gösterir: bu ise $(n-1)$ - inci dereceden bir polinomdur.

3.1. *Örnek*

$$P_5(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 37$$

polinomunun $a = 1$ için türev sayısı nedir?

Yukarda açıklananları uygulayarak

$$P'_5(x) = 5x^4 - 12x^3 + 14x$$

elde edilir: şu halde aranan türev sayısı

$$P'_5(1) = 5 - 12 + 14 = 7$$

dir.

3.2. *Alıştırmalar*

Aşağıda verilen polinomların türev fonksiyonlarını bulunuz:

1. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

   Yanıt: $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

2. $f(x) = x^7 + 7x^3 + 3$

   Yanıt: $f'(x) = 7x^6 - 21x^2$

3. $f(x) = x^{99} - 9x^{11} - 33x^3 + 99x$

   Yanıt: $f'(x) = 99(x^{98} - x^{10} - x^2 + 1)$

4. $f(x) = 3x^8 + 4x^7 - 6x^2 + 5$

   Yanıt: $f'(x) = 24x^7 - 28x^6 - 12x$

   $= 4x(6x^6 - 7x^5 - 3)$

5. $f(x) = 5x^4 - \frac{3}{4}x^5 - 0{,}37x^2 + \frac{1}{3}$

   Yanıt: $f'(x) = 30x^3 - \frac{15}{4}x^4 - 0{,}74x$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



6. $f(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 5$

Yanıt : $f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 4x$

7. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

Yanıt : $f'(x) = 15x^2 - 15x^4$

$= 15x^2 (1-x) (1 + x)$

8. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1$

Yanıt : $f'(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

9. $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 3x^4$

Yanıt : $f'(x) = 12(x^5 - x^3 + x^2 - x)$

Aşağıda verilen fonksiyonların türev fonksiyonlarını, 3.1 ve Teorem 1.2. yi uygulayarak hesaplayınız:

1. $f(x) = (3x - 1) (2x + 5)$

Yanıt : $f'(x) = 12x + 13$

2. $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$

Yanıt : $f'(x) = 3x^2 - 3$

3. $f(x) = x^2 (x^3 - 1)$

Yanıt : $f'(x) = 5x^4 - 2x$

4. $f(x) = x^7 (3 - 23x^2)$

Yanıt : $f'(x) = 21x^6 - 207x^8$

## 4 — RASYONEL FONKSİYONLARIN TÜRETİLMESİ

$x$ reel değişkeninin en genel rasyonel fonksiyonu, $x$ değişkeninin iki polinomunun bölümü olarak açıklanır. Şu halde $P$ ve $Q$,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$x$ değişkeninin sırası ile $p$-inci ve $q$-uncu dereceden birer polinomunu göstermek üzere, $x$ değişkeninin en genel rasyonel fonksiyonu

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{p} a_j x^j}{\sum_{k=0}^{q} b_k x^k} \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir. 3. te açıklanan türev alma kuralları ile Teorem 1.1.3.ü kullanarak, R rasyonel fonksiyonunun tanımlı olduğu cümleye ait herhangi bir $a$ noktası için

$$R'(a) = \frac{P'(a) \cdot Q(a) - P(a) \cdot Q'(a)}{(Q(a))^2} \tag{4.2}$$

elde edilir. (4.1.) ile açık ifadesi verilen R rasyonel fonksiyonunun pay ve paydasının dereceleri sırası ile $p$ ve $q$ olduğuna göre

$$R'(x) = \frac{P'(x) \cdot Q(x) - P(x) \cdot Q'(x)}{(Q(x))^2} \tag{4.3}$$

rasyonel fonksiyonunun pay ve paydasının dereceleri sırası ile $p + q - 1$ ve $2q$ olur. Üstelik (4.3) rasyonel fonksiyonu, (4.1) rasyonel fonksiyonunun aynı tanım cümlesini haizdir. (4.3) ile verilen ifadenin, (4.1) ile verilen rasyonel fonksiyonun türevi fonksiyonu olduğu meydandadır

4.1. *Örnek*

$$R(x) = \frac{x^4 + x^3 - 2x + 1}{x^3 - 2x^2 + x + 6}$$

rasyonel fonksiyonun $a = 2$ için türev sayısı nedir?

$$P(x) = x^4 + x^3 - 2x + 1$$
$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x + 6$$

yazılacak olursa, verilen rasyonel fonksiyon

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

şeklini alır ve

$$P'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2 \qquad Q'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

olduğuna göre

$$P'(x) \cdot Q(x) - P(x) \cdot Q'(x) = (4x^3 + 3x^2 - 2)(x^3 - 2x^2 + x + 6) - (x^4 + x^3 - 2x + 1)(3x^2 - 4x + 1)$$

$$= 4x^6 - 5x^5 - 2x^4 + 25x^3 + 7x^2 - 2x - 12 = 3x^6 - 3x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 6x - 1$$

$$= x^6 - 6x^5 + x^4 + 30x^3 + 12x^2 + 4x - 13$$

ve

$$(Q(x))^2 = (x^3 - 2x^2 + x + 6)(x^3 - 2x^2 + x + 6)$$

$$= x^6 - 4x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 12x + 36$$

bulunur ve

$$R'(x) \quad \frac{x^6 - 8x^5 + x^4 + 30x^3 + 12x^2 + 4x - 13}{x^6 - 4x^5 + 6x^4 + 8x^3 - 23x^2 + 12x + 36}$$

dır. Şu halde

$$R'(2) = \frac{107}{68}$$

dır.

4.2. *Alıştırmalar*

Aşağıda verilen rasyonel fonksiyonların türev fonksiyonlarını hesaplayınız:

1. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$

Yanıt: $f'(x) = \dfrac{-19}{(3x-2)^2}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

3. $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+2)^2}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)^2(x^2+4)}{(x^2+2)^3}$

4. $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+4}{x^4}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{-4x^2+9x-16}{x^3}$

5. $f(x) = \dfrac{2x^3-3x^2+4x-2}{x^2}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{3x^3-8x+6}{x^4}$

6. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{2}{x^2+2x+1}$

7. $f(x) = \dfrac{3x-2}{2x+3}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{13}{4x^2+12x+9}$

8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{x^4+2x^2+1}$

9. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$

Yanıt : $f'(x) = -\dfrac{x^2+2x}{x^4+4x^3+8x^2+8x+4}$

10. $f(x) = \dfrac{2x}{3x^2+1}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{2-6x^2}{9x^4+6x^2+1}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



## 5. KÖKLÜ İFADELERİN TÜRETİLMESİ

5.1. $n$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon göz önüne alınsın. $n$ sayısının tek olması halinde bu fonksiyon bütün reel sayılar cümlesi üzerinde, $n$ sayısının çift olması halinde ise bu fonksiyon sadece pozitif reel sayılardan oluşan cümle üzerinde tanımlıdır.

$$F(x) = (f(x))^n = (x^{\frac{1}{n}})^n = \underbrace{x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{n}} \dots x^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ tane}}$$

$$= x^{\frac{1+1+\dots+1}{n}} = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

olduğundan, $F$ fonksiyonu idantik fonksiyona eşit olup 2. de gösterildiği gibi

$$F'(x) = 1$$

dir. Halbuki $F = f^n$ dir. Teorem 1.2.2. yi uygulamak suretiyle (ve türev alma işlemini D operatörü ile göstermek kaydıyla[1]),

$$F'(x) = (D(x^{\frac{1}{n}}))\, x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} \dots x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{n}} (D(x^{\frac{1}{n}}))\, x^{\frac{1}{n}} \dots x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{n}}$$

$$+ \dots + x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} \dots x^{\frac{1}{n}} (D(x^{\frac{1}{n}}))$$

elde edilir. Bu ifadede yer alan toplamda tam $n$ tane terim vardır ve her biri $n-1$ tane $f$ fonksiyonunun çarpımı ile $f$ fonksiyonunun türevinin çarpımından oluşur:

$$\underbrace{x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{n}} \dots x^{\frac{1}{n}}}_{n-1 \text{ tane}} (D(x^{\frac{1}{n}})).$$

Bu durumda

(1) GS-AG, s. 176.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$F'(x) = n\, x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{n}}\, x^{\frac{1}{n}} \dots x^{\frac{1}{n}}\, (D(x^{\frac{1}{n}}))$$

$$= n\, x^{\frac{n-1}{n}}\, (D(x^{\frac{1}{n}}))$$

bulunur ve $F'(x) = 1$ olduğundan

$$1 = n\, x^{\frac{n-1}{n}}\, (D(x^{\frac{1}{n}}))$$

yani

$$D(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n\, x^{\frac{n-1}{n}}}$$

bulunur. Halbuki $D(x^{\frac{1}{n}}) = f'(x)$ tir. şu halde

$$f'(x) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$$

yazılabilir. Böylece, $n$ sayısı doğal bir sayı olmak koşulu ile,

(5.1) $$f(x) = x^{\frac{1}{n}}$$

fonksiyonunun türevinin,

(5.2) $$f'(x) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$$

şeklinde bir fonksiyon olduğu kanıtlanmış olur.

5.2. Bu kez $p$ ve $q$ iki doğal sayı olsun ve

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. $g(x) = x^{\frac{1}{q}}$ yazılacak olursa,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f(x) = (g(x))^p$$

şeklinde yazılabilir ve Teorem 1.2.2. den dolayı

$$f'(x) = g'(x) \cdot g(x)\, g(x) \ldots g(x)\, g(x)$$
$$+ g(x)\, g'(x)\, g(x) \ldots g(x)\, g(x)$$
$$+ \ldots + g(x)\, g(x)\, g(x) \ldots g(x)\, g'(x)$$

elde edilir. Bu ifadede yer alan toplamda her terim $p-1$ tane $g(x)$ fonksiyonunun çarpımı ile $g'(x)$ fonksiyonunun çarpımından oluşur; üstelik toplamda tam $p$ tane böyle terim vardır, yani

$$f'(x) = pg^{p-1}(x) \cdot g'(x)$$

dir. $g$ fonksiyonunun tanımından görüleceği gibi, $g$ ile gösterilen fonksiyon (5.1) de açıklanan tiptendir ve dolayısıyla türev fonksiyonunu elde etmek için (5.2) ile açıklanan formül uygulanabilir, yani $g(x) = x^{\frac{1}{q}}$ şeklinde olduğuna göre

$$g'(x) = \frac{1}{q}\, x^{\frac{1}{q}-1}$$

dir. Buna göre

$$f'(x) = p\,(x^{\frac{1}{q}})^{p-1}\,\frac{1}{q}\,x^{\frac{1}{q}-1}$$

$$= \frac{p}{q}\, x^{\frac{p-1}{q}}\, x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}\, x^{\frac{p}{q}-1}$$

elde edilir. Böylece, $\frac{p}{q}$ herhangi bir pozitif rasyonel sayı olmak üzere

(5.3) $$f(x) = x^{\frac{p}{q}}$$

şeklinde bir fonksiyonun türev fonksiyonunun

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(5.4) $$f'(x) = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

ifadesiyle verildiği kanıtlanmış olur.

5.3. $\rho$ ile herhangi bir rasyonel sayı gösterilsin ve

$$f(x) = x^{\rho}$$

göz önüne alınsın.

$\rho$ sayısı pozitif bir rasyonel sayı ise, $p$ ve $q$ iki doğal sayı olmak üzere, $\rho = \frac{p}{q}$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla göz önüne alınan fonksiyon (5.3) şeklinde olup, türev fonksiyonu (5.4) formülüne göre hesaplanabilir. $\frac{p}{q} = \rho$ olduğuna göre bu formül

$$f'(x) = \rho\, x^{\rho-1}$$

şeklini alır.

$\rho$ sayısı sıfır rasyonel sayısını gösteriyorsa

$$f(x) = x^{\rho} = x^0 = 1$$

ve 1.1. de gösterildiği gibi

$$f'(x) = 0$$

dır. Bu sonuç

$$f'(x) = \rho\, x^{\rho-1}$$

şeklinde de gösterilebilir, zira $\rho = 0$ çarpanı ikinci yanı sıfır yapar.

$\rho$ sayısı negatif bir rasyonel sayı ise, $p$ ve $q$ iki doğal sayı olmak üzere, $\rho = -\frac{p}{q}$ şeklinde gösterilebilir ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$f(x) = x^{\rho} = x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$$

şeklini alır. Şu halde $g(x) = x^{\frac{p}{q}}$ yazılacak olursa

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

olup, Teorem 1.3. e göre

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$$

dir. $g'(x)$ ifadesi (5.4) formülünü uygulayarak bulunur, yani

$$f'(x) = -\frac{\frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}}{(x^{\frac{p}{q}})^2} = -\frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}} x^{\frac{-2p}{q}}$$

$$= \left(-\frac{p}{q}\right) x^{\left(-\frac{p}{q}\right)-1}$$

$$= \rho\, x^{\rho-1}$$

elde edilir.

Buradan sonuç olarak, $p$ herhangi bir rasyonel sayı olmak üzere,

(5.5) $$f(x) = x^{\rho}$$

fonksiyonunun türev fonksiyonunun,

(5.6) $$f'(x) = \rho\, x^{\rho-1}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde olduğu kanıtlanmış olur. Bu sonuç, Teorem 2.2. yi tamamlayan aşağıdaki teoremde özetlenir:

5.4. *Teorem :* $\rho$ *herhangi bir rasyonel sayı olmak üzere,* $f(x) = x^{\rho}$ *fonksiyonunun tanımlı olduğu cümleye ait her* $a$ *değeri için türetilebilir ve*

$$f'(a) = \rho \cdot a^{\rho-1}$$

*dir.*

5.5. *Örnekler :*

a) $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$ fonksiyonunun $a = 2$ için türev sayısı.

$$f'(x) = \frac{3}{5}\, x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5}\, x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\, \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$$

olduğuna göre

$$f'(2) = \frac{3}{5}\, \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$$

dir.

b) $f(x) = x^{-\frac{2}{7}}$ fonksiyonunun $a = 3$ için türev sayısı.

$$f'(x) = \frac{-2}{7}\, x^{-\frac{2}{7}-1} = -\frac{2}{7}\, x^{-\frac{9}{7}} = -\frac{2}{7}\, \frac{1}{x\sqrt[7]{x^2}}$$

olduğuna göre

$$f'(3) = -\frac{2}{7}\, \frac{1}{3\sqrt[7]{9}}$$

dir.

c) $f(x) = x^{\frac{13}{7}}$ fonksiyonunun $a = 1$ için türev sayısı.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$f'(x) = \frac{13}{7}\, x^{\frac{13}{7}-1} = \frac{13}{7}\, x^{\frac{6}{7}} = \frac{13}{7}\, \sqrt[7]{x^6}$$

olduğuna göre

$$f'(1) = \frac{13}{7}$$

dır.

5.6. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki fonksiyonların türev fonksiyonlarını hesaplayınız:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[9]{x^7}}$

Yanıt : $f'(x) = -\dfrac{7}{9x\sqrt[9]{x^7}}$

3. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

4. $f(x) = x\sqrt{x}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

## 6. BİLEŞKE FONKSİYONLARIN TÜRETİLMESİ · ZİNCİR KURALI

Bir $g$ fonksiyonunun değerler cümlesi, $f$ fonksiyonunun tanım cümlesinin bir alt cümlesi ise, $f \circ g$ bileşke fonksiyonu tanımlanabilir ve $f \circ g$ bileşke fonksiyonun tanım cümlesi

$$T(f \circ g) = \{x \in T(g) \mid g(x) \in T(f)\}$$ şeklinde yazılır. Bu

tür bir fonksiyonun türetilmesi ile ilgili aşağıdaki teorem kanıtlanır[1]:

6.1. *Teorem: g fonksiyonu, tanım cümlesine ait bir a noktasında ve f fonksiyonu, tanım cümlesine ait g(a) noktasında türetilebilen iki fonksiyon ise, f ∘ g bileşke fonksiyonu a noktasında türetilebilir ve*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) \tag{6.1}$$

*dir.*

6.2. *Örnekler:*

6.2.1. $$f(x) = (x^4 - 3)^3$$

fonksiyonunun türev fonksiyonu nedir?

$$g(x) = x^4 - 3, \quad h(y) = y^3$$

yazılacak olursa, verilen fonksiyon

$$f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$$

şeklinde gösterilebilir. Buna göre, Teorem 6.1. den dolayı,

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir.

$$h'(y) = 3y^2, \quad g'(x) = 4x^3$$

olduğundan

$$f'(x) = 3(g(x))^2 \cdot 4x^3 = 12x^3(x-3)^2$$

elde edilir.

6.2.2. $$f(x) = \sqrt[3]{(3x-2)^4}$$

fonksiyonunun türev fonksiyonu nedir?

(1) GS-AG. s. 162-169

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$g(x) = 3x - 2, \quad h(y) = y^{\frac{4}{3}}$$

yazılacak olursa, verilen fonksiyon

$$f(x) = h(g(x)) = (h \circ g)(x)$$

şeklini alır. Şu halde, Teorem 6.1. i uygulayarak

$$f'(x) = (h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

elde edilir.

$$h'(y) = \frac{4}{3} y^{\frac{1}{3}}, \quad g'(x) = 3$$

olduğundan

$$f'(x) = \frac{4}{3} (g(x))^{\frac{1}{3}} \cdot = 4(3x-2)^{\frac{1}{3}}$$

dir.

6.2.3. $$f(x) = (x^2 + 1)^3 (2x + 4)^{\frac{1}{3}}$$

fonksiyonunun türev fonksiyonu nedir?

$$F(x) = (x^2 + 1)^3, \quad G(x) = (2x + 4)^{\frac{1}{3}}$$

yazılacak olursa

$$f(x) = F(x) \cdot G(x)$$

şeklini alır. Üstelik

$$h(y) = y^3, \quad k(x) = x^2 + 1, \; p(t) = t^{\frac{1}{3}}, \; q(u) = 2u + 4$$

yazılması halinde

$$F(x) = h(k(x)) = (h \circ k)(x); \; G(x) = p(q(x)) = (p \circ q)(x)$$

dır. Şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f(x) = ((h \circ k)(x)) \cdot ((p \circ q)(x))$$

dır ve

$$f'(x) = (h'(k(x)) \cdot k'(x)) \cdot G(x) + F(x) \cdot (p'(q(x)) \, q'(x))$$

dir.

$$h'(y) = 3y^2,\ k'(z) = 2z,\ p'(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}},\ q'(u) = 2$$

olduğuna göre

$$f'(x) = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x \cdot (2x+4)^{\frac{1}{3}} + (x^2+1)^3 \frac{1}{3} (2x+4)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2$$

$$= (x^2+1)^2 \left(6x(2x+4)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}(x^2+1)(2x+4)^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^2 (2x+4)^{-\frac{2}{3}} (18x(2x+4) + 2(x^2+1))$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^2 (2x+4)^{-\frac{2}{3}} (38x^2 + 72x + 2)$$

dır.

6.2.4. $u$ ve $v$ aynı bir cümle üzerinde tanımlanmış iki fonksiyon olsun. $u$ ve $v$, tanım cümlelerine ait her nokta türetilebilen iki fonksiyon ise, $n$ ve $m$ iki doğal sayı olmak üzere,

$$f(x) = (u(x))^n (v(x))^m$$

fonksiyonunun türev fonksiyonu için bir formül bulunuz.

$$F(x) = (u(x))^n,\ G(x) = (v(x))^m$$

yazılacak olursa, $f$ fonksiyonu

$$f(x) = F(x) \cdot G(x)$$

şeklinde gösterilebilir ve dolayısıyla

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f'(x) = F'(x) \cdot G(x) + F(x) \cdot G'(x)$$

dir. Halbuki

$$h(x) = x^n, \quad k(x) = x^m$$
$$F(x) = h(u(x)) = (h \circ u)(x)$$
$$G(x) = k(v(x)) = (k \circ v)(x),$$

olup

$$F'(x) = h'(u(x)) \cdot u'(x), \quad G'(x) = k'(v(x)) \cdot v'(x)$$

dir.

$$h'(x) = nx^{n-1}, \quad k'(x) = mx^{m-1}$$

olduğundan

$$F'(x) = n(u(x))^{n-1} u'(x), \quad G'(x) = m(v(x))^{m-1} v'(x)$$

olup

$$f'(x) = n(u(x))^{n-1} u'(x) \cdot (v(x))^m + m(u(x))^n (v(x))^{m-1} v'(x)$$

dir.

## 6.3. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki fonksiyonların türev fonksiyonlarını hesaplayınız:

1) $f(x) = (3x + 5)^{10}$

Yanıt : $f'(x) = 30(3x + 5)^9$

2) $f(x) = (x + 5)^{-3}$

Yanıt : $f'(x) = -3(x + 5)^{-4}$

3) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (x^3 - 2x)^3$

Yanıt : $f'(x) = 2(x^2 + 1)(x^3 - 2x)$
$\cdot [(x^3 - 2x) 2x + (3x^2 - 2)(x^2 + 1)]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



4) $f(x) = (x^2 - x^{-1} + 1)\ (x^3 + 2x - 6)^4$

Yanıt : $f'(x) = (2x + x^{-2})\ (x^3 + 2x - 6)^4$

$+ 4(3x^2 + 2)\ (x^2 + x^{-1} + 1)\ (x^3 + 2x - 6)^3$

5) $f(x) = \dfrac{(2x-6)^4}{(x^3+5)^2}$

Yanıt : $f'(x) = 8(2x - 6)^3\ (x^3+5)^{-2}$

$+ 4x\ (2x - 6)^4\ (x^3 + 5)^{-2}$

6) $f(x) = (2x + 3)^{\frac{10}{3}}$

Yanıt : $f'(x) = \dfrac{20}{3}\ (2x + 3)^{\frac{7}{3}}$

7) $f(x) = (x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}}$

Yanıt : $f'(x) = 3(x + 1)\ (x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}}$

8) $f(x) = (2x^3 - 3x^2 + 3x - 5)^{-\frac{1}{3}}$

Yanıt : $f'(x) = -(2x^2 - 2x + 1)$

$\cdot\ (2x^3 - 3x^2 + 3x - 5)^{-\frac{4}{3}}$

9) $f(x) = \sqrt[3]{(x^3+3x+2)^2}$

Yanıt : $f'(x) = 2(x^2+1)\ (x^3+3x+2)^{-\frac{1}{3}}$

10) $u$, $v$ ve $w$ fonksiyonları türetilebilen üç fonksiyon, $\rho$, $\sigma$ ve $\tau$ üç rasyonel sayı olmak üzere,

$$f(x) = (u(x))^{\rho}\ (v(x))^{\sigma}\ (w(x))^{\tau}$$

fonksiyonu veriliyor. Türev fonksiyonunu ifade eden formülü bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



## 7 — BİR ALIŞTIRMA

7.1. $f$ fonksiyonu bütün reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlanmış olsun. Her $x \in IR'$ için, $f$ fonksiyonu

$$f(-x) = f(x) \tag{7.1}$$

koşulunu sağlarsa, $f$ fonksiyonuna *çift*,

$$f(-x) = -f(x) \tag{7.2}$$

koşulunu sağlarsa, $f$ fonksiyonuna *tek* fonksiyon denir[1].
Reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı her $f$ fonksiyonuna

$$f_t(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{7.3}$$

$$f_c(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{7.4}$$

fonksiyonları tekabül ettirilebilir: $f_t$, fonksiyonunun, $f$ fonksiyonunun tek kısmı, $f_c$ siyonuna, $f$ fonksiyonunun *çift kısmı* denir.

(7.3) ve (7.4) ten

$$f(x) = f_t(x) + f_c(x)$$

elde edilir, yani

$$f = f_t + f_c \tag{7.5}$$

dir; buna göre her $f$ fonksiyonu, tek ve çift kısımlarının toplamı olarak ifade edilebilir.

Üstelik (7.3) ten

$$f_t(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -f_t(x)$$

(1) GS-AG, s. 237.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



elde edilir, yani *f fonksiyonunun tek kısmı tek bir fonksiyondur.* Aynı şekilde, (7.4) bağıntısından hareketle

$$f_c(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_c(x)$$

elde edilir, yani *f fonksiyonunun çift kısmı çift bir fonksiyondur.*

Nihayet, (7.3.) ve (7.4) tanım bağıntılarından görüleceği gibi, *f* fonksiyonu çift ise, tek kısmı sıfır, yani *f fonksiyonu çift ise çift kısmına eşittir; f* fonksiyonu tek ise, çift kısmı sıfır, yani *f* fonksiyonu tek ise tek kısmına eşittir.

7.3.1. *f fonksiyonunun tek kısmının türev fonksiyonu, f fonksiyonunun türevinin çift kısmına eşittir;* aynı şekilde *f fonksiyonunun çift kısmının türev fonksiyonu, f fonksiyonunun türevinin tek kısmına eşittir.*

Gerçekten, (7.3) ten

$$Df_t(x) = \frac{f'(x) + f'(-x)}{2} = f'_c(x) \tag{7.6}$$

ve (7.4) ten

$$Df_c(x) = \frac{f'(x) - f'(-x)}{2} = f'_t(x) \tag{7.7}$$

elde edilir.

Bu halde, yukarda kaydedilenler göz önünde bulundurularak şu sonuç elde edilir: *f fonksiyonu çift bir fonksiyon ise, türev fonksiyonu tektir ve tek bir fonksiyon ise türev fonksiyonu çifttir.*

Gerçekten, *f* fonksiyonu çift ise

$$f = f_c$$

ve $f' = Df_c$ dir: (7.7) ye göre $Df_c = f'_t$ dir, yani $f' = f'_t$ elde edilir ve dolayısıyla $f'$ tek bir fonksiyondur. Aynı şekilde, *f* fonksiyonu tek ise

$$f = f_t$$

dir. $f' = Df_t$ olur ve (7.6) bağıntısını uygulayarak $f' = f'_c$ elde edilir, yani $f'$ çifttir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM ONBİR

# TÜREV KAVRAMININ UYGULANMASI

## 1 — BİR FONKSİYONUN MAKSİMUM VE MİNİMUMLARI HAKKINDA

A gibi bir aralık üzerinde tanımlanmış bir $f$ fonksiyonu verilmiş olsun. A aralığına ait bir $a$ noktası verildiğinde, her

$$x \in \ ]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[ \subset A$$

için

$$f(x) \leqslant f(a) \tag{1.1}$$

olacak şekilde pozitif bir $\varepsilon$ reel sayısı bulunabilirse, $a$ noktasına $f$ fonksiyonu için bir *lokal maksimum* noktası denir. Aynı şekilde, her $x \in\ ]a-\varepsilon,\ a+\varepsilon[ \subset A$ için

$$f(x) \geqslant f(a) \tag{1.2}$$

olacak şekilde pozitif bir $\varepsilon$ reel sayısı bulunabilirse, $a$ noktasına $f$ fonksiyonu için bir *lokal minimum* noktası denir.

(1.1) ve (1.2) nin yerine

$$f(x) < f(a) \tag{1.3}$$

ve

$$f(x) > f(a) \tag{1.4}$$

bağıntılarının gerçekleşmesi halinde, lokal maksimumu veya lokal minimumu *kesin*dir denir.

Her $x \in A$ için

$$f(x) \leqslant f(a) \tag{1.5}$$

veya

$$f(x) \geqslant f(a) \tag{1.6}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



olması halinde, $a$ noktasına sırası ile *mutlak maksimum* veya *mutlak minimum* noktası denir. Burdan her mutlak maksimumun (veya mutlak minimumun) aynı zamanda bir lokal maksimum (veya lokal minimum) olduğu görülür.

Bundan böyle genellikle lokal maksimum ve lokal minimum sözcüklerinin yerine kısaca maksimum ve minimum sözcükleri kullanılacaktır.

Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarının tümüne fonksiyonun *ekstremum* noktaları denir[1].

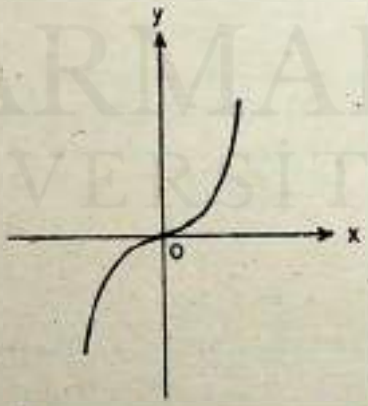
1.1. *Teorem : f fonksiyonu A üzerinde tanımlanmış ve türetilebilen bir fonksiyon ise, bu fonksiyonun* $a \in A$ *noktasında bir lokal maksimumu veya bir lokal minimumu olması için gerek koşul*

$$f'(a) = 0 \tag{1.1.1}$$

*olmasıdır*[2].

(1.1.1)'in sadece gerek bir koşul olduğu, yeter bir koşul olmadığı

$$f(x) = x^3$$




Şekil 17

(1) GS-AG, s. 196-202 ye bak.

(2) GS-AG, s. 202 ye bak.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



fonksiyonunu incelemekle görülebilir: gerçekten $f'(x) = 3x^2$ ve dolayısıyla $f'(0) = 0$ olmasına rağmen $f$ fonksiyonunun 0 noktasında ne bir lokal maksimumu ne de bir lokal minimumu vardır.

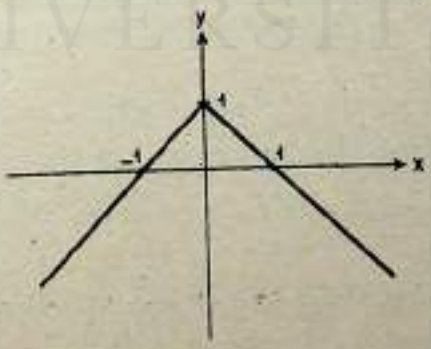
1.1. Teoremi'nin sadece türetilebilen fonksiyonlar için geçerli olması da ayrıca önem taşır. Örneğin

$$f(x) = 1 - \sqrt{x^2}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun $x = -1$ ve $x = 1$ için sıfır değerini aldığı meydandadır. Ayrıca, $-1$ den küçük veya 1 den büyük $x$ değerleri için $\sqrt{x^2}$ sayısı 1 sayısından büyük bir sayı olacağından, fonksiyon $[-1, 1]$ aralığının dışında negatif kalmak zorundadır. $]-1, 1[$ aralığına ait değerler için $\sqrt{x^2}$ sayısı 1 sayısından küçüktür ve dolayısıyle bu aralıkta bulunan $x$ değerleri için fonksiyon pozitif olur: üstelik $x = 0$ için fonksiyon 1 değerini alır ve bu nokta fonksiyonun mutlak maksimumudur. Ancak, $f$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevini hesaplamak için teşkil edilecek olan farklar oranı

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1 - \sqrt{h^2} - 1}{h} = -\frac{\sqrt{h^2}}{h} = -\frac{|h|}{h}$$

olup, bu oran pozitif $h$ değerleri için $-1$ sayısına, negatif $h$ değerleri için 1 sayısına eşit olur. Dolayısıyla $f$ fonksiyonunun 0 noktasındaki sağ ve sol türevleri farklı olup, bu noktadaki türev sayısı tanımlanmış değildir. Fonksiyonun grafiği Şekil 18'de gösterilmiştir:




Şekil 18

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukardaki örnek, $f$ fonksiyonunun 0 noktasında türetilememesinin, 1.1. Teoreminin bu fonksiyona uygulanmasını engellediğini gösterir. Üstelik, *bir fonksiyonun ekstremumları incelendiğinde, fonksiyonun türetilemediği noktalar üzerine eğilmek zorunluluğunu da ortaya koyar.*

$f$ fonksiyonunun türevini sıfır yapan $x$ değerlerine, $f$ fonksiyonunun *kritik noktaları* denir. Şu halde, bir foksiyonun ekstremumları fonksiyonun kritik noktalarında bulunur, fakat her kritik nokta ekstremum noktası olmak zorunda değildir; ayrıca, fonksiyonun türevinin tanımlı olmadığı noktalar da ekstremum noktaları olabilir.

1.2. *Örnekler :*

1.2.1. $$f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$$

fonksiyonunun ekstremum noktalarının bulunması.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^3 - 3x^2 - 18x \\ &= 3x(x^2 - x - 6) \\ &= 3x(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

olduğuna göre, $f$ fonksiyonu bütün IR reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlı ve süreklidir. Kritik noktaları ise $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ ve $x_3 = 3$ noktalarıdır (*Uyarı*: Kritik noktaları artan sıraya göre numaralamaya alışmak daima faydalıdır!). Ayrıca, $f$ fonksiyonu bir polinom olduğundan, türetilemediği hiçbir reel $x$ noktası da yoktur. Şu halde $f$ fonksiyonunun ekstremum noktaları yukardaki üç noktadır.

$$f(-2) = -9$$

dur ve $\alpha$ herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$f(-2-\alpha) = -9 + 15\alpha^2 + 7\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^4 > -9 = f(-2)$$

$$f(-2+\alpha) = -9 + 15\alpha^2 - 7\alpha^3 + \frac{3}{4}\alpha^4 > -9 = f(-2)$$

dır. Şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$f(-2-\alpha) = f(-2) + \alpha^2 \left(\frac{3}{4}\alpha^2 + 7\alpha + 15\right)$$

$$f(-2+\alpha) = f(-2) + \alpha^2 \left(\frac{3}{4}\alpha^2 - 7\alpha + 15\right)$$

yazılabilir. $\alpha$ sayısı pozitif olduğundan

$$\frac{3}{4}\alpha^2 + 7\alpha + 15$$

daima pozitiftir.

$$\frac{3}{4}\alpha^2 - 7\alpha + 15$$

ifadesinin pozitif olması için $\alpha$ sayısının $\frac{10}{3}$ ten küçük veya 6 dan büyük olması gerekir. Şu halde

$$\left]-2-\frac{10}{3}\,;\ -2+\frac{10}{3}\right[$$

aralığında alınan bütün $x$ değerleri için

$$f(x) \geqslant f(-2)$$

dir: dolayısıyla $-2$ noktası $f$ fonksiyonu için bir *lokal minimum* noktasıdır.

Benzer şekilde

$$f(0) = 7$$

dir ve $\alpha$ herhangi bir pozitif sayı olmak üzere

$$f(0-\alpha) = f(-\alpha) = 7 + \alpha^2 \left(\frac{3}{4}\alpha^2 + \alpha - 9\right)$$

$$f(0+\alpha) = f(\alpha) = 7 + \alpha^2 \left(\frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha - 9\right)$$

bulunur. $\alpha$ pozitif ve $\frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3}$ sayısından küçük kalması halinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{3}{4}\alpha^2 + \alpha - 9$$

sayısı negatif ve dolayısıyla

$$f(0-\alpha) < f(0) = 7$$

dir. Aynı şekilde, $\alpha$ sayısı pozitif ve $\frac{4}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}$ sayısından küçük kalması halinde

$$\frac{3}{4}\alpha^2 - \alpha - 9$$

sayısı negatif ve dolayısıyla

$$f(0+\alpha) < f(0) = 7$$

dir. Buna göre,

$$\frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3} < \frac{4}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}$$

olduğundan,

$$\left]-\frac{4}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\sqrt{7} - \frac{2}{3}\right[$$

aralığına ait her $x$ değeri için

$$f(x) \leqslant f(0)$$

dır: dolayısıyla 0 noktası $f$ fonksiyonu için bir *lokal maksimum* noktasıdır.

Benzer şekilde

$$f(3) = -40,25$$

dir ve $\alpha$ herhangi bir pozitif reel sayı olmak üzere

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$f(3-\alpha) = -40,25 + \alpha^3\ (\frac{3}{4}\alpha^2 - 8\alpha + 22,50)$$

$$f(3+\alpha) = -40,25 + \alpha^2\ (\frac{3}{4}\alpha^2 + 8\alpha + 22,50)$$

elde edilir. Gerek

$$\frac{3}{4}\alpha^2 - 8\alpha + 22,50$$

gerekse

$$\frac{3}{4}\alpha^2 + 8\alpha + 22,50$$

kuadratik ifadelerinin diskriminantları negatif olduğundan, $\alpha$ sayısı ne olursa olsun bu ifadeler pozitiftir. Dolayısıyla, $\alpha$ sayısı pozitif kalmak koşulu ile

$$f(3-\alpha) > f(3), \quad f(3+\alpha) > f(3)$$

olup, 3 noktası verilen fonksiyonun *mutlak minimum* noktasıdır.

1.2.2. $f(x) = 2 - |x^3 - 1|$

fonksiyonunun ekstremum noktalarının bulunması.

Verilen fonksiyonun açık ifadesi

$$x^3 - 1$$

'in pozitif veya negatif olmasına bağlıdır. Halbuki bu ifadenin pozitif veya negatif olması $x > 1$ veya $x < 1$' olmasına bağlıdır. Şu halde verilen fonksiyon

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x^3 - 1) & x \geqslant 1 \\ 2 + (x^3 - 1) & x \leqslant 1 \end{cases}$$

yani

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^3 & x \geqslant 1 \\ 1 + x^3 & x \leqslant 1 \end{cases}$$

şeklinde açıklanabilir.

$x > 1$ olması halinde $f'(x) = -5x^4$ ve $x < 1$ olması halinde de $f'(x) = 5x^4$ tür halbuki $x = 1$ için fonksiyonun türevi tanımlanamaz. Gerçekten $h > 0$ için

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3 - (1+h)^3 - (3-1)}{h}$$

$$= \frac{-(5h + 10h^2 + 10h^3 + 5h^4 + h^5)}{h}$$

$$= -5 - 10h + 10h^2 + 5h^3 + h^4$$

olup

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -5$$

ve $h < 0$ için

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{1 + (1+h)^5 - (1+1)}{h}$$

$$= \frac{5h + 10h^2 + 10h^3 + 5h^4 + h^5}{h}$$

$$= 5 + 10h + 10h^2 + 5h^3 + h^4$$

olup

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 5$$

olduğundan $x = 1$ noktasında fonksiyonun türevi yoktur.

$x \geqslant 1$ için $2 - (x^3 - 1) = 0$ denkleminden $x^3 = 3$, yani $x = \sqrt[3]{3}$ elde edilir; $x < 1$ için $2 + (x^3 - 1) = 0$ denkleminden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$x^3 = -1$, yani $x = -1$ elde edilir. Şu halde verilen fonksiyon yatay eksenini $-1$ ve $\sqrt{3}$ noktalarında keser.

$x > 1$ için $f'(x) = 0$ yazılacak olursa, $-5x^4 = 0$, yani $x = 0$ elde edilir ve bu değer $x > 1$ ile bağdaşamayacağına göre, verilen fonksiyonun 1 sayısından büyük kritik noktası yoktur. $x < 1$ için $f'(x) = 0$ denklemi $5x^4 = 0$, yani $x = 0$ değerini verir. Şu halde $x_1 = 0$ noktası verilen $f$ fonksiyonunun *tek* kritik noktasıdır.

Verilen fonksiyonun ekstremumları dolayısıyla ya $x_1 = 0$ kritik noktasında veya verilen fonksiyonun tanımlı olduğu fakat türevinin tanımlı olmadığı $x_2 = 1$ noktasında bulunabilirler.

$x_1 = 0$ için $f(0) = 1$ dir. $\alpha$ pozitif reel sayısı ne olursa olsun

$$f(0 - \alpha) = 1 - \alpha^5$$

$$f(0 + \alpha) = 1 + \alpha^5$$

bulunur. Şu halde $\alpha$ sayısının pozitif ve 1 sayısından küçük kalma koşulunu sağlaması halinde fonksiyonun tanımından dolayı,

$$f(0 - \alpha) = 1 - \alpha^5 < 1 < 1 + \alpha^5 = f(0 + \alpha)$$

olup, 0 sayısının hiç bir civarında $f$ fonksiyonu bir lokal maksimum veya bir lokal minimum durumu göstermez, yani $x_1 = 0$ için fonksiyonun ekstremumu yoktur.

$x_2 = 1$ için $f(1) = 2$ dir. $\alpha$ pozitif reel sayısı ne olursa olsun

$$f(1 - \alpha) = 1 + (1 - \alpha)^5$$

$$= 2 - 5\alpha + 10\alpha^2 - 10\alpha^3 + 5\alpha^4 - \alpha^5$$

$$f(1 + \alpha) = 3 - (1 + \alpha)^5$$

$$= 2 - 5\alpha - 10\alpha^2 - 10\alpha^3 - 5\alpha^4 - \alpha^5$$

elde edilir.

Pozitif $\alpha$ sayıları için

$$5\alpha + 10\alpha^2 + 10\alpha^3 + 5\alpha^4 + \alpha^5$$

ifadesi daima pozitif olacağından, bütün $\alpha > 0$ sayıları için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(i) $$f(1+\alpha) < f(1)$$

dir.

$$f(1-\alpha) = 1 + (1-\alpha)^3$$

tür: $\alpha$ sayısı pozitif olduğundan $1-\alpha < 1$ olmak zorundadır. $\alpha$ sayısı

$$0 < 1-\alpha < 1$$

olacak şekilde seçilmişse

$$0 < (1-\alpha)^3 < 1$$

dir ve dolayısıyla

$$1 + (1-\alpha)^3 < 2$$

dir $\alpha$ sayısı

$$1-\alpha < 0$$

olacak şekilde seçilmişse

$$(1-\alpha)^3 < 0$$

dir ve dolayısıyla

$$1 + (1-\alpha)^3 < 1 < 2$$

dir. Şu halde $\alpha$ sayısı pozitif olmak koşulu ile nasıl seçilirse seçilsin

(ii) $$f(1-\alpha) < f(1)$$

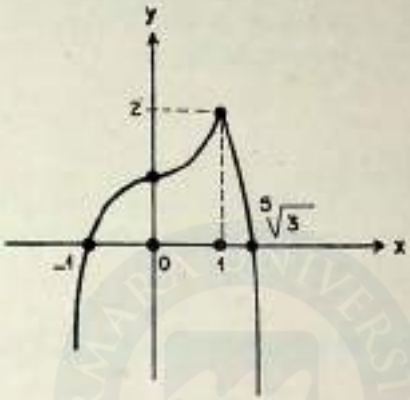
dir. Şu halde (i)' ve (ii) den dolayı her $x$ reel sayısı için

$$f(x) \leqslant f(1)$$

yani $x_2 = 1$ noktası verilen $f$ fonksiyonunun mutlak maksimum noktasıdır. $f$ fonksiyonunun grafiği Şekil 18'de gösterilmiştir: Bu örnek, hem bir kritik noktanın ekstremum noktası olmak zorunda olmadığını, hem de fonksiyonun türevinin var olmadığı bir noktada fonksiyonun bir ekstremum noktasının var olabileceğini göstermektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ






Şekil 19

1.3. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki fonksiyonların ekstremumlarını inceleyiniz :

1. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

Yanıt : Kritik noktalar

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3;$

$x_1$ ve $x_3$ te mutlak minimum
$x_2$ de lokal maksimum vardır.

2. $f(x) = x(x+1)^3\,(x-3)^2$

Yanıt : Kritik noktalar

$$x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{4}\,(3 - \sqrt{17})$$

$$x_3 = \frac{1}{4}\,(3 + \sqrt{17}),\ x_4 = 3;$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$x_1$ de ekstremum yok, $x_2$ de mutlak minimum, $x_3$ te lokal maksimum, $x_4$ te lokal minimum vardır.

3. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

Yanıt: Kritik noktalar $x_1 = -2$ ve $x_2 = 2$; $x_1$ mutlak minimum ve $x_2$ mutlak maksimum noktasıdır.

## 2 — TÜRETİLEBİLEN FONKSİYONLAR HAKKINDA ESAS TEOREMLER

Türetilebilen fonksiyonlar hakkında aşağıda sıralan üç temel teorem bu fonksiyonlar hakkında bir çok sonucun elde edilmesinde önemli bir rol oynar[1].

2.1. *Rolle Teorem:* $[a, b]$ *kapalı aralığında tanımlanmış, bu aralıkta sürekli,* $]a, b[$ *açık aralığında türetilebilen ve* $f(a) = f(b)$ *koşulunu sağlayan bir* $f$ *fonksiyonu verilmiş ise* $]a, b[$ *aralığında* $f'(x) = 0$ *olacak şekilde en azından bir* $x$ *noktası vardır.*

2.2. *Ortalama Değer Teoremi:* $[a, b]$ *kapalı aralığında tanımlanmış, bu aralıkta sürekli ve* $]a, b[$ *aralığında türetilebilen bir* $f$ *fonksiyonu verilmiş olsun.* $]a, b[$ *aralığında*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*olacak şekilde en azından bir* $x$ *noktası vardır.*

2.3. *Cauchy Ortalama Değer Teoremi:* $f$ *ve* $g$, $[a, b]$ *kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış, sürekli ve* $]a, b[$ *açık aralığı üzerinde türetilebilen iki fonksiyon olsun,* $]a, b[$ *aralığında*

$$(f(b) - f(a)) \cdot g'(x) = (g(b) - g(a)) \cdot f'(x)$$

*olacak şekilde en azından bir* $x$ *noktası vardır.*

(1) GS-AG, s. 204-208 ve 215-216 ya bakınız

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Ortalama Değer Teoremine bazı yazarlar Lagrange Teoremi adını verirler[2].

## 3. SONUÇLAR

Bir $]p, q[$ aralığı üzerinde tanımlanmış bir $f$ fonksiyonu verilmiş olsun. $x_1$ ve $x_2$ noktaları, $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan $]p, q[$ aralığına ait herhangi iki nokta olmak üzere

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ise, $f$ fonksiyonuna *artan*,

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

ise, $f$ fonksiyonuna *eksilmeyen*,

$$f(x_1) > f(x_2)$$

ise, $f$ fonksiyonuna *eksilen*,

$$f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

ise, $f$ fonksiyonuna *artmayan* fonksiyon denir.

Ortalama Değer Teoremini uygulayarak

3.1. *Sonuç : Bir aralığa ait her $x$ değeri için $f'(x) > 0$ ise, $f$ fonksiyonu bu aralıkta artan, $f'(x) \geqslant 0$ ise, $f$ fonksiyonu bu aralıkta eksilmeyen, $f'(x) < 0$ ise, $f$ fonksiyonu bu aralıkta eksilen, $f'(x) \leqslant 0$ ise, $f$ fonksiyonu bu aralıkta artmayan bir fonksiyondur*

sonucu kanıtlanır[1].

Bu noktadan hareket ederek, $f$ fonksiyonunun kritik noktasından küçük $x$ değerleri için $f'$ pozitif, yani fonksiyon artan, ve kritik noktasından büyük $x$ değerleri için $f'$ negatif, yani

---

(2) Örneğin, Isaac A. Maron, **Problems in Calculus of One Variable**, Mir. Publishers, Moskova, (1975) (İngilizce çevirisi - Çeviren Leonid Levaht).

1) GS-AG, s. 210-212

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

fonksiyon eksilen bir fonksiyon ise, $f$ fonksiyonunun kritik noktasındaki ekstremumu bir maksimum; tersine, $f$ fonksiyonunun kritik noktasından küçük $x$ değerleri için $f'$ negatif, yani fonksiyon eksilen, ve kritik noktasından büyük $x$ değerleri için $f'$ pozitif, yani fonksiyon artan bir fonksiyon ise, $f$ fonksiyonunun kritik noktasındaki ekstremumu bir minimum noktasıdır. $f$ fonksiyonunun tanımlı olup türev sayısının tanımlanamadığı noktalar için de benzer uygulama yapılarak, ekstremumu olup olmadığı ve ekstremumunun cinsini belirlemek mümkündür.

*3.2. Örnek:* $f(x) = -x^2 (x-2)^{\frac{2}{3}}$

fonksiyonunun ekstremumlarının incelenmesi.

$$f'(x) = -2x (x-2)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{5} x^2 (x-2)^{-\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{-2x (x-2) - \frac{2}{5} x^2}{5 \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}$$

$$= \frac{4x (5-3x)}{5 \cdot \sqrt[5]{(x-2)^3}}$$

olduğuna göre, $f$ fonksiyonunun kritik noktaları $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{5}{3}$ tür. Ayrıca $x_3 = 2$ noktasında $f$ fonksiyonunun kendisi tanımlıdır fakat $f'$ türev fonksiyonu tanımlı değildir. $f$ fonksiyonunun ekstremumlarını incelemek için $f'$ türev fonksiyonunun 0 noktasından önce, sıfır ile $\frac{5}{3}$ arası, $\frac{5}{3}$ ve 2 arası ve 2 sayısından sonraki işaretini incelemek gerekir.

$$f'(-1) = \frac{-4.8}{5 \cdot \sqrt[5]{-27}} = \frac{4.8}{5 \cdot \sqrt[5]{27}} > 0$$

$$f'(1) = \frac{4.2}{5} (-1) < 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


olduğundan, 0 noktası $f$ fonksiyonu için bir maksimum noktasıdır. Üstelik $f$ fonksiyonuna bakarak görüleceği gibi, $f$ fonksiyonu daima negatif veya sıfır değerlerini alabilmektedir; şu halde $x_1=0$ kritik noktasında $f$ fonksiyonunun bir *mutlak maksimum* noktası vardır.

$$f'(1) < 0$$

ve

$$f'\left(\frac{7}{4}\right) = 7/5\left(-\frac{1}{4}\right) / \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{4}\right)^3} > 0$$

olduğundan, $f$ fonksiyonunun $x_2 = \frac{5}{3}$ noktasında bir minimum noktası vardır. Fonksiyonun bu noktadaki değeri

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{-25/9}{\sqrt[3]{9}} \simeq -1.79\ldots$$

olup, bu sayı oldukça küçüktür. Halbuki

$$f(3) = -9.1 = -9$$

dir, yani $f(3) < f\left(\frac{5}{3}\right)$ tür: şu halde $x_2 = \frac{5}{3}$ noktası $f$ fonksiyonunun ancak bir *lokal minimum* noktasıdır.

Nihayet

$$f'\left(\frac{7}{4}\right) > 0$$

ve

$$f'(3) = \frac{12}{5}(-4) < 0$$

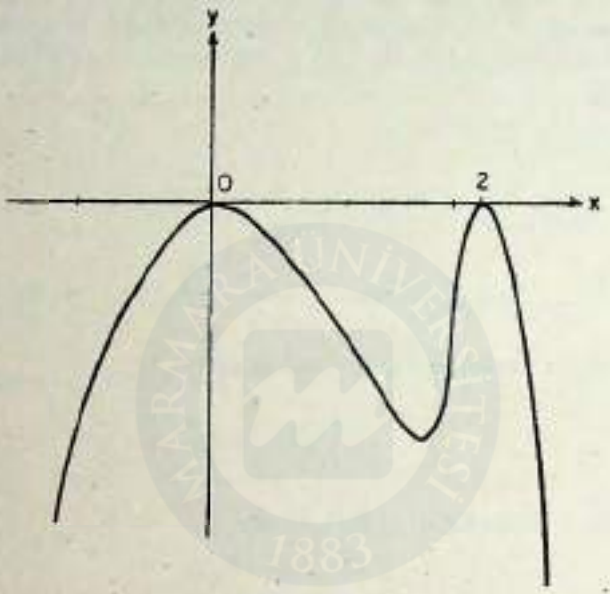
dır. Şu halde $f$ fonksiyonunun, $f'$ türev fonksiyonunun tanımlanmış olmadığı $x_3 = 2$ noktasında bir maksimum noktası vardır. Bu noktada

$$f(2) = 0$$

olduğuna göre, yukarda açıklanan sebeplerden dolayı, $f$ fonksi-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yonunun maksimumu bir mutlak maksimumdur. Fonksiyonun grafiği Şekil 20'de açıklanmıştır.




Şekil 20.

3.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki fonksiyonların ekstremumlarını inceleyiniz:

1. $f(x) = \dfrac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$

Yanıt: $-2$ ve 2 noktalarında fonksiyonun maksimumları, 0 noktasında fonksiyonun minimumu vardır.

2. $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$

Yanıt: Fonksiyonun $-3$ noktasında bir maksimumu, 2 noktasında bir minimumu vardır.

3.3. $f$ fonksiyonunun ikinci türev fonksiyonunun hesaplanabildiği noktalarda, 3.1. ile açıklanan sonucun yerine daha kısa bir kural uygulanabilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


3.3.1. *Kural :* $x_k$, $f$ *fonksiyonunun bir kritik noktası olsun:* $f''(x_k) < 0$ *ise,* $x_k$ *noktası* $f$ *fonksiyonu için bir lokal maksimum,* $f''(x_k) > 0$ *ise,* $x_k$ *noktası* $f$ *fonksiyonunun bir lokal minimumudur*[1].

3.3.2. *Örnek :* $f(x) = (x + 5)^2 (x^3 - 10)$

fonksiyonunun ekstremumlarının bulunması.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x + 5)\ (x^3 - 10) + (x + 5)^2\ (3x^2) \\ &= (x + 5)\ (2x^3 - 20 + 3x^3 + 15x^2) \\ &= (x + 5)\ (5x^3 + 15x^2 - 20) \\ &= 5(x + 5)\ (x^3 + 3x^2 - 4) \end{aligned}$$

dir. Son çarpanda $x$ yerine 1 sayısı konduğunda sıfır elde edildiğinden, bu çarpan $x - 1$ ile bölünebilir ve

$$f'(x) = 5(x + 5)\ (x-1)\ (x^2 + 4x + 4)$$

yani

$$f'(x) = 5(x + 5)\ (x-1)\ (x + 2)^2$$

dir. Şu halde verilen fonksiyonun kritik noktaları

$$x_1 = -5,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1$$

dir.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 5(x-1)\ (x+2)^2 + 5(x+5)\ (x+2)^2 \\ &\quad + 10(x + 5)\ (x - 1)\ (x + 2) \\ &= 5(x + 2)\ ((x - 1)\ (x + 2) + (x + 5)\ (x + 2) \\ &\quad + 2(x + 5)\ (x - 1)) \\ &= 5(x + 2)\ (x^2 - x + 2x - 2 + x^2 + 5x + 2x \\ &\quad + 10 + 2x^2 + 10x - 2x - 10) \\ &= 5(x + 2)\ (4x^2 + 16x - 2) \end{aligned}$$

---

[1] GS-AG, s. 213-214.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= 10(x + 2)\ (2x^2 + 8x - 1)$$

dir.

$$f''(-5) = 10.\ (-3)\ (50 - 40 - 1) = -270$$

$$f''(-2) = 10.0.\ (8 + 16 - 1) = 0$$

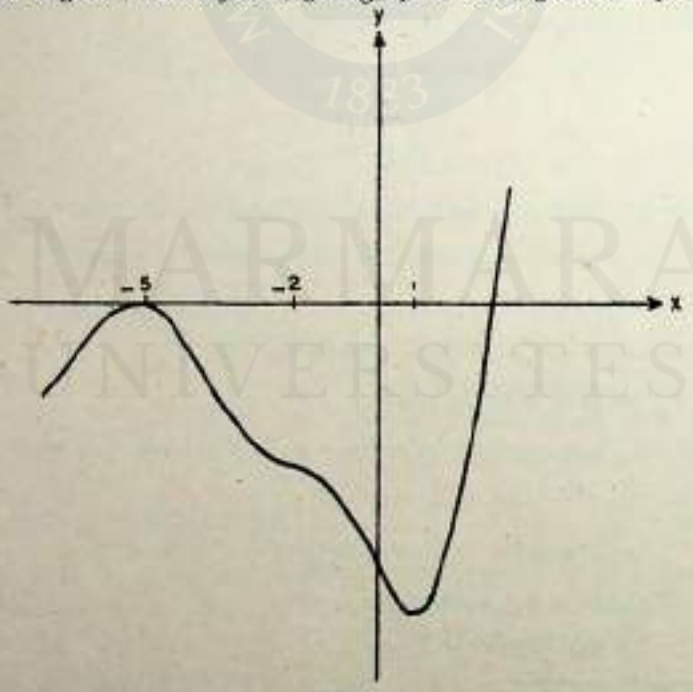
$$f''(1) = 10.3.\ (2 + 8 - 1) = 270$$

olduğundan $x_1$ noktası verilen fonksiyon için bir maksimum, $x_2$ noktası verilen fonksiyon için bir minimum noktasıdır. $-2$ noktasında $f''$ sıfıra eşit olduğundan, bu kural ile fonksiyonun durumu hakkında bir hüküm verilememektedir.

$$f'(-3) = 5.2.\ (-4).1 < 0$$

$$f'(0) = 5.5.\ (-1).4 < 0$$

olduğundan, yani fonksiyon $-2$ noktasından geçtiğinde eksilmeğe devam ettiğinden, bu nokta fonksiyon için bir ekstremum noktası değildir. Fonksiyonun grafiği Şekil 21'de gösterilmiştir:




Şekil 21.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



3.3.3 *Alıştırmalar*

Yukarıda açıklanan yöntemi uygulamak suretiyle aşağıdaki fonksiyonların ekstremumlarını inceleyiniz:

1. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$

Yanıt : Kritik noktalar $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ dir. Ayrıca $x_3 = 0$ için $f'$ tanımlanmış değildir. $x_1$ ve $x_2$ noktalarında fonksiyonun maksimumları, $x_3$ noktasında fonksiyonun bir minimumu vardır.

2. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

Yanıt : Kritik nokta $x_1 = 0$ dır; ayrıca $f'$ $x_2 = -1$ ve $x_3 = 1$ noktalarında tanımlanmış değildir. $x_1$ noktasında bir maksimum, $x_2$ ve $x_3$ noktalarında birer minimum vardır.

## 4 — ROLLE VE ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİNİN UYGULANMASI

Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri birçok fonksiyonların kökleri ile ilgili sonuçlar elde etmek için uygulanabilir.

4.1. *Örnekler :*

4.1.1. $3x^4 + 15x - 8 = 0$

denkleminin tek bir reel kökü olduğunu ispat etmek.

Bu türde bir denklemin en azından bir reel kökü var olduğu genel teoremlerden bilinmektedir[1]. $f(x) = 3x^4 + 15x - 8$ yazılacak olursa, $f(0) = -8$ ve $f(1) = 10$ olduğuna göre, denkle-

(1) GS-AG, Bölüm VII deki Teorem 3.2. ye bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

min $[0, 1]$ aralığında bulunan bir reel kökü olduğu meydandadır. Bu denklemin birden fazla kökü olsaydı bunlardan herhangi iki tanesi göz önüne alınarak, $x_1$ ve $x_2$ ile gösterilebilirdi. Şimdi $x_1 < x_2$ olmak üzere iki kökünün bulunduğu varsayılsın. $f$ fonksiyonu bir polinom olduğundan $[x_1, x_2]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, sürekli ve türetilebilen bir fonksiyonu gösterir. Üstelik aralığın uçlarında $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$ olduğundan, $f(x_1) = f(x_2)$ dir. Rolle Teoreminin bütün koşulları $f$ fonksiyonu tarafından yerine getirildiğinden,

(a) $$f'(\xi) = 0$$

olacak şekilde $]x_1\, x_2[$ aralığında en azından bir $\xi$ sayısı vardır. Halbuki

$$f'(x) = 15x^4 + 15 = 15(x^4 + 1)$$

dir ve her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) > 0$ dır. Şu halde (a) gerçeklenemez. (a) bağıntısının yazılabilmesi, $f$ fonksiyonu ile verilen denklemin birden fazla kökü olması hipotezinden ileri gelmektedir: şu halde verilen denklemin birden fazla reel kökü olamaz.

4.1.1.1. *Uyarı*: Yukardaki ispat genelleştirilerek, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a$, $b$ aynı işaretten olmak koşulu ile

$$a\, x^{2n+1} + b\, x + c = 0$$

denkleminin tek bir reel kökü olduğu gösterilebilir.

4.1.2. N sabit bir doğal sayıyı göstermek üzere, $N^2$ sayısından büyük herhangi ardışık iki doğal sayının kareköklerinin farkının $\frac{1}{2N}$ sayısından küçük olduğunu gösteriniz.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

olsun.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

dır. $f$ fonksiyonu her $x > 0$ için tanımlı ve türetilebilen bir fonk-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



siyon olduğundan, süreklidir ve Ortalama Değer Teoremi bu fonksiyona uygulanabilir, yani

$$\text{(b)} \qquad \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{b-a}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

olacak şekilde, $a$ ve $b$ arasında bulunan pozitif bir $\xi$ sayısı bulunabilir, $a$ ve $b$ yerine $n$, $n+1$ ardışık doğal sayılarının alındığı ve

$$n > N^2$$

koşulunun sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda (b) bağıntısından

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

elde edilir ve $\xi$ sayısı

$$n < \xi < n+1$$

koşuluna uyar. $n > N^2$ eşitsizliği de göz önüne alınacak olursa, $\xi > N^2$ olup $\sqrt{\xi} > N$ ve

$$\frac{1}{N} > \frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

yani

$$\frac{1}{2N} > \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

bulunur. Şu halde

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{N}}$$

dir.

Bu formül sayesinde irrasyonel bazı sayıların yaklaşımlarını elde etme olanağı doğar. Örneğin $\sqrt{37}$ için bir yaklaşım elde etmek amacı ile

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sqrt{37} - \sqrt{36}$$

dan hareket edilsin. $n = 36$ olduğuna göre

$$36 > 25 = N^2$$

alınabilir, ve $N = 5$ olarak ortaya çıkar. Şu halde

$$\sqrt{37} - \sqrt{36} < \frac{1}{10}$$

yani

$$\sqrt{36} < \sqrt{37} < \sqrt{36} + \frac{1}{10}$$

veya

$$6 < \sqrt{37} < 6{,}1$$

bulunur ($\sqrt{37} = 6{,}0827625\ldots$ olduğuna göre, 6,1 değerini almakla yapılan hata $\frac{2}{100}$ den küçük kalır).

$\sqrt{57}$ için bir yaklaşım elde etmek amacı ile $\sqrt{49}$ un rasyonel ve 7 ye eşit olduğu göz önüne alınsın. $49 > 36$ olduğuna göre, $n = 49$, $N = 6$ alınacak olursa, yukarda kanıtlanan eşitsizlikten dolayı

$$\sqrt{50} - \sqrt{49} < \frac{1}{13}$$

$$\sqrt{51} - \sqrt{50} < \frac{1}{12}$$

$$\sqrt{52} - \sqrt{51} < \frac{1}{12}$$

$$\sqrt{53} - \sqrt{52} < \frac{1}{12}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\sqrt{54} - \sqrt{53} < \frac{1}{12}$$

$$\sqrt{55} - \sqrt{54} < \frac{1}{12}$$

$$\sqrt{56} - \sqrt{55} < \frac{1}{12}$$

$$\sqrt{57} - \sqrt{56} < \frac{1}{12}$$

yazılabilir ve taraf tarafa toplamak suretiyle

$$\sqrt{57} - \sqrt{49} < \frac{8}{12}$$

elde edilir. Şu halde

$$\sqrt{49} < \sqrt{57} < \sqrt{49} + \frac{2}{3}$$

veya

$$7 < \sqrt{57} < 7{,}666666\ldots$$

dir ($\sqrt{57} = 7{,}54983443\ldots$ olduğuna göre bu yaklaşımı almakla, $\frac{12}{100}$ den küçük bir hata yapılmış olur.)

4.1.3. $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

fonksiyonu veriliyor. $[a, b]$ aralığı nasıl seçilirse seçilsin, $[a, b]$ aralığı ele alınarak $f$ fonksiyonuna uygulanan Ortalama Değer Teoreminin belirttiği $\xi$ sayısının, $a$ ve $b$ sayılarının aritmetik ortalaması olduğunu kanıtlayınız.

Gerçekten,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(a) = a_2 a^2 + a_1 a + a_0$$

$$f(b) = a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

ve

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a_2 a^2 + a_1 a + a_0 - (a_2 b^2 + a_1 b + a_0) \\ &= a_2 (a^2 - b^2) + a_1 (a - b) \\ &= (a - b)\ (a_2 (a + b) + a_1) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = a_2 (a + b) + a_1$$

dir. Öte yandan

$$f'(x) = 2a_2 x + a_1$$

olduğundan Ortalama Değer formülü

$$a_2 (a + b) + a_1 = 2a_2 \xi + a_1$$

şeklini alır ve bundan

$$\xi = \frac{a + b}{2}$$

elde edilir.

4.1.3.1. *Uyarı :* Önceki problem genelleştirilebilir:

$$f(x) = a_n x^n + a_1 x + a_0$$

ise, $[a, b]$ ne olursa olsun

$$\xi = \frac{\sqrt[n-1]{\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}}}{n}$$

dir.

Gerçekten

$$f(a) = a_n a^n + a_1 a + a_0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f(b) = a_n b^n + a_1 b + a_0$$

ve

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= a_n a^n + a_1 a + a_0 - (a_n b^n + a_1 b + a_0) \\ &= a_n (a^n - b^n) + a_1 (a - b) \\ &= (a-b)\,(a_n (a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots \\ &\quad + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1}) + a_1) \end{aligned}$$

olup

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = a_n \left( \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} \right) + a_1$$

dir.

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + a_1$$

olduğuna göre Ortalama Değer formülü

$$n a_n \xi^{n-1} = n \left( \sum_{i=1}^{n-1} a^i b^{n-1-i} \right) + a_1$$

şeklini alır ve buradan

$$\xi = \frac{\sqrt[n-1]{\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}}}{n}$$

bulunur.

4.1.4. $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x = 0$

denkleminin pozitif olan bir $x_0$ kökü varsa

(c) $n a_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1 = 0$

denkleminin $x_0$ sayısından küçük olan pozitif bir kökü vardır.

Gerçekten,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + 2a_2 x^2 + a_1 x$$

olsun. Verilen denklemin $x_0$ gibi pozitif bir kökü olduğuna göre,

$$f(0) = 0 \quad \text{ve} \quad f(x_0) = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dır. $f$ fonksiyonu bir polinom gösterdiğinden, $[0, x_0]$ kapalı aralığı üzerinde $f$ fonksiyonu tanımlı, sürekli ve $]0, x_0[$ açık aralığı üzerinde türetilebilirdir: dolayısıyla bu fonksiyona söz konusu aralık üzerinde Rolle Teoremi uygulanabilir, yani

$$f'(\xi) = 0 \tag{d}$$

olacak şekilde bir $\xi \in ]0, x_0[$ vardır.

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$$

olduğundan, (d) den dolayı

$$na_n \xi^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1} \xi^{n-2} + \ldots + 2a_2 \xi + a_1 = 0$$

yazılabilir, yani (c) denkleminin pozitif ve $x_0$ sayısından küçük bir kökü vardır.

4.2. *Alıştırmalar*

1. $k$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$x^{2k} + px + q = 0$$

denkleminin 2 den fazla reel kökü olamayacağını gösteriniz.

(*Uyarı*: Rolle Teoreminden faydalanınız ve yukardaki denklemin birinci yanını teşkil eden fonksiyonun türevinin reel sıfır noktalarını sayınız!)

2. $k$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$x^{2k+1} + px + q = 0$$

denkleminin 3 ten fazla reel kökü olamayacağını gösteriniz.

3. $f_1$, $f_2$ ve $f_3$ bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli, $]a, b[$ açık aralığında türetilebilen üç fonksiyon ise

$$\begin{vmatrix} f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) \\ f'_1(\xi) & f'_2(\xi) & f'_3(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



olacak şekilde en az bir $\xi \in ]a, b[$ vardır.

(*Uyarı*: Rolle Teoremini uygun bir fonksiyona uygulayınız.)

Not: Bu soruda $f_1(x) = I(x) = x$ ve $f_2(x) = 1$ özelleştirilmesi yapılacak olursa, Ortalama Değer Teoreminin ifadesi elde edilmiş olur; sadece $f_2(x) = I(x) = x$ özelleştirilmesi yapılacak olursa, Caushy Ortalama Değer Teoremine indirgenir.

4. $f_1$ ve $f_2$ bir $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli, $]a, b[$ açık aralığında türetilebilen iki fonksiyon ise ve üstelik $f'_2$ bu aralıkta sıfırdan farklıysa

$$\frac{f_1(\xi) - f_1(a)}{f_2(b) - f_2(\xi)} = \frac{f'_1(\xi)}{f'_2(\xi)}$$

olacak şekilde en az bir $\xi \in ]a, b[$ vardır.

(*Uyarı*: Rolle Teoremini $(f_1(x) - f_1(a))\,(f_2(b) - f_2(x))$ fonksiyonuna uygulayınız.)

5. Ortalama Değer Teoreminden elde edilen bazı elemanter sonuçlar aşağıda verilmiştir:

1. Eğer $a < x < b$ için $f'(x) = 0$ ise $f$ fonksiyonu $J = [a, b]$ üzerinde sabittir.
2. Eğer $a < x < b$ için $f'(x) = g'(x)$ ise $f$ ve $g$ fonksiyonları arasındaki fark bir sabit sayıdır.
3. Eğer $a < x < b$ için $f'(x) > 0$ ise $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ dir yani, $f$ $J$ üzerinde monoton **artandır**.
4. Eğer $a < x < b$ için $f'(x) < 0$ ise $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ için $f(x_2) < f(x_1)$ dir yani, $f$ $J$ üzerinde monoton eksilendir.
5. Eğer $a < x < b$ için

$$|f'(x)| \leqslant L \quad \text{ise}$$

$f$ fonksiyonu *Lipschitz koşulu* denen

$$(L) \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L\,|x_1 - x_2| \qquad x_1, x_2 \in J$$

koşulunu sağlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6. Eğer $a < x < a + \delta$ için $f'(x) \geq 0$ ise $a$ $f$'nin bir yerel minimum noktasıdır.

7. Eğer $b - \delta < x < b$ için $f'(x) \geq 0$ ise $b$ $f$'nin bir yerel maksimum noktasıdır.

Ortalama Değer Teoremi ve onun sonuçları hem bazı eşitsizleri inşa etmekte hem de sadece tam sayılar veya rasyonel sayılar için geçerli olan eşitsizlikleri reel sayılar için de geçerli kılmakta kullanılır.

Örneğin Bernoulli Eşitsizliğinde, $n \in \mathbb{N}$ ve $1 + x > 0$ ise

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

dir. Şimdi bu eşitsizliğin $r > 1$ olmak üzere herhangi bir reel üst için de geçerli olacağını göstereceğiz. Bunun için

$$f(x) = (1 + x)^r$$

olarak seçilsin. Burdan

$$f'(x) = r(1 + x)^{r-1}$$

elde edilir. Eğer $-1 < x < 0$ ise

$$f'(x) < r$$

eğer $x > 0$ ise

$$f'(x) > r$$

dir. Ortalama Değer Teoremi bu iki koşula da ayrı ayrı uygulanırsa $1 + x > 0$ ve $r \geq 1$ için

$$(1 + x)^r \geq 1 + rx$$

elde edilir ve $r > 1$ için eşitlik yalnız ve yalnız $x = 0$ için sağlanır.

$\alpha$, $0 < \alpha < 1$ olacak şekilde seçilmiş bir reel sayı olsun ve $x \geq 0$ için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$g(x) = \alpha x - x^{\alpha}$$

olarak tanımlansın. Buradan

$$g'(x) = \alpha (1 - x^{\alpha-1})$$

elde edilir. $0 < x < 1$ için

$$g'(x) < 0$$

ve $x > 1$ için $g'(x) > 0$ dır. Sonuç olarak $x \geqslant 0$ ise $g(x) \geqslant g(1)$ yalnız ve yalnız $x = 1$ noktası için ise ve $g(x) = g(1)$ dir. Dolayısıyla $x \geqslant 0$ ise $0 < \alpha < 1$ ise

$$x^{\alpha} \leqslant \alpha x + (1-\alpha)$$

dır.

Eğer $a, b$ pozitif reel sayılar ise ve eğer $x = \dfrac{a}{b}$ olarak seçilirse ve $b$ ile çarpılırsa

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a + (1-\alpha)\, b$$

eşitsizlik elde edilir. Eşitlik yalnız ve yalnız $a = b$ için sağlanır. Bu eşitsizlik genellikle Hölder Eşitsizliğini kurmak için başlangıç noktası olarak kullanılır.

5.1. *Alıştırmalar*

1. $f$ fonksiyonunun $c$ noktasında türevinin var olması için gerek koşul $f$ fonksiyonunun $c$ noktasında sürekli olmasıdır.

2. $f$, $D$ cümlesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $f$ fonksiyonunun $c$ noktasında türevi varsa ve

   a) $f'(c) > 0$ ise $c < x < c + \delta$ eşitsizliğini sağlayan $D$'ye ait $x$ noktaları için $f(c) < f(x)$ olacak şekilde bir pozitif $\delta$ sayısı vardır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Eğer $f'(c) < 0$ ise $c-\delta < x < c$ eşitsizliğini sağlayan $D$'ye ait $x$ noktaları için $f(c) < f(x)$ olacak şekilde bir pozitif $\delta$ sayısı vardır.

3. $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı olan $f(x) = x^n (1-x)^n$ polinomuna Rolle Teoremini uygulayın.

4. Eğer $x_1 < x_2$ bir polinomun ardışık tek kat kökleri iseler $[x_1, x_2]$ kapalı aralığında türevinin kökleri tek sayıdadır.

5. Eğer $f(x) = (x^2-1)^n$ ise ve $f$'nin $(n-1)$ inci türevi $g$ fonksiyonu ise $g$ $(-1,1)$ aralığında basit kökleri olan $n$'inci dereceden bir polinomdur.

6. (a) Eğer $f'(a)$ var ise

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

(b) Eğer $f''(a)$ var ise

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + (a-h)}{h}$$

dır.

5.2. *Çözümler :*

5.1 $f$ fonksiyonunun $c$ noktasında türevi varsa,

$\varepsilon = 1$ için

$0 < |x-c| < \delta$ koşulunu sağlayan $f$'nin tanım cümlesine ait $x$ noktaları için

5.2.1
$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < 1$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(1)$ pozitif reel sayısı vardır. Yukarda alınan $x$'ler için üçgen eşitsizliğini kullanarak

$$0 < |f(x) - f(c)| < |x-c| \{f'(c) + 1\}$$

elde edilir. Eğer $f$'nin tanım cümlesine ait $x$'ler

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$| x - c | < \inf \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{f'(c) + 1} \right\}$$

olarak alınırsa

$$0 < | f(x) - f(c) | < \inf \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{f'(c) + 1} \right\} \{f'(c) + 1\}$$

bulunur. Böylece $\varepsilon = 1$ için

$$0 < | x - c | < \delta \quad \text{koşulunu sağlayan } x\text{'ler}$$

için

$$0 < | f(x) - f(c) | < 1$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(1)$ pozitif reel sayısının var olduğu gösterilmiş olur.

2. $f$'in $c$ $D$ noktasında türevinin tanımlı olmasından dolayı $0 < \varepsilon_0 < f'(c)$ olacak şekilde seçilen $\varepsilon_0$ sayısına karşın bulunan $\delta = \delta(\varepsilon_0)$ ile gösterilsin.

$x \in D$ ve $c < x < c + \delta$ olduğundan

$$-\varepsilon_0 < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c)$$

elde edilir.

$x - c > 0$ olduğundan

$$0 < [f'(c) - \varepsilon_0] \ (x - c) < f(x) - f(c)$$

elde edilir.

Benzer şekilde b) şıkkı da kanıtlanır.

3. $f(x) = x^m (1-x)^n$ fonksiyonu $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve bu aralığın uç noktalarında $f(0) = f(1) = 0$ dır.

$$f'(x) = x^{m-1} (1-x)^{n-1} [m - x(m+n)]$$

olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$c = \frac{m}{m+n} \quad \text{için}$$
$$f'(c) = 0$$

dır.

4. $f$ ile ardışık kökleri $x_1$, $x_2$ olan bir polinom gösterilsin ve $x_1 < x_2$ kabul edilsin. $f$ $[x_1, x_2]$ üzerinde sürekli ve $(x_1, x_2)$ üzerinde türetilebilen ve $f(x_1) = f(x_2) = 0$ koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyona Rolle Teoremi uygulandığı zaman $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (x_1, x_2)$ bulunur. Eğer $x_1$ ve $x_2$ fonksiyonun katlı kökleri değil ise $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$ dır. Genel sonuç burdan çıkartılır.

5. $f$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında $x = \pm 1$'de $n$ katlı kökü vardır (1.2) de de bir kökü vardır.

6. $f$ fonksiyonunun $x = a$ noktasında türevi varsa bu noktada sağ ve sol türevleri de vardır ve eşittir.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

dan istenen sonuç elde edilir.

## 6 — CAUCHY ORTALAMA DEĞER TEOREMİNİN UYGULAMALARI - L'HOPİTAL KURALI

Bazı limitlerin doğrudan doğruya hesaplanması sırasında birtakım zorluklarla karşılaşmak mümkündür. Örneğin

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x-a}} = \frac{\lim_{x \to a} (x^2 - a^2)}{\sqrt{\lim_{x \to a} (x-a)}}$$

olduğundan

$$\frac{0}{0}$$

gibi, hiçbir anlamı olmayan bir ifade ile karşılaşılmaktadır. Gerçekten, her $r$ reel sayısı için

$$0 \cdot r = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



olduğundan, $\frac{0}{0}$ yazılışı herhangi bir reel sayı gösterebilmektedir. Şu halde $\frac{0}{0}$ yazılışına *belirsiz bir şekil gözü ile bakılabilir.*

Bu kısımda, $\frac{0}{0}$ belirsiz şekli ile birlikte

$$\frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty \quad \text{ve} \quad \infty-\infty$$

belirsiz şekilleri üzerinde durulacaktır. Konular ilerledikçe, bu dört belirsiz şekille $0^0$, $1^{\infty}$, $\infty^0$ belirsiz şekilleri de eklenecektir.

6.1. *L'Hopital Kuralı.* $f$ *ve* $g$ $[a, b]$ *kapalı aralığı üzerinde sürekli ve* $]a, b[$ *açık aralığı üzerinde ise türetilebilen iki fonksiyon olsun,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

*ve her* $x \in ]a, b[$ *için* $g'(x) \neq 0$ *ise ve ayrıca*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*var ve değeri* $L$ *ise*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*de vardır ve değeri* $L$ *dir.*

*6.2. L'Hopital kuralının genişletilmesi*

$f$ ve $g$ fonksiyonları $a$ noktasında süreksiz fakat $f$'nin limiti $+\infty$ (veya $-\infty$), $g$'nin limiti $+\infty$ (veya $-\infty$) ise ve $f'$ ile $g'$ daha önceki koşulları sağlıyorlar ise 6.1 kuralı geçerliliğini korur. Yukardaki hipotezler altında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

olduğundan

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

belirsiz şekli

$$\lim_{x\to a} \frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}} = \frac{\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}}{\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}} = \frac{0}{0}$$

belirsiz şekline dönüştürülür. Burdanda yukarda belirtildiği gibi 6.1. Kuralının uygulanabileceği açıkça görülür.

$a = \infty$ veya $a = -\infty$ olması halinde de yani $x$ değişkeni $a$'ya yaklaştığı zaman $f \to 0$ ve $g \to 0$ yaklaşması veya $f \to \infty$ (veya $-\infty$) ve $g \to +\infty$ (veya $-\infty$) yaklaşması ve $f'$ ile $g'$ uygun aralık üzerinde tanımlı olmaları halinde de 6.1. Kuralı uygulanabilir.

*6.1.1. 0. ∞ belirsiz şeklini veren limitin hesaplanması.*

$f(x) \cdot g(x)$ çarpımını

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

olması halinde

$$\frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \quad \text{veya} \quad \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



şeklinde bir kesir olarak yazarak $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0\cdot\infty$ belirsiz şekli

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)\left(\text{veya}\quad \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\right)$$

belirsiz şekillerinden birine dönüştürülebilir.

6.1.2. $\infty - \infty$ *belirsiz şeklini veren limitin hesaplanması.*

$f(x) - g(x)$ farkı

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

olmak kaydıyla

$$f(x)\left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

şeklinde bir çarpım olarak yazılabilir. Eğer $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)} = 1$ ise

$$\lim_{x\to a}\,(f(x) - g(x)) = \infty - \infty$$

belirsiz şekli yine

$$\lim_{x\to a}\frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}$$

belirsizliğine indirgenmiş olur.

6.1.3. *Örnek :*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$$

limitinin hesaplanması.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \frac{-\infty}{\infty}$ şeklinde bir belirsizlik elde edildiğinden L'Hopital kuralı uygulanabilir. Bu kural uygulandığı zaman

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\cot x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{0}{0}$$

şeklinde bir başka belirsizlik elde edilir. Bu durumda ya ikinci kez L'Hopital kuralı uygulanarak

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to 0^+} 2 \sin x \cos x = 0$$

veya doğrudan doğruya

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \sin x = 1 . 0 = 0$$

olarak limitin değeri hesaplanır.

6.1.4. *Örnek :*

$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

limitinin hesaplanması.

Çözüm : L'Hopital kuralını uygulayabilmek için önce paydaları eşitlemek gereklidir. Bu kural uygulandığında eğer yine belirsizlik elde edilirse, bu örnekte olduğu gibi belirsizlik kalkana kadar L'Hopital kuralını uygulamak gerekir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x \cdot \sin^2 x + x^2 \cdot \sin 2x} = \frac{0}{0}$$

Tekrar belirsizlik elde edildiğinden ikinci kez L'Hopital kuralı uygulanır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 2x}{2x \cdot \sin^2 x + x^2 \cdot \sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\sin^2 x + 4x^2 \cdot \sin 2x + 2x^2 \cdot \cos 2x} = \frac{0}{0}$$

Aynı işlem iki defa daha tekrarlanır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\sin^2 x + 4x \cdot \sin 2x + 2x^2 \cdot \cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x}{6\sin 2x + 12x \cdot \cos 2x + 4x^2 \cdot \sin 2x} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8\cos 2x}{24\cos 2x - 30x\sin 2x - 8x^2 \cos 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3}$$

dir.

6.1.5. *Örnek:*

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$$

limitinin hesaplanması.

Çözüm: Bu limit $0.(-\infty)$ belirsiz şeklindedir. L'Hopital kuralını kullanabilmek için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$0.\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} \quad \text{veya} \quad 0.\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

belirsizliklerinden birine dönüştürülebilir. Ancak

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} \left(\frac{0}{0}\right) \quad \text{veya}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

şeklinde yazılan belirsizliklerden ikincisi türev alma işleminde sağlayacağı kolaylıklar nedeni ile tercih edilecektir. Dolayısıyla

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

dır.

6.3. *Alıştırmalar*

Aşağıda verilen fonksiyonların limitlerini hesaplayınız.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^3}$ Yanıt : $\dfrac{-1}{3}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$ Yanıt : $\infty$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$ Yanıt : 3

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1+\cos 4x}$ Yanıt : $\dfrac{-1}{2}$

5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan 5x}$ Yanıt : 5

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$ Yanıt : $\infty$

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\pi/x}{\cot\frac{\pi x}{2}}$ Yanıt : $\dfrac{\pi^2}{2}$

8. $\lim_{x\to 1} (1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ Yanıt : $\dfrac{2}{\pi}$

9. $\lim_{x\to 0} \arcsin x \cot x$ Yanıt : 1

10. $\lim_{x\to 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$ Yanıt : 0

11. $\lim_{x\to 1} \left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right]$ Yanıt : $\dfrac{1}{2}$

12. $\lim_{x\to 3}\left[\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2-x-6}\right]$ Yanıt : $\dfrac{1}{5}$

13. $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$ Yanıt : $\dfrac{1}{12}$

14. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x} - x$ Yanıt : 1.5

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

15. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ Yanıt : $\frac{1}{2}$

16. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}$ Yanıt : 1

17. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$ Yanıt : $\frac{1}{2}$

18. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$ Yanıt : $\frac{1}{4}$

19. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}$ Yanıt : $-2$

20. $\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$ Yanıt : $\frac{-1}{4}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM ONİKİ

# KONVEKSLİK

## 1 — KONVEKSLİK TANIMI

$f$ fonksiyonu $]a, b[$ açık aralığı üzerinde tanımlı olsun. Bu aralığa ait her $x_1, x_2$ için $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının bütün noktaları $f$ fonksiyonunun grafiğinin üstünde kalır veya grafiğe eşit olursa, $f$ fonksiyonuna $]a, b[$ açık aralığı üzerinde *konvekstir*, denir.

$(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun denklemi $g(x) = 0$ ile gösterilecek olursa, herhangi bir $x$ noktasında doğrunun $f$ fonksiyonunun grafiği üstünde kalması veya ona eşit olması koşulu

$$g(x) \geqslant f(x)$$

bağıntısı ile açıklanır. Bu bağıntı her $x \in ]x_1, x_2[$ için

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \geqslant f(x)$$

yani

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geqslant \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \tag{1.1}$$

şekline girer.

Dolayısıyla (1.1) bağıntısının gerçeklenmesi $f$ fonksiyonunun $]a, b[$ aralığı üzerinde konveks olduğunu göstermeğe yeterlidir. Ancak, yukardaki tanımda «üstünde» sözcüğünün yerine «altında» sözcüğü konursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$g(x) \leqslant f(x)$$

bulunur ve bu koşul her $x \in ]x_1, x_2[$ için

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \leqslant f(x)$$

veya

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \tag{1.2}$$

şeklinde açıklanır. $]a, b[$ aralığına ait, $x_1 < x < x_2$ koşulunu sağlayan her $x_1$, $x$, $x_2$ için (1.2) bağıntısı gerçeklenirse, $f$ fonksiyonuna $]a, b[$ üzerinde *konkav* denir.

$f$ fonksiyonunun sürekliliği ve türetilebilme koşulunun yukardaki tanımlara eklenmesi halinde, fonksiyonun bir aralık üzerinde konveks veya onkav olması bu aralık üzerinde $f''$ ikinci türev fonksiyonunun pozitif veya negatif olmasına bağlanır[1]. Buna göre, önceki tanımların yerine, fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta ikinci dereceye kadar türev fonksiyonlarının olması halinde, aşağıdaki tanımlar da uygulanabilir:

a) Her $x \in ]a, b[$ için $f''(x) > 0$ ise, $f$ fonksiyonuna $]a, b[$ üzerinde *konveks*,

b) Her $x \in ]a, b[$ için $f''(x) < 0$ ise, $f$ fonksiyonuna $]a, b[$ üzerinde *konkav*,
denir.

1.1. *Örnekler*

1.1/1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkların bulunması.

$f$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunan herhangi iki $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ noktasını birleştiren doğrunun denklemi

(1) GS-AG, s. 235-237

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$g(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\ (x - x_1) + f(x_1) \quad (x_1 < x < x_2)$$

olduğuna göre

$$g(x) = \frac{\frac{x_2^2-1}{x_2} - \frac{x_1^2-1}{x_1}}{x_2 - x_1}\ (x-x_1) + \frac{x_1^2-1}{x_1}$$

$$= \frac{x_1 x_2^2 - x_1 - x_1^2 x_2 + x_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}\ (x-x_1) + \frac{x_1^2-1}{x_1}$$

$$= \frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1) + (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)\, x_1 x_2}\ (x-x_1) + \frac{x_1^2-1}{x_1}$$

$$= \frac{x_1 x_2 + 1}{x_1 x_2}\ (x-x_1) + \frac{x_1^2-1}{x_1}$$

$$= \frac{x\, x_1 x_2 + x - x_1^2 x_2 - x_1 + x_1^2 x_2 - x_2}{x_1 x_2}$$

elde edilir. Şu halde

$$g(x) - f(x) = \frac{x\, x_1 x_2 + x - x_1 - x_2}{x_1 x_2} - \frac{x^2-1}{x}$$

$$= \frac{x^2 x_1 x_2 + x^2 - x\, x_1 - x\, x_2 - x^2 x_1 x_2 + x_1 x_2}{x\, x_1 x_2}$$

$$= \frac{x^2 - x\,(x_1 + x_2) + x_1 x_2}{x\, x_1 x_2}$$

$$= \frac{(x - x_1)\,(x - x_2)}{x\, x_1 x_2}$$

dır. $x_1 < x < x_2$ olduğuna göre $x - x_1 > 0$, $x - x_2 < 0$ ve dolayısiyle $(x - x_1)\,(x - x_2) < 0$ dır. Şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) $0 < x_1 < x < x_2$ için $x\ x_1 x_2 \geqslant 0$ olduğundan, pay ve payda ters işaretli olur. Şu halde $x > 0$ için $g(x) < f(x)$ tir, yani $f$ fonksiyonu *konkavdır*;

b) $x_1 < x < x_2 < 0$ olması halinde $x\ x_1 x_2 < 0$ olduğundan, pay ve payda aynı işaretli olur. Şu halde $x < 0$ için $g(x) > f(x)$ tir, yani $f$ fonksiyonu *konvekstir*.

1.1.2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkların bulunması.

$f$ fonksiyonu türetilebilen bir fonksiyon olduğuna göre

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x\,(x^2-1)^2 + 4x\,(x^2-1)\,(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 + 2x + 4x^3 + 4x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x\,(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

dir. Her $x$ değeri için $(x \neq \pm 1)$,

$$2\,\frac{x^2+3}{(x^2-1)^2}$$

kesiri pozitiftir: şu halde $f''$ nün işareti $x(x^2-1)$ çarpımının işaretidir.

a) $x(x^2-1) > 0$ olması için ya $x < 0,\ x^2 - 1 < 0$

veya $x > 0,\ x^2 - 1 > 0$

olması gerekir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$x^3 - 1 < 0 \implies -1 < x < 1$$

olduğuna göre,

$$-1 < x < 0$$

için $x(x^3 - 1)$ çarpımının her iki çarpanı negatiftir ve dolayısıyla çarpımın kendisi pozitif olur.

$$x^3 - 1 > 0 \implies x < -1 \text{ veya } x > 1$$

olduğuna göre,

$$x > 1$$

için $x(x^3 - 1)$ çarpımının her iki çarpanı pozitif ve dolayısıyla çarpımın kendisi pozitif olur.

b) $x(x^3 - 1) < 0$ olması için ya $x > 0,\ x^3 - 1 < 0$

veya $x < 0,\ x^3 - 1 > 0$

olması gerekir. Yukarda açıklananlardan, bu çarpım

$$0 < x < 1$$

veya

$$x < -1$$

için negatif olur.

Bu durum aşağıdaki gibi bir çizelge düzenlemek suretiyle özetlenebilir:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $<0$ | | $>0$ | | $<0$ | | $>0$ | | |
| $f$ | konkav | | konveks | | konkav | | konveks | | |

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1.1.3. $$f(x) = \frac{x^5 + 3x^2 + 3}{x}$$

fonksiyonunun konkav veya konveks olduğu aralıkların bulunması.

$f$ fonksiyonu türetilebilen bir fonksiyon olduğuna göre

$$f'(x) = \frac{(6x^5 + 6x)x - x^6 - 3x^2 - 3}{x^2} = \frac{5x^6 + 3x^2 - 3}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(30x^5 + 6x)x^2 - 2x(5x^6 + 3x^2 - 3)}{x^4}$$

$$= \frac{20x^7 + 6x}{x^4} = \frac{2x(x^6 + 3)}{x^4} = \frac{2(x^6 + 3)}{x^3}$$

dir. $2(x^6 + 3)$ çarpımı her $x$ değeri için pozitif olduğuna göre, $f''$ fonksiyonunun işareti $x^3$ ün, yani $x$ in işaretidir. Şu halde $x < 0$ için fonksiyon konkav, $x > 0$ için fonksiyon konvekstir.

1.2. *Alıştırmalar :*

Aşağıdaki fonksiyonların konveks ve konkav oldukları aralıkları belirleyiniz:

1. $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$

Yanıt : $x > 3$ için $f$ konveks,
$x < 3$ için $f$ konkav

2. $f(x) = \frac{x - 3}{1 - x}$

Yanıt : $x < 1$ için $f$ konveks,
$x > 1$ için $f$ konkav

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Yanıt : $]-\infty, -2-\sqrt{3}[$ de f konkav

$]-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}[$ de f konveks

$]-2+\sqrt{3}, 1[$ de f konkav

$]1, +\infty[$ de f konveks

4. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$

Yanıt : $f$ IR de konveks

5. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$

Yanıt : $x < 0$ için f konveks

$0 < x < 1$ için $f$ konkav

$1 < x$ için $f$ konveks

6. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$

Yanıt : $x < \dfrac{1}{3}$ için $f$ konveks

$x > \dfrac{1}{3}$ için $f$ konkav

7. $f(x) = x^2 + x$

Yanıt : $x > 0$ için $f$ konveks

$x < 0$ için $f$ konkav

8. $f(x) = x^3 + x$

Yanıt : $x > 0$ için $f$ konveks

$x < 0$ için $f$ konkav

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



9. $f(x) = x^5 + 6x$

Yanıt : $f$ IR üzerinde konveks

10. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

Yanıt : $f$ IR üzerinde konveks

11. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

Yanıt : $x < 0$ için $f$ konveks
$0 < x < 1$ için $f$ konkav
$1 < x$ için $f$ konveks

12. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Yanıt : $x > 0$ için $f$ konveks
$x < 0$ için $f$ konkav

13. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

Yanıt : $x < -\sqrt{3}$ için $f$ konkav
$-\sqrt{3} < x < 0$ için $f$ konveks
$0 < x < +\sqrt{3}$ için $f$ konkav
$+\sqrt{3} < x$ için $f$ konveks

14. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Yanıt : $x > 0$ için $f$ konveks
$x < 0$ için $f$ konkav

## 2 — KONVEKSLİK İLE İLGİLİ PROBLEMLER

2.1. $k > 1$ koşulunu sağlayan her rasyonel sayı ile tanımlanan her

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f(x) = x^k$$

fonksiyonu, $x > 0$ üzerinde konvekstir.

Gerçekten,

$$f'(x) = kx^{k-1} \quad \text{ve} \quad f''(x) = k(k-1)\,x^{k-2}$$

dir ve $k > 1$ olması halinde $k(k-1)$ pozitif, $x$ pozitif olmasından dolayı $x^{k-2}$ pozitif, yani neticede her $x > 0$ için $f''(x) > 0$ dır.

2.2. $f$ fonksiyonu bir A aralığı üzerinde konveks ise, $-f$ fonksiyonu aynı A aralığı üzerinde konkavdır.

Gerçekten, $f$ fonksiyonu A üzerinde konveks ise

$$\text{her} \quad x \in A \text{ için } f''(x) > 0$$

dır. $g = -f$ fonksiyonu göz önüne alınsın: $g' = -f'$ ve $g'' = -f''$ olduğuna göre,

$$\text{her} \quad x \in A \quad \text{için} \quad g''(x) = -f''(x) < 0$$

olur yani $g'' = -f$ fonksiyonu A aralığı üzerinde konkavdır.

2.3. $f$ ve $g$ fonksiyonları A aralığı üzerinde konveks olan iki fonksiyon ise, $f + g$ fonksiyonu da A aralığı üzerinde konvekstir.

Gerçekten, $f$ ve $g$ fonksiyonları A aralığı üzerinde konveks olduklarından

$$\text{her} \quad x \in A \quad \text{için} \quad f''(x) > 0, \quad g''(x) > 0$$

dır. Halbuki

$$(f + g)''(x) = f''(x) + g''(x)$$

tir: şu halde

$$\text{her} \quad x \in A \quad \text{için} \quad (f + g)''(x) > 0$$

dır, yani $f + g$ fonksiyonu A aralığı üzerinde konvekstir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.4. $f$ ve $g$ fonksiyonları konveks ve tanım aralıkları $f \circ g$ bileşke fonksiyonunun tanımlanmasına uygun iki fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonu artan ise $f \circ g$ fonksiyonu konvekstir.

Gerçekten, $f$ ve $g$ fonksiyonları konveks iki fonksiyon olduğuna göre, tanım aralıklarında alınan değişkenin bütün değerleri için

$$f'' > 0, \quad g'' > 0$$

koşullarını sağlarlar. Üstelik, $f$ fonksiyonu tanım aralığında artan bir fonksiyon olduğuna göre, yine bu aralıktaki bütün değişken değerleri için

$$f' > 0$$

koşulunu sağlar.

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

olsun. Zincir kuralına göre

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h''(x) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

dır. $f''$, $g''$ ve $f'$ pozitif, $g'$ ne olursa olsun $g'^2$ pozitif olduğuna göre, tanım aralığında

$$h'' > 0$$

dır, yani

$$f \circ g = h$$

fonksiyonu konvekstir.

2.5. $f$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli $f'$ ve $f''$ fonksiyonları $]a, b[$ üzerinde tanımlı ve her $x \in ]a, b[$ için $f'' < 0$ ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Gerçekten, $]a, b[$ üzerinde $f'' < 0$ olduğuna göre, $f$ fonksiyonu bu aralıkta konkav bir fonksiyondur, yani $a < x < b$ koşulunu sağlayan bütün $x$ değerleri için

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2.5.1}$$

dir. Halbuki

$$a = \frac{a + a}{2} < \frac{a + b}{2} < \frac{b + b}{2} = b$$

olduğundan

$$x = \frac{a + b}{2}$$

olarak alınabilir. Buna göre (2.5.1) bağıntısından

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left(\frac{a + b}{2} - a\right) < f\left(\frac{a + b}{2}\right) - f(a)$$

veya

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{b - a}{2} < f\left(\frac{a + b}{2}\right) - f(a)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{2} + f(a) < f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

yani

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} < f\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

elde edilir.

2.6. $f$ fonksiyonu bütün $x > 0$ değerleri için tanımlanmış konveks bir fonksiyon olsun.

$$a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

koşulunu sağlayan bütün $a_i$ ler için, $n$ sayısı ne olursa olsun,

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)}{n}$$

dir.

Gerçekten, $f$ fonksiyonu konveks olduğuna göre,

a) $n = 1$ için $\quad f\left(\frac{a_1}{1}\right) = f(a_1)/1$

b) $n = 2$ için, Problem 2.5. ten dolayı

$$f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) < \frac{f(a_1) + f(a_2)}{2}$$

dir. Konkavlık hipotezi yerine konveksalik hipotezini kullanarak Problem 2.5'i tekrarlamak suretiyle elde edilir!). Problemi genel halde çözmek için

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1} = 1$$

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{k-1} > 0)$$

olmak üzere

$$f(s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots \ldots s_{k-1} x_{k-1})$$

(2.6.0) $$\leqslant s_1 f(x_1) + s_2 f(x_2) + \ldots + s_{k-1} f(x_{k-1})$$

olması halinde

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1} + t_k = 1,$$

$$(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k > 0)$$

koşulunu sağlayan $t_i$ ler için ve $x_i > 0$ koşulunu sağlayan $x_i$ ler için

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{k-1} x_{k-1} + t_k x_k)$$

$$\leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \ldots + t_{k-1} f(x_{k-1}) + t_k f(x_k)$$

olduğunu göstermek gerekir. Halbuki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(2.6.1) $$s_i = \frac{t_i}{1 - t_k}$$

yazılacak olursa,

i) $$s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1} = \frac{t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1}}{1 - t_k}$$

dir ve

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1} + t_k = 1$$

olduğundan

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_{k-1} = 1 - t_k$$

olması sonucu (2.6.1) şeklinde seçilen $s_i$ sayıları

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{k-1} = 1$$

koşulunu sağlar.

ii) $t_i$ lerin hepsinin pozitif ve birden küçük olmalarından dolayı $s_i$ sayılarının da hepsi pozitif ve birden küçüktür.

Buna göre (2.6.1) bağıntısı ile tanımlanan $s_i$ sayıları (2.6.0) indüksiyon hipotezinde kullanılabilir.

$$a = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_{k-1} x_{k-1}$$

$$= \frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{k-1} x_{k-1}}{1 - t_k}$$

olsun. (2.6.0) İndüksiyon hipotezinde $k = 3$ alınması sonucu

$$f((1 - t_k)\, a + t_k x_k) \leq (1 - t_k)\, f(a) + t_k f(x_k)$$

elde edilir ve bu bağıntı

$$f((1-t_k)\, a + t_k x_k) = f\left(\frac{t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{k-1} x_{k-1}}{1 - t_k}\,(1-t_k) + t_k x_k\right)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{k-1} x_{k-1} + t_k x_k) \leqslant (1-t_k) f(a) + t_k f(x_k)$$

$$= (1-t_k) f(s_1 x_1 + s_1 x_2 - \ldots + s_{k-1} x_{k-1}) + t_k f(x_k)$$

şekline girer. (2.6.0) İndüksiyon hipotezini kullanarak

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_{k-1} x_{k-1}$$

$$t_k x_k)$$

$$\leqslant (1-t_k)\ (s_1 f(x_1) + s_2 f(x_2) + \ldots + s_{k-1} f(x_{k-1})) + t_k f(x_k)$$

$$= (1-t_k)\ \left(\frac{t_1}{1-t_k} f(x_1) + \frac{t_2}{1-t_k} f(x_2) + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{t_{k-1}}{1-t_k} f(x_{k-1})\right) + t_k f(x_k)$$

$$= t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \ldots + t_{k-1} f(x_{k-1}) + t_k f(x_k)$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

$i = 1, 2, \ldots, n$ için $t_i > 0$ ve $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$ olması koşulu ile

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \ldots + t_n f(x_n)$$

olduğuna göre

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$$

alınacak olursa

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$$

elde edilir.

## 2 — BİR GEOMETRİ PROBLEMİ : ASEMPTOTLARIN BELİRLENMESİ

2.1. Bir $f$ fonksiyonunun $\Gamma$ grafiği göz önüne alınsın: $x$ değişkeninin değişmesi halinde grafik üzerindeki $(x, f(x))$ noktasının si-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



nırsız bir şekilde uzaklaşması, Γ grafiğinin *sonsuz bir kolu* olduğunu gösterir.

Örneğin,

a) $f = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$

fonksiyonunun grafiği göz önüne alınacak olursa, $x$ değişkeninin $+\infty$ veya $-\infty$ a gitmesi halinde $(x, x^2)$ noktasının fonksiyonun grafiği üzerinde,




Şekil 22.

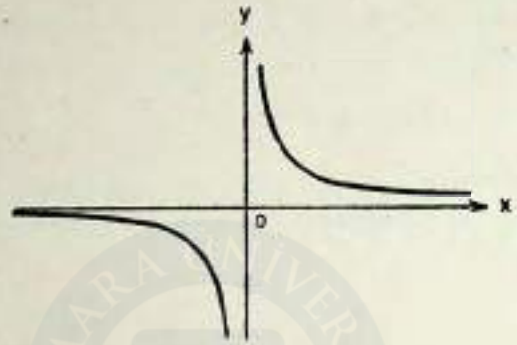
önceden tesbit edilen her sınırı aşarak uzaklaştığı görülür: şu halde $f(x) = x^2$ fonksiyonunun iki sonsuz kolu vardır.

b) $f = \left\{ (x, \frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R};\ x \neq 0 \right\}$

fonksiyonunun grafiği göz önüne alınacak olursa, $x$ değişkeninin 0 sayısına negatif veya pozitif değerler alarak yaklaşması halinde

$(x, \frac{1}{x})$ noktasının

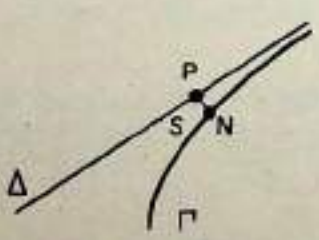
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 23.

fonksiyonunun grafiği üzerinde önceden tesbit edilen her sınırı aşarak uzaklaştığı görülür: şu halde $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun iki sonsuz kolu vardır.

2.2. Bir $f$ fonksiyonunun $\Gamma$ grafiğinin sonsuz bir kolu olduğu kabul edilsin ve grafik üzerinde değişen nokta N ile gösterilsin. $x$ değişkenin örneğin $+\infty$ a gitmesi ile N noktası $\Gamma$ eğrisinin sonsuz kolu üzerinde uzaklaştığında düzlemin bir $\Delta$ doğrusundan uzaklığı olan $NP = \delta$ limitte sıfıra giderse, $\Delta$ doğrusuna $\Gamma$ grafiğinin bir *asemptotu* denir:

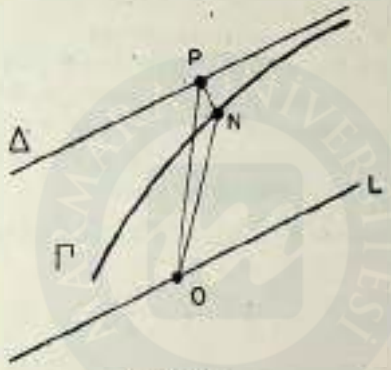



Şekil 24.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



2.3. $f$ fonksiyonunun $\Gamma$ grafiğinin bir $\Delta$ asemptotu olduğu varsayımı kabul edilsin. Düzlemde herhangi bir 0 sabit noktası alınarak,




Şekil 25.

ONP üçgeni göz önüne alınsın. Asemptot tanımına göre

$$\lim_{x\to+\infty} NP = \lim_{x\to+\infty} \delta = 0$$

olmasından dolayı

$$\lim_{x\to+\infty} ON = \lim_{x\to+\infty} OP$$

dir. Buna göre, ON doğrusu ile $\Delta$ doğrusu *sonsuzda kesişir*, yani limitte $\Delta$ doğrusunun 0 noktasından çizilen paraleli olan OL doğrusu ile çakışır:

$$\lim_{x\to+\infty} ON = OL.$$

Şu halde bir $\Gamma$ grafiğinin sonsuz bir kolunun bir $\Delta$ asemptot doğrusu varsa, düzlemin herhangi bir sabit 0 noktasını sonsuz kol üzerindeki bir N noktasına birleştiren ON doğrusu, N noktası $\Gamma$ üzerinde uzaklaştıkça $\Delta$ doğrusuna paralel olan OL doğrusunu limit olarak kabul eder. $\Delta$ ve OL doğrusunun ortak doğrultusuna,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

göz önüne alınan sonsuz kolun *asemptotik doğrultusu* denir ve eğrinin OL *doğrultusunda sonsuzda bir noktası bulunduğu* söylenir.

Bu uyarıların sonucu olarak, bir grafiğin sonsuz bir kolu olması halinde asemptot doğrusunu bulmak için aşağıda açıklanan yönteme başvurmanın yerinde olacağı görülür:

Grafiğin N noktası düzlemin sabit bir 0 noktasına birleştirilir ve N noktası eğri üzerinde uzaklaştığında ON doğrusunun limit durumu incelenir. Bu limit bir OL doğrusu ise, grafiğin bir asemptotik doğrultusu vardır ve bu doğrultu OL doğrusunun doğrultusudur. ON doğrusunun limiti yoksa, asemptotik doğrultu yok ve dolayısıyla asemptot aramaya gerek yoktur.

Asemptotik doğrultunun var olması halinde, N noktasından




Şekil 26.

OL doğrusuna paralel $\Delta_1$ doğrusu çizilir ve N noktasının sonsuz kol üzerinde uzaklaşması halinde $\Delta_1$ doğrusunun limit durumu incelenir. $\Delta_1$ doğrusunun bir $\Delta$ limit durumu varsa bu limit durumundaki $\Delta$ doğrusu grafiğin asemptotudur. $\Delta_1$ doğrusunun limiti yoksa, asemptotik doğrultunun varlığına rağmen $\Gamma$ grafiğinin bir asemptotu yoktur ve böyle bir durum arzeden sonsuz kola *parabolik* denir.

2.4. Bir $f$ fonksiyonunun $\Gamma$ grafiğinin asemptotlarının bulunması problemi yukarda açıklananların ışığında çözülür. Konuyu açık-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


lığa kavuşturmak için, eksen sisteminin XOY dik eksen sistemi olduğunu, bu eksen sisteminde yazılan denklemler için X ve Y harfleri kullanılacağını ve $x$ harfinin sadece fonksiyon bahis konusu olduğu zaman kullanılacağını kaydetmekte yarar vardır.

2.4.1. $x$ değişkeni sonlu bir $a$ değerine yaklaştığında, $f$ fonksiyonunun sonsuz bir kolunun elde edildiği varsayımından hareket edilsin: bu koşullar altında

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

olmak zorundadır. O sabit noktası olarak eksen sisteminin başlangıç noktasının alınması halinde, N noktası $(x, f(x))$ noktası olacağına göre, ON doğrusunun denklemi

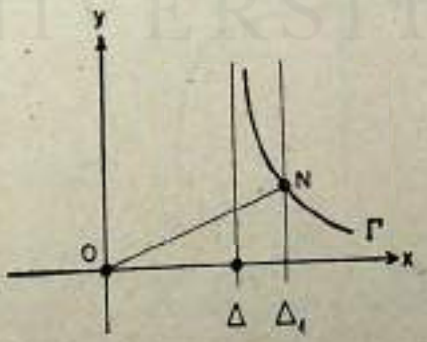
$$Y = \frac{f(x)}{x} X$$

olup, bu doğrunun eğimi $f(x)/x$ dir. $N$ noktasının sonsuz kol üzerinde uzaklaşması halinde

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{x}$$

sonsuza gider, yani ON doğrusu dikey eksene paralel bir duruma gelir. Buna göre asemptotik doğrultu OY dik ekseninin doğrultusudur.

Şimdi N noktasından bu doğrultuya paralel olan $\Delta_1$ doğrusu ele alınsın. Bu doğrultunun denkleminin $X = x$ olduğu meydandadır ve bu




Şekil 27.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

doğrunun $x \to a$ için limit durumu $X = a$ doğrusudur. Şu halde göz önüne alınan sonsuz kolun bir asemptotu vardır ve bu asemptot

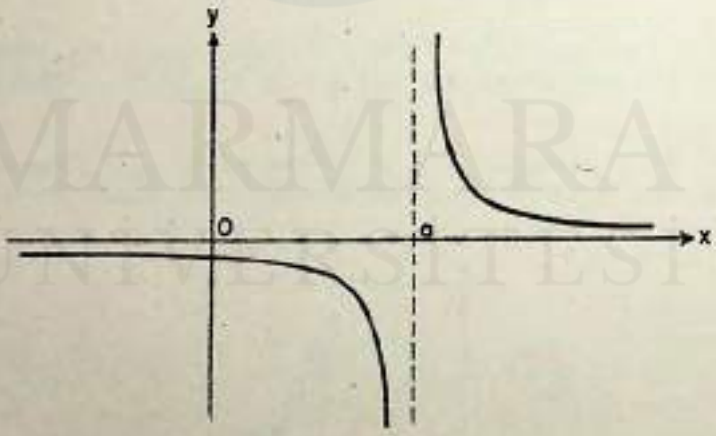
$$X = a$$

doğrusudur.

Örneğin $f(x) = \frac{1}{x-a}$ fonksiyonu ele alınsın. $x$ değişkeni $a$ noktasına yaklaştığında $f$ fonksiyonunun grafiğinin sonsuz kolları olduğu meydandadır. Bu fonksiyon için

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x(x-a)}$$

olduğuna göre, $x$ değişkeni $a$ sayısına yaklaştığında $f(x)/x$ sonsuza gider ve $X = a$ doğrusu $f(x) = \frac{1}{x-a}$ fonksiyonunun grafiğinin bir asemptotudur.

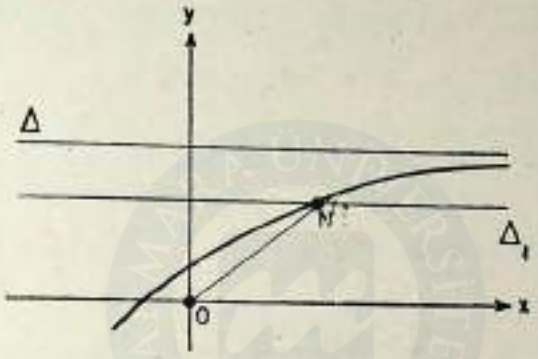



Şekil 28.

2.4.2. $x$ değişkeni sonsuza gittiği zaman $f$ fonksiyonunun grafiğinin sonsuz bir kolunun bulunduğu fakat $f$ fonksiyonunun limitinin sonlu bir değere yaklaştığı varsayımından hareket edilsin. Bu kez

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ






Şekil 29.

de o başlangıç noktasını sabit nokta olarak seçerek $f$ fonksiyonunun $\Gamma$ grafiği üzerindeki N noktasını 0 noktasına birleştiren doğrunun denklemi ele alınsın. Bu doğrunun denklemi

$$Y = \frac{f(x)}{x} X$$

olduğuna göre, eğimi $f(x)/x$ tir.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

olduğuna göre

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

yani bu halde $\Gamma$ grafiğinin bu sonsuz kolunun asemptotik doğrultusu OX yatay ekseninin doğrultusudur. Asemptotik doğrultuya paralel, N noktasından geçen $\Delta_1$ doğrusunun denklemi

$$Y = f(x)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



tir ve $x \to \infty$ için bu doğrunun limit durumu

$$Y = b$$

olduğundan $Y = b$ doğrusu grafiğinin bir asemptotudur.

Örneğin

$$f = \left\{ (x, \frac{bx+c}{x}) \mid x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \right\}$$

fonksiyonu ele alınsın.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{bx+c}{x} = b$$

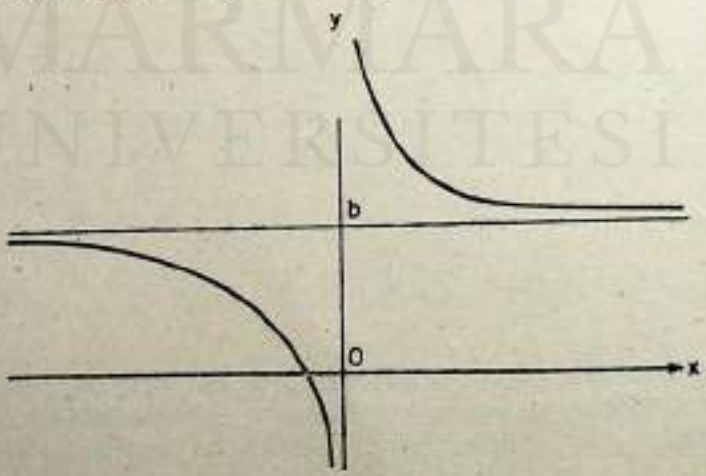
ve

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{bx+c}{x^2} = 0$$

olduğundan

$$Y = b$$

doğrusu verilen fonksiyonun grafiğinin bir yatay asemptotudur:




Şekil 30.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



2.4.3. $x$ değişkeni sonsuza gittiği zaman $f(x)$'in de sonsuza gitmesi halinde, durumun gözden geçirilerek irdelenmesine gerek vardır.

2.4.3.1. $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

olması halinde, verilen sonsuz kola tekabül eden asemptotik doğrultu OY dikey ekseninin doğrultusudur. N noktasından geçen ve bu doğrultuya paralel olan $\Delta_1$ doğrusunun denklemi

$$X = x$$

şeklindedir ve $x \to \infty$ için bu doğru dikey eksene paralel kalarak sonsuza doğru uzaklaşır. Şu halde bu durumda fonksiyonun grafiğinin bu sonsuz kolunun bir asemptotik doğrusu yoktur, yani grafiğin, doğrultusu OY olan bir parabolik kolu vardır.

2.4.3.2. $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

olması halinde, verilen sonsuz kola tekabül eden asemptotik doğrultu OX yatay ekseninin doğrultusudur. N noktasından geçen ve bu doğrultuya paralel olan $\Delta_1$ doğrusunun denklemi

$$Y = f(x)$$

şeklindedir ve $x \to \infty$ için $f(x) \to \infty$ olduğundan, $\Delta_1$ doğrusu yatay eksene paralel kalarak sonsuza doğru uzaklaşır. Şu halde bu durumda da fonksiyonun grafiğinin bu sonsuz kolunun bir asemptotik doğrusu yoktur, yani grafiğin, doğrultusu OX olan bir parabolik kolu vardır.

2.4.3.3. $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c$$

olsun: bu durumda verilen sonsuz kola tekabül eden asemptotik doğrultunun eğimi $c$ dir. N noktasından geçen ve eğimi $c$ olan $\Delta_1$ doğrusunun denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$Y - f(x) = c(X - x)$$

dir. Bu denklem

$$Y - cX - (f(x) - cx) = 0$$

şekline gireceğinden, bu doğrunun $x \to \infty$ için alacağı limit durumunu bulabilmek için doğrunun denkleminin sabit terimini, yani

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - cx)$$

değerini hesaplamak lazımdır. Eğer bu limitin değeri sonsuz ise, $\Delta_1$ doğrusu, eğimi $c$ kalmak üzere sonsuza doğru uzaklaşır, yani verilen fonksiyonun grafiğinin asemptotik doğrultusu $c$ eğimine tekabül eden doğrultu olmak üzere, parabolik bir kolu vardır. Eğer limitin değeri sonlu ise ve örneğin $k$ sayısına eşitse

$$Y = cX + k$$

doğrusu, grafiğin göz önüne alınan sonsuz kolunun bir asemptotudur.

Örneğin

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

fonksiyonu göz önüne alınacak olursa, $x \to \infty$ için $f(x) \to \infty$ dir.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

dir. Şu halde eğimi 1 olan $Y = X$ doğrusu, bu fonksiyonun grafiğinin bir asemptotik doğrultusunu belirtir. Buna göre $f(x) - x$ ifadesinin limitini incelemek gerekir:

$$f(x) - x = \frac{-4x^2 + 5x + 1}{2x^2 - x - 1}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



olduğundan $\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=-2$ elde edilir ve dolayısıyla verilen fonksiyonun asemptotu

$$Y = X - 2$$

doğrusudur.

2.5. *Sonuç:* a) $f$ nin değerini sonsuz yapan $a$ değerleri $x=a$ şeklindeki *dik asemptotlarıdır;*

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ ise, $Y=b$ fonksiyonun grafiğinin bir *yatay asemptotudur;*

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=c$ ise, eğimi $c$ olan bir *eğik asemptotun* bulunma olasılığı vardır. Böyle bir asemptotun olup olmadığını incelemek için

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-cx)$$

araştırılır. Bu limit $d$ gibi bir sayıya eşitse

$$Y = cX + d$$

verilen fonksiyonun grafiğinin eğik asemptotudur.

2.6. *Uygulama:* Verilen $f$ fonksiyonunun

$$f(x) = cx + b + \varnothing(x)$$

şeklinde yazılabildiği ve üstelik

$$\lim_{x\to\infty}\varnothing(x)=0$$

olduğu farzedilsin. Bu takdirde

$$Y = cX + b$$

verilen fonksiyonun grafiğinin bir eğik asemptotudur. Gerçekten

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{cx + b + \varnothing(x)}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(c + \frac{b}{x} + \frac{\varnothing(x)}{x}\right)$$

dır ve $\varnothing$ hakkında kabul edilen varsayımdan dolayı

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c$$

dir. Üstelik

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - cx) = \lim_{x\to\infty} (b + \varnothing(x))$$

dir ve yine $\varnothing$ hakkında kabul edilen varsayımdan dolayı

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - cx) = b$$

dir, yani 2.4.3.3. te kaydedilenlerden dolayı

$$Y = cX + b$$

verilen fonksiyonun grafiğinin asemptotudur.

## 3 — KONVEKSLİĞİN UYGULAMALARI : GRAFİK ÇİZİMİ

### *3.1. Grafik çiziminde uygulanacak olan yol*

Bir $f$ fonksiyonunun verilmesi halinde grafiğinin çizilmesi istendiğinde sistematik bir araştırma yöntemini uygulamakta yarar vardır. Yapılacak olan şeyleri belirli bir sıra içinde yapmak bazı kolaylıklar sağlayacaktır. Örneğin aşağıda açıklanan sırada hareket etmek yerinde olur:

1. a) Verilen $f$ fonksiyonunun tanım aralığını belirtmek;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



b) Fonksiyonun süreksizlik noktalarını belirlemek ve fonksiyonun sürekli kaldığı aralıkları belirtmek;

c) Fonksiyonu sıfır yapan $x$ değerlerini bulmak;

d) Fonksiyonun merkeze veya eksenlere göre simetrileri olup olmadığını araştırmak, yani fonksiyonun *tek* veya *çift* olup olmadığını incelemek (bu incelemenin sonucu olarak, fonksiyonun grafiğini bütün IR reel doğrusu üzerinde incelemekten kurtulmak mümkün olabilir, yani incelemeyi OY ekseninin yalnız bir tarafında yapmak olanağı kazanılabilir);

e) Fonksiyon bir takım aralıkların birleşimi olan bir cümle üzerinde tanımlı ise, fonksiyonun bu aralıkların uçlarındaki durumunu incelemek gerekir.

Yukarda açıklananlar yapıldıktan sonra fonksiyonun türetilip türetilemiyeceğine bakılarak

II. a) Fonksiyonun birinci türev fonksiyonunun sıfır değerlerini bulmak;

b) Fonksiyonun birinci türev fonksiyonunun işaretini inceleyerek, fonksiyonun hangi aralıklarda artan, hangi aralıklarda eksilen olduğu saptamak;

c) Fonksiyonun ikinci türev fonksiyonunun işaretini inceleyerek fonksiyonun konveks veya konkav olduğu aralıkları belirlemek gerekir.

*Son olarak*

III. Fonksiyonun asemptotları araştırılır.

Elde edilen sonuçları bir çizelgede toplamak yerinde olur. Genellikle bu çizelgenin ilk satırında $x$ in aldığı önemli değerler, ikinci ve üçüncü satırlarında ise $f'$ ve $f''$ fonksiyonunun durumları ve son satırda da $f$ fonksiyonunun değişimi kaydolunur. Böyle bir çizelge grafiğin çizimini çok kolaylaştırır.

3.2. *Örnekler:*

3.2.1. $$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x}$$

fonksiyonun grafiğinin çizilmesi.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) Fonksiyonun tanım cümlesi

$$T_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

dır. Tanım cümlesi şu halde $]-\infty, 0[ \cup ]0, +\infty[$ şeklindedir.

b) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{h^2-1}{h} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{h^2-1}{-h} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$$

olduğuna göre, grafiğin dört tane sonsuz kolu vardır. Üstelik $x = 0$ noktasında fonksiyonun kaldırılamayan tipten bir süreksizliği bulunmaktadır.

c) $f(x) = 0$ olması için $x^2 - 1 = 0$ olması gerekir, yani fonksiyonun sıfır olduğu noktalar (grafiğin yatay ekseni kestiği noktalar) $x = -1$ ve $x = +1$ noktalarıdır.

d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{-x} = -\dfrac{x^2-1}{x} = -f(x)$ olduğundan,

verilen fonksiyon tektir, yani başlangıç noktası grafik için bir simetri merkezidir. Bu nedenle incelemeyi sadece $x > 0$ için yapmak ve elde edilen eğrinin 0 başlangıç noktasına göre simetriğini almak fonksiyonun bütün grafiğini çizmek için yeterlidir.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2-x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



olduğundan, her $x \neq 0$ için $f'$ pozitiftir, yani $x \neq 0$ olmak koşulu ile $f$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Üstelik $f'$ fonksiyonunun sıfırları yoktur ve dolayısıyla $f$ fonksiyonunun ekstremum değerleri yoktur.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

olduğuna göre, $h > 0$ için $f''$ fonksiyonu negatif, yani fonksiyon konkavdır ve $f''$ fonksiyonunun sıfırları yoktur.

$f$ fonksiyonunun grafiğinin asemptotlarına gelince, b) de kaydedilenlerden dolayı $x = 0$ dikey eksen $f$ fonksiyonunun bir dik asemptotudur. Üstelik

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{x^2}) = 1$$

olduğundan eğimi 1 olan doğrunun doğrultusu bir asemptotik doğrultuyu belirtir.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to \infty} (\frac{x^2-1}{x} - x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-\frac{1}{x}) = 0$$

olduğundan, eğik asemptot

$$y = x$$

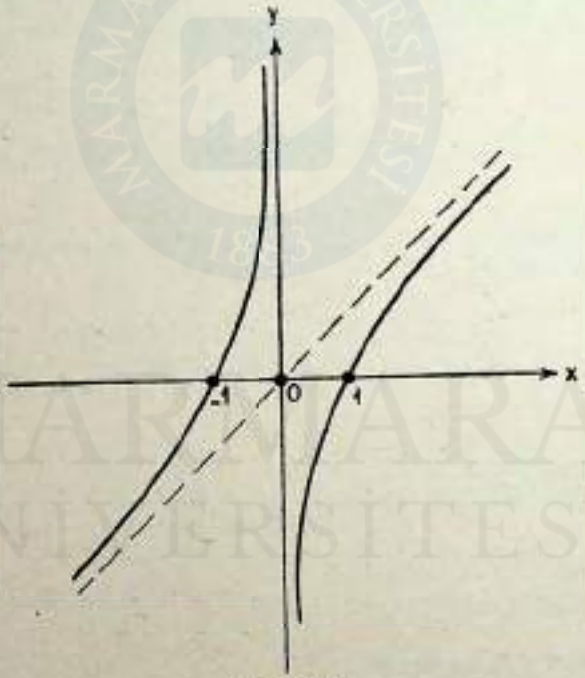
doğrusudur.

Bu durumda, $f$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için aşağıdaki çizelge hazırlanabilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

| x | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 2 | + | + |
| $f''$ | | − | −2 | − | − |
| f | +∞ | artan konkav | 0 | artan konkav | +∞ |

Buna göre verilen fonksiyonun grafiği aşağıda gösterilen şekildedir:




Şekil 31.

3.2.2. $$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



a) Fonksiyonunun tanım cümlesi

$$T_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1,\ +1\} = ]-\infty,\ -1\ [\ \cup\ ]-1,\ 1[\ \cup\ ]\ 1,\ \infty\ [$$

dur.

b) $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0^-$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{-1-h}{(-1-h)^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{(-1+h)}{(-1+h)^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{1-h}{(1-h)^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{1+h}{(1+h)^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

dir. Şu halde $x = -1$ ve $x = +1$ noktaları $f$ fonksiyonu için kaldırılamayan cinsten süreksizlik noktalarıdır.

c) $f(x) = 0$ olması için $x = 0$ olması gerekir.

d) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x}{x^2-1} = -f(x)$ olduğundan $f$ fonksiyonu tek bir fonksiyondur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$$

dır yani her x değeri için ($x \neq \pm 1$ olmak koşulu ile!) $f'$ negatif ve dolayısıyla fonksiyon daima eksilen bir fonksiyondur. $f'$ fonksiyonunu sıfır yapan hiçbir $x$ değeri olmadığından $f$ fonksiyonunun ekstremumları yoktur.

$$f''(x) = \frac{-2x\,(x^2-1)^2 + 2(x^2-1)\,2x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$$

$$= \frac{-2x\,(x^2-1)^2 + 4(x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3 + 2x + 4x^2 + 4x}{(x^2-1)^3}$$

$$= \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

dır.

$$2\,\frac{x^2+3}{(x^2-1)^2}$$

kısmı, $x$ ne olursa olsun ($x \neq \pm 1$ olmak koşulu ile!) pozitif kaldığından, $f''$ nün işareti

$$\frac{x}{x^2-1}$$

kesirinin işareti ile belirlenir. Payın işareti $x$'in işaretidir, halbuki payda $]-\infty, -1[$ ve $]1, +\infty[$ aralıklarında pozitif, $]-1, +1[$ aralığında negatiftir. Şu halde $f''$ fonksiyonu

$]-\infty, -1[$ aralığında negatif
$]-1, 0]$ aralığında pozitif
$[0, 1[$ aralığında negatif
$]1, +\infty[$ aralığında pozitif

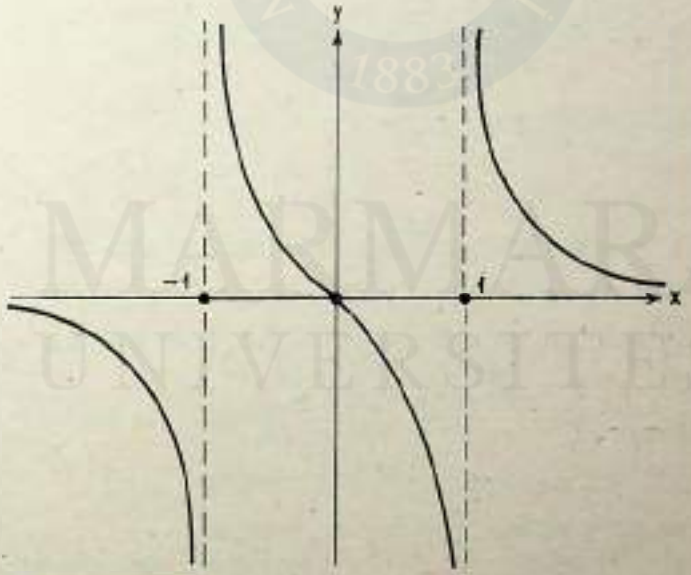
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



olur. Fonksiyonun tanımlı olup, $f'$ nü sıfır yapan $x = 0$ noktası fonksiyonun bir dönüm noktasıdır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgede toplanmıştır:

| $x$ | $0$ | | $+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-2$ | $-$ | | $-$ | $-$ |
| $f''$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $+$ |
| $f$ | $0$ | eksilen konkav $-\infty$ | $+\infty$ | eksilen konveks | $0$ |

Fonksiyonun, dikey asemptotları olan $x = -1$ ve $x = +1$ ve $y = 0$ yatay asemptotunun dışında asemptotları yoktur. Grafik Şekil 32'de gösterilmiştir:




Şekil 32.

3.2.3. $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$

fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) Fonksiyonun tanım cümlesi $T_f = \mathbb{R}$ dir, çünkü verilen fonksiyon bir polinomdur.

b) $f$ bir polinom olduğundan bütün $\mathbb{R}$ reel doğrusu üzerinde süreklidir.

c) $f(x) = 0$ olması $12x - x^3 = 0$ yani $x(12 - x^2) = 0$ olması ile mümkündür. Şu halde fonksiyonun sıfır noktaları

$$x_1 = -2\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \qquad x_3 = 2\sqrt{3}$$

dır.

d) $$f(-x) = 4(-x) - \frac{1}{3}(-x)^3 = -4x + \frac{1}{3}x^3$$

$$= -(4x - \frac{1}{3}x^3) = -f(x)$$

olduğundan $f$ fonksiyonu tektir.

$$f'(x) = 4 - x^2$$

olduğuna göre, fonksiyonun kritik noktaları

$$x_{k,1} = -2 \quad \text{ve} \quad x_{k,2} = 2$$

dır.

$]-\infty, -2[$ aralığında $f'$ negatif ve dolayısıyla $f$ eksilen

$]-2, 2[$ aralığında $f'$ pozitif ve dolayısıyla $f$ artan

$]2, +\infty[$ aralığında $f'$ negatif ve dolayısıyla $f$ eksilen

dir.

$$f''(x) = -2x$$

olduğuna göre

$]-\infty, 0[$ aralığında $f''$ pozitif, $f$ konveks

$]0, +\infty[$ aralığında $f''$ negatif, $f$ konkav

dır. Bu durumda $x = 0$ noktası $f$ fonksiyonu için bir dönüm noktasıdır.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

olduğuna göre eğrinin iki sonsuz kolu vardır. Ancak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



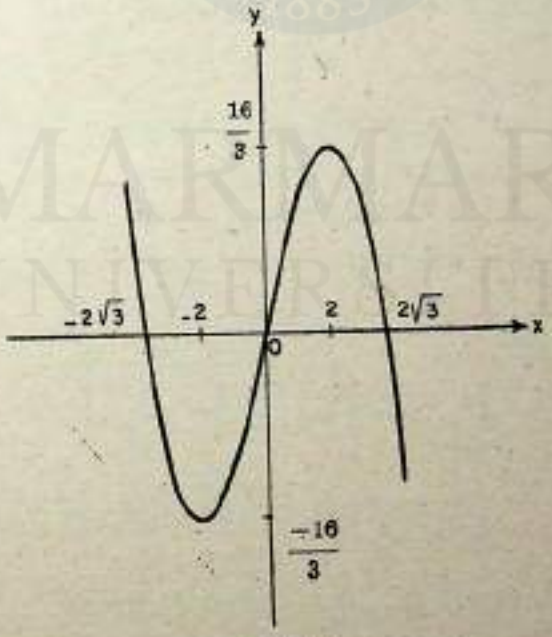
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty;\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

olduğundan, $f$ fonksiyonunun sadece parabolik kolları vardır.

Durum aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir:

| $x$ | $-\infty$ | $-2\sqrt{3}$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f''$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f$ | $+\infty$ | $0$ | $-\frac{16}{3}$ | dönüm noktası | $\frac{16}{3}$ | $0$ | $-\infty$ |
| | | konveks | lokal min | | lokal maks konkav | | |

Fonksiyonun grafiği Şekil 33'de gösterilmiştir:




Şekil 33

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.2.4. $f(x) = x^4 - 2x^2$

fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi.

a) $f$ fonksiyonu bir polinom olduğundan bütün IR reel doğrusu üzerinde tanımlıdır.

b) $f$ fonksiyonu bir polinom olduğundan süreksizlik noktaları yoktur.

c) $f(x) = 0$ olması için $x^4 - 2x^2 = 0$ yani $x^2(x^2-2) = 0$ olmalıdır. Buna göre $f$ fonksiyonunun

$$x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{2}$$

şeklinde sıfırları vardır.

d) $f(-x) = (x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$ olduğundan $f$ fonksiyonu çift bir fonksiyondur.

$$f'(x) = 3x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$$

olduğundan $f$ fonksiyonunun kritik noktaları ise

$$x_{k,1} = -1, \quad x_{k,2} = 0, \quad x_{k,3} = 1$$

dir. Üstelik

$]-\infty, -1[$ aralığında $f'$ negatif, $f$ eksilen

$]-1, 0[$ aralığında $f'$ pozitif, $f$ artan

$]0, 1[$ aralığında $f'$ negatif, $f$ eksilen

$]1, +\infty[$ aralığında $f'$ pozitif, $f$ artan

dır.

$$f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$$

olduğuna göre

$\left]-\infty, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right[$ aralığında $f''$ pozitif, $f$ konveks

$\left]\dfrac{-1}{\sqrt{3}}; \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right[$ aralığında $f''$ negatif, $f$ konkav

$\left]\dfrac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right[$ aralığında $f''$ pozitif, $f$ konveks

tir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Nihayet

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$

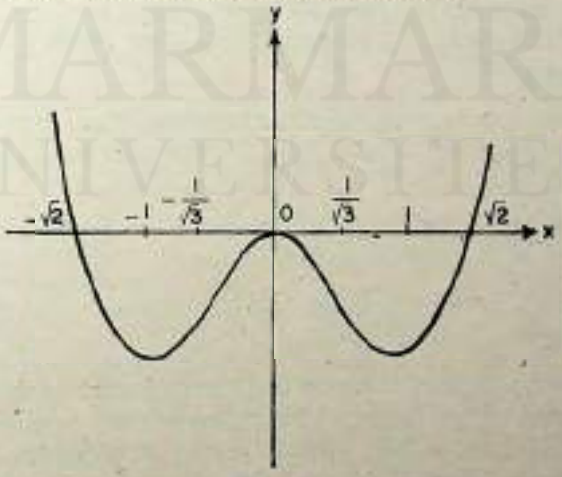
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

olduğundan fonksiyonunun iki sonsuz kolunun parabolik oldukları görülür.

Şu halde aşağıdaki çizelge hazırlanabilir:

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $0$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $f''$ | $-4$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f$ | $0$ konkav | $\frac{5}{9}$ | konveks | $-1$ | konveks | $0$ | konveks | |

Fonksiyonun grafiği Şekil 34 de gösterilmiştir.




Şekil 34

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM ONÜÇ

## MAKÛS FONKSİYON KAVRAMI

### I — MAKÛS FONKSİYON

A aralığı üzerinde tanımlı bir $f$ fonksiyonu

$$f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

cümlesi olarak verilmiş olsun. $f$ cümlesinde yer alan sıralanmış çiftlerin elemanlarının yerleri değiştirilerek elde edilen

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

cümlesi her zaman bir fonksiyon göstermez. Genel olarak, yukardaki $f^{-1}$ cümlesine, $f$ fonksiyonunun *makûs cümlesi* denir ve $f^{-1}$ ile gösterilir.

$f$ fonksiyonunun $f^{-1}$ makûs cümlesinin bir fonksiyon göstermesi için gerek ve yeter koşul, $f$ fonksiyonunun *injektif* (birebir) olmasıdır.

$f$ fonksiyonunun injektif olması, $a \neq b$ koşulunu sağlayan her $a, b \in A$ için $f(a) \neq f(b)$ olmasıdır.

$f$ fonksiyonunun injektif olması halinde $f^{-1}$ cümlesine $f$ fonksiyonunun *makûs fonksiyonu* denir.

1.1. *Uyarı:* Injektif olmayan bir $f$ fonksiyonunun makûs fonksiyonundan söz edilemez. Injektif olmayan bir $f$ fonksiyonunun tanım cümlesinin, $f$'nin injektif kaldığı alt aralıkları bulunabiliyor ise, bu alt aralıkların her biri üzerinde $f$ ile çakışan yeni birer injektif fonksiyon tanımlanabilir. Bu yerel fonksiyonlar in-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


jektif olduklarından ayrı ayrı maküs fonksiyonları vardır.

1.2. *Uyarı:* Bir fonksiyonun injektif olup olmadığı, fonksiyonun grafiğine bakılarak anlaşılabilir. Yatay bir doğru, fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada keserse, o fonksiyon bire-bir değildir.

1.3. *Uyarı:* $f^{-1}$ ile $\frac{1}{f}$ fonksiyonları tanım olarak birbirinden farklıdır. Örneğin,

$$f(x) = x + 1$$

fonksiyonu bütün IR cümlesi üzerinde tanımlıdır ve

$$f = \{(x, x+1) \mid x \in \mathrm{IR}\}$$

şeklindeki çiftlerden oluşur. Fonksiyon injektiftir zira, grafiği bir doğru olduğundan her yatay doğru tarafından tek bir noktada kesilir; maküs fonksiyonu vardır ve

$$f^{-1} = \{(x+1, x) \mid x \in \mathrm{IR}\}$$

dır. Bu ifadede $t = x + 1$ dönüşümü yapmak suretiyle

$$f^{-1} = \{(t, t-1) \mid t \in \mathrm{IR}\}$$

elde edilir ve bu kez $t$ değişkenine $x$ denecek olursa

$$f^{-1} = \{(x, x-1) \mid x \in \mathrm{IR}\}$$

yazılır, yani

$$f^{-1} = (x) = x - 1$$

dir. Buna karşılık

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{x+1}$$

bulunur.

$$x - 1 = \frac{1}{x+1}$$

olması ancak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x^2 - 1 = 1$$

olması ile yani

$$x = \pm \sqrt{2}$$

değerlerini alması ile mümkündür. Şu halde bu iki fonksiyon $x = \pm \sqrt{2}$ noktaları dışında birbirinden farklıdır. Ayrıca $f^{-1}$ fonksiyonu bütün reel sayılar cümlesi için tanımlı olduğu halde $\frac{1}{f}$ fonksiyonu $x = -1$ noktasında tanımlı değildir.

1.4. *Uyarı :* Kesin monoton artan veya eksilen her fonksiyon injektiftir. $f$ fonksiyonu verilen bir aralık üzerinde sürekli ve (aralığın uç noktaları hariç) türetilebilir olsun. Eğer bu aralığa ait her $x$ için $f'(x) > 0$ ise $f$ fonksiyonuna kesin monoton artan veya her $x$ için $f'(x) < 0$ ise kesin monoton eksilen denir. Dolayısıyla eğer $f$ fonksiyonu verilen aralık üzerinde (uç noktaları hariç) türetilebilen bir fonksiyon ise birinci türevi sayesinde bu aralık üzerinde kesin monoton olup olmadığı yani injektif olup olmadığı belirlenebilir.

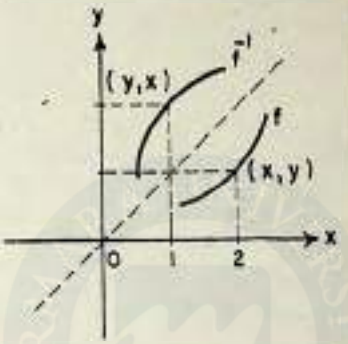
1.3. *Örnekler :*

1.3.1. $f = \{ (x, y) \mid y = 3x - 5 \}$ fonksiyonunun injektifliğinin gösterilmesi ve makûs fonksiyonu $f^{-1}$'in grafiği.

$f$ fonksiyonu IR nin tümü üzerinde tanımlı bir fonksiyondur. $a \neq b$ olmak üzere IR'de alınan her $a$ ve $b$ değerleri için $f(a) = 3a - 5$, $f(b) = 3b - 5$ olduğundan $f(b) - f(a) = 3(b - a)$ dır. $a \neq b$ olduğundan $f(b) - f(a) \neq 0$, yani $f(b) \neq f(a)$ bulunur. Bu da $f$ fonksiyonunun injektifliğini kanıtlar.

Verilen bir $f$ fonksiyonu ile makûsunun grafiği esas köşegen adı verilen $y = x$ doğrusuna göre simetriktir, çünkü her $(x, y)$ noktasının $f$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul $(y, x)$ noktasının $g$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunmasıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Şekil 35.

1.3.2. $f(x) = x^2 - 3$ fonksiyonunun injektif olmadığını gösteren $f$'nin maksûs fonksiyonunun tanımlanabileceği aralıkları belirtin.

$f$ fonksiyonu bütün reel sayılar için tanımlıdır. Her $a$, $-a \in \mathbb{R}$ için $f(a) = a^2 - 3$, $f(-a) = a^2 - 3$ olduğundan $a \neq -a$ için $f(a) = f(-a)$ bulunur. Bu da $f$'nin injektif bir fonksiyon olmadığını gösterir. Her $x > 0$ için

$$f'(x) = 2x > 0$$

olacağından $f$ fonksiyonu $x \geq 0$ için monoton artan bir fonksiyondur. Her $x < 0$ için ise

$$f'(x) = 2x < 0$$

olduğundan $f$ fonksiyonu $x \leq 0$ için monoton eksilen bir fonksiyondur. Dolayısıyla $f$ fonksiyonunun Şekil 36 da gösterildiği gibi maksûs fonksiyonu $[0, \infty[$ aralığı üzerinde her $y \geq -3$ için

$$g_1(y) = \sqrt{y + 3}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$]-\infty, 0]$ aralığı üzerinde yine her $y \geq -3$ için

$$g_2(y) = -\sqrt{y+3}$$

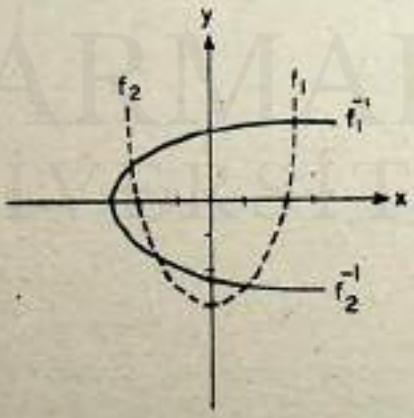
olarak tanımlanır.

$g_1$ ve $g_2$ fonksiyonlarını tanımlarken bölümün başında anlatılan maküs fonksiyon kavramının nasıl kullanıldığını göstermek için verilen $y = x^2 - 3$ denkleminin tek bir fonksiyonu değil, $x \geq 0$ için $f_1(x) = x^2 - 3$ ve $x \leq 0$ için $f_2(x) = x^2 - 3$ olmak üzere $f_1$ ve $f_2$ gibi iki fonksiyonu tanımladığı kabul edilsin. $f_1$ ve $f_2$'nin farklı tanım cümleleri olduğundan iki farklı fonksiyon olarak ele alınabilirler. Her biri kendi tanım cümlesi üzerinde monoton bir fonksiyon olduğundan her ikisinin de maküs fonksiyonları vardır.

$f_1$ fonksiyonunun maküs fonksiyonu $x \geq 0$ olduğundan,

$$x = g_1(y) = \sqrt{y+3}$$

dır.




Şekil 36.

$f_2$ fonksiyonunun maküs fonksiyonu $x < 0$ olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$x = g_2(y) = -\sqrt{y+3}$$

dır.

1.3.3. $f = \{(x, y) \mid y = |x^3|\}$ fonksiyonunun maksûs cümlesi $f^{-1}$'i belirleyin. $f$ fonksiyonunun tanım cümlesinin hangi alt cümleleri üzerinde maksûs fonksiyonunun tanımlanabileceğini açıklayın.

$f$ reel sayılar cümlesi IR'yi $IR^+$'ya resmeden bir fonksiyon olduğundan $f$'nin maksûs cümlesi $f^{-1}$'i oluşturacak sıralı çiftler $IR^+ \times IR$ cümlesinin bir alt cümlesinin elemanları olacaklardır.

$$f = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\} = \{(y, x) \mid \mp x = \sqrt[3]{y}, y > 0\}$$

$$= \{(y, x) \mid x = \sqrt[3]{y}, y > 0\} \cup \{(y, x) \mid x = -\sqrt[3]{y}, y > 0\}$$

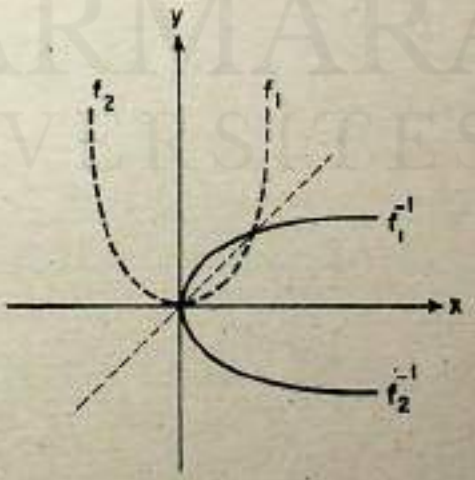
dır.

Örnek 1.3.2'de olduğu gibi $f$ fonksiyonunun $f_1$ ve $f_2$ gibi iki fonksyonu tanımladığı kabul edilsin ve bunlar sırası ile

$$x \geqslant 0 \quad \text{için} \quad f_1(x) = |x^3| = x^3 \quad \text{ve}$$

$$x \leqslant 0 \quad \text{için} \quad f_2(x) = |x^3| = -x^3$$

olarak seçilsin.




Şekil 37.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$]0, \infty[$ aralığı üzerinde $f_1'(x) = 3x^2 > 0$ olduğundan, $x \geq 0$ için $f_1$ fonksiyonu kesin monoton artan,

$]-\infty, 0[$ aralığı üzerinde $f_2'(x) = -3x^2 < 0$ olduğundan, $x \leq 0$ için $f_2$ fonksiyonu kesin monoton eksilendir.

$f$'nin kesin monoton olduğu aralıklar üzerinde makûs fonksiyonu var olduğundan $x = g_1(y)$'nin $f_1$'in makûs fonksiyonu olması için $g_1(y) > 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $y \geq 0$ için $g_1(y) = 3\sqrt{y}$ olarak tanımlanır. Benzer şeyler $x = g_2(y)$ için söylenebilir. $g_2(y) < 0$ olması için $x = g_2(y) = -3\sqrt{y}$, $y \geq 0$ olarak tanımlaması gerekir.

1.3.4. $f(x) = x^3 + 1 \quad (x \geq 0)$ fonksiyonunun makûs fonksiyonunu belirleyin.

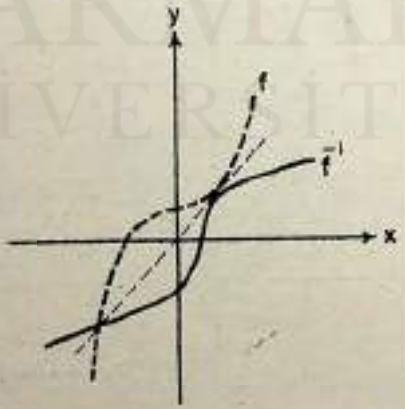
$x > 0$ için

$$f'(x) = 3x^2 > 0$$

olduğundan, $f$ fonksiyonu kesin monoton artandır, dolayısıyla makûs fonksiyonu $y \geq 1$ için

$$g(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

olarak tanımlanır.




Şekil 38.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


1.3.5. $f = \{(x, y) \mid y = \dfrac{x}{x^2-1}\}$ cümlesi ile verilen fonksiyonun $]-1, 1[$ aralığı üzerinde maksüs fonksiyonu var mıdır, varsa tanımlayınız, $f$ fonksiyonu

$$T(f) = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, \infty[$$

cümlesi üzerinde tanımlıdır. $T(f)$'yi teşkil eden bu üç aralık üzerinde sürekli ve türetilebilir olan bu fonksiyon için

$$f'(x) = \frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$$

olduğundan $f$ bu açık aralıklar üzerinde kesin monoton eksilen bir fonksiyondur, dolayısıyla bu aralıklardan herhangi biri üzerinde $f$'nin tanımlı olması maksüs fonksiyonunun var olması için yeterlidir. Bu ise $]-1, 1[$ açık aralığı üzerinde $f$'nin maksüs fonksiyonu $g$'nin var olduğunu gösterir. $g(y) = x$ fonksiyonu

$$yx^2 - x - y = 0$$

denkleminin $y$'nin fonksiyonu olan köklerinden biridir. Yani

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4y^2}}{2y} \quad \text{veya} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4y^2}}{2y}$$

dir.

$g$ fonksiyonu bütün $y$ değerleri için tanımlı ve resim cümlesi $]-1, 1[$ aralığı olmaktır. Bu iki koşulu ise

$$x_2 = g(y) = \frac{1-\sqrt{1+4y^2}}{2y}$$

fonksiyonu sağlar. $y = 0$ için $g(y) = \dfrac{0}{0}$ olduğundan belirsizliği kaldırmak için pay ve payda $1+\sqrt{1+4y^2}$ ile çarpılır. Sonuç olarakta

$$g(y) = \frac{1-1-4y^2}{2y(1+1+4y^2)} = \frac{-2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$$

ve

$$g(0) = 0$$

bulunur. Elemanter yollarla $|g(y)| < 1$ olduğuda gösterilebilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

## 2 — MAKÛS FONKSİYONUN TÜREVİ

*Teorem :* $a$ *ve* $b$, $a < b$ *olmak üzere iki sayı olsunlar.* $f$ *ise* $]a, b[$ *açık aralığı üzerinde türetilebilen ve her* $x \in ]a, b[$ *için* $f'(x) > 0$ *olan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde* $f$*'nin makûs fonksiyonu vardır ve*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

*dır.*

*İspat :* Önce Newton kesrini teşkil edelim,

$$\frac{g(y+k) - g(y)}{k}$$

Aradeğer Teoreminden dolayı $k$'nın çok küçük değerleri için $y+k$ şeklindeki her sayı $f$'nin bir değeri şeklinde yazılabilir. $x = g(y)$ ve $h = g(y+k) - g(y)$ olsun. Bu taktirde

$$x = g(y) \quad \text{ve} \quad g(y+k) = x + h$$

dır. Ayrıca $y + k = f(x + h)$ dır. Burdan

$$k = f(x + h) - f(x)$$

bulunur. $g$ için yazılan Newton kesri böylece

$$\frac{h}{f(x+h) - f(x)}$$

veya

$$\frac{1}{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

şekline dönüşür. Bu yazılış ise $f$ için yazılan Newton kesrinin tersinden başka birşey değildir. $h$ sıfıra yaklaşırken $k$'nın da sıfıra yaklaştığını biliyoruz. Tersine $x \to 0$ için makûs fonksiyonunun tanımından dolayı $f(x+h) = y+k$ olacak şekilde tek bir $h$ sayısı vardır, dolayısıyla da $h \to 0$ dır. Şimdi $h$ veya $k$ sıfıra yaklaşırken $f$'nin Newton kesrinin tersinin limitini alalım,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$g'(y) = \lim_{k\to 0} \frac{g(y+k)-g(y)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}} = \frac{1}{f'(x)}$$

bulunur, böylecede ispat tamamlanmış olur.

2.1. *Örnekler :*

2.1.1. $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $x > 2/3$ açık aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $g'$ maküs fonksiyonu için, $g'(0)$ 'ı hesaplayın.

$f'(x) = 3x^2-2$ dir. $y = f(x)$ ten $x = g(y)$ elde edilir ve yukarda açıklananlardan $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ bulunur. Fakat $f(1) = 0$ ve $g(0) = 1$ olduğundan $f'(g(0)) = f'(1) = 1$ bulunur. Bu nedenle

$$g'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1$$

dir.

2.1.2. $f(x) = 3x-2$ fonksiyonu için $f^{-1}$ maküs fonksiyonunu bulunuz ve $(f^{-1})'(2)$ değerini hesaplayınız.

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$$

olduğunu gösteriniz.

$f$ fonksiyonu bütün reel sayılar cümlesi üzerinde tanımlıdır. Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $x_1 \neq x_2$ olmak üzere $3x_1-2 \neq 3x_2-2$ yani $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan $f$ injektif bir fonksiyondur dolayısıyla da maküs fonksiyonu vardır. $f^{-1}$ notasyonunu kullanarak

$$g(y) = \frac{y+2}{3}$$

yerine

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

yazılır. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3}$$

olduğundan

(2.1)
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{3}$$

dır. Öte yandan

$$f^{-1}(2) = \frac{4}{3}$$

ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 3$

olduğundan

(2.2) $$f'(f^{-1}(2)) = 3$$

bulunur. (2.1) ve (2.2)'den

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$$

elde edilir.

2.2. *Alıştırmalar*

1. Aşağıdaki özellikleri verilen $f$ fonksiyonların herbirinin maküs fonksiyonlarının grafikleri hakkında ne söylenebilir?
   (a) $f$ kesin artan ve pozitif,
   (b) $f$ kesin artan ve negatif,
   (c) $f$ kesin eksilen ve pozitif,
   (d) $f$ kesin eksilen ve negatif.

2. $f$ ve $g$ kesin artan iki fonksiyon ise $f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ fonksiyonları için ne söylenebilir?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



3. $f$ ve $g$ fonksiyonları injektif fonksiyonlar ise bileşke fonksiyonu $fog$ de injektif midir? $(fog)^{-1}$ fonksiyonunu $f^{-1}$ ve $g^{-1}$ fonksiyonlarına bağlı olarak ifade ediniz.

4. $f$ fonksiyonu injektif ve $g(x) = 1 + f(x)$ ise $g$ fonksiyonunun maküs fonksiyonu $g^{-1}$ i $f^{-1}$ e bağlı olarak ifade ediniz.

5. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun injektif olması için gerek ve yeter koşulun $ad-bc \neq 0$ olduğunu gösterin. $ad-bc \neq 0$ ise $f^{-1}$ nedir?

6. Aşağıdaki fonksiyonların herbirinin maküs fonksiyonunu bulunuz.

a) $f(x) = x + [x]$ , $1 \leqslant x < 2$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ , $x > -2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ; $0 < x \leqslant 1$

d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ; $0 < x \leqslant 1$

e) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ ; $0 < x < 2$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ ; $0 \leqslant x \leqslant 5$

7. $f(x) = 3x^3 - 1$ fonksiyonunun makûsu $f^{-1}$ i ve maküs fonksiyonunun türevi $(f^{-1})'$i yazınız.

8. Aşağıda verilen fonksiyonların maküs fonksiyonlarının türevini belirtilen noktada bulun.

1) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ ; $x > -2$ ; $x = \sqrt{1/2}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ ; $0 \leqslant x < 2$ ; $x = -2$

3) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ; $x > -1$ ; $x = -1$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ ; $x \geqslant 1$ ; $x = 1/2$

9. $f(x) = 3x^3 - 1$ fonksiyonu için $f^{-1}$ makûs fonksiyonunu bulunuz.

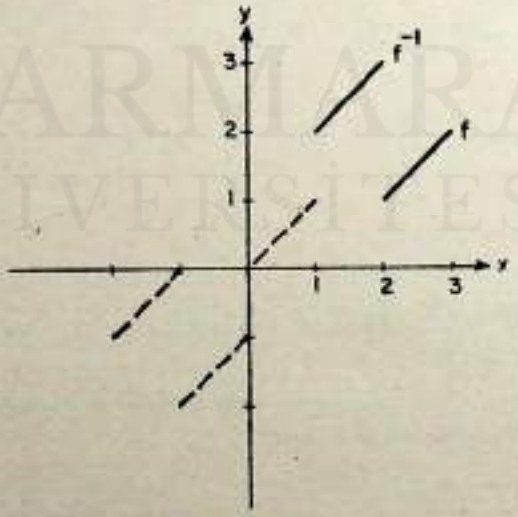
$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$$

olduğunu gösteriniz.

2.3. *Yanıtlar*

6. a)

$f^{-1}(x) = 1$ , $2 \leqslant x < 3$



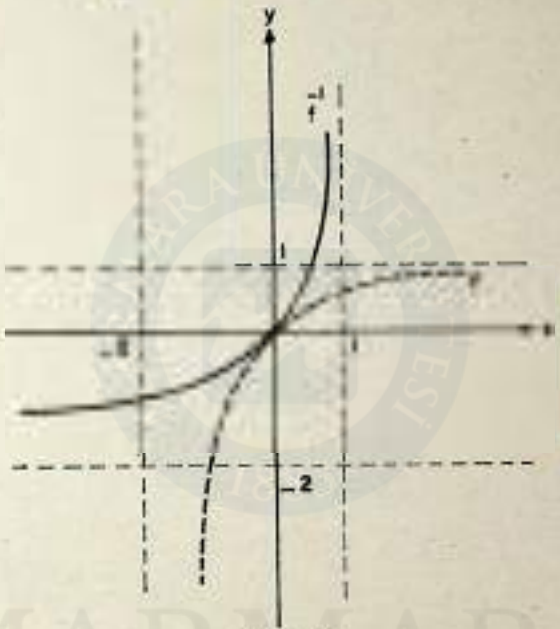

Şekil 39

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



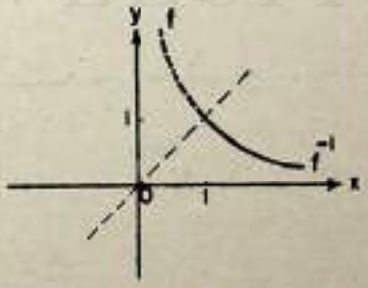
6. b)

$f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}$ ; $x < 1$




Şekil 40

6. e) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; $x \geq 1$




Şekil 41.

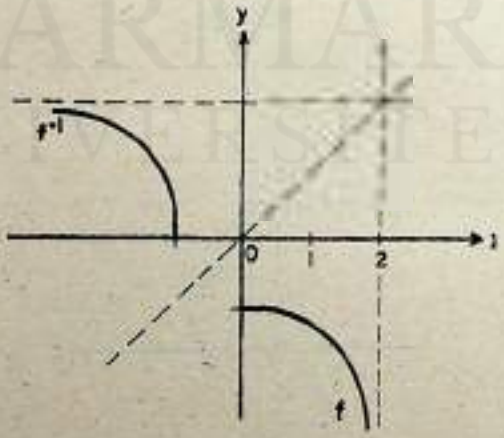
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6. d) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}$ ; $x \geq 2$



Şekil 42.

6. e) $f^{-1}(x) = \dfrac{2(x+1)}{x-1}$ ; $x < -1$




Şekil 43.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



6. f) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ; $0 < x < 1$



Şekil 44.

8.1. $(f^{-1})'(1\sqrt{2}) = \frac{4}{(\sqrt{2}-1)^2}$

8.2. $(f^{-1})'(\frac{1}{4}) = -\frac{4}{9}$

8.3. $(f^{-1})'(-1) = \frac{1}{4}$

8.4. $(f^{-1})'(-) = -\frac{4\sqrt{3}+8)}{\sqrt{3}}$

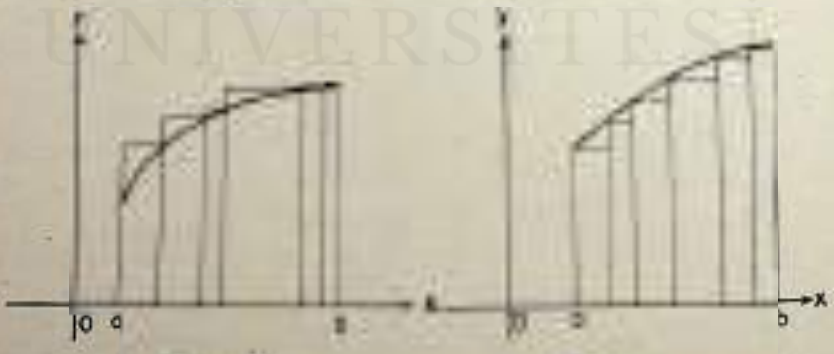
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

## BÖLÜM XIV

## İNTEGRAL KAVRAMI

### 1 — ALAN

$f$, $[a, b] = A$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun grafiği olan *eğri altında kalan alan*, yani yatay eksen, $x = a$, $x = b$ doğruları ve söz konusu grafik tarafından çevrilmiş düzlem parçasının alanı, yaklaşık olarak iki şekilde hesaplanabilir. Şekil 45 te gösterildiği gibi, A aralığını birtakım parçalara bölüp, bu bölüm sayesinde elde edilen bütün alt aralıklar üzerinde, her alt aralığı taban, $f$ fonksiyonunun bu alt aralık üzerindeki maksimum değerini de yükseklik kabul eden dikdörtgenlerin alanlarının toplamını alarak, yani söz konusu olan alana *üstten yaklaşarak* veya, Şekil 46 da gösterildiği gibi, yine her alt aralığı taban fakat $f$ fonksiyonunun bu aralık üzerindeki minimum değerini yükseklik kabul eden dikdörtgenlerin alanlarının toplamını alarak, yani söz konusu alana *alttan yaklaşarak* hesaplanabilir.




Şekil 45

Şekil 46

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 45 ve 46 dan da görüldüğü gibi, A üzerinde $f$ fonksiyonu tarafından belirlenen alan, Şekil 45 deki dış dikdörtgenlerin üst kenarlarından oluşan kırık çizgi ile sınırlanmış alandan küçük, Şekil 46 daki iç dikdörtgenlerin üst kenarlarından oluşan kırık çizgi ile sınırlanmış alandan büyüktür.

*1.1. Zincir*

$[a, b]$ aralığını bölmek, $a$ ve $b$ noktaları ile birlikte, $a$ ve $b$ noktaları arasında bulunan sonlu sayıda daha başka noktalar almak demektir. Bu şekilde elde edilen, sıralanmış bir

$$\Gamma = \{a = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n = b\}$$

nokta takımına, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış bir *zincir* denir.

$\Gamma_1$ ve $\Gamma_2$, aynı $[a, b]$ aralığı üzerinde seçilmiş iki zincir olsun. $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ ise, $\Gamma_2$ zincirine $\Gamma_1$ zincirinden incedir denir.

A aralığı üzerinde tanımlanan bir zincir ile elde edilen yaklaşılmış olur.

*1.2. Alt ve üst toplam*

$f$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı bir fonksiyon ve $\Gamma = \{a = t_0, t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, t_n = b\}$ aynı aralık üzerinde bir zincir olsun

$$m_i = \inf \{f(x) \mid t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}$$

$$M_i = \sup \{f(x) \mid t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i\}$$

ise, $f$ fonksiyonunun $\Gamma$ zincirine göre *alt toplamı* $A(f, \Gamma)$ ile gösterilir ve

$$A(f, \Gamma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \ (t_i - t_{i-1})$$

şeklinde tanımlanır. Aynı şekilde, $f$ fonksiyonunun $\Gamma$ zincirine göre *üst toplamı* $\bar{U}(f, \Gamma)$ ile gösterilir ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\bar{U}(f,\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(t_i - t_{i-1})$$

şeklinde tanımlanır.

$f$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alan $R(f,a,b)$ ile gösterilecek olursa, yukarda açıklananlarm sonucu olarak

$$A(f,\Gamma) \leqslant R(f;a,b) \leqslant \bar{U}(f,\Gamma)$$

elde edilir.

*1.3. İntegre edilebilen fonksiyonlar*

$\mathbb{Z}$ ile, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlanabilen bütün zincirlerin oluşturduğu cümle gösterilsin.

$$\sup\{A(f,\Gamma) \mid \Gamma \in \mathbb{Z}\} = \inf\{\bar{U}(f,\Gamma) \mid \Gamma \in \mathbb{Z}\}$$

ise, $f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde *integre edilebilir*, veya Riemann anlamında *integrali vardır*, denir ve $f$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerideki integrali

$$\int_a^b f$$

ile gösterilecek olursa,

$$\int_a^b f = \sup\{A(f,\Gamma) \mid \Gamma \in \mathbb{Z}\} = \inf\{\bar{U}(f,\Gamma) \mid \Gamma \in \mathbb{Z}\}$$

yazılır[1].

2 — ÖRNEKLER

2.1. Alt ve Üst Toplamlar

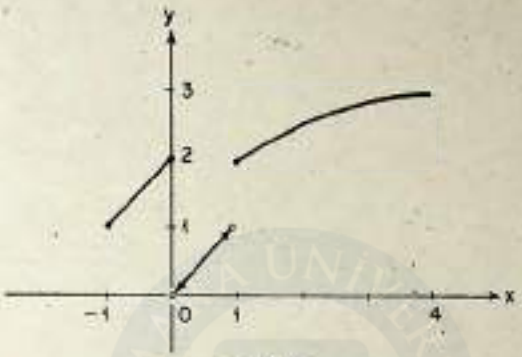
2.1.1.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ \sqrt{x}+1 & 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

(1) GS-AG. s. 281

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ






Şekil 47

fonksiyonu $[-1, 4]$ aralığı üzerinde tanımlanmıştır.

$$\Gamma = \{-1, 0, 1, 3, 4\}$$

zincirini göz önüne alarak $f$ fonksiyonunun $A(f, \Gamma)$ alt ve $U(f, \Gamma)$ üst toplamlarını bulunuz.

$$t_0 = -1, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 3, \quad t_4 = 4$$

olduğuna göre

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = 2, \quad m_4 = \sqrt{3} + 1$$

$$M_1 = 2, \quad M_2 = 2, \quad M_3 = \sqrt{3} + 1, \quad M_4 = 3$$

tür. Şu halde

$$A(f, \Gamma) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (\sqrt{3} + 1) \cdot 1$$

$$= 1 + 4 + \sqrt{3} + 1 = 6 + \sqrt{3}$$

$$A(f, \Gamma) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (\sqrt{3} + 1) \cdot 2 + 3 \cdot 1$$

$$= 2 + 2 + 2\sqrt{3} + 2 + 3$$

$$= 9 + 2\sqrt{3}$$

ve verilen fonksiyon tarafından sınırlanan alan $R(f; -1, 4)$ ile gösterileceğine göre

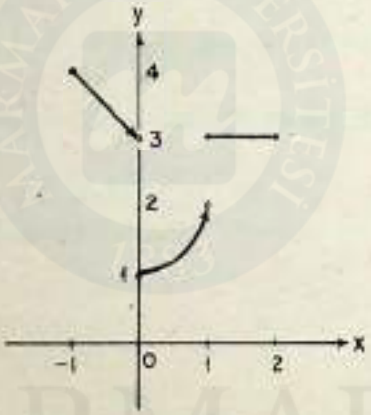
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$6 + \sqrt{3} \leqslant R(f; -1, 4) \leqslant 9 + 2\sqrt{3}$$

olur.

2.1.2.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3 & -1 \leqslant x < 0 \\ x^2 + 1 & 0 \leqslant 2x \leqslant 1 \\ 3 & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$




Şekil 48

fonksiyonu $[-1, 2]$ aralığı üzerinde tanımlanmıştır.

$$\Gamma = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right\}$$

zincirini göz önüne alarak $f$ fonksiyonunun $A(f, \Gamma)$ alt ve $\bar{U}(f, \Gamma)$ üst toplamlarını bulunuz.

$$t_0 = -1, \quad t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{1}{2}, \quad t_4 = \frac{3}{2}, \quad t_5 = 2$$

olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$m_1 = \frac{7}{2};\ m_2 = 1,\ m_3 = 1,\ m_4 = \frac{5}{4};\ m_5 = 3$$

$$M_1 = 4,\ M_2 = \frac{7}{2};\ M_3 = \frac{5}{4};\ M_4 = 3,\ M_5 = 3$$

olup

$$A(f, \Gamma) = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{7}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6}{4}$$

$$= \frac{11}{2}$$

$$U(f, \Gamma) = 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 2 + \frac{7}{4} + \frac{5}{8} + 3 + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{71}{8}$$

dır ve verilen fonksiyon tarafından sınırlanan alan $R(f; -1, 2)$ ile gösterilecek olursa

$$\frac{11}{2} = 5{,}5 \leqslant R(f; -1, 2) \leqslant 8{,}875 = \frac{71}{8}$$

elde edilir.

2.1.3. *Alıştırmalar :*

Aşağıda verilen fonksiyon ve zincirler için alt ve üst toplamları hesaplayınız:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) $[0, 9]$ aralığı üzerinde $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu ve $\Gamma = \{0, 1, 4, 9\}$ zinciri.

Yanıt : $A(f, \Gamma) = 13$, $\bar{U}(f, \Gamma) = 22$

b) $[0, 4]$ aralığı üzerinde $f(x) = (x - 4)^2$ fonksiyonu ve $\Gamma = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ zinciri.

Yanıt : $A(f, \Gamma) = 14$, $\bar{U}(f, \Gamma) = 30$

c) $[0, 5]$ aralığı üzerinde $f(x) = x + 3$ fonksiyonu ve $\Gamma_1 = \{0, 2, 4, 5\}$ $\Gamma_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ zincirleri.

Yanıt : $A(f, \Gamma_1) = 23$, $\bar{U}(f, \Gamma_1) = 32$

$A(f, \Gamma_2) = 25$, $\bar{U}(f, \Gamma_2) = 30$

d) $[0, 4]$ aralığı üzerinde $f(x) = 16 - x^2$ fonksiyonu ve $\Gamma_1 = \{0, 2, 4\}$ ve $\Gamma_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ zincirleri.

Yanıt : $A(f, \Gamma_1) = 24$, $\bar{U}(f, \Gamma_1) = 56$
$A(f, \Gamma_2) = 34$, $\bar{U}(f, \Gamma_2) = 50$

e) $[0, 1]$ aralığı üzerinde $f(x) = x^3$ fonksiyonu ve

$\Gamma_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ $\Gamma_2 = \{0, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}, 1\}$ zincirleri.

Yanıt : $A(f, \Gamma_1) = \frac{125}{1000}$; $U(f, \Gamma_1) = \frac{625}{1000}$

$A(f, \Gamma_2) = \frac{183}{1000}$; $U(f, \Gamma_2) = \frac{523}{1000}$

f) Önceki alıştırma e) de verilen $\Gamma_1$ ve $\Gamma_2$ zincirlerinden hareket ederek $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ zincirini teşkil ediniz ve bu zincir için $A(f, \Gamma)$ ve $\bar{U}(f, \Gamma)$ toplamlarını bulunuz.

Yanıt : $\Gamma = \{0, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, 1\}$

$A(f, \Gamma) = \frac{215}{1000}$; $U(f, \Gamma) = \frac{475}{1000}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


2.2. *Yaklaşımlar*

İntegral tanımına göre, $\Gamma$ zinciri nasıl seçilirse seçilsin

$$A(f,\Gamma) \leqslant \int_a^b f \leqslant \bar{U}(f,\Gamma)$$

olduğu görülür. Bu ifadeden hareket ederek, ve her terimden

$$\frac{1}{2}\left(\bar{U}(f,\Gamma) + A(f,\Gamma)\right)$$

sayısını çıkarak

$$\frac{1}{2}\left(A(f,\Gamma) - \bar{U}(f,\Gamma)\right) \leqslant \int_a^b f - \frac{1}{2}\left(A(f,\Gamma)\right.$$

$$\left. + \bar{U}(f,\Gamma)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\bar{U}(f,\Gamma) - A(f,\Gamma)\right)$$

yani

$$-\frac{1}{2}\left(\bar{U}(f,\Gamma) - A(f,\Gamma)\right) \leqslant \int_a^b f - \frac{1}{2}\left(A(f,\Gamma)\right.$$

$$\left. + \bar{U}(f,\Gamma)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\bar{U}(f,\Gamma) - A(f,\Gamma)\right)$$

elde edilir. Şu halde

$$\left|\int_a^b f - \frac{1}{2}\left(A(f,\Gamma) + \bar{U}(f,\Gamma)\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\bar{U}(f,\Gamma) - A(f,\Gamma)\right)$$

bulunur, yani

$$\int_a^b f$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yerine alt ve üst toplamlarının aritmetik ortalaması olan

$$\frac{1}{2}\left(A\left(f,\Gamma\right)+\bar{U}\left(f,\Gamma\right)\right)$$

almakla yapılan hata

$$\frac{1}{2}\left(\bar{U}\left(f,\Gamma\right)-A\left(f,\Gamma\right)\right)$$

sayısından küçük veya bu sayıya eşittir.

2.2.1. *Örnekler*

Örnek 2.1.1. de $R\left(f;-1,4\right)$ alanının yerine

$$\frac{6+\sqrt{3}+9+2\sqrt{3}}{2}=10.098$$

alınması halinde, yapılan hata

$$\frac{9+2\sqrt{3}-6-\sqrt{3}}{2}=2.366$$

sayısından küçük veya bu sayıya eşittir.

Örnek 2.1.2 de $R\left(f;-1,2\right)$ alanının yerine

$$\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}+\frac{71}{8}\right)=7,1875$$

alınması halinde, yapılan hata

$$\frac{1}{2}\left(\frac{71}{8}-\frac{11}{2}\right)=1,6875$$

sayısından küçük veya bu sayıya eşittir.

*2.3. Monoton fonksiyonların bir özelliği*

$f$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde kesin olarak artan bir fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlanan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\Gamma = \{a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n = b\}$$

zinciri nasıl seçilirse seçilsin, $K_i = [t_{i-1}, t_i]$ alt aralığında her $x \in K_i$ için $t_{i-1} \leqslant x \leqslant t_i$ olduğundan

$$f(t_{i-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(t_i)$$

dir, yani

$$m_i = f(t_{i-1}),\ M_i = f(t_i)$$

dir. Bu durumda

$$U(f, \Gamma) - A(f, \Gamma) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1})$$

dir. $\Gamma$ zincirinin, $[a, b]$ aralığını $n$ tane eşit parçaya bölerek elde edildiği varsayılsın. Bu takdirde

$$U(f, \Gamma) - A(f, \Gamma) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))$$

$$= \frac{b-a}{n} (f(t_n) - f(t_0))$$

$$= \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n}$$

elde edilir ve herhangi bir $\varepsilon$ pozitif reel sayısı verildiğinde,

$$n > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon}$$

şeklinde seçilecek olursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$U(f, \Gamma) - A(f, \Gamma) < \varepsilon$$

olur, yani $f$ fonksiyonu integre edilebilir[1]. $f$ fonksiyonunun kesin olarak eksilen bir fonksiyon olması halinde de yukardakine benzer bir yöntem uygulanır, ancak eşitsizliklerin yönü değişir.

Yukardaki sonuç, eşit uzunlukta alt aralıklardan oluşan zincirlerin monoton fonksiyonlar ele alındığında bazı kolaylıklar sağlayacaklarını gösterir.

2.3.1. *Örnekler*:

2.3.1.1. $f(x) = x^3$ fonksiyonunun $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerindeki alt ve üst toplamlarının, sırasıyla $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ veya $\frac{1}{n}$'e eşit uzunlukta olan alt aralıklardan oluşan $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ ve $\Gamma_n$ zincirlerine göre hesaplanması.

$f(x) = x^3$ fonksiyonu kesin olarak artan bi fonksiyon olduğuna göre, $\Gamma_1 = \{0, \frac{1}{2}; 1\}$ zinciri için

$$A(f, \Gamma_1) = f(0)\ \frac{1}{2} + f(\frac{1}{2})\ \frac{1}{2} = (f(0) + f(\frac{1}{2}))\ \frac{1}{2}$$

$$U(f, \Gamma_1) = f(\frac{1}{2})\ \frac{1}{2} + f(1)\ \frac{1}{2} = (f(\frac{1}{2}) + f(1))\ \frac{1}{2}$$

dir ve

$$f(0) = 0,\ f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8},\ f(1) = 1$$

olduğundan

---

(1) GS-AG. s. 8

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$A(f,\Gamma_1)=\frac{1}{16};\quad \bar{U}(f,\Gamma_1)=\frac{9}{16}$$

dir. $\Gamma_2$ zinciri $\Gamma_2=\{0,\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};1\}$ olduğuna göre

$$A(f,\Gamma_2)=(f(0)+f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4}))\cdot\frac{1}{4}$$

$$\bar{U}(f,\Gamma_2)=(f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{2})+f(\frac{3}{4})+f(1))\cdot\frac{1}{4}$$

dir ve

$$f(0)=0,\quad f(\frac{1}{4})=\frac{1}{46};\ f(\frac{1}{2})=\frac{8}{64};\ f(\frac{3}{4})=\frac{27}{64};\ f(1)=1$$

olduğundan

$$A(f,\Gamma_2)=\frac{36}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64};\quad \bar{U}(f,\Gamma_2)=\frac{100}{64}\cdot\frac{1}{4}=\frac{25}{64}$$

dir. $\Gamma_n=\{0,\frac{1}{n};\frac{2}{n};\frac{3}{n},\ldots,\frac{n-1}{n};\frac{n}{n}=1\}$ zincir göz önüne alınacak olursa

$$A(f,\Gamma_n)=(f(0)+f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots$$

$$+f(\frac{i}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n}))\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}f(\frac{i}{n})\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{i}{n})^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2$$

$$=\frac{1}{n^3}(\frac{n(n-1)}{2})^2=\frac{n^2-2n+1}{4n^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$U(f,\Gamma_2) = (f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots$$

$$+ f(\frac{i}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n}))\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^3 = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$= \frac{1}{n^4}(\frac{n(n+1)}{2})^2 = \frac{n^2+2n+1}{4n^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}$$

bulunur.

n sayısı herhangi bir doğal sayı olduğuna göre

$$\bar{U}(f,\Gamma_n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} > \frac{1}{4}$$

tür; her $n$ doğal sayısı için $1-2n<0$ olduğundan $\frac{1-2n}{4n^2} < 0$ dolayısıyla

$$A(f,\Gamma_n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} + \frac{1-2n}{4n^2} < \frac{1}{4}$$

tür. Şu halde, her $n$ doğal sayısı için

$$A(f,\Gamma_n) \leqslant \frac{1}{4} \leqslant \bar{U}(f,\Gamma_n)$$

dir. $f(x)=x^3$ fonksiyonu sürekli olduğundan $[0,1]$ aralığında integrali vardır ve

$$A(f,\Gamma_n) \leqslant \int_0^1 x^3\,dx \leqslant \bar{U}(f,\Gamma_n)$$

dir. Üstelik

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\ddot{U}(f,\Gamma_n) - A(f,\Gamma_n) = \frac{1}{n}$$

olup, bu fark $n$ doğal sayısını yeteri kadar büyük seçmek suretiyle verilen her pozitif reel sayısından küçük kılınabilir. Şu halde

$$\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$$

tür.

2.3.1.2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonu ile $[0, \frac{1}{2}]$ aralığı üzerinde belirlenen alanın yaklaşık hesabı.

$[0, \frac{1}{2}]$ aralığı üzerinde eşit aralıklı bir

$$= \{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}\}$$

sinciri alınsın.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)$$

söz konusu aralıkta daima pozitif olduğundan, fonksiyon bu aralıkta kesin olarak artandır ve dolayısıyla

$$A(f,\Gamma) = (f(0) + f(\frac{1}{8}) + f(\frac{2}{8}) + f(\frac{3}{8}))\ \frac{1}{8}$$

$$\ddot{U}(f,\Gamma) = (f(\frac{1}{8}) + f(\frac{2}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{4}{8}))\ \frac{1}{8}$$

dır.

$$f(0) = 1$$

$$f(\frac{1}{3}) = \frac{8}{\sqrt{63}} = 1{,}0079$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{\sqrt{60}} = 1{,}0327$$

$$f\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{8}{\sqrt{55}} = 1{,}0787$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{\sqrt{48}} = 1{,}1547$$

olduğundan

$$A(f, \Gamma) = (4{,}1194\ldots) \cdot \frac{1}{8} = 0{,}5149$$

$$U(f, \Gamma) = (4{,}2741\ldots) \cdot \frac{1}{8} = 0{,}5342$$

dir ve

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{1}{2}\,(0{,}5342 + 0{,}5149) = 0{,}5245$$

olup, bu değeri almakla yapılan hata

$$\frac{1}{2}\,(0{,}5342 - 0{,}5149) = 0{,}0096$$

sayısından küçük veya buna eşittir.

## 3 — ÇEŞİTLİ ALIŞTIRMALAR

3.1. $f$ fonksiyonu $x \geqslant 1$ için tanımlı, kesin olarak artan ve sürekli bir fonksiyon ise ve üstelik $x > 1$ koşulunu sağlayan her $x$ değişken değeri için $f(x) \geqslant 0$ koşulunu sağlıyorsa

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \leqslant \int_1^n f(x)\,dx \leqslant f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$$

olduğunu gösteriniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$[1, n]$ aralığı üzerinde $\Gamma = (1, 2, 3, \ldots, n-1, n)$ şeklinde açıklanan zincir göz önüne alınsın. Bu durumda $K_i$ alt aralıklarının uzunluğu hep 1 sayısına eşit olacağından ve fonksiyon kesin olarak artan bir fonksiyon olduğundan

$$A(f, \Gamma) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

$$\bar{U}(f, \Gamma) = f(2) + f(3) + \ldots + f(n)$$

olup,

$$A(f, \Gamma) \leqslant \int_1^n f \leqslant \bar{U}(f, \Gamma)$$

temel bağıntısından istenen bağıntı elde edilir.

3.2. $f$ fonksiyonu $x \geqslant 1$ için tanımlı, kesin olarak eksilen ve sürekli bir fonksiyon ise ve üstelik $x > 1$ koşulunu sağlayan her $x$ değişken değeri için $f(x) \geqslant 0$ koşulunu sağlıyorsa

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leqslant \int f \leqslant f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

olduğunu gösteriniz.

3.1. i çözmek için uygulanan yöntemle çözülür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM XV

## İNTEGRAL HESABIN ESAS TEOREMLERİ

### 1 — İNTEGRAL HESABIN ESAS TEOREMLERİ

İntegral Hesabın Esas Teoremleri şunlardır:

1.1. *f, [p, q] aralığında Riemann anlamında integrali olan bir fonksiyon olsun ve* $x \in [p, q]$ *olmak üzere*

$$F(x) = \int_p^x f$$

*yazılsın. f fonksiyonu [p, q] aralığındaki herhangi bir a noktasında sürekli ise, F fonksiyonu a noktasında türetilebilir ve* $F'(a) = f(a)$ *dır*[1].

1.2. *f fonksiyonu [p, q] aralığı üzerinde Riemann anlamında integrali olan bir fonksiyon olsun, [p, q] aralığında tanımlanmış, bu aralıkta türetilebilen ve*

$$g' = f$$

*bağıntısını sağlayan bir g fonksiyonu varsa*

$$\int_q^p f = g(q) - g(p)$$

*dir*[2].

Bu iki teorem ile birlikte

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1$$

fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevinin

---

(1) GS-AG, s. 300-302.

(2) GS-AG, s. 307-309.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$g'(x) = x^n$$

olduğu göz önüne alınsın. Teorem 1.2. den

$$\int_p^q x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,(q^{n+1} - p^{n+1})$$

dir[3].

## 2 — UYGULAMALAR

2.1. $\dfrac{1}{2^{1/2}} + \dfrac{1}{3^{1/2}} + \ldots + \dfrac{1}{n^{1/2}} \leqslant 2\,(\sqrt{n}-1) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2^{1/2}} + \dfrac{1}{3^{1/2}} + \ldots + \dfrac{1}{(n-1)^{1/2}}$

bağıntısının kanıtlanması.

$$f(x) = x^{-1/2}$$

fonksiyonu $[1, n]$ aralığı üzerinde tanımlıdır. Üstelik,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\,x^{-3/2}$$

olduğuna göre, $]1, n[$ üzerinde $f' < 0$ dır: fonksiyon aralıkta türetilebildiğinden sürekli ve ayrıca bu aralıkta kesin olarak eksilen bir fonksiyondur. Şu halde

$$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

tanımlıdır. Ayrıca, Bölüm XIV teki 3.2. alıştırmasında kanıtlanan bağıntı burada uygulanabilir, yani

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leqslant \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \leqslant f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

dir. Şu halde

---

(3) GS-AG, s. 305-306.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(2.1.1) $$\frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/2}} \leqslant \frac{2x}{\sqrt{x}} \leqslant 1 + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^{1/2}}$$

dir.

Halbuki

$$f(x) = x^{-1/2}$$

ve

$$g(x) = 2x^{1/2}$$

alınırsa,

$$g(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = x^{-1/2}$$

dir, yani $[1, n]$ üzerinde

$$g' = f$$

dir. Şu halde

$$\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{1} = 2\sqrt{n} - 2$$

dir ve (2.1.1) bağıntısından

$$\frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/2}} \leqslant 2(\sqrt{n} - 1) \leqslant 1 + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^{1/2}}$$

elde edilir.

2.2 $$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 \leqslant \frac{n^3}{3} \leqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

bağıntısının kanıtlanması

$$f(x) = x^2$$

fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon $[0, n]$ aralığı üzerinde tanımlıdır ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f'(x) = 2x$$

olduğundan bu fonksiyon aynı aralık üzerinde sürekli ve kesin olarak artan bir fonksiyondur. Şu halde

$$\int_0^n x^2\,dx$$

integrali tanımlıdır. Üstelik, Bölüm XIV teki 3.1. alıştırmasında kanıtlanan bağıntı bu integrale uygulanabilir, yani

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) \leqslant \int x^2\,dx \leqslant f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

dir. Buna göre

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 \leqslant \int_0^n x^2\,dx \leqslant 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

elde edilir.

$$\int_0^n x^2\,dx = \frac{n^3}{3}$$

olduğundan, sonuca varılır.

2.3. $1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 \leqslant \frac{n^4}{4} \leqslant 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

bağıntısının kanıtlanması.

2.2. için açıklanan yöntem aynen uygulanır ve hatta bu tür sonuçlar genelleştirilerek, $s$ herhangi bir doğal sayı olmak üzere

$$1^s + 2^s + \ldots + (n-1)^s \leqslant \frac{n^{s+1}}{s} \leqslant 1^s + 2^s + \ldots + n^s$$

şeklinde bağıntılar elde edilebilir.

2.4. $1^{1/4} + 2^{1/4} + \ldots + (n-1)^{1/4} \leqslant \frac{4}{5}\, n^{5/4} \leqslant 1^{1/4} + 2^{1/4} + \ldots + n^{1/4}$

bağıntısının kanıtlanması.

$$f(x) = x^{1/4}$$

fonksiyonu $[0, n]$ aralığında tanımlıdır. Üstelik

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f'(x) = \frac{1}{4}\, x^{-3/4}$$

olduğundan yani bu fonksiyon $]0, \infty[$ aralığı üzerinde türetilebildiğinden süreklidir ve dolayısıyla

$$\int_0^n x^{1/4}\, dx$$

integrali tanımlıdır. Üstelik, $f'$ söz konusu aralık üzerinde daima pozitif kaldığından, bu fonksiyon $[0, n]$ aralığında artandır, yani bu fonksiyona Bölüm XIV teki 3.1. alıştırmasında açıklanan sonuç uygulanabilir:

$$1^{1/4} + 2^{1/4} + \ldots + (n-1)^{1/4} \leqslant \int_0^n x^{1/4}\, dx \leqslant 1^{1/4} + 2^{1/4} + \ldots + n^{1/4}$$

dır.

$$g(x) = \frac{4}{5}\, x^{5/4}$$

fonksiyonundan hareket edilerek

$$g'(x) = \frac{4}{5}\,\frac{5}{4}\, x^{1/4} = x^{1/4}$$

elde edilir. Şu halde

$$\int_0^n x^{1/4} = \frac{4}{5}\, n^{5/4}$$

tür ve bu değeri yerine koymak suretiyle istenen sonuç elde edilmiş olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM ONALTI

# AÇISAL FONKSİYONLAR

## 1 — AÇIKLAMA

Açı tanımı, çeşitli açı ölçme sistemleri ve aralarındaki bağıntılar, trigonometrik fonksiyonların tanımları ve aralarındaki bağıntılar, açı toplamı, açı farkı, çift açı, yarı açı formülleri ve benzeri klâsik trigonometrik formüller ve bunlardan elde edilebilen çeşitli idantikdikler hakkında Lise kitaplarında yeteri kadar bilgi, örnek ve alıştırma bulunduğundan bu konulara burada ayrıca yer ayırma gereği duyulmamaktadır.

## 2 — TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARDA LİMİT VE SÜREKLİLİK

Trigonometrik fonksiyonlarla ilgili olarak

(2.1) $$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0$$

(2.2) $$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$$

(2.3) $$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$$

(2.4) $$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

(2.5) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bağıntılarının geçerli oldukları bilinmektedir[1]. (2.3) ve (2.4) her $a \in \mathbb{R}$ için geçerli olduklarından, *sinüs ve kosinüs fonksiyonları bütün reel doğru üzerinde süreklidirler.*

Bu bağıntıları kullanarak birçok limit hesaplanabilir.

2.1. *Örnekler*

2.1.1. $$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

olduğunun gösterilmesi.

İlk bakışta, bu limitin $\frac{0}{0}$ belirsiz şekline eşit olduğu görülür. Ancak

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \left( \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left( \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= \left( \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left( \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} \right)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

dir.

2.1.2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$$

olduğunun gösterilmesi.

Bu limitin de ilk bakışta $\frac{0}{0}$ belirsizliğini veriyor gözükmesine rağmen

---

(1) GS - AG, s. 326-331'e bak.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\sin x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,\frac{\sin x}{x}$$

$$= (\lim_{x\to 0} \sqrt{x})\,(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x})$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to 0} x}\,(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x})^{(1)}$$

$$= 0.1 = 0$$

dır.

2.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki limitleri L'Hopital kuralını kullanmadan hesaplayınız:

1. $\lim_{h\to 0} \frac{\sin 2h}{h}$ Yanıt : 2

2.* $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{3h}$ Yanıt : $\frac{1}{3}$

3. $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h\cos h}$ Yanıt : 1

4. $\lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{cotg} h}{\sin h \cos h}$ Yanıt : 1

5.* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \operatorname{tg} x}{x^2}$ Yanıt : 1

---

(1) Son geçişin geçerliliği için GS-AG, s. 329'a bak.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

## 3 — TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARDA TÜREV

Trigonometrik fonksiyonlarla ilgili olarak

(3.1) $$(\sin)'(x) = \cos x$$

(3.2) $$(\cos)'(x) = -\sin x$$

(3.3) $$(\mathrm{tg})'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x$$

bağıntıları geçerlidir. Bunlardan hareket ederek trigonometrik fonksiyonlu ifadelerin türevleri hesaplanabilir[1].

### 3.1. *Örnekler*

**3.1.1.** $(\mathrm{cotg})'(x)$, $(\sec)'(x)$, $(\mathrm{cosec})'(x)$ in hesaplanması

i) $\mathrm{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ olduğuna göre

$$(\mathrm{cotg})'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$= -\mathrm{cosec}^2\, x$$

$$= -1 - \mathrm{cotg}^2 x$$

tir.

ii) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ olduğuna göre

$$(\sec)'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos x} = \sec x\ \mathrm{tg}\, x$$

dir.

iii) $\mathrm{cosec}\, x = \dfrac{1}{\sin x}$ olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$(\operatorname{cosec})'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}\,\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$$

dir.

3.1.2. $$f(x) = \cos\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)\right)}\right)$$

ifadesinin türevinin hesaplanması

$$f(x) = \cos u, \quad u(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)\right)} = \sqrt[3]{\operatorname{tg} v}$$

$$v(x) = 1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)$$

yazılsın.

$$f'(x) = (-\sin u)\, u'(x)$$

$$= -u'(x)\left(\sin\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)\right)}\right)\right.$$

dir.

$$u(x) = \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} v, \quad u'(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^{-\frac{2}{3}} v \cdot v'(x)$$

$$v'(x) = \left(-\sin\left(2x^2 + 5\right)\right)(4x)$$

olduğundan zincir kuralını uygulayarak

$$f'(x) = -\frac{4}{3}x\left(\sin\left(2x^2 + 5\right)\right)\frac{-\sin\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)\right)}\right)}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\left(1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)\right)}}$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{x\left(\sin\left(2x^2 + 5\right)\right)\sin\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)\right)}\right)}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2\left(1 + \cos\left(2x^2 + 5\right)\right)}}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.2. *Alıştırmalar*

Aşağıda fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

1. $f(x) = \text{tg}\ (x^2 + 1)$ Yanıt : $f'(x) = 2x \sec^2 (x^2 + 1)$

2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$ Yanıt : $f'(x) = \dfrac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x}\sin^2 x}$

3. $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos 2x}$ Yanıt : $f'(x) = \dfrac{2x(\cos 2x + x \sin 2x)}{\cos^2 2x}$

4. $f(x) = x\sqrt{\sin x}$ Yanıt : $f'(x) = \dfrac{2 \sin x + x \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

5. $f(x) = \dfrac{\text{tg}\, x - 1}{\sec x}$ Yanıt : $f'(x) = \sin x + \cos x$

6. $f(x) = \text{tg}\ (x^2) - \text{tg}^2 x$

Yanıt : $f'(x) = 2(1 + \text{tg}^2 (x^2))\ (x - \text{tg}\, x)$

7. $f(x) = \text{tg}\ \dfrac{1}{x}$ Yanıt : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2 \cos^2 \dfrac{1}{x}}$

8. $f(x) = |x| \sin |x|$ Yanıt : $f'(x) = x\left(\dfrac{\sin |x|}{|x|} + \cos |x|\right)$

9. $f(x) = \sec 2x - 2 \sec x$ Yanıt : $f'(x) = 2\left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin 2x}{\cos^2 2x}\right)$

10. $f(x) = |\cos x|$ Yanıt : $f'(x) = -\dfrac{\sin 2x}{2\,|\cos x|}$

Aşağıdaki limitleri, L'Hopital kuralıyla veya başka yolla hesaplayınız:

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos h}{h}$ Yanıt : 0

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



2. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} h}{\sin h}$ Yanıt : 1

3. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$ Yanıt : 0

4. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos 3x}$ Yanıt : $-\dfrac{1}{3}$

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ Yanıt : $\dfrac{1}{2}$

6. $\lim_{x \to 0} \dfrac{3 \sin \pi x - \sin 3\pi x}{x^3}$ Yanıt : $4\pi^3$

7. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{x - \frac{\pi}{2}}$ Yanıt : $-1$

8. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x)$ Yanıt : 0

## 4 — BİR N-İNCİ TÜREV HAKKINDA

Tangent fonksiyonu için

(4.0) $$(\operatorname{tg})^{(0)}(x) = \operatorname{tg} x$$

(4.1) $$(\operatorname{tg})^{(1)}(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

olduğu bilinmektedir. Tangent fonksiyonu tek bir fonksiyon olduğuna göre, tangent'in sıfırıncı mertebeden türevi tek fonksiyon, birinci mertebeden türevi ise çift fonksiyondur. Herbir bağıntının ikinci yanı sadece $\operatorname{tg} x$ 'in kuvvetlerinden oluşmakta ve daima pozitif katsayılar içermektedir. Üstelik

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(\text{tg})^{(2)}(x) = (2\,\text{tg}\,x)\,(1 + \text{tg}^2 x)$$

yani

$$(\text{tg})^{(2)}(x) = 2\,\text{tg}\,x + 2\,\text{tg}^3 x \tag{4.2}$$

elde edilir. $P_h$ ile, değişkeni tg cinsinden olan $h$-inci dereceden, pozitif katsayılı, $h$ tek ise tek olan, $h$ çift ise çift olan bir polinom gösterilmek üzere

$$(\text{tg})^{(h-1)}(x) = P_h(\text{tg}\,x)$$

olduğu kabul edilsin.

$$P_h(u) = \sum_{i=0}^{h} a_i u^i$$

şeklinde yazılacak olursa

$$P'_h(u) = \sum_{i=0}^{h} i\,a_i u^{i-1}$$

olur ve

$$(\text{tg})^{(h)}(x) = P'_h(\text{tg}\,x)\,(1 + \text{tg}^2 x)$$

elde edilir. Şu halde

$$P_{h+1}(u) = P'_h(u)\,(1 + u^2)$$

yazılacak olursa, polinom tek ise türevinin çift, çift ise türevinin tek ve $(1 + u^2)$ çarpanının polinomun tek veya çift oluşunu etkilemiyeceği, $P_h$ nin katsayıları pozitif ise, $P_{h+1}$ in katsayılarının da pozitif olacağı sonucu çıkar. Şu halde tangent fonksiyonunun $n$-inci türevi, tg $x$ cinsinden $(n + 1)$ inci dereceden olan, pozitif katsayılı ve $n + 1$ sayısının çift veya tek oluşuna göre tek veya çift bir fonksiyon gösteren bir polinomla ifade edilir.

## 5 — TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARDA GRAFİK ÇİZİMİ

5.0 Trigonometrik fonksiyonlarla açıklanmış fonksiyonların grafiklerinin elde edilmesi için Bölüm 12 de açıklanan genel

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

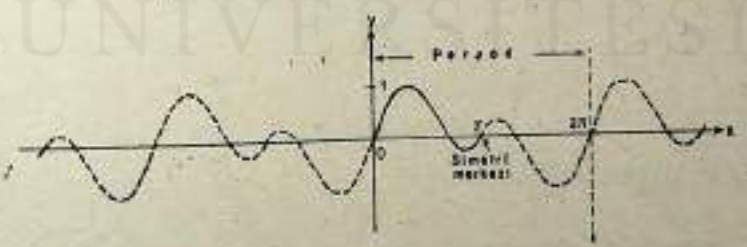

yöntemleri uygulamak yeterlidir. Ancak, trigonometrik fonksiyonların periyodiklik özellikleri önemli kolaylıklar sağlayabilir. Şu halde, verilen fonksiyonların tek veya çift olup olmadıkları incelendikten sonra, yapılması gereken ilk iş, fonksiyonun periyodik olup olmadığını araştırmak ve fonksiyonun periyodunu bulmaktır. (Trigonometrik fonksiyonlar içeren her fonksiyon periyodik olmak zorunda değildir: Örneğin $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ fonksiyonu periyodiktir fakat $g(x) = \sin x + 7x$ periyodik değildir!) Fonksiyon periyodik ise, periyodun yarısına tekabül eden aralık üzerindeki şeklinin, periyodun diğer yarısındaki şekli ile benzerliği olup olmadığını incelemek gerekir, yani fonksiyonun simetri eksenleri veya simetri noktaları olup olmadığını incelemek gerekir. Örneğin

$$f(x) = \sin x + \sin 2x$$

ele alınacak olursa, $f(x + 2\pi) = f(x)$ olduğundan, fonksiyon periyodiktir ve dolayısıyla grafiği $[0,2\pi]$ aralığında elde edildikten sonra, bütün reel doğru üzerinde nasıl olacağı derhal görülür. Fakat $(\pi, 0)$ noktası bu eğri için bir simetri merkezidir, çünkü

$$f(2\pi - x) = \sin(2\pi - x) + \sin(2(2\pi - x))$$
$$= -\sin x - \sin 2x = -f(x)$$

dir. Dolayısıyla incelemeyi $[0, \pi]$ aralığına daraltmak mümkündür. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 'de verilmiştir.




Şekil 49

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Benzer şekilde

$$f(x) = \cos^2 x$$

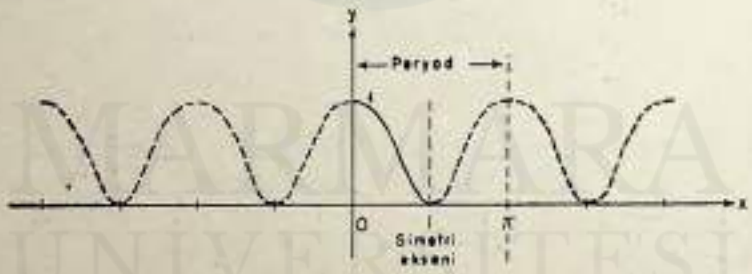
fonksiyonu ele alınsın.

$$f(x + \pi) = \cos^2 (x + \pi) = (\cos (x + \pi))^2$$
$$= (-\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x)$$

olduğundan bu fonksiyonun periyodu $\pi$ dir ve dolayısıyla grafiğini $[0, \pi]$ aralığında incelemekle yetinilebilir. Fakat

$$f(\pi - x) = \cos^2 (\pi - x) = (\cos (\pi - x))^2$$
$$= (-\cos x)^2 = \cos^2 x = f(x)$$

olduğundan, fonksiyon $x = \frac{\pi}{2}$ doğrusunu bir simetri ekseni olarak kabul eder ve dolayısıyla grafiğini $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığında inceleyip, simetri eksenine göre şekli periyoda tamamlamak mümkündür. Ondan sonra periyodikliği kullanarak grafiğin şekli tamamlanır. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 50'de verilmiştir.




Şekil 50

5.1. $$f(x) = \sin (ax + b)$$

fonksiyonunun çizimi.

Fonksiyon bir sinüs ile ifade edildiğinden, sürekli ve bütün IR üzerinde tanımlıdır. Değerler cümlesi ise $[-1, +1]$ kapalı aralığıdır.

$x = -\frac{b}{a}$ değeri için fonksiyon sıfır değerini alır ve fonksi-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



yon yine $2\pi$ peryodlu bir fonksiyondur, $x = -\frac{b}{a} + p\pi$ noktaları $(p \in \mathbb{Z})$ fonksiyonun diğer sıfır noktalarını gösterir.

$$f'(x) = a \cos(ax + b)$$

$$f''(x) = -a^2 \sin(ax + b)$$

olduğuna göre, $x_k = -\frac{b}{a} + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ bu fonksiyonun kritik noktaları, $x = -\frac{b}{a} + p\pi \quad (p \in \mathbb{Z})$, (yani yukarıda ele alınan sıfır noktaları) fonksiyonun dönüm noktalarıdır. Buna göre, fonksiyonun grafiği, bir sinüs fonksiyonunun başlangıç noktasının $-\frac{b}{a}$ noktasına kaydırılması ile elde edilir.




Şekil 51

5.2. $f(x) = 2\cos^2 x - \cos x + 1$

fonksiyonunun grafiğinin çizimi.

Fonksiyonun sürekli ve bütün IR cümlesi üzerinde tanımlı olduğu meydandadır. Üstelik

$$f(-x) = 2\cos^2(-x) - \cos(-x) + 1$$

$$= 2\cos^2 x - \cos x + 1 = f(x)$$

olduğuna göre, $f$ fonksiyonu çift fonksiyondur. Bu nedenle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



incelemeyi sadece $x \geq 0$ değerleri için yapmak yeterlidir. Başlangıç noktasında

$$f(0) = 2\cos^2 0 - \cos 0 + 1 = 1$$

dir. Fonksiyonun hiçbir sıfır noktası yoktur: çünkü, $\cos^2 x$ daima pozitif veya sıfır değerleri alan bir ifade olup, $\cos x$ sıfır olduğu zaman sıfır olur. Bu sonucu ispatlamak için, $x$ ne olursa olsun

$$1 - \cos x \geq 0$$

olduğunu ve dolayısıyla her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = 2\cos^2 x - \cos x + 1 \geq 0$$

olacağını kaydetmekle işe başlanabilir. Bu duruma göre, 0 değeri olsa olsa fonksiyonun minimum değeri olabilir. Bunun da olamayacağını kanıtlamak için fonksiyonun ekstremumlarını araştırmak gerekir: her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f'(x) = -4\sin x \cos x + \sin x$$

$$= (1 - 4\cos x)\sin x$$

olduğundan, $f$ fonksiyonunun ekstremumları ya $\sin x = 0$ denklemini sağlayan $x_{p,1} = p\pi$ $(p \in \mathbb{N})$ şeklindeki noktalarda veya $1 - 4\cos x = 0$ denklemini sağlayan noktalarda bulunur. Bu sonuncu denklem

$$\cos x = \frac{1}{4}$$

şeklinde yazılabileceğine göre, $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, bu noktalar

$$x_{p,2} = \operatorname{Arc}\cos\frac{1}{4} + p\pi$$

noktalarıdır. $x_{p,1}$ şeklinde olan noktalarda, $p$'nin tek veya çift oluşuna göre, $\cos x_{p,1}$ ya $+1$ veya $-1$ e eşit olur ve dolayısıyla $f(x_{p,1}) = 2$ veya $= 4$ olur. $x_{p,2}$ noktalarında $\cos x = \frac{1}{4}$ tür ve dolayısıyla $f(x_{p,2}) = \frac{7}{8}$ dir. Fonksiyonun minimumları şu halde daima 0 sayısından büyüktür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Fonksiyonun dönüm noktalarını bulmak için $f''$ yü hesaplamak gerekir:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4\sin^2 x + (1 - 4\cos x)\cos x \\ &= 4(\sin^2 x - \cos^2 x) + \cos x \\ &= 4(1 - 2\cos^2 x) + \cos x \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde

$$-8t^2 + t + 4 = 0$$

denkleminin köklerini araştırmak gerekir: $t = \dfrac{-1}{16}(-1 \pm \sqrt{129})$

$$\cos x = \frac{-1}{16}(-1 \pm \sqrt{129})$$

olmalıdır. $\dfrac{-1}{16}(-1 \pm \sqrt{129})$ sayısı $-1$, $+1$ arasında bulunduğundan

$$x_k = \operatorname{Arc}\cos\frac{1 \mp \sqrt{129}}{16} + k\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

noktaları verilen fonksiyonun dönüm noktalarıdır.

Fonksiyonun periyodik ve periyodunun $2\pi$ olduğu açıkça görülür. Üstelik

$$\begin{aligned} f(2\pi - x) &= 2\cos^2(2\pi - x) - \cos(2\pi - x) + 1 \\ &= 2\cos^2 x - \cos x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

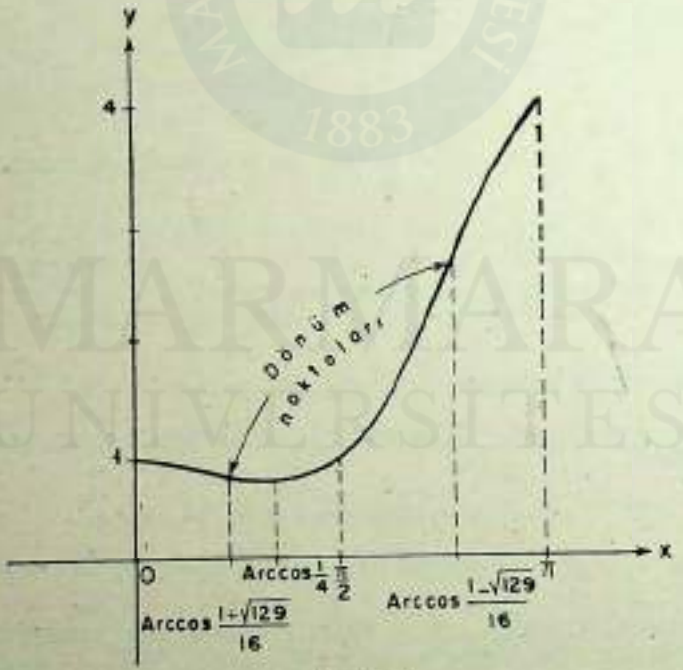
olduğundan, fonksiyon $x = \pi$ doğrusunu da simetri ekseni olarak kabul eder. Buna göre grafiğin çizimini $[0, \pi]$ kapalı aralığı için yapmak yeterlidir. $x = 0$ ve $x = \pi$ doğrusuna göre simetriler ve fonksiyonun periyodikliği, tüm R üzerinde fonksiyonun grafiğinin çizilmesini sağlar. Fonksiyonun değişim çizelgesi $[0, \pi]$ kapalı aralığı için aşağıda verilmiştir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



| x | 0 | | $\text{Arc cos}\frac{1+\sqrt{129}}{16}$ | | $\text{Arc cos}\frac{1}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\text{Arc cos}\frac{1-\sqrt{129}}{16}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f' | 0 | − | − | − | 0 | + | ∄ | + | + | + | 0 |
| f'' | − | − | − | 0 | + | + | + | + | 0 | − | − |
| f | 1 | ↘ | | ↗ | $\frac{7}{8}$ | ↗ | 1 | ↗ | | ↘ | 4 |

ve fonksiyonun grafiği Şekil 'deki gibidir:

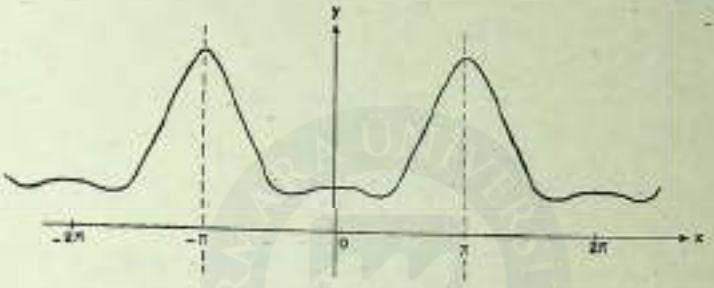



Şekil 52

Simetrileri ve periyodikliği uygulayarak IR üzerindeki şeklin tamamı elde edilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ






Şekil 53

5.3. $$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$$

fonksiyonunun grafiğinin çizimi.

Fonksiyon $\sin x = -1$ için tanımlanmış değildir, yani $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ noktaları fonksiyonun tanımlanmadığı noktalardır. Fonksiyon ayrıca periyodik ve periyodu $2\pi$ dir. Üstelik

$$f(\pi - x) = \frac{\sin(2\pi - 2x)}{1 + \sin(\pi - x)} = \frac{-\sin 2x}{1 + \sin x} = -f(x)$$

olduğundan, $(\frac{\pi}{2}; 0)$ noktası fonksiyon için bir simetri noktasıdır. Bu nedenle fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ aralığında incelemek yerine, sadece $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aralığı üzerinde incelemek yeterlidir.

$$f'(x) = \frac{2(1 + \sin x)(1 - \sin^2 - \sin x)}{(1 + \sin x)^3}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= \frac{2\,(1 - \sin x - \sin^2 x)}{1 + \sin x}$$

şeklinde ifade edilir ve söz konusu aralıkta bu fonksiyon

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

yani

$$x = \text{Arc sin } \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

için sıfır olur. $x = -\frac{\pi}{2}$ için fonksiyon belirsiz ise de $x = a - \frac{\pi}{2}$ dönüşümü yapıldığında

$$\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = \frac{\sin (2a - \pi)}{1 + \sin (a - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \frac{\sin 2a}{1 - \cos a} = 2 \cos a \, \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

elde edilir ve

$$\cos a = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}; \quad \sin a = \frac{2 \text{ tg } \frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

bağıntılarından dolayı

$$f(x) = 2 \cos a \, \frac{\dfrac{2 \text{ tg } \frac{a}{2}}{t + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}}{\dfrac{-2 \text{tg}^2 \frac{a}{2}}{t + \text{tg}^2 \frac{a}{2}}} = -2 \cos a \text{ cotg } \frac{a}{2}$$

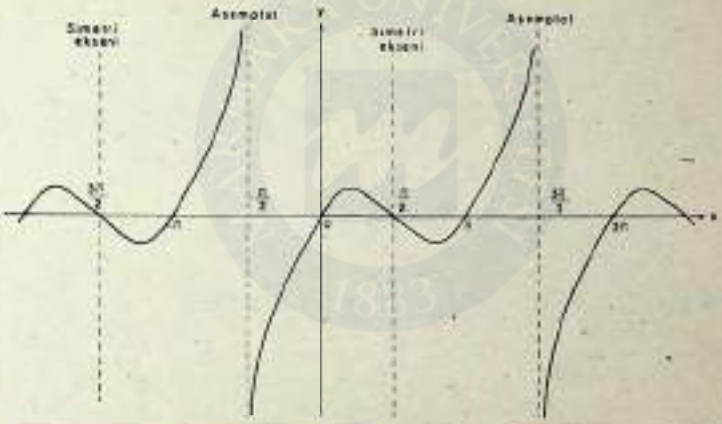
dır. Şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{a \to 0} \left(-2 \frac{\cos a}{\operatorname{tg} \frac{a}{2}}\right) = -\infty$$

dur. $f(0) = 0$ ve $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ olduğu da görülür. Şu halde fonksiyonun grafiği aşağıda gösterilen şekildedir:




Şekil 54.

5.4. $$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

fonksiyonunun grafiğinin çizimi.

Fonksiyonun peryodik ve peryodunun $2\pi$ olduğu derhal gerçeklenir. Ancak,

$$f(2\pi - x) = \sin (2\pi - x) + \frac{1}{2} \sin (4\pi - 2x) + \frac{1}{2} \sin (6\pi - 3x)$$

$$= -\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x = -f(x)$$

olduğundan, $(\pi, 0)$ noktası bir simetri merkezidir ve dolayısıy-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



la fonksiyonu sadece $[0, \pi]$ kapalı aralığında incelemek yeterlidir.

$$f'(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$
$$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x \cos x$$
$$= \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$$
$$= 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 1$$
$$= 4\left(\cos^3 x + \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\right)$$
$$= 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olduğuna göre fonksiyonun ekstremum değerleri

$$x_1 = \text{Arc cos}\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2 = \text{Arc cos}\left(-\frac{1}{2}\right);\ x_3 = \text{Arc cos}\ \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

yani

$$x_1 = \frac{\pi}{4};\ x_2 = \frac{2\pi}{3};\ x_3 = \frac{3\pi}{4},$$

dır.

$$f''(x) = -\sin x - 2\sin 2x - 3\sin 3x$$
$$= -(\sin x + 4\sin x \cos x + 9\sin x - 12\sin^3 x)$$
$$= -\sin x\,(1 + 4\cos x + 9 - 12 + 12\cos^2 x)$$
$$= -\sin x\,(12\cos^2 x + 4\cos x - 2)$$

olduğuna göre dönüm noktaları göz önüne alınan aralıktaki $x=0$, $x = \pi$ ve bu aralık içine düşen

$$12\cos^2 x - 4\cos x - 2 = 0$$

denkleminin kökleridir. Bunlar

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\cos x = \frac{-4 \mp \sqrt{112}}{24}$$

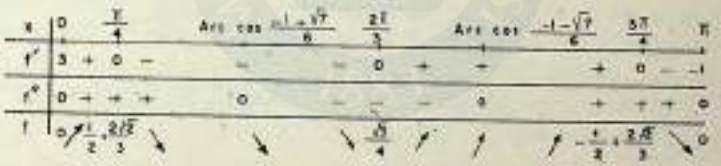
$$= \frac{-4 \mp 4\sqrt{7}}{24}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{7}}{6}$$

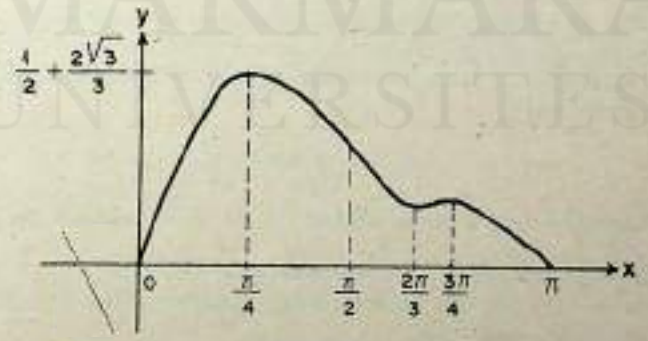
yani

$$x = 1{,}292943\ldots ; \quad 2{,}223863\ldots$$

dır. Buna göre fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığındaki değişim cetveli aşağıda verilmiştir:



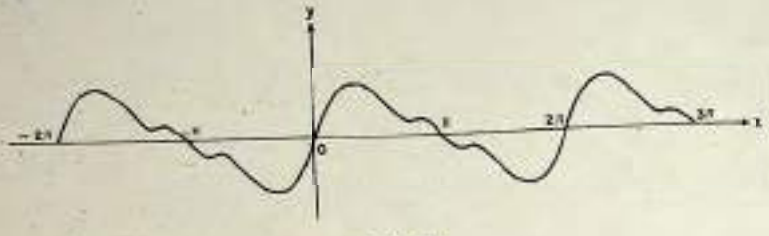
Fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığındaki grafiği Şekil 55 de:




Şekil 55

Buna göre fonksiyonun bütün grafiği Şekil 56'da verilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 56

## 6 — MAKÛS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

$u = \sin x$, $u = \cos x$ ve $u = \operatorname{tg} x$ fonksiyonlarının makus fonksiyonları sırası ile $x = \operatorname{arc\,sin} u$, $x = \operatorname{arc\,cos} u$, $x = \operatorname{arc\,tg} u$ olarak gösterildiğinde, bu fonksiyonları elde ederken, sin, cos ve tg fonksiyonlarının injektif parçalarını göz önüne almak gerektiği kaydedilmişti. sin ve tg fonksiyonu için $[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$; cos fonksiyonu için $[0, \pi]$ aralığının göz önüne alınması halinde bu durum sağlanır ve bu aralıklar için göz önüne alınan makûs fonksiyonlara, *esas belirtim* dendiğine, esas belirtimlerinin sırası ile Arc sin, Arc cos ve Arc tg şeklinde gösterilebileceklerine işaret edilmişti. Örneğin, her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$\operatorname{arc\,tg}\ x = \operatorname{Arc\,tg}\ x + k\pi$$

yazılabilir, yani her $k$ cebirsel tam sayı değeri arc tg fonksiyonunun bir başka belirtimini gösterir.

Her ne kadar genellikle esas belirtim kullanmak tercih edilirse de, daima bunu yapmak olanakları olmayabilir, yani seçim yapmak serbestisi bulunmayabilir. Örneğin, $a$ ve $b$ herhangi iki reel sayı olmak üzere

$$\operatorname{Arc\,tg}\ a + \operatorname{Arc\,tg}\ b \tag{6.1.}$$

verilmiş olsun: tangenti $a$ olan açı $-\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{\pi}{2}$ arasında kalan bir açıdır: aynı durum $b$ için tekrarlanabildiğine göre (6.1) ifadesi $-\pi$ ile $\pi$ arasında her değeri alabilir: dolayısıyla bu ifade bir Arc tg'e eşit olmayabilir yani

$$\operatorname{Arc\,tg}\ a + \operatorname{Arc\,tg}\ b = \operatorname{Arc\,tg}\ c$$

yazılamaz: doğru ifade

$$\operatorname{Arc\,tg}\ a + \operatorname{Arc\,tg}\ b = \operatorname{Arc\,tg}\ c + k \tag{6.2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


dir ve $k$ sayısının değeri $a$ ve $b$ sayılarının seçilişine göre değişebilir. Sayısal örnekler durumu tam açıklığa kavuşturur:

$a = b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ alınacak olursa

$$\text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

ve

$$\text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

olduğundan

(A) $$\text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{3}} + \text{Arc tg } \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{Arc tg } \sqrt{3}$$

dir. $a = b = \sqrt{3}$ alınacak olursa

$$\text{Arc tg } \sqrt{3} + \text{Arc tg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

dir.

$$\frac{2\pi}{3} > \frac{\pi}{2}$$

olduğuna göre, son bağıntının birinci yanını tek bir Arc tg 'a eşitlemek olanaksızdır. Ancak

$$\text{tg } (-\frac{\pi}{3}) = \text{tg } (\frac{2\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

olduğundan

(B) $$\text{Arc tg } \sqrt{3} + \text{Arc tg } \sqrt{3} = \text{Arc tg } (-\sqrt{3}) + \pi$$

dir. Nihayet, $a = b = -\sqrt{3}$ alınması halinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\text{Arc tg } (-\sqrt{3}) + \text{Arc tg } (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

ve

$$-\frac{2\pi}{3} < -\frac{\pi}{2}$$

olduğuna göre, bu ifadenin birinci yanını tek bir Arc tg'a eşitlemek olanaksızdır. Ancak

$$\text{tg } (-\frac{2\pi}{3}) = \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

olduğundan

(C) $$\text{Arc tg } (-\sqrt{3}) + \text{Arc tg } (-\sqrt{3}) = \text{Arc tg } \sqrt{3} - \pi$$

dir. Şu halde $a$ ve $b$ sayılarının seçilişe göre, (6.2) formülünde gözüken $k$ sayısı 0, 1 ve $-1$ değerlerinden birini alır.

*6.1. Makûs trigonometrik fonksiyonların sağladıkları bağıntılar*

Trigonometrik fonksiyonların sağladıkları bağıntılardan hareket edilerek, makûs trigonometrik fonksiyonlar için birçok bağıntı yazılabilir. Aşağıdaki birkaç örnek uygulanacak olan yöntemler hakkında fikir verir.

6.1.1. $$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

olduğuna göre, $\cos a = x$ yazılacak olursa

$$\cos 2a = 2x^2 - 1$$

ve

$$2a = \text{arc cos } (2x^2 - 1)$$

dir. $\cos a = x$ bağıntısından $a = \text{arc cos } x$ elde edildiğine göre

(6.1.1) $$2 \text{ arc cos } x = \text{arc cos } (2x^2 - 1)$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


6.1.2. $$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

olduğuna göre,

$$2a = \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \right)$$

bulunur. $\operatorname{tg} a = x$ yazılacak olursa, $a = \operatorname{arc\,tg} x$ ve

(6.1.2.) $$2 \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{1 - x^2}$$

elde edilir.

6.1.3. $$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

olduğuna göre

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

dır. $\operatorname{tg} a = x$ yazılması halinde $a = \operatorname{arc\,tg} x$ ve

$$\cos (\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

yani

(6.1.3) $$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

elde edilir.

6.1.4. $$\operatorname{tg} (a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

olduğuna göre

$$a + b = \operatorname{arc\,tg} \left( \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \right),$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



dir $\operatorname{tg} a = x$, $\operatorname{tg} b = y$ yazılacak olursa, $a = \operatorname{arc\,tg}\, x$, $b = \operatorname{arc\,tg}\, y$ ve

(6.1.4) $$\operatorname{arc\,tg}\, x + \operatorname{arc\,tg}\, y = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

elde edilir.

6.1.5. $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

bağıntısından

$$a + b = \operatorname{arc\,sin}(\sin a \cos b + \sin b \cos a)$$

bulunur. $\sin a = x$ ve $\sin b = y$ den $a = \operatorname{arc\,sin}\, x$, $b = \operatorname{arc\,sin}\, y$ çıkar ve

(6.1.5) $$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,sin} y = \operatorname{arc\,sin}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

elde edilir.

## 6.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki bağıntıları kanıtlayınız.

1. $\operatorname{Arc\,sin}\frac{1}{2} = \operatorname{Arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{3} = \operatorname{Arc\,tg}\, 1$

3. $\operatorname{Arc\,tg}\, x^2 + \operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}$

4. $\operatorname{Arc\,cos}\, x^2 = \operatorname{Arc\,sin}\,(1-x^4)^{\frac{1}{2}}$

5. $\cos(\operatorname{Arc\,sin} u) = \sin(\operatorname{Arc\,cos} u)$

6. $\operatorname{arc\,cos} x - \operatorname{arc\,cos} y = \operatorname{arc\,cos}\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


7. $2 \operatorname{arc\,tg}\, x = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$

8. $\operatorname{arc\,tg}\, a = \arcsin \left( \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

9. $\operatorname{Arc\,sin}\, x + \operatorname{Arc\,cos}\, x = \dfrac{\pi}{2}$

6.3. *Maküs trigonometrik fonksiyonlarla işlemler*

Maküs fonksiyon tanımından dolayı

$\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arccos x) = x$ $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x$

ve buna benzer bağıntılar diğer trigonometrik fonksiyonlar için yazılabilir. Tersine

$\arcsin(\sin x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$, $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$

yazılabilir fakat, örneğin

$$\operatorname{Arc\,sin}(\sin x) = x$$

yalnız $x$ sayısı $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ arasında kaldığı müddetçe yazılabilir.

Bu hususlara dikkat etmek şartı ile, trigonometrik fonksiyon ve maküslerinden oluşan ifadeleri sadeleştirmek olanakları vardır. Uygulanacak yöntemler, aşağıdaki örneklerle açıklanmıştır:

6.3.1 $\operatorname{tg}(2 \operatorname{Arc\,tg} x)$

ifadesinin sadeleştirilmesi.

$$\operatorname{Arc\,tg} x = a$$

yazılaması halinde

$$x = \operatorname{tg} a$$

dır. $2 \operatorname{Arc\,tg} x = 2a$ olur ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda, tg $a$ nın yerine $x$ yazılarak

$$\operatorname{tg} (2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) = \frac{2x}{1 - x^2}$$

elde edilir.

6.3.2. $\cos (4 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x)$

ifadesinin sadeleştirilmesi.

$$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = a$$

yazılacak olursa

$$x = \operatorname{tg} a$$

elde edilir ve

$$\cos (4 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} x) = \cos 4a$$

şeklini alır.

$$\cos 4a = \cos^2 2a - \sin^2 2a$$
$$= (\cos^2 a - \sin^2 a)^2 - (2 \sin a \cos a)^2$$
$$= \cos^4 a - 6 \sin^2 a \cos^2 a + \sin^4 a$$
$$= \cos^4 a - 6 \cos^2 a + 6 \cos^4 a$$
$$+ 1 - 2 \cos^2 a + \cos^4 a$$
$$= 1 - 8 \cos^2 a + 8 \cos^4 a$$

elde edilir.

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

olduğuna göre

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a}{\cos^2 a}$$

dır. Şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$x^2 \cos^2 a = 1 - \cos^2 a$$

veya

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + x^2}$$

dır.

$$\cos 4a = \frac{8}{(1 + x^2)^2} - 8\,\frac{1}{1+x^2} + 1$$

$$= \frac{8 - 8 - 8x^2 + 1 + 2x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - 6x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

olup

$$\cos (4 \text{ Arc tg } x) = \frac{1 - 6x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}$$

dır.

6.3.3 Arc tg (tg $x$)

in sadeleştirilmesi.

Daha önce yapılan uyarıya göre

$$\text{Arc tg } (\text{tg } x) = x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ için}$$

$$\text{Arc tg } (\text{tg } x) = x - \pi \qquad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ için}$$

$$\text{Arc tg } (\text{tg } x) = x - 2\pi \qquad \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2} \text{ için}$$

$$\text{Arc tg } (\text{tg } x) = x + \pi \qquad -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2} \text{ için}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



6.3.4. $\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

ifadesinin sadeleştirilmesi.

$$1-\cos x=\frac{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\;;\quad 1+\cos x=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

olduğundan

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$$

dir ve dolayısıyla

$$\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\operatorname{Arc\,tg}\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

elde edilir; şu halde

$x$ değişkeni $0<x<\pi$ koşulunu sağlarsa

$$\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\frac{x}{2}\;;$$

$x$ değişkeni $-\pi<x<0$ koşulunu sağlarsa

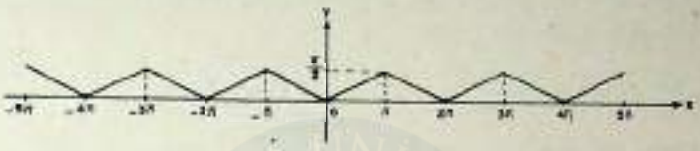
$$\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=-\frac{x}{2}\;;$$

$x$ değişkeni $\pi<x<2\pi$ koşulunu sağlarsa

$$\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\pi-\frac{x}{2}\;;\ldots$$

Bu sonuçlara göre $f(x)=\operatorname{Arc\,tg}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ fonksiyonunun

grafiği de elde edilmiş olur: bu fonksiyon $2\pi$ periyodlu periyodik bir fonksiyondur ve doğru parçalarından oluşur:



Şekil 57

6.4. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

1. $\sin(2 \operatorname{Arc}\sin x)$ Yanıt : $2x\sqrt{1-x^2}$

2. $\cos(2 \operatorname{Arc}\cos x)$ Yanıt : $2x^2-1$

3. $\sin^2\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arc}\cos x\right)$ Yanıt : $\frac{1-x}{2}$

4. $\cos^2\left(\frac{1}{2} \operatorname{Arc}\cos x\right)$ Yanıt : $\frac{1+x}{2}$

5. $\cos(\operatorname{Arc}\sin x + \operatorname{Arc}\sin y)$

Yanıt : $\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy$

6. $\sin(\operatorname{Arc}\sin x - \operatorname{Arc}\sin y)$

Yanıt : $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$

7. $\operatorname{tg}(2 \operatorname{Arc}\cos x)$ Yanıt : $\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1}$

8. $\sin(3 \operatorname{Arc}\cos x)$ Yanıt : $\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

**6.5.** *Maküs trigonometrik fonksiyonlu denklemlerin çözülmesi.*

Önceki kısımlarda nasıl hesaplanacakları açıklanan maküs trigonometrik fonksiyonlu ifadelerden hareket edilerek, bunları içeren denklemleri çözmek mümkündür. Aşağıdaki örnekler uygulanacak yöntemler hakkında bilgi verir.

6.5.1. $2 \operatorname{Arc\,sin} x = \operatorname{Arc\,sin} 2x\sqrt{1-x^2}$

denkleminin çözülmesi.

$x = \sin a$ yazılacak olursa, $a = \operatorname{Arc\,sin} x$ yazılabilmesi için $a$ nın $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ aralığında kalması gerekir.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

bağıntısından, yukardaki koşul da göz önüne alınarak

$$2x\sqrt{1-x^2} = 2 \sin a \cos a = \sin 2a$$

elde edilir. Şu halde verilen denklem

$$2a = \operatorname{Arc\,sin} (\sin 2a)$$

$$2a = 2a$$

şeklinde bir idantiklik durumundadır; ancak, Arc sin kullanılmış olmasından dolayı, bu idantiklik sadece $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ kapalı aralığı üzerinde geçerlidir ve dolayısıyla denklemin çözümleri bu kapalı aralığı dolduran sayılardır.

6.5.2. $\operatorname{Arc\,sin} 2x - \operatorname{Arc\,sin} (x\sqrt{3}) = \operatorname{Arc\,sin} x$

denkleminin çözülmesi.

$$\sin (a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


bağıntısından hareket edilerek ve $\sin a = u$, $\sin b = v$ yazılarak

$$\sin(\arcsin u - \arcsin v) = u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2}$$

elde edilir. Şu halde

$$\arcsin u - \arcsin v = \arcsin\left(u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2}\right)$$

dir. Verilen soruda $u = 2x$, $v = x\sqrt{3}$ olduğuna göre

$$\arcsin\left(2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2}\right) = \operatorname{Arc}\sin x$$

yazılabilir yani verilen denklemden

$$2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = x$$

denklemi elde edilir: ancak Arc sin $u$ ve arc sin $v$ lerin kullanılmış olmasından ötürü, çözümler elde edildikten sonra, hareket noktasını teşkil eden denkleme dönerek, çözümlerden hangilerinin verilen koşulları sağladıklarını araştırmak gerekir. Yukardaki bağıntıdan

$$8x^2(1-4x^2) = 4x^2\sqrt{3}\sqrt{1-3x^2}\cdot\sqrt{1-4x^2}$$

elde edilir ve her iki tarafın tekrar karesini alarak

$$36x^4(1-4x^2)^2 = 48x^4(1-3x^2)(1-4x^2)$$

$$12x^4(1-4x^2)(3(1-4x^2) - 4(1-3x^2)) = 0$$

yani

$$-12x^4(1-4x^2) = 0$$

bulunur. Şu halde verilen denklemin çözümleri

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = -\frac{1}{2};$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x_3 = \frac{\lambda}{2}$$

sayılarının arasındadır.

Sinüsü 0, $\frac{-1}{2}$ ve $\frac{1}{2}$ olan değerlerin üçü de verilen ilk denklemi sağlar: gerçekten, sıfır için

$$0 + 0 = 0$$

dır, $-\frac{1}{2}$ için

$$\text{Arc sin } (-1) - \text{Arc sin } (-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= -\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{-3\pi + 2\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} = \text{Ars sin } (-\frac{1}{2})$$

dır ve nihayet $\frac{1}{2}$ için

$$\text{Arc sin } (1) - \text{Arc sin } (\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = \text{Arc sin } (\frac{1}{2})$$

dır.

6.5.3. $$\text{Arc sin } \frac{4}{5} + \text{Arc sin } \frac{5}{13} = \text{Arc sin } x$$

denkleminin çözülmesi.

Önceki örnekte kullanılan yöntemle

$$\text{arc sin } u + \text{arc sin } v = \text{arc sin } (u\sqrt{1 - v^2} + v\sqrt{1 - u^2})$$

bağıntısı kanıtlanabilir. $u = 4/5$ ve $v = 5/13$ olduğuna göre, verilen denklemin birinci yanı

$$= \arcsin\left(\frac{4}{5}\,\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\,\frac{3}{5}\right) = \arcsin\frac{64}{65}$$

şekline girer ve buradan

$$\arcsin\frac{64}{65} = \operatorname{Arc}\sin x$$

yani, her iki yanın sinüsünü alarak

$$x = \frac{64}{65}$$

elde edilir.

6.5.4. $\operatorname{Arc}\cos\frac{a}{x} - \operatorname{Arc}\cos\frac{b}{x} = \arccos\frac{1}{b} - \operatorname{Arc}\cos\frac{1}{a}$

denkleminin çözülmesi.

$$\operatorname{Arc}\cos u - \arccos v = \arccos\left(uv + \sqrt{(1-u^2)\,(1-v^2)}\right)$$

olduğuna göre, yukardaki denklem

$$\arccos\left(\frac{ab}{x^2} + \sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)}\right) = \arccos\left(\frac{1}{ab} + \sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}\right)$$

şekline girer ve buradan

$$\frac{ab}{x^2} + \sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)} = \frac{1}{ab} + \sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}$$

çıkar. İki kez kare almak suretiyle bu denklemin çözümlerinin $x = \pm ab$ olduğu görülür.

6.5. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki denklemlerin çözümlerini bulunuz:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1. $\operatorname{Arc\,cos}\frac{1}{3} + \operatorname{Arc\,cos}\frac{1}{4} = \operatorname{Arc\,sin} x$

Yanıt : $x = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{15}}{12}$

2. $\operatorname{Arc\,sin} x + \operatorname{Arc\,sin}\dfrac{x}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

Yanıt : $x^2 = \dfrac{2}{17}(5 - 2\sqrt{2})$

3. $\operatorname{Arc\,sin}(x + 2x^2) = \operatorname{Arc\,sin} 1$

Yanıt : $x_1 = -1,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

$a > 0,\ b > 0$ ve $a^2 + b^2 = 1$ ise $\operatorname{Arc\,sin} a = \operatorname{Arc\,cos} b$ olduğunu kanıtlayınız.

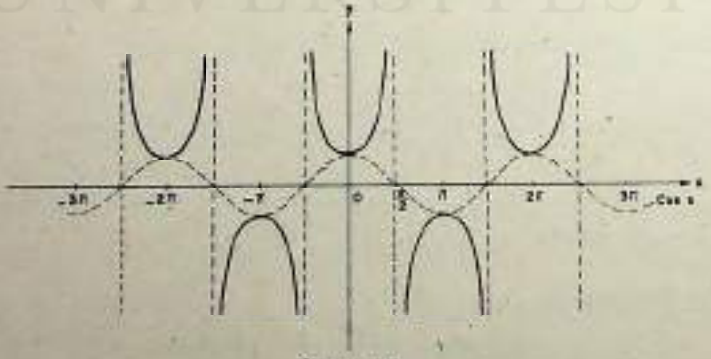
6.6. *Maküs trigonometrik fonksiyonlar için grafik çizimleri*

Genel yöntem bu çeşit fonksiyonlara da aynen uygulanır. Karşılaşılması mümkün bazı tipler aşağıdaki örneklerde gösterilmiştir.

6.6.1. $f(x) = 2 \operatorname{arc\,sec} x$

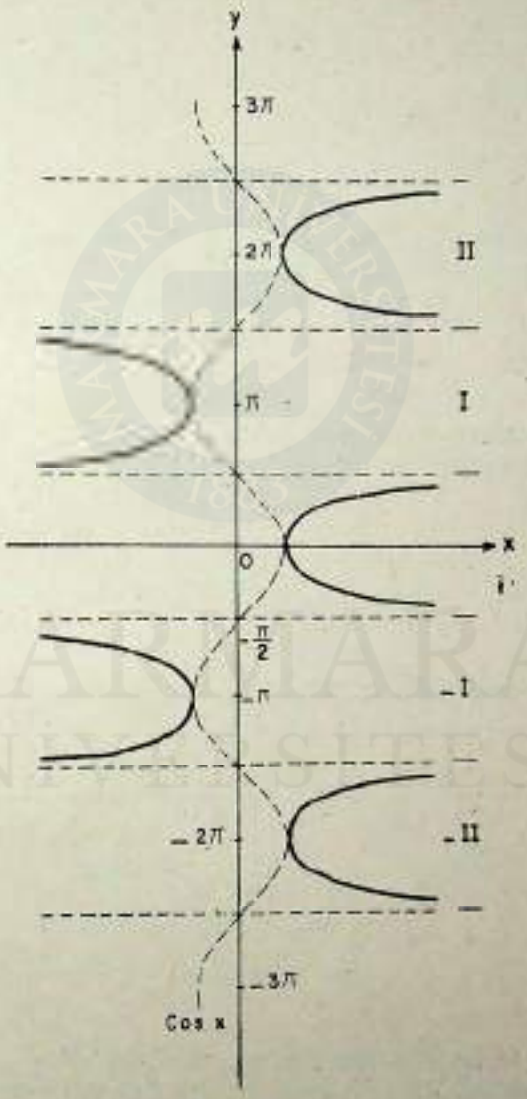
Bu fonksiyonun grafiği arc sec fonksiyonunun grafiğinden kolaylıkla elde edilir. sec fonksiyonunun grafiği Şekil 'de gösterilmiştir:

Bu grafikten hareketle, şekli birinci açıortayına göre yansıtmak suretiyle elde edilir: sec fonksiyonunun bir injektif parçasından




Şekil 58

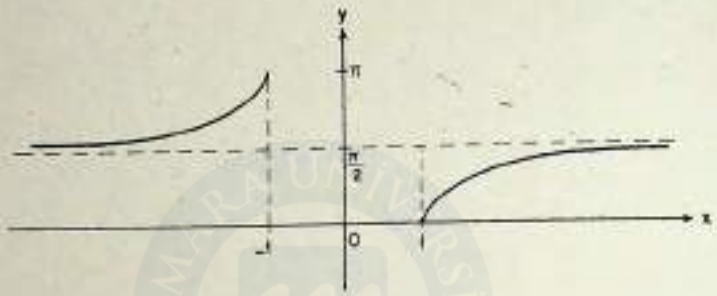
hareket edileceğine göre, arc sec fonksiyonu, aşağıda numaralanmış parçalardan herhangi bir tanesi olabilir:




Şekil 59.

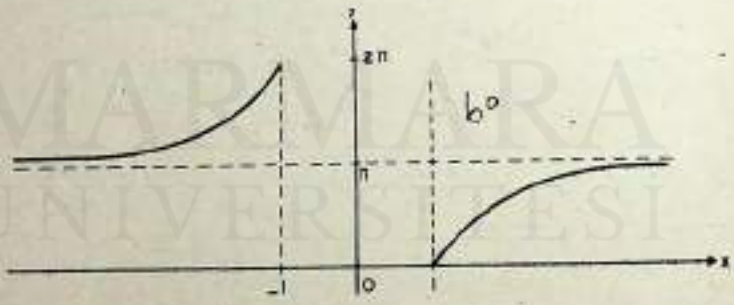
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Arc sec, yani esas belirtim alınmış olsun; bu fonksiyonun grafiği Şekil 60 da göetrilmiştir:




Şekil 60.

Bu fonksiyondan hareket ederek 2 Arc sec $x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda çıkarılmıştır:

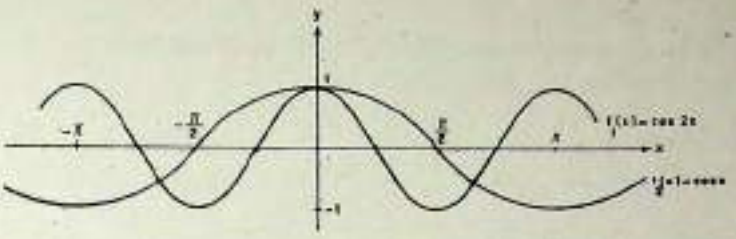



Şekil 61.

6.6.2. $f(x) = \arccos 2x$

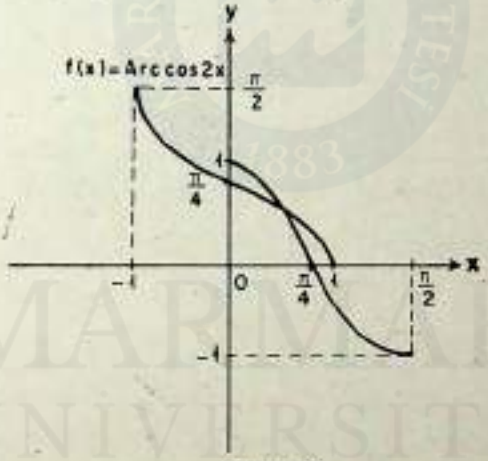
Bu fonksiyonu incelemek için ilk olarak $\varnothing(x) = \cos 2x$ fonksiyonunun grafiği çizilecektir. Bu grafik Şekil de verilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 62.

cos 2x fonksiyonuna tekabül eden grafiğin birinci açıortaya göre simetrizasyonu istenen verir. Esas belirtim için elde edilecek olan fonksiyonun grafiği Şekil 63'de verilmiştir.




Şekil 63.

6.6.3. $f(x) = \text{Arc cos } (4x^3 - 3x)$

fonksiyonunun grafiğinin çizilmesi.

Bu fonksiyonu incelemek için

$$g(x) = 4x^3 - 3x$$

yardımcı fonksiyonu ele alınsın.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$g(-x) = -4x^3 + 3x = -(4x^3 - 3x) = -g(x)$$

olduğundan $g$ fonksiyonu tek fonksiyondur. Bu nedenle $g$ fonksiyonu sadece $x \geq 0$ için incelenecektir.

$$g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1)$$

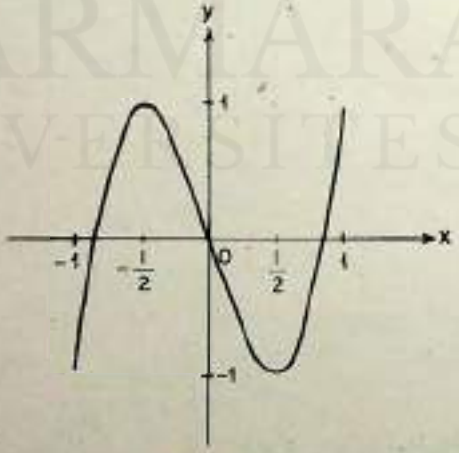
dir ve dolayısıyla $g'$ fonksiyonu $x = \pm \frac{1}{2}$ için sıfır olur, yani $g$ fonksiyonunun ekstremumları $x = \pm \frac{1}{2}$ noktalarında bulunur.

$$g''(x) = 24x$$

olduğundan, fonksiyonun $x = 0$ için bir bükülme noktası vardır. $g$ fonksiyonu için değişim cetveli aşağıda gösterilmiştir:

| $x$ | 0 | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | -3 | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 9 | $+$ | $+$ |
| $g''$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g$ | 0 | ↘ | -1 | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↗ | ↗ |

$g$ fonksiyonunun grafiği Şekil 64'de verilmiştir.




Şekil 64.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 

Arc cos fonksiyonu sadece $-1$ ile $+1$ arasında değerler alan bir değişken için tanımlı olan bir fonksiyondur: dolayısıyla $f(x) = \text{Arc cos}\,(4x^3 - 3x) = \text{Arc cos}\, g(x)$, $g(x)$ fonksiyonunun $-1$ ile $+1$ arasında kalan değerleri için tanımlanabilir. Halbuki, önceki grafikten de anlaşılacağı gibi, $g(x)$ fonksiyonu, $x$ değişkeninin $[-1, +1]$ aralığı üzerinde değişmesinde $-1$ ve $+1$ değerleri arasında salınım yapmaktadır. Şu halde Arc cos $(4x^3 - 3x)$ fonksiyonu $[-1, +1]$ aralığı üzerinde tanımlıdır. Üstelik, tanım aralıkları üzerinde sürekli olan $g$ ve Arc cos fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu olan $f$ fonksiyonu da aynı aralık üzerinde sürekli olur. Fonksiyonun türevine gelince, yine bileşke fonksiyoları için geçerli ola zincir kuralı uygulanarak

$$f'(x) = \frac{-(12x^2 - 3)}{\sqrt{1 - (4x^3 - 3x)^2}} = \frac{3(1 - 4x^2)}{\sqrt{(1 - x^2)\,(1 - 4x^2)^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1 - 4x^2}{|1 - 4x^2|}$$

elde edilir. Buna göre, $f$ fonksiyonu $x = 1$, $-1$ ve $x = \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$ değerleri için türetilemez. Dolayısıyla fonksiyonunun değişimini incelemek için verilen tanım aralığını $[-1, -\frac{1}{2}]$; $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$; $[\frac{1}{2}; 1]$ alt aralıklara ayırmak yerinde olur.

a) $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$ için $f(x) = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$ olduğuna göre, $f$ 3 Arc cos $x + C$ gibi bir fonksiyonun türevine eşittir, yani

$$f(x) = 3\ \text{Arc cos}\, x + C$$

yazılabilir. Üstelik $C$ sabitini belirlemek için belirli bir noktada başta verilen $f$ fonksiyonunun aldığı değeri şimdi elde edilen fonksiyonun aldığı değer ile karşılaştırmak gereklidir. Örneğin, $x = -1$ noktasında

$$f(-1) = [\text{Arc cos}\,(4x^3 - 3x)]_{x=-1} = \text{Arc cos}\,(-1) = \pi$$

dir halbuki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(-1) = 3 \operatorname{Arc\,cos}(-1) + C = 3\pi + C$$

bulunur. Bu iki değeri eşitleyerek

$$\pi = 3\pi + C$$

$C = -2\pi$ elde edilir. Dolayısıyla

(a) $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$ için $f(x) = 3 \operatorname{Arc\,cos} x - 2\pi$ dir.

b) $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ için $f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğuna göre, $f$, $3 \operatorname{Arc\,sin} x + C$ gibi bir fonksiyonun türevine eşittir, yani

$$f(x) = 3 \operatorname{Arc\,sin} x + C$$

yazılabilir. C sabiti yukarda uygulanan yöntemle belirtilebilir:

$$f(0) = [\operatorname{Arc\,cos}(4x^3 - 3x)]_{x=0} = \operatorname{Arc\,cos} 0 = \frac{\pi}{2}$$

ve

$$f(0) = 3 \operatorname{Arc\,sin} 0 + C = C$$

olduğundan

$$f(x) = 3 \operatorname{Arc\,sin} x + \frac{\pi}{2}$$

dir, yani

(b) $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ için $f(x) = 3 \operatorname{Arc\,sin} x + \frac{\pi}{2}$ dir.

c) Nihayet $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ için $f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ olduğuna göre, $f$ bu kez $3 \operatorname{Arc\,cos} x + C$ gibi bir fonksiyonun türevine eşittir ve dolayısıyla

$$f(x) = 3 \operatorname{Arc\,cos} x + C$$

yazılabilir. $C$ sabiti aynı şekilde belirlenebilir:

$$f(1) = [\text{Arc cos } (4x^2 - 3x)\ ]_{x=1} = \text{Arc cos } (1) = 0$$

$$f(1) = 3 \text{ Arc cos } (1) = C$$

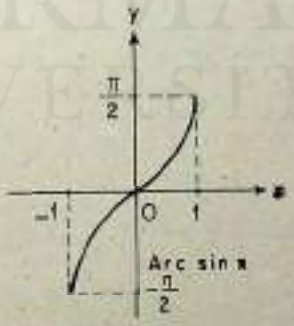
ve $C = 0$ dır. Şu halde

(c) $\quad x \in [\frac{1}{2};\ 1]$ için $f(x) = 3 \text{ Arc cos } x$ dır.

Fonksiyonun grafiğini çizmek için Arc cos $x$ ve Arc sin $x$ fonksiyonlarının grafiklerinden hareket edilebilir.



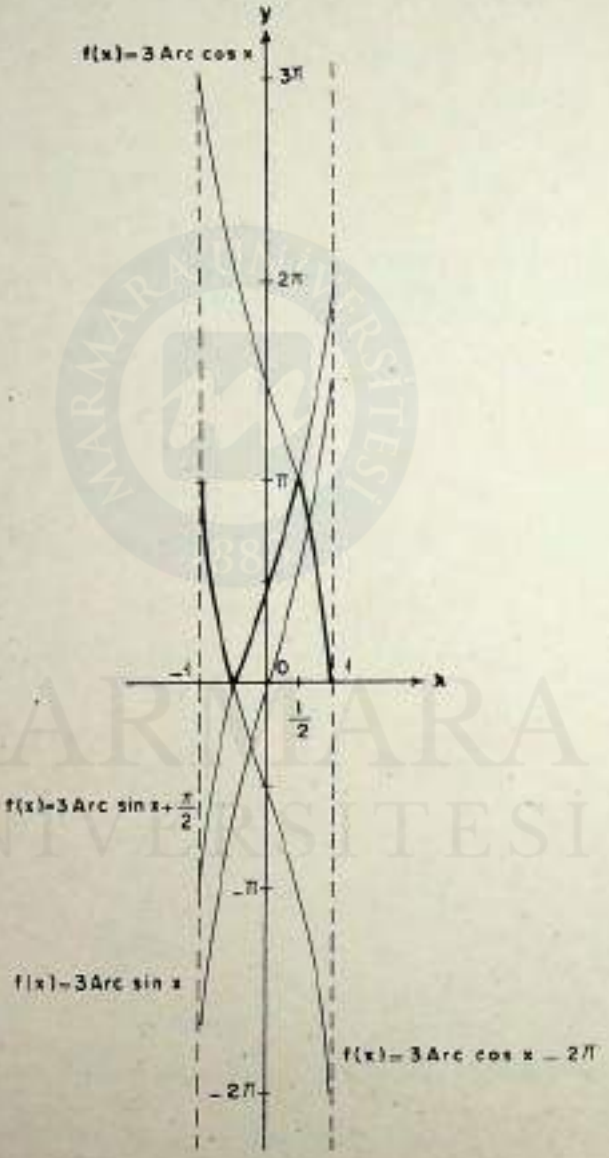

Şekil 65.




Şekil 66.

Aranan fonksiyonun grafiği kalın çizgi ile çizilen eğridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 67.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


**6.6.4.** $f(x) = \text{Arc cos } \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \text{Arc sin } \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

fonksiyonun grafiğinin çizilmesi.

Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının mutlak değerlerinin daima üstten $+1$ sayısı ile sınırlandırılmış olması, karekök altındaki iki ifadenin daima 0 ile 1 arasında kalmasını sağlar. Şu halde $x$ sayısı ne olursa olsun fonksiyon tanımlıdır, yani R cümlesi üzerinde tanımlanmış bir fonksiyondur. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının periyodlarının $2\pi$ olması ve $x$ değişkeninin fonksiyonun ifadesinde başka bir şekilde gözükmemesi, $f$ fonksiyonunun periyodu $2\pi$ olan bir fonksiyon olduğunu gösterir. Üstelik, $x$ değişkeni ne olursa olsun

$$f(\frac{\pi}{2} - x) = \text{Arc cos } \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} - \text{Arc sin } \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$$

ve $u$ ne olursa olsun

$$\text{Arc sin } u + \text{Arc cos } u = \frac{\pi}{2}$$

dir (6.2. de Alıştırma 9). Şu halde

$$f(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin } \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} - \frac{\pi}{2}$$

$$+ \text{Arc cos } \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} = f(x)$$

dir. Şu halde $x = \frac{\pi}{4}$ doğrusu fonksiyon için bir simetri eksenidir ve fonksiyon $[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$ aralığında incelendikten sonra, bu simetriyi uygulamak ve ondan sonra fonksiyonun periyodik olduğunu göz önüne almak suretiyle fonksiyonun bütün IR reel doğrusu üzerindeki şekli elde edilmiş olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f'(x) = -\frac{\cos x}{4\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1+\sin x}{2}}}$$

$$-\frac{-\sin x}{4\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1+\cos x}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\cos x}\right)$$

dır ve bu türevin $\sin x = \pm 1$, $\cos x = \pm 1$ noktalarında belirlenemiyeceği görülür. Şu halde $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$x = k\frac{\pi}{2}$$

noktalarında $f'$ tanımlanamaz. Dolayısıyla, ele alınan aralığı $[-\frac{3}{4}; -\frac{\pi}{2}]$; $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ ve $[0, \frac{\pi}{4}]$ alt aralıklarına bölmek yerinde olur.

a) $x \in [-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ aralığında $f'(x) = 0$ olduğundan $f(x) = C$ şeklindedir. C sabitini belirlemek için $f(-\frac{\pi}{2})$ yi hesaplamak yeterlidir.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \text{Arc cos } 0 - \text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

olduğundan, bu aralıkta fonksiyon sabit ve $f(x) = \frac{\pi}{4}$ e eşittir.

b) $x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ için $f'(x) = -1$ olduğundan $f(x) = -x + C$ şeklindedir. C sabitini aynı yöntemle belirlemek mümkündür.

$$f(0) = \text{Arc cos } \frac{1}{\sqrt{2}} - \text{Arc sin } 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

elde edildiğinden, $f(x) = -x - \frac{\pi}{4}$ bulunur.

c) $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ için $f'(x) = 0$ olduğundan $f(x) = C$ şeklindedir.

Tekrar aynı yöntemi kullanarak

$$f(0) = -\frac{\pi}{4}$$

elde edileceğinden, fonksiyon bu aralıkta sabit ve $f(x) = -\frac{\pi}{4}$ e eşit bulunur.

Aranan grafik Şekil 68 de verilmiştir.



Şekil 68.

6.7. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

1. $f(x) = \text{Arc tg } \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

2. $f(x) = \text{Arc tg } \frac{a\sqrt{3}}{2x - a} + \text{Arc tg } \frac{x\sqrt{3}}{2a - x}$ $(a > 0)$

3. $f(x) = \text{Arc sin } \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM ONYEDİ

# LOGARİTMİK VE ÜSTEL FONKSİYONLAR

## 1 — LOGARİTMİK FONKSİYON

### 1.1. *Tanım*

*Doğal logaritma* veya *Neper logaritma* fonksiyonu her *pozitif* $x$ sayısı için

$$\text{Log } x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

şeklinde tanımlanır. Doğal logaritma'ya e *tabanına göre logaritma* da denir.

### 1.2. *Özellikleri*

Doğal logaritma fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

1.2.1. Her $x$, $y$ pozitif reel sayı çifti için $\text{Log } (x \cdot y) = \text{Log } x + \text{Log } y$ dir.

1.2.2. Her $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif reel sayı takımı için

$\text{Log } (x_1 x_2 \ldots x_n) = \text{Log } x_1 + \text{Log } x_2 + \ldots + \text{Log } x_n$ dir.

1.2.3. Her $x$, $y$ pozitif reel sayı çifti için

$$\text{Log } \left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log } x - \text{Log } y \text{ dir.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


1.2.4. Her $x$ pozitif reel sayısı ve her $r$ reel sayısı için
$\text{Log}\,(x^r) = r\,\text{Log}\,x$ dir.

1.3. *Logaritma fonksiyonunun grafiği*

Doğal logaritma fonksiyonunun tanımından aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1.3.1. $\text{Log}\ 1 = 0$ dır.

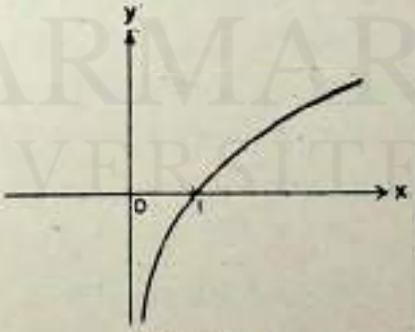
1.3.2. $\lim_{x \to +\infty} \text{Log}\ x = +\infty$ dur.

1.3.3. $\text{Lim}_{x \to 0^+} \text{Log}\ x = -\infty$ dur.

1.3.4. $(\text{Log})'(x) = \dfrac{1}{x}$ tir.

1.3.5. $x \in ]0, 1[$ için $\text{Log}\ x < 0$, $x \in ]1, +\infty[$ için $\text{Log}\ x > 0$ dır.

Bütün bu verilere dayanarak, doğal logaritma fonksiyonunun grafiği aşağıdaki şekilde elde edilir:




Şekil 69.

2 — *Uygulamalar*

2.1. $M$ ve $N$, $f(x) = \text{Log}\ x$ fonksiyonunun grafiği üzerinde bulunan herhangi iki nokta olsun. $M$ ve $N$ noktalarının birinci koordi-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

natları $m$ ve $n$ ile gösterilsin. $m \cdot n = 1$ ise MN doğru parçasının orta noktası Ox ekseni üzerindedir.

de bulunan iki nokta olduğuna göre, $M(m, \text{Log } m)$ ve $N(n, \text{Log} n)$

M ve N noktaları $f(x) = \text{Log } x$ fonksiyonunun grafiği üzerindir. Üstelik $m \cdot n = 1$ olduğundan, $n = \frac{1}{m}$ yazılabilir. MN doğru parçasının orta noktasının koordinatları

$$\frac{m+n}{2} = \frac{m^2+1}{2m}$$

ve

$$\frac{1}{2}(\text{Log } m + \text{Log } n) = \frac{1}{2}(\text{Log } m + \text{Log } \frac{1}{m})$$

$$= \frac{1}{2}(\text{Log } m \cdot \frac{1}{m}) = \frac{1}{2}\text{Log } 1 = 0$$

olduğundan, MN kirişinin orta noktası ox ekseni üzerinde bulunur.

2.2.
$$\begin{cases} x \cdot y = a^2 \\ \text{Log}^2 x + \text{Log}^2 y = \frac{5}{2}\text{Log}^2 a \end{cases}$$

denklem sistemini çözmek.

Birinci denklemin logaritmasının alınması halinde

$$\text{Log } x + \text{Log } y = 2 \text{ Log } a$$

elde edileceğinden sistem

$$\text{Log } x + \text{Log } y = 2 \text{ Log } a$$

$$\text{Log}^2 x + \text{Log}^2 y = \frac{5}{2}\text{Log}^2 a$$

şekline girer. $X = \text{Log } x$, $Y = \text{Log } y$ ve $A = \text{Log } a$ yazılacak olursa

$$X + Y = 2A$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{5}{2}A^2$$

elde edilir. İlk denklemden Y nin değerini bulup ikincisinde yerine koymak suretiyle

$$X^2 + (2A - X)^2 = \frac{5}{2} A^2$$

veya

$$2X^2 - 4AX + \frac{3}{2} A^2 = 0$$

yani

$$4X^2 - 8AX + 3A^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$X = \frac{4A \mp \sqrt{16A^2 - 12A^2}}{4}$$

yani $X = \frac{3}{2} A$ ve $X = \frac{1}{2} A$ dır.

$$X = \frac{3}{2} A$$

dan

$$\text{Log } x = \frac{3}{2} \text{ Log } a = \text{Log } a^{\frac{3}{2}}$$

yani

$$x = a^{\frac{3}{2}}$$

ve

$$xy = a^2$$

olduğundan

$$y = a^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

$$X = \frac{1}{2} A$$

dan hareket edilmesi halinde ise

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x = a^{\frac{1}{2}}; \quad y = a^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. (İki çözümün $x$ ve $y$ cinsinden simetrik olmaları gerektiği, verilen sistemin simetrisinden de görülür!)

2.3. $x \in ]-1, 1[$ olmak üzere $f(x) = \text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ veriliyor.

$a$ ve $b$ sayıları aynı açık aralıkta seçilen ve $ab \neq -1$ koşulunu sağlayan herhangi iki reel sayı olmak üzere

$$f(x) = f(a) + f(b)$$

koşulunu sağlayan $x$ sayılarının belirlenmesi.

Problemin verilerine göre

$$f(a) = \text{Log}\left(\frac{1+a}{1-a}\right), \quad f(b) = \text{Log}\left(\frac{1+b}{1-b}\right),$$

$$f(a) + f(b) = \text{Log}\left(\frac{1+a}{1-a}\right) + \text{Log}\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

$$= \text{Log}\left(\frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}\right)$$

dır. Şu halde

$$f(x) = f(a) + f(b)$$

dan

$$\text{Log}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{Log}\left(\frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}\right)$$

elde edilir, yani

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{(1+a)(1+b)}{(1-a)(1-b)}$$

$$x = \frac{a+b}{1+ab}$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


2.4. $r$ pozitif bir reel sayı olmak üzere her $a$, $b$ reel sayı çifti için

$$a < b \implies a \text{ Log } r < b \text{ Log } r$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesi mümkün mü?

$a < b$ eşitsizliğinin $a \cdot r < b \cdot r$ eşitsizliğini gerektirmesi için, $r$ sayısının pozitif olması şarttır. Şu halde Log $r > 0$ olması gereklidir: bunun için gerek ve yeter koşul da $r > 1$ olmasıdır.

2.5. $a$ herhangi bir reel sayıyı göstermek üzere

$$\frac{d\,(\text{Log } x)}{dx} = \frac{d\,(\text{Log } (ax))}{dx}$$

bağıntısının gerçeklendiğini kanıtlamak.

Log $(ax)$ fonksiyonunu bir bileşke fonksiyonu olarak düşünmek mümkündür: $f(x) = ax$ yazılacak olursa $f(x) = \text{Log } (ax) = \text{Log } (g(x)) = (\text{Log} \circ g)\ (x)$ tir. Şu halde

$$(\text{Log})'\ (ax) = \frac{1}{ax}\ ;\quad \frac{d\,(ax)}{dx} = a$$

olduğuna göre zincir kuralından dolayı

$$\frac{d\,(\text{Log } (ax))}{dx} = (\text{Log})'\ (ax) \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

yani

$$\frac{d\,(\text{Log } (ax))}{dx} = \frac{d\,(\text{Log } (x))}{dx}$$

dır.

2.6. $f(x) = \text{Log } |x|$ fonksiyonunun türevinin hesaplanması.

Verilen fonksiyon

$$\begin{cases} x > 0 \text{ için} & f(x) = \text{Log } x \\ x < 0 \text{ için} & f(x) = \text{Log } (-x) \end{cases}$$

iki kısma ayrılır. $x > 0$ olması halinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(\text{Log})'(x) = \frac{1}{x}$$

olduğundan $x > 0$ için

$$(\text{Log})'(|x|) = \frac{1}{x}$$

tir. $x < 0$ olursa, bir önceki alıştırmadan dolayı

$$\frac{d}{dx}(\text{Log}(-x)) = \frac{1}{x} \text{ tir yani}$$

$$(\text{Log})'(|x|) = \frac{1}{x}$$

elde edilir: şu halde $x \neq 0$ olmak koşulu ile

$$\frac{d}{dx}(\text{Log}(|x|)) = \frac{1}{x}$$

dir.

2.7. $$\lim_{x \to +\infty} x \,\text{Log}\,(1 + \frac{1}{x})$$

limitinin hesaplanması.

Limiti hesaplanacak ifade iki fonksiyonun çarpımı olarak gösterilebilir Üstelik

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty\,; \qquad \lim_{x \to +\infty} \text{Log}\,(1 + \frac{1}{x}) = 0$$

olduğuna göre

$$\lim_{x \to +\infty} x \,\text{Log}\,(1 + \frac{1}{x}) = (\lim_{x \to +\infty} x)\,(\lim_{x \to +\infty} \text{Log}\,(1 + \frac{1}{x}))$$

$+\infty \cdot 0$ belirsiz şeklini verir. Bu nedenle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

yazılır ve bu kez verilen limit $\frac{0}{0}$ belirsiz şekline girer: bu şekle l'Hopital kuralını uygulamak suretiyle

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

elde edilir.

## 3 — ÜSTEL FONKSİYON

### 3.1. *Tanım*

*Üstel fonksiyon*, doğal logaritma fonksiyonunun maküsu olarak tanımlanır, yani

$$\exp = (\operatorname{Log})^{-1}$$

dir.

### 3.2. *Özellikleri*

Üstel fonksiyonun başlıca özelikleri aşağıda açıklanmıştır:

3.2.1. Her $x$, $y$ reel sayı çifti için

$$\exp(x+y) = (\exp(x))(\exp(y))$$

dir.

3.2.2. Her $x_1, x_2, \ldots x_n$ reel sayı takımı için

$$\exp(x_1+x_2+\ldots+x_n) = (\exp(x_1))(\exp(x_2))\ldots(\exp(x_n))$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.3. *Üstel fonksiyonun grafiği*

Üstel fonksiyonun tanımından aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

3.3.1. $exp\ (0) = 1$ dir.

3.3.2. $\lim_{x \to -\infty} exp\ (x) = 0$ dır.

3.3.3. $\lim_{x \to +\infty} exp\ (x) = +\infty$ dur.

3.3.4. $(exp)'\ (x) = exp\ (x)$ dır.

3.3.5. Her $x \in \mathbb{R}$ için $exp\ (x) > 0$ dır.

3.4. *e sayısı*

Üstel fonksiyonun $x = 1$ için aldığı değere *Euler sabiti* veya *e sayısı* denir ve

$$exp\ (1) = e$$

yazılır.

Bu noktadan hareket edilerek aşağıdaki tanım elde edilir:

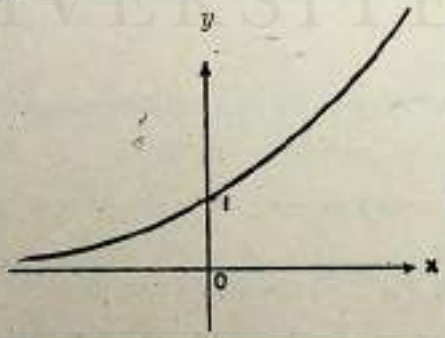
3.4.1. *Tanım*

Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$exp\ (x) = e^x$$

dir.

3.3 te sayılan özelliklerden hareket edilerek $e^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir:




Şekil 70.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


3.5. *Başka tabanlara göre üstel fonksiyon*

3.5.1. *Tanım*

Her $x \in \mathbb{R}$ ve her $a > 0$ reel sayısı için

$$e^{x \operatorname{Log} a} = a^x$$

yazılır ve $a^x$'e, $a$ *tabanına göre üstel fonksiyon* denir.

3.5.2. *Tanım*

$a^x$ fonksiyonunun maküs fonksiyonu $\operatorname{Log}_a x$ şeklinde gösterilir; bu fonksiyona, $a$ *tabanına göre logaritma fonksiyonu* denir.

3.5.3. *Uyarı*

Logaritma fonksiyonunun ve üstel fonksiyonun başlıca özellikleri, $a$ tabanına göre logaritma fonksiyonu ve üstel fonksiyon için aynen geçerlidirler. Özel olarak 1.2.1., 1.2.2., 1.2.3., 1.2.4., 3.2.1. ve 3.2.2. de açıklananlar geçerlidir.

Doğal logaritma fonksiyonuna, $e$ tabanına göre logaritma da denilmesinin nedeni 3.5.1. ve 3.5.2. tanımları ile açıklanmış olur.

3.5.4. *Taban değiştirme bağıntısı*

Doğal logaritma ile $a$ gibi bir sayıyı taban olarak kabul eden logaritma fonksiyonu arasındaki bağıntı

$$\operatorname{Log}_a x = \frac{\operatorname{Log} x}{\operatorname{Log} a} \tag{3.5.4.1}$$

formülü ile verilir.

Şu halde, $a$ ve $b$ herhangi iki pozitif sayı olmak üzere

$$\operatorname{Log} x = (\operatorname{Log} a)\ (\operatorname{Log}_a x) = (\operatorname{Log} b)\ (\operatorname{Log}_b x)$$

yazılabileceğinden

$$\operatorname{Log}_b x = \frac{\operatorname{Log} a}{\operatorname{Log} b} \operatorname{Log}_a x$$

elde edilir. Halbuki (3.5.4.1) formülünde $x$ yerine $b$ alarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\text{Log}_a\, b = \frac{\text{Log}\, b}{\text{Log}\, a}$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\text{Log}_b\, x = \frac{\text{Log}_a\, x}{\text{Log}_a\, b} \tag{3.5.4.2}$$

dir. (3.5.4.2) bağıntısı taban değiştirme yöntemini açıklar.

## 4 — UYGULAMALAR

4.1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

denklemini çözmek.

Tanım 3.5.1.1 uygulayarak

$$e^{\sqrt{x}\,\text{Log}\,x} = e^{x\,\text{Log}\,\sqrt{x}} \tag{4.1.1}$$

yazılır. Üstel fonksiyon sürekli ve artan bir fonksiyon olduğundan injektiftir. Dolayısıyla (4.1.1) bağıntısından

$$\sqrt{x}\ \text{Log}\ x = x\ \text{Log}\ \sqrt{x}$$

yani

$$\sqrt{x}\ \text{Log}\ x = \frac{1}{2}\, x\ \text{Log}\ x$$

veya

$$(\sqrt{x} - \frac{x}{2})\ \text{Log}\ x = 0$$

elde edilir. Bu ifade üç çarpana ayrılabilir:

$$\sqrt{x}\,(1 - \frac{\sqrt{x}}{2})\ \text{Log}\ x = 0$$

İlk çarpanın sıfıra eşit olması $x = 0$ verir ve bu sonuç çözüm ola-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

rak kabul edilemez, çünkü bu takdirde verilen denklem $0^0 = 0^0$ gibi, belirsiz bir şekle girer. İkinci çarpanın sıfıra eşit olması $x = 4$ çözümünü verir ve üçüncü çarpanın sıfıra eşit olması $x = 1$ çözümünü belirtir. Şu halde verilen problemin çözümleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = 4$ tür.

4.2. $\text{Log}_3 7$ ve $\text{Log}_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$

sayılarının karşılaştırılması.

(3.5.4.1) formülünü uygulayarak

$$\text{Log}_3 7 = \frac{\text{Log } 7}{\text{Log } 3}$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7} = \frac{\text{Log } \frac{1}{7}}{\text{Log } \frac{1}{3}} = \frac{\text{Log } 1 - \text{Log } 7}{\text{Log } 1 - \text{Log } 3} = \frac{-\text{Log } 7}{-\text{Log } 3} = \frac{\text{Log } 7}{\text{Log } 3}$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\text{Log}_3 7 = \text{Log}_{\frac{1}{3}} \frac{1}{7}$$

dir.

4.3. $\text{Log}_{c+b} a + \text{Log}_{c-b} a = 2 \text{Log}_{c+b} a \text{ Log}_{c-b} a$

olduğuna göre, $a$, $b$ ve $c$ sayılarının sağladıkları bağıntının bulunması.

Verilen bağıntı, (3.5.4.1) formülüne göre

$$\frac{\text{Log } a}{\text{Log } (c+b)} + \frac{\text{Log } a}{\text{Log } (c-b)} = 2 \frac{\text{Log } a}{\text{Log } (c+b)} \frac{\text{Log } a}{\text{Log } (c-b)}$$

şekline girer ve buradan

$$\frac{\text{Log } a}{\text{Log } (c+b) \text{ Log } (c-b)} (\text{Log } (c-b) + \text{Log } (c+b))$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= 2\,\frac{\text{Log } a \text{ Log } a}{\text{Log } (c+b)\ \text{Log } (c-b)}$$

bulunur. Ortak çarpan olan

$$\frac{\text{Log } a}{\text{Log } (c+b)\ \text{Log } (c-b)}$$

sayısı ile kısaltma yapıldıktan sonra

$$\text{Log } (c-b) + \text{Log } (c+b) = 2\,\text{Log } a$$

veya

$$\text{Log } (c^2 - b^2) = \text{Log } a^2$$

yani

$$c^2 - b^2 = a^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

elde edilir.

4.4. $c^2 \geqq 4ba^{p+q}$

bağıntısının sağlanması halinde

$$a^{p+x} + ba^{q-x} + c = 0$$

denkleminin çözümünün bulunması.

Verilen denklem

$$a^p a^x + ba^q a^{-x} + c = 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sıfırdan daima farklı olduğu bilinen $a^x$ ile çarpılması halinde,

$$a^p (a^x)^2 + ca^x + ba^q = 0$$

şekline girer. $a^x$ cinsinden ikinci dereceden olan bu denklemi $a^x$'e göre çözerek

$$a^x = \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ba^{p+q}}}{2a^p}$$

bulunur, yani

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$x = \text{Log}_a \left( \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ba^{p+q}}}{2a^p} \right)$$

dir.

4.5. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

denklemini çözmek.

Verilen denklem

$$4^x - 3^x 3^{-\frac{1}{2}} = 3^x 3^{\frac{1}{2}} - 2^{2(x-\frac{1}{2})}$$

$$4^x - 3^x \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^x \sqrt{3} - 4^{x-\frac{1}{2}}$$

$$4^x - 3^x \frac{1}{\sqrt{3}} = 3^x \sqrt{3} - 4^x 4^{-\frac{1}{2}}$$

veya

$$4^x + 4^x \frac{1}{\sqrt{4}} = 3^x \sqrt{3} + 3^x \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$4^x \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \frac{(3+1)}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{3}{2} 4^x = \frac{4}{\sqrt{3}} 3^x$$

$$\frac{1}{2} \frac{4^x}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3^x}{3}$$

$$4^{x-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} 3^{x-1}$$

yani

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(\frac{4}{3})^{x-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

dir. İki tarafın logaritmasını alarak

$$2(x-1)\ \text{Log}\ (\frac{2}{\sqrt{3}}) = \text{Log}\ (\frac{2}{\sqrt{3}})$$

yani

$$2(x-1) = 1$$

veya

$$x = \frac{3}{2}$$

bulunur.

4.6. $\text{Log}\ (x+1) = 1 + \text{Log}\ (1-x)$

denklemini çözmek.

$1 = \text{Log}\ e$ yazılabileceğinden, verilen denklem

$$\text{Log}\ (x+1) = \text{Log}\ e + \text{Log}\ (1-x)$$

$$\text{Log}\ (x+1) = \text{Log}\ (e\,(1-x))$$

veya

$$x + 1 = e\,(1-x)$$

dir. Buradan da

$$x = \frac{e-1}{e+1}$$

elde edilir.

4.7. Her pozitif $x$ reel sayısı için

$$\frac{x}{x+1} < \text{Log}\ (1+x) < x$$

olduğunu göstermek.

Her $t \in [0, x]$ için tanımlanmış $f(t) = \text{Log}\ (1 + t)$ fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon $[0, x]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli, $]0, x[$ açık aralığı üzerinde türetilebilen bir fonksiyondur. Bu nedenle $f$ fonksiyonuna Ortalama Değer Teoremi $[0, x]$ kapalı aralığı için uygulanabilir: $c \in ]0, x[$ olmak üzere

$$f(x) - f(0) = f'(c)\ (x - 0)$$

yazılabilir. $f(x) = \text{Log}\ (1 + x)$, $f(0) = \text{Log}\ 1 = 0$ olduğuna göre, önceki sonuç

$$\text{Log}\ (1 + x) = \frac{1}{1 + c}\ x$$

şeklini alır. $c > 0$ olduğuna göre

$$\frac{1}{1 + c}\ x < \frac{1}{1 + 0}\ x = x$$

dir. $c < x$ olduğuna göre

$$1 + c < 1 + x$$

yani

$$\frac{1}{1 + x} < \frac{1}{1 + c}$$

dir. Şu halde

$$\frac{x}{1 + x} < \frac{x}{1 + c} < x$$

yani

$$\frac{x}{1 + x} < \text{Log}\ (1 + x) < x$$

elde edilir.

4.8. Pozitif bir $x$, $y$ reel sayı çifti $x + y = 1$ bağıntısını sağlarsa,

$$x\ \text{Log}\ x + y\ \text{Log}\ y \geqslant -\ \text{Log}\ 2$$

olduğunu gösteriniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y = 1 - x$ olduğuna göre

$$u(x) = x \operatorname{Log} x + (1 - x) \operatorname{Log} (1 - x)$$

yardımcı fonksiyonu elde alınsın.

$$u'(x) = \operatorname{Log} x + 1 - \operatorname{Log} (1 - x) - 1 = \operatorname{Log} \frac{x}{1 - x}$$

olduğundan $u'(x) = 0$ olması için $\operatorname{Log} \frac{x}{1-x} = 0$, yani $\frac{x}{1-x} = 1$ olması gerekir. Buradan $x = \frac{1}{2}$ elde edilir, yani $u$ fonksiyonunun tek kritik noktası $x = \frac{1}{2}$ dir.

$x < \frac{1}{2}$ için $u'(x)$ negatif, $x > \frac{1}{2}$ için $u'(x)$ pozitif olduğundan $\frac{1}{2}$ noktası $u$ fonksiyonunun bir minimumunu gösterir. Bu minimum

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{1}{2}$$

$$= \operatorname{Log} \frac{1}{2} = \operatorname{Log} 1 - \operatorname{Log} 2 = - \operatorname{Log} 2$$

dir. Şu halde $x + y = 1$ bağıntısını sağlayan bütün $x, y$ pozitif sayı takımları için

$$x \operatorname{Log} x + y \operatorname{Log} y \geqslant - \operatorname{Log} 2$$

dir.

4.9. Her pozitif $x$ sayısı için

$$\frac{1}{x+1} < \operatorname{Log} (x + 1) - \operatorname{Log} x < \frac{1}{x}$$

olduğunu göstermek.

$x$ pozitif sayısı ne olursa olsun her $t \in [0, 1]$ için tanımlanmış $F(t) = \text{Log}\ (x + t)$ fonksiyonu bu aralık üzerinde sürekli ve $]0, 1[$ açık aralığı üzerinde türetilebilen bir fonksiyon olduğuna göre, Ortalama Değer Teoremi bu fonksiyona $[0, 1]$ aralığı üzerinde uygulanabilir, yani $c \in [0, 1]$ olmak üzere

$$\text{Log}\ (x+1) - \text{Log}\ x = \frac{1}{x+c}\,(x+1-x) = \frac{1}{x+c}$$

dir.

$$0 < c < 1$$

olduğuna göre

$$x < x + c < x + 1$$

ve

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x+c} < \frac{1}{x}$$

bir ve istenen sonuca buradan derhal varılır.

Bu bağıntıdan ilginç bir uygulama elde edilebilir: gerçekten, $x$ için $n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ kn-1$ değerlerini alıp elde edilen eşitsizlikler alt alta yazılacak olursa, taraf tarafa toplayarak

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} < \text{Log}\ (kn) - \text{Log}\ n < \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} - \frac{1}{kn} + \frac{1}{n}$$

elde edilir ve orta kısmındaki logaritmaları hesaplayarak

$$\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} < \text{Log}\ k < \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} - \frac{1}{kn} + \frac{1}{n}$$

bulunur. Şu halde

$$\frac{1}{kn} + \text{Log}\ k - \frac{1}{n} < \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} < \text{Log}\ k$$

dir. $n$ sayısı için buradan limite gidilecek olursa

$$\text{Log}\ k < \lim_{n\to\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p} < \text{Log}\ k$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yani

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p\le n} \frac{1}{p} = \text{Log } k$$

dir.

4.10. $f(x) = \sin\ (x^{\sin x})$

fonksiyonunun türevini bulmak.

$$u(x) = x^{\sin x}$$

yazılacak olursa,

$$f(x) = \sin\ u(x)$$

dir ve

$$f'(x) = u'(x)\ \cos\ u(x)$$
$$= u'(x)\ \cos\ (x^{\sin x})$$

tür. $f'$ nün hesabının tamamlanması için $u'(x)$ 'in hesaplanması gerekir.

$$u(x) = x^{\sin x} = e^{(\sin x)\ \text{Log}\ x}$$

yazılabileceğinden,

$$v(x) = (\sin x)\ \text{Log}\ x$$

yazılacak olursa,

$$u(x) = e^{v(x)}$$

şekline girer ve

$$u'(x) = v'(x)\ e^{v(x)}$$

tür.

$$v'(x) = (\cos x)\ \text{Log}\ x + \frac{\sin x}{x}$$

olduğundan

$$u'(x) = v'(x)\ e^{v(x)} = \left((\cos x)\ \text{Log}\ x + \frac{\sin x}{x}\right) e^{(\sin x)\ \text{Log}\ x}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$= ((\cos x) \operatorname{Log} x + \frac{\sin x}{x})\ x^{\sin x}$$

ve

$$f'(x) = ((\cos x) \operatorname{Log} x + \frac{\sin x}{x})\ x^{\sin x} \cos (x^{\sin x})$$

dır.

4.11. $x > 1$ koşulunu sağlayan değişken değerleri için tanımlanmış

$$f(x) = -\operatorname{Log} (\operatorname{Log} x)$$

fonksiyonunun konveks bir fonksiyon olduğunun kanıtlanması ile $a$ ve $b$ nin 1 sayısından büyük iki reel sayı olmak üzere

$$\operatorname{Log} (\frac{a+b}{2}) \geq \sqrt{(\operatorname{Log} a)\ (\operatorname{Log} b)}$$

bağıntısının sağlandığının gösterilmesi.

$x > 1$ olmasından dolayı Log $x$ pozitiftir ve dolayısıyla Log (Log $x$)'in bir anlamı vardır. Üstelik, bu koşullar altında $f$ fonksiyonu türetilebilen bir fonksiyondur ve

$$f'(x) = -\frac{1}{x \operatorname{Log} x}$$

$$f''(x) = \frac{\operatorname{Log} x + 1}{(x \operatorname{Log} x)^2}$$

dır. $x > 1$ olduğundan Log $x > 0$ ve dolayısıyla, her $x > 1$ için $f''(x) > 0$ dır, yani $f$ fonksiyonu konvekstir.

$a$ ve $b$, $f$ fonksiyonunun tanım cümlesine ait herhangi iki nokta olsun. $a < b$ varsayılsın.

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

dır. $f$ konveks olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a}$$

veya

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{b-a}{2}}$$

veya

$$f(b)-f(a) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-2f(a)$$

yani

$$f(a)+f(b) \geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

dir. Şu halde

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

bağıntısından hareket edilebilir: $f$ yerine verilen fonksiyon yazılacak olursa

$$\frac{1}{2}\left(-\operatorname{Log}\left(\operatorname{Log} a\right)-\operatorname{Log}\left(\operatorname{Log} b\right)\right) \geqslant -\operatorname{Log}\left(\operatorname{Log}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

elde edilir ve buradan, logaritmanın özelliklerini kullanarak

$$-\operatorname{Log}\sqrt{\left(\operatorname{Log} a\right)\left(\operatorname{Log} b\right)} \geqslant -\operatorname{Log}\left(\operatorname{Log}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

elde edilir. Logaritma fonksiyonu kesin artan bir fonksiyon olduğundan

$$\operatorname{Log}\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\left(\operatorname{Log} a\right)\left(\operatorname{Log} b\right)}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


4.12. $a$ ve $b$, $a < b$ koşulunu yerine getiren herhangi iki reel sayı ve $f$, $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sıfır olmadığı ve $]a, b[$ açık aralığında türetilebildiği kabul edilsin.

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\, f'(c)/f(c)}$$

bağıntısını sağlayacak şekilde bir $c \in ]a, b[$ nin varlığının kanıtlanması.

$f$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sıfır olmadığına göre $|f|$ fonksiyonu aynı aralıkta daima pozitif değerler alan, sürekli ve $]a, b[$ aralığında türetilebilen bir fonksiyondur.

$$g(x) = \text{Log}\ |f(x)|$$

fonksiyonu da $[a, b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli, $]a, b[$ açık aralığında türetilebilen bir fonksiyon gösterir. Bu fonksiyona Ortalama Değer Teoremi $[a, b]$ kapalı aralığı için uygulanacak olursa

$$g(a) - g(b) = (a - b)\, g'(c)$$

olacak şekilde bir $c \in ]a, b[$ bulunur. $g$ fonksiyonunun açık ifadesi yerine yazılacak olursa

$$\text{Log}\, f(a) - \text{Log}\, f(b) = (a - b)\, \frac{f'(c)}{f(c)}$$

yani

$$\text{Log}\ \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right) = (a - b)\, \frac{f'(c)}{f(c)}$$

dır. (Log $f$'in türevi için, 2.5.'e bakınız!) Halbuki $f$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve sıfırdan farklı kalan bir fonksiyondur; şu halde $f$ fonksiyonu aralık üzerinde aynı işarette kalır. Şu halde, $g$ için elde edilen $c$ sayısı ile

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\, f'(c)/f(c)}$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^3+x^2}$

'nin değerini bulmak.

L'Hopital kuralını kullanarak

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x \sin x + (1-e^x)\cos x}{3x^2+2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x \sin x - 2e^x \cos x + e^x \sin x - \sin x}{2+6x} = -1$$

elde edilir.

4.14. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \operatorname{Log} \dfrac{e^x-1}{x}$

'nin değerini bulmak,

$$\frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}(\operatorname{Log}(e^x-1) - \operatorname{Log} x)$$

$$= \frac{1}{x} \operatorname{Log}(e^x-1) - \frac{1}{x} \operatorname{Log} x$$

olduğuna göre yukardaki limit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Log}(e^x-1)}{x} \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x}$$

'i hesaplayarak bulunabilir. Ancak, L'Hopital kuralına göre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \operatorname{Log} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{Log}(e^x-1)}{x}$$

dir. Bu sonuncu ifadeye L'Hopital kuralını uygulayarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{Log}\,(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = 1$$

bulunur.

Şu halde

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \text{Log}\, \frac{e^x-1}{x} = 1$$

dir.

5. *Alıştırmalar*

5.1. Aşağıdaki bağıntıları sağlayan $x$ sayılarını bulunuz.

a) $\text{Log}\,(x+1) = \text{Log}\,(1-x)$ Yanıt : $x = 0$

b) $\text{Log}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = \text{Log}\, 2$ Yanıt : $x = \frac{9}{16}$

5.2. Her $x > 1$ için $1 - \frac{1}{x} < \text{Log}\, x < x - 1$ olduğunu gösteriniz.

5.3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\text{Log}\, x)^n}$ Yanıt : $+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\text{Log}\, x)^n}{x}$ Yanıt : 0

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\text{Log}\, x}$ Yanıt : $+\infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\text{Log}\, x}{\sqrt{x}}$ Yanıt : 0

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

e) $\lim_{x \to +\infty} x^r \operatorname{Log} x$ Yanıt : $\begin{cases} r = 0 \text{ ise } +\infty \\ r \neq 0 \text{ ise } 0 \end{cases}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)}{\operatorname{Log} x}$ Yanıt : 0

g) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x \operatorname{Log} x}{x + \operatorname{Log} x}$ Yanıt : $+\infty$

h) $\lim_{x \to 0^+} (x + \sqrt{x}) \operatorname{Log} x$ Yanıt : 0

i) $\lim_{x \to 0^+} x \operatorname{Log} x$ Yanıt : 0

j) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x \operatorname{Log} x}{\operatorname{Log}(1 + ax)}$ Yanıt : $\begin{cases} a < 0 \text{ ise } +\infty \\ a > 0 \text{ ise } -\infty \end{cases}$

k) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x^3 + x} \operatorname{Log} x$ Yanıt : 0

l) $\lim_{x \to 0^+} (x + 1) \operatorname{Log}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ Yanıt : $+\infty$

m) $\lim_{x \to 0^+} (-x \operatorname{Log} x)$ Yanıt : 0

n) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{Log}(\sin x)}{\operatorname{Log}(\operatorname{tg} x)}$ Yanıt : 1

o) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x \operatorname{Log}(1 + x)}{(\operatorname{Arc\,tg} x)^2}$ Yanıt : 1

p) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{Log}(1 + x) - x}{1 - \cos x}$ Yanıt : $-1$

q) $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\operatorname{Log}(1 - 2x)}{\operatorname{tg} x}$ Yanıt : 0

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


r) $\lim_{x \to 1^-} (\text{Log } x)\ (\text{Log } (1 - x))$ Yanıt : 0

s) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\text{Log } x} - \frac{1}{x}\right)$ Yanıt : $\frac{1}{2}$

t) $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x + \text{Log } x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ Yanıt : $-1$

5.4. Aşağıdaki fonksiyonların türev fonksiyonlarını hesaplayınız:

a) $f(x) = \log\ (\text{tg } x)$ Yanıt : $f'(x) = \frac{2}{\sin 2x}$

b) $f(x) = \text{Log } \left(\frac{x}{1 - x}\right)$ Yanıt : $f'(x) = \frac{1}{x\ (1 - x)}$

c) $f(x) = \text{Log } \left(\frac{1}{\sin x}\right)$ Yanıt : $f'(x) = -\text{cotg } x$

d) $f(x) = \text{Arctg } (\text{Log } x)$ Yanıt : $f'(x) = \frac{1}{x\ (1 + \text{Log}^2 x)}$

e) $f(x) = \text{Log } (1 + \text{Log } (1 + \text{Log } (1 + \text{Log } x)))$

Yanıt : $f'(x) = \frac{1}{x\ (1+\text{Log } x)\ (1+\text{Log } (1+\text{Log } x))} \cdot$

$$\cdot \frac{1}{(1+\text{Log } (1+\text{Log } (1+\text{Log } x)))}$$

f) $f(x) = \text{Log}^4\ (\text{Log}^3\ (2 + 3 \sin\ (x^2)))$

Yanıt : $f'(x) = \frac{72\ (\text{Log}^3\ (\text{Log}^2\ (2 + 3 \sin\ (x^2))))}{(\text{Log}^2\ (3+3\ \sin\ (x^2)))} \cdot$

$$\cdot \frac{(\text{Log } (2+3\ \sin\ (x^2)))\ (x^2 \cos\ (x^2))}{(2 + 3\ \sin\ (x^2))}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

g) $f(x) = x\,(\sin(\operatorname{Log} x) - \cos(\operatorname{Log} x))$

Yanıt : $f'(x) = 2\sin(\operatorname{Log} x)$

5.5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız:

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\operatorname{Log} x}$ Yanıt : $+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} (1 - e^{1/x}) \cdot 3x$ Yanıt : $-3$

c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + x - 1}{e^x + e^{-x}}$ Yanıt : $0$

d) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^b}$ $(a, b > 0)$ Yanıt : $\begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & 1 < a \end{cases}$

e) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ Yanıt : $1$

f) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{Log}(a + be^x)}{\sqrt{a + bx^2}}$ Yanıt : $\dfrac{1}{\sqrt{b}}$

g) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1 - e^x)(1 - \cos x)}{x^3 + x^4}$ Yanıt : $-\dfrac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to 0} x^x$ Yanıt : $1$

i) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)^x$ Yanıt : $1$

j) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ Yanıt : $\dfrac{1}{2}$

k) $\lim_{x\to 0^+} x^{|e^x - 1|}$ Yanıt : $0$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


l) $\lim_{x \to 1^+} (\text{Log } x)^{x-1}$ Yanıt : 1

5.6. Aşağıdaki fonksiyonların türev fonksiyonlarını hesaplayınız:

a) $f(x) = 2^x$ Yanıt : $f'(x) = 2^x \text{ Log } 2$

b) $f(x) = (1 + x)(1 + e^x)$

Yanıt : $f'(x) = 1 + (1 + 2x + 2x^2)\, e^x$

c) $f(x) = x^{x^x} + a^{x^x} + a^{x^a}$

Yanıt : $f'(x) = a^x x^{x^x - 1} + a x^{a-1} a^{x^a} \text{ Log } a$

$+ a^x a^{x^x} \text{Log}^2 a$

d) $f(x) = (\text{Log } x)^x$

Yanıt : $f'(x) = (\text{Log } (\text{Log } x) + \dfrac{1}{\text{Log } x})\, (\text{Log } x)^x$

e) $f(x) = e^{e^{e^{e^x}}}$ Yanıt : $f'(x) = e^{e^{e^{e^x}}} e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x$

f) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ Yanıt : $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

g) $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ Yanıt : $f'(x) = \dfrac{1}{2x^3} e^{\frac{-1}{x^2}}$

h) $f(x) = x^{x^x}$

Yanıt : $f'(x) = x^{x^x} x^x ((\text{Log } x + 1) \text{ Log } x + \dfrac{1}{x})$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

i) $f(x) = x^{\sin x}$

Yanıt : $f'(x) = (\cos x \operatorname{Log} x + \dfrac{\sin x}{x})\, x^{\sin x}$

j) $f(x) = (\sin x)^{\sin (\sin x)}$

Yanıt : $f'(x) = (\sin x)^{\sin (\sin x)} \cos x$

$\cdot (\cos (\sin x) \operatorname{Log} (\sin x) + \dfrac{\sin (\sin x)}{\sin x})$

## 7 — GRAFİK ÇİZİMLERİ

Logaritma veya üstel kısımları olan fonksiyonların grafik çizimlerinde genel yöntemler uygulanır.

7.1. $f(x) = x + \operatorname{Log} (x^2 - 1)$

fonksiyonun grafiğinin çizilmesi.

Logaritmanın bir anlamı olabilmesi için $x^2 - 1 > 0$ olması gerekir yani fonksiyon $]-\infty, -1[$ ve $]1, +\infty[$ açık aralıkların üzerinde tanımlıdır. Bu aralıklarda sürekli ve türetilebilen bir fonksiyondur.

$$f'(x) = 1 + \frac{1'}{x^2 - 1}\,(2x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$$

olduğuna göre $-1 - \sqrt{2}$ ve $-1 + \sqrt{2}$ kritik noktalar durumundadır: ancak $-1 + \sqrt{2}$ sayısı fonksiyonun tanımlanmadığı aralığa düştüğünden, bu noktayı incelemeğe gerek yoktur. $-1 - \sqrt{2}$ den küçük değerler için $f' > 0$, $-1 - \sqrt{2}$ den büyük değerler için $f' < 0$ olduğundan bu kritik nokta bir maksimumdur. Fonksiyonun simetrileri yoktur ve

$$x + \operatorname{Log} (x^2 - 1) = 0$$

denkleminin kökleri ancak $x > 1$ bölgesinde bulunabilir, zira

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

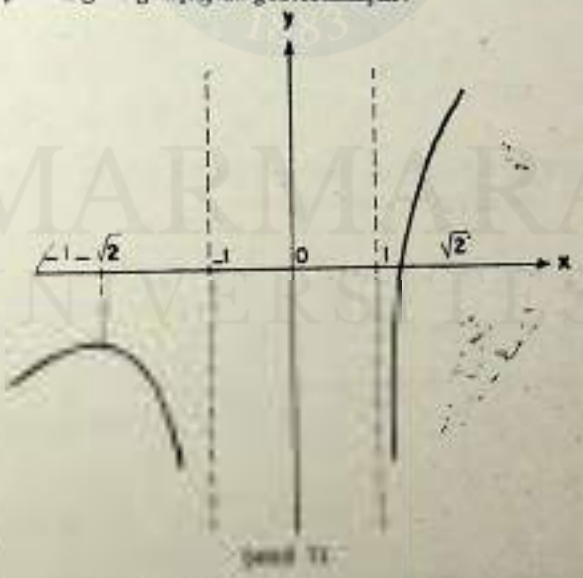

$-1-\sqrt{2}$ maksimum noktasında fonksiyonun aldığı değer $-1-\sqrt{2}+\text{Log}\,(2+2\sqrt{2}) < 0$ dır. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ halbuki $f(1, 1) = 1, 1 + \text{Log}\,(1{,}21 - 1) = 1, 1 + \text{Log}\,(0{,}21) = 1, 1 - 1{,}56064 \ldots < 0$ olduğundan 1, 1 ve $\sqrt{2}$ arasında fonksiyonun bir sıfırı vardır. Fonksiyon $\sqrt{2}$ den daha büyük $x$ değerleri için pozitif kaldığına göre, başka sıfırları yoktur.

Fonksiyonun değişim tablosu şudur:




Tablo

ve fonksiyonun grafiği aşağıda gösterilmiştir:




Şekil 11

7.2 $f(x) =$

fonksiyonun grafiğinin çizilmesi,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Fonksiyon $x \neq 0$ için tanımlanmıştır: ancak

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

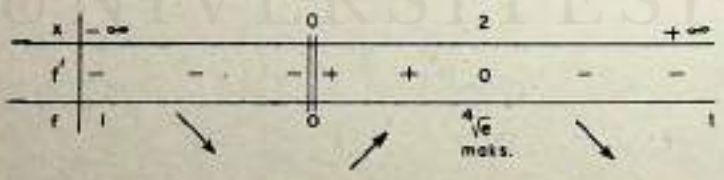
olduğundan, bu fonksiyon için $x = 0$ noktası birinci türden bir süreksizlik noktasıdır.

$$f'(x) = \frac{2 - x}{x^3} e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

olduğuna göre 2 noktası bir kritik noktadır ve bu noktada $f(2) = \sqrt[4]{e}$ dir. 2 den küçük pozitif değerler için $f' > 0$, 2 den büyük değerler için $f' < 0$ dır, yani 2 noktası fonksiyon için bir maksimum noktasıdır.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

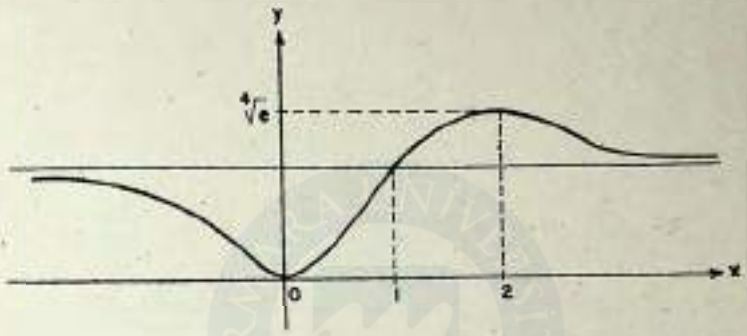
olduğundan $x = 1$ doğrusu verilen fonksiyonun bir yatay asemptotudur. Fonksiyonun değişim tablosu




Tablo

olup fonksiyonun grafiği

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Şekil 72

dir.

7.3. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:

a) $f(x) = \text{Log } (x+1)$

b) $f(x) = x + \dfrac{\text{Log } x}{x}$

c) $f(x) = \text{Log } (\text{Log } x)$

d) $f(x) = \text{Log Log } x$

e) $f(x) = \text{Log } (\text{Log } x)$

f) $f(x) = \text{Log } \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

g) $f(x) = \dfrac{\text{Log } x}{\sqrt{x}}$

h) $f(x) = (x^2-1)\ \text{Log } \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

i) $f(x) = e^{-x^2}$

j) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$

k) $f(x) = e^{\sin x}$

l) $f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{\sin x}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM ONSEKİZ

# HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

## 1 — HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

Genellikle hiperbolik fonksiyonlar, $x \to e^x$ üstel fonksiyonunun bazı özel rasyonel fonksiyonları olarak açıklanabilir. Ancak bu fonksiyonların daha ilginç yazılışlarını elde etmek için, genellikle temel hiperbolik fonksiyonlar $x \to e^x$ ve $x \to e^{-x}$ üstel fonksiyonlarının lineer toplamları olarak verilir.

$$\text{Sh } x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \tag{1.1}$$

$$\text{Ch } x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \tag{1.2}$$

olarak tanımı verilen iki temel hiperbolik fonksiyon *hiperbolik sinüs* ve *hiperbolik kosinüs* fonksiyonlarıdır. Diğer hiperbolik fonksiyonlar bu iki temel hiperbolik fonksiyona bağlı olarak verilirler:

a) *Hiperbolik tangent*

$$\text{Th } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}; \tag{1.3}$$

b) *hiperbolik kotangent*

$$\text{Coth } x = \frac{\text{Ch } x}{\text{Sh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}. \tag{1.4}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

c) *hiperbolik sekant*

$$\text{Sech } x = \frac{1}{\text{Ch } x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} ; \tag{1.5}$$

d) *hiperbolik kosekant*

$$\text{Cosech } x = \frac{1}{\text{Sh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} ; \tag{1.6}$$

## 2 — HİPERBOLİK FONKSİYONLAR ARASINDAKİ BAŞLICA ÖZDEŞLİKLER

Hiperbolik fonksiyonların tanımlarından hareket edilerek aşağıdaki bağıntılar kanıtlanır:

$$\text{Sh } (-x) = -\text{Sh } x \tag{2.1}$$

$$\text{Ch } (-x) = \text{Ch } x \tag{2.2}$$

$$\text{Th } (-x) = -\text{Th } x \tag{2.3}$$

(2.4) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\text{Ch } x \geqslant \text{Sh } x$

$$\text{Ch } x - \text{Sh } x = e^{-x} \tag{2.5}$$

$$\text{Ch } x + \text{Sh } x = e^x \tag{2.6}$$

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1 \tag{2.7}$$

$$\text{Sech}^2 x + \text{Th}^2 x = 1 \tag{2.8}$$

$$\text{Ch } (a+b) - \text{Sh } (a+b) = (\text{Ch } a - \text{Sh } a)\ (\text{Ch } b - \text{Sh } b) \tag{2.9}$$

$$\text{Ch } (a+b) + \text{Sh } (a+b) = (\text{Ch } a + \text{Sh } a)\ (\text{Ch } b + \text{Sh } b) \tag{2.10}$$

$$\text{Ch } (a \pm b) = \text{Ch } a\ \text{Ch } b \pm \text{Sh } a\ \text{Sh } b \tag{2.11}$$

$$\text{Sh } (a \pm b) = \text{Sh } a\ \text{Ch } b \pm \text{Sh } b\ \text{Ch } a \tag{2.12}$$

$$\text{Sh } 2a = 2\ \text{Sh } a + \text{Ch } a \tag{2.13}$$

$$\text{Ch } 2a = \text{Ch}^2 a + \text{Sh}^2 a \tag{2.14}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


(2.15) $$\operatorname{Th}(a \pm b) = \frac{\operatorname{Th} a \pm \operatorname{Th} b}{1 \pm \operatorname{Th} a \operatorname{Th} b}$$

(2.16) $$\operatorname{Ch} x + \operatorname{Ch} y = 2 \operatorname{Ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{Ch} \frac{x-y}{2}$$

(2.17) $$\operatorname{Ch} x - \operatorname{Ch} y = 2 \operatorname{Sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{Sh} \frac{x-y}{2}$$

(2.18) $$\operatorname{Sh} x + \operatorname{Sh} y = 2 \operatorname{Sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{Ch} \frac{x-y}{2}$$

(2.19) $$\operatorname{Sh} x - \operatorname{Sh} y = 2 \operatorname{Sh} \frac{x-y}{2} \operatorname{Ch} \frac{x+y}{2}$$

(2.16) ve (2.17) de $y = 0$ alınması halinde

(2.20) $$\operatorname{Ch} x + 1 = 2 \operatorname{Ch}^2 \frac{x}{2}$$

(2.21) $$\operatorname{Ch} x - 1 = 2 \operatorname{Sh}^2 \frac{x}{2}$$

elde edilir.

## 3 — UYGULAMALAR

Yukarda sıralanan bağıntıları çoğaltmak, bunlarla trigonometrik fonksiyonlar arasında bağıntılar kurmak olanakları sonsuzdur. Bu tür uygulamalara ait birkaç örnek aşağıda verilmiştir:

3.1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\operatorname{Ch} nx$ ve $\operatorname{Sh} nx$'i $\operatorname{Ch} x$ ve $\operatorname{Sh} x$ cinsinden ifade etmek.

(2.5) ve (2.6) dan dolayı

$$\operatorname{Ch} nx + \operatorname{Sh} nx = e^{nx}$$

$$\operatorname{Ch} nx - \operatorname{Sh} nx = e^{-nx}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dir. Aynı (2.5) ve (2.6) bağıntılarından dolayı

$$\operatorname{Ch} nx + \operatorname{Sh} nx = (\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x)^n$$

$$\operatorname{Ch} nx - \operatorname{Sh} nx = (\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x)^n$$

yazılabilir ve bu son iki bağıntının toplamı veya farkını teşkil ederek

$$\operatorname{Ch} nx = \frac{1}{2}\left((\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x)^n + (\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x)^n\right)$$

$$\operatorname{Sh} nx = \frac{1}{2}\left((\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x)^n - (\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x)^n\right)$$

elde edilir.

o.2. $\operatorname{Th} x + 2\operatorname{Th} 2x + \ldots + 2^{n-1}\operatorname{Th} 2^{n-1}x$

toplamını hesaplamak.

(2.15) bağıntısında $b = a$ yazılacak olursa

$$\operatorname{Th} 2a = \frac{2\operatorname{Th} a}{1 + \operatorname{Th}^2 a}$$

elde edilir ve bu bağıntıdan

$$\frac{1 + \operatorname{Th}^2 a}{\operatorname{Th} a} = \frac{2}{\operatorname{Th} 2a}$$

$$\operatorname{Th} a = \frac{2}{\operatorname{Th} 2a} - \frac{1}{\operatorname{Th} a}$$

bulunur. Bu formül, toplamın her terimi için yazılacak olursa

$$\operatorname{Th} x = \frac{2}{\operatorname{Th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{Th} x}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$2\ \mathrm{Th}\ 2x = \frac{4}{\mathrm{Th}\ 4x} - \frac{2}{\mathrm{Th}\ 2x}$$

$$4\ \mathrm{Th}\ 4x = \frac{8}{\mathrm{Th}\ 8x} - \frac{4}{\mathrm{Th}\ 4x}$$

.....

$$2^{n-1}\ \mathrm{Th}\ 2^{n-1}x = \frac{2^n}{\mathrm{Th}\ 2^n x} - \frac{2^{n-1}}{\mathrm{Th}\ 2^{n-1}x}$$

elde edilir. Taraf tarafa toplanacak olursa

$$\mathrm{Th}\ x + 2\ \mathrm{Th}\ 2x + 4\ \mathrm{Th}\ 4x + \ldots + 2^{n-1}\ \mathrm{Th}\ 2^{n-1}x = \frac{2^n}{\mathrm{Th}\ 2^n x} - \frac{1}{\mathrm{Th}\ x}$$

bağıntısı elde edilir.

3.3. $A = \mathrm{Sh}^2 x \cos^2 y + \mathrm{Ch}^2 x \sin^2 y$

ifadesini hesaplamak.

$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Sh}^2 x \cos^2 y + \mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Ch}^2 x \cos^2 y \\ &= \mathrm{Ch}^2 x - \cos^2 y\ (\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x) \\ &= \mathrm{Ch}^2 x - \cos^2 y \end{aligned}$$

elde edilir.

4. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız :

1. $\mathrm{Sh}^2 x \sin^2 y + \mathrm{Ch}^2 x \cos^2 y$

Yanıt : $\mathrm{Sh}^2 x + \sin^2 y$

2. $\mathrm{Ch}^2 x \cos^2 x + \mathrm{Sh}^2 x \sin^2 x$

Yanıt : $\frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\ 2x + \cos 2x)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3. $\mathrm{Ch}^2 x \sin^2 x + \mathrm{Sh}^2 x \cos^2 x$

Yanıt : $\frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\ 2x - \cos 2x)$

4. $\mathrm{Ch}^2 x \cos^2 x - \mathrm{Sh}^2 x \sin^2 x$

Yanıt : $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{Ch}\ 2x \cos 2x)$

5. $\mathrm{Ch}^2 x \sin^2 x - \mathrm{Sh}^2 x \cos^2 x$

Yanıt : $\frac{1}{2}(1 - \mathrm{Ch}\ 2x \cos 2x)$

Aşağıdaki alıştırmaları çözünüz:

1. $\mathrm{Sh}\ 2z = \frac{4\sqrt{t(1+t)}}{(1-t)^2}$ olduğuna göre, Ch $2z$ yi hesaplayınız.

Yanıt : $\mathrm{Ch}\ 2z = \frac{1 + 6t + t^2}{(1-t)^2}$

2. $x = \frac{1}{2}\ \mathrm{Log}\ 3$ olduğuna göre $A = 2\ \mathrm{Ch}\ x - \mathrm{Sh}\ x$ ifadesinin değeri nedir?

Yanıt : $A = \sqrt{3}$ tür.

5. *Denklem çözümleri*

Hiperbolik fonksiyonlardan oluşan ve bu fonksiyonların argümanında bilinmiyeni ihtiva eden denklemlerin çözülmesi genellikle, hiperbolik fonksiyonları üstel fonksiyonlar cinsinden yazmak suretiyle yapılır. Deklemin, veya denklem sisteminin, bir üstel fonksiyona göre çözülebilmesi halinde, çözümlerden *pozitif olanların* logaritması alınarak, bilinmiyen elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Örneğin,

(5.1) $$a\,\mathrm{Ch}\,x + b\,\mathrm{Sh}\,x = c$$

denkleminin çözülmesi için Ch $x$ ve Sh $x$ 'in $e^x$ cinsinden ifadeleri olan

(5.2) $$\mathrm{Ch}\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{(e^x)^2+1}{2e^x};$$

$$\mathrm{Sh}\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{(e^x)^2-1}{2e^x};$$

kullanılarak, yerlerine konur. Böylece verilen denklem

$$a\,((e^x)^2 + 1) + b\,((e^x)^2 - 1) = 2c\,e^x$$

veya

$$(a + b)\,(e^x)^2 - 2c\,e^x + (a-b) = a$$

şekline girer. $t = e^x$ dönüşümü yaparak

$$(a + b)\,t^2 - 2c\,t + (a - b) = 0$$

cebirsel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümleri

$$\frac{c \mp \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a + b}$$

dır: $c^2 + b^2 \geqq a^2$ olması halinde bu çözümler reeldir. Bu çözümlerde yer alan $a$, $b$ ve $c$ nin seçilişi, çözümlerin pozitif olmasını sağlarsa

$$e^x = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a + b}$$

yazılabilir ve dolayısıyla

$$x = \mathrm{Log}\,\left(\frac{c \mp \sqrt{c^2 - (a^2 - b^2)}}{a + b}\right)$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5.1. *Örnek*: $\alpha > 2$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \text{Ch } x + \text{Ch } y &= a \text{ Ch } \alpha \\ \text{Sh } x + \text{Sh } y &= a \text{ Sh } \alpha \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

sisteminin çözülmesi.

Birinci denklemden Ch $y$ ve ikincisinden Sh $y$ çözülecek olursa

$$\begin{aligned} \text{Sh } y &= a \text{ Sh } \alpha - \text{Sh } x \\ \text{Ch } y &= a \text{ Ch } \alpha - \text{Ch } x \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Ch}^2 y - \text{Sh}^2 y = 1$$

bağıntısında bu ifadeleri yerlerine koyarak

$$\begin{aligned} &a^2 \text{Ch}^2 \alpha - 2a \text{ Ch } \alpha \text{ Ch } x + \text{Ch}^2 x \\ &-a^2 \text{ Sh}^2 \alpha + 2a \text{ Sh } \alpha \text{ Sh } x - \text{Sh}^2 x = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde

$$a^2 + 2a \text{ Sh } \alpha \text{ Sh } x - 2a \text{ Ch } \alpha \text{ Ch } x = 0$$

dır. Bu denklem yukarıda incelenen (5.1) denklemi tipindendir: ancak yukarıdaki denklemde gözüken $a$ katsayısının yerine $-2a$ Ch $\alpha$, $b$ katsayısının yerine $2a$ Sh $\alpha$ ve $c$ katsayısının yerine $-a^2$ gelmektedir. Şu halde denklemde (5.2) dönüşümü uygulanacak olursa

$$2a \text{ (Sh } \alpha - \text{Ch } \alpha) \text{ } (e^x)^2 + 2a^2 e^x - 2a \text{ (Sh } \alpha + \text{Ch } \alpha) = 0$$

elde edilir. Buna göre, $t = e^x$ dönüşümü yaparak ve (2.5), (2.6) yı kullanarak

$$-2a \, e^{-\alpha} \, t^2 + 2a^2 \, t - 2a \, e^{\alpha} = 0$$

yani

$$e^{-\alpha} \, t^2 - a \, t + e^{\alpha} = 0$$

elde edilir. Buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


(5.1.2) $$t = e^{a} \frac{a \mp \sqrt{a^2-4}}{2}$$

bulunur. $a > 2$ kabul edildiğinden, $a^2 - 4 > 0$, yani karekök reeldir. Üstelik $a^2 > a^2 - 4$ olmasından $a > \sqrt{a^2 - 4}$ tür ve dolayısıyla $a - \sqrt{a^2-4}$ pozitiftir. $a + \sqrt{a^2 - 4}$ ise daima pozitif olduğundan (5.1.2) de gösterilen iki kök pozitif büyüklüklerdir, yani

$$e^{x} = e^{a} \frac{a \mp \sqrt{a^2-4}}{2}$$

dir. Burdan

$$x = a + \text{Log} \frac{a \mp \sqrt{a^2-4}}{2}$$

elde edilir.

## 6 — HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Üstel fonksiyonun türevini veren formülü uygulamak suretiyle

(6.1.) $$(\text{Ch})'(x) = \text{Sh}\ x$$

(6.2) $$(\text{Sh})'(x) = \text{Ch}\ x$$

elde edilir ve bu iki türevi kullanarak veya yine üstel fonksiyonun türevini kullanarak

(6.3) $$(\text{Th})'(x) = \frac{1}{\text{Ch}^2 x} = 1 - \text{Th}^2 x = \text{Sech}^2 x$$

(6.4) $$(\text{Coth})'(x) = -\frac{1}{\text{Sh}^2 x} = 1 - \text{Coth}^2 x = -\text{Cosech}^2 x$$

(6.5) $$(\text{Sech})'(x) = -\text{Sech}\ x\ \text{Th}\ x$$

(6.6) $$(\text{Cosech})'(x) = -\text{Cosech}\ x\ \text{Coth}\ x$$

bağıntıları kanıtlanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6.1. *Uygulamalar:*

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz:

1. $f(x) = \text{Sh}^2 x$ Yanıt : $\text{Sh}\, 2x$

2. $f(x) = \text{Th}^2 x$ Yanıt : $\dfrac{2\,\text{Sh}\, x}{\text{Ch}^3 x}$

3. $f(x) = \text{Sh}\, x + \dfrac{1}{3}\,\text{Sh}^3 x$ Yanıt : $\text{Ch}^3 x$

4. $f(x) = \text{Th}\, x - \dfrac{1}{3}\,\text{Th}^3 x$ Yanıt : $\dfrac{1}{\text{Ch}^4 x}$

5. $f(x) = \text{Ch}\, x \cos x + \text{Sh}\, x \sin x$ Yanıt : $2\,\text{Sh}\, x \cos x$

6. $f(x) = \text{Ch}\, x \sin x + \text{Sh}\, x \cos x$ Yanıt : $2\,\text{Ch}\, x \cos x$

7. $f(x) = \dfrac{\text{Ch}\, x - \cos x}{\text{Sh}\, x + \sin x}$ Yanıt : $\dfrac{2 \sin x\, \text{Sh}\, x}{(\text{Sh}\, x + \sin x)^2}$

Aşağıdaki fonksiyonların ikinci türev fonksiyonlarını bulunuz:

1. $f(x) = \sin x\, \text{Sh}\, x$ Yanıt : $f''(x) = 2 \cos x\, \text{Ch}\, x$
2. $f(x) = \cos x\, \text{Ch}\, x$ Yanıt : $f''(x) = -2 \sin x\, \text{Sh}\, x$
3. $f(x) = \sin x\, \text{Ch}\, x$ Yanıt : $f''(x) = 2 \cos x\, \text{Sh}\, x$
4. $f(x) = \cos x\, \text{Sh}\, x$ Yanıt : $f''(x) = -2 \sin x\, \text{Ch}\, x$

## 7 — HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

7.1. $f(x) = \text{Ch}\, x$ fonksiyonu.

Her $x \in \text{IR}$ için $(\text{Ch})'(x) = \text{Sh}\, x$ vardır. Şu halde $f$ fonksiyonu bütün IR reel doğru üzerinde süreklidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\lim_{x \to +\infty} \text{Ch } x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} + \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \text{Ch } x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2} + \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\text{Ch } (0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$$

dir. Üstelik

$$(\text{Ch})' (x) = \text{Sh } x$$

olduğuna göre, fonksiyonun artıp eksilmesi Sh $x$'in işaretine bağlıdır.

$$\text{Sh } x > 0 \Longleftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \Longrightarrow e^x > e^{-x}$$

tir ve doğal logaritma fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğuna göre

$$\text{Sh } x > 0 \Longrightarrow \text{Log } e^x > \text{Log } e^{-x} \Longleftrightarrow x > -x$$

yani

$$\text{Sh } x > 0 \Longrightarrow x > 0$$

dır. Şu halde pozitif $x$ değerleri için Ch $x$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Benzer şekilde

$$\text{Sh } x < 0 \Longleftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} < 0 \Longrightarrow e^x < e^{-x}$$

$$\Longrightarrow \text{Log } e^x < \text{Log } e^{-x} \Longrightarrow x < -x \Longrightarrow x < 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edileceğinden, negatif $x$ değerleri için Ch $x$ fonksiyonu eksilen bir fonksiyondur. Bu durumda fonksiyonun ekstremum noktası $x = 0$ bir minimum noktasıdır.

$$(\mathrm{Ch})'' (x) = \mathrm{Ch}\ x$$

olduğuna göre

$$(\mathrm{Ch})'' (x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 1$$

dır, yani her reel $x$ değeri için fonksiyonun ikinci türevi 1'den büyük, yani pozitiftir. Şu halde $f$ fonksiyonu bütün IR reel doğrusu üzerinde konveks olan bir fonksiyondur.

(2,2)' bağıntısından dolayı hiperbolik kosinüs fonksiyonu çift olan bir fonksiyondur.

Bir $f$ fonksiyonu verildiğinde, $x$ değişkeninin sonsuza yaklaşması halinde fonksiyon sonsuza giderse ve ayrıca, bir $g$ fonksiyonu ile farkı limitte sıfıra yaklaşırsa, asemptotik eğri tanımı gereğince, $g$ fonksiyonunun grafiği, $f$ fonksiyonunun grafiği için bir *asemptotik eğri* durumundadır.

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{Ch}\ x = +\infty$$

olduğu yukarda gösterilmiştir. Hiperbolik kosinüs fonksiyonunun asemptot eğrilerini elde etmek için

$$\lim_{x \to +\infty} (\mathrm{Ch}\ x - g(x)) = 0$$

koşulunu sağlayan $g$ fonksiyonlarının varlığını araştırmak gerekir. Halbuki

$$\lim_{x \to +\infty} (\mathrm{Ch}\ x - g(x)) = \lim_{x \to +\infty} \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} - g(x) \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} + \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2} - \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

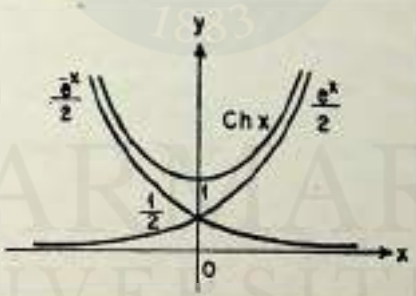
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


dır ve ikinci limit sıfıra gittiğinden $g(x) = \frac{e^x}{2}$ alınması halinde istenen koşul yerine getirilmiş olur. Şu halde Ch $x$ fonksiyonu $x$ büyüdükçe $\frac{e^x}{2}$ fonksiyonuna yaklaşır. Benzer şekilde

$$\lim_{x \to -\infty} (\mathrm{Ch}\, x - g(x)) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - g(x)\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2} + \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{2} - \lim_{x \to -\infty} g(x)$$

yazılabilir ve bu defa ilk limit sıfır eşit olduğundan, istenen koşulu sağlamak için $g(x) = e^{-x}/2$ almak yeter. Buna göre Ch $x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilen şekildedir:




Şekil 73

7.2. $f(x) = \mathrm{Sh}\, x$ fonksiyonu.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $(\mathrm{Sh})'(x) = \mathrm{Ch}\, x$ dir; şu halde $f$ fonksiyonu bütün $\mathbb{R}$ reel doğru üzerinde süreklidir.

$$\mathrm{Sh}\ (0) = 0$$

olduğuna göre, $f$ fonksiyonu yatay eksenini tek $x = 0$ noktasında keser. (2.1) bağıntısından dolayı $f$ fonksiyonu tektir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Sh} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} - \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Sh} x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{2} = -\infty$$

dır. Üstelik

$$(\operatorname{Sh})'(x) = \operatorname{Ch} x$$

ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\operatorname{Ch} x \geq 1 > 0$ olduğundan verilen fonksiyon bütün reel doğru üzerinde artan bir fonksiyondur. Bu nedenle fonksiyonun ekstremumları yoktur.

$$(\operatorname{Sh})''(x) = \operatorname{Sh} x$$

olduğuna göre, fonksiyonun $x = 0$ noktasında bir dönüm noktası vardır.

Verilen fonksiyon artan ve $x = 0$ için sıfıra eşit olduğuna göre, $x < 0$ için negatif, $x > 0$ için pozitif değerler alır. Dolayısıyla kendisine eşit olan ikinci türevi de $x > 0$ için pozitif, $x < 0$ için negatif olur; yani $x < 0$ için fonksiyon konkav, $x > 0$ için fonksiyon konvekstir.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{Sh} x = \pm\infty$$

olduğuna göre, fonksiyonun asemptotik eğrileri 7.1. de uygulanan yöntemle hesaplanabilir.

$$\lim_{x\to+\infty} (\operatorname{Sh} x - g(x)) = 0$$

koşulu

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - g(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} -$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{2} - \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

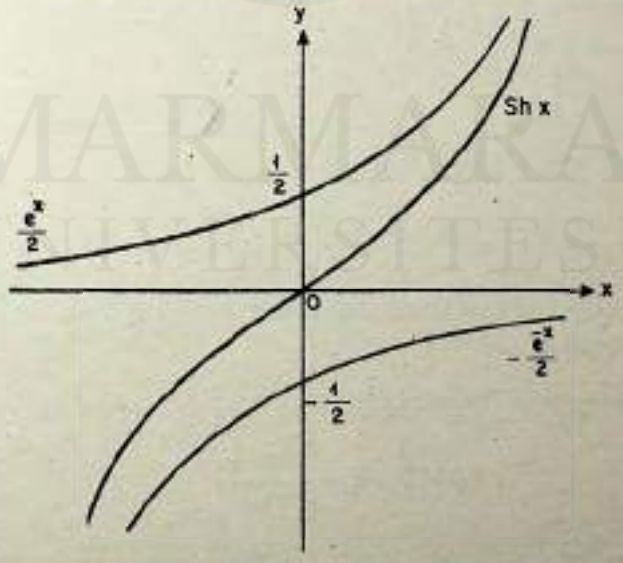
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


şekline görer: Bu son ifadede birinci limit, $+\infty$ a, ikincisi ise sıfıra yaklaşır. Şu halde $g(x) = \frac{e^x}{2}$ seçilmesi halinde istenen koşul sağlanmış olur, yani $x$'in sonsuza yaklaşması halinde $g(x) = \frac{e^x}{2}$ fonksiyonu Sh $x$ fonksiyonu için bir asemptotik eğridir. Benzer şekilde, $x$'in eksi sonsuza yaklaşması halinde

$$\lim_{x \to -\infty} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} - g(x) \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{2} -$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{2} - \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

yazılır ve ilk limit sıfıra yaklaştığından, istenen koşulun sağlanması için $g(x) = -\frac{e^{-x}}{2}$ şeklinde seçilmesi gerekir. Buna göre Sh $x$ fonksiyonunun grafiği Şekil 74'de gösterilen şekildedir:




Şekil 74

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7.3. $f(x) = \text{Th } x$ fonksiyonu.

$$f(x) = \text{Th } x = \frac{\text{Sh } x}{\text{Ch } x}$$

ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\text{Ch } x \neq 0$ olduğuna göre, Th $x$ fonksiyonu bütün reel doğru üzerinde tanımlı ve süreklidir. $x = 0$ için Sh (0) $= 0$ olduğundan Th (0) $= 0$ dır ve fonksiyon bu tek noktada yatay eksenini keser.

$$\lim_{x \to +\infty} \text{Th } x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x (1 - e^{-2x})}{e^x (1 + e^{-2x})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \text{Th } x = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} (e^{2x} - 1)}{e^{-x} (e^{2x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

dır: bu nedenle $y = 1$ ve $y = -1$ doğruları fonksiyonun yatay asemptotları durumundadır.

$$(\text{Th})'(x) = \frac{1}{\text{Ch}^2 x} > 0$$

olduğuna göre, fonksiyon bütün reel doğru üzerinde artan bir fonksiyondur.

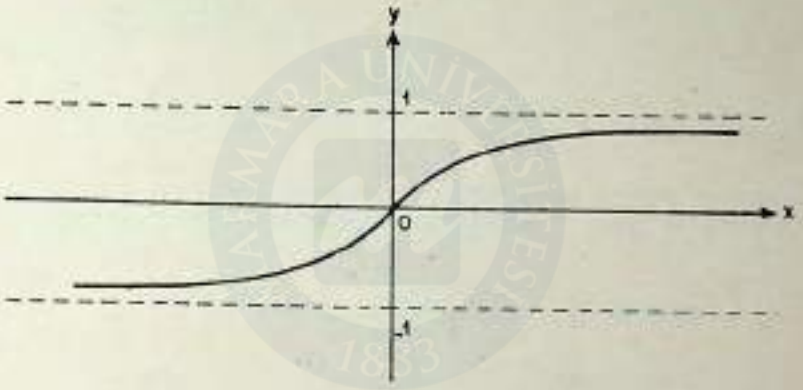
Bu nedenle ekstremum noktası yoktur.

$$(\text{Th})''(x) = -\frac{2 \text{Sh } x}{\text{Ch}^3 x}$$

dır ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\text{Ch } x \geq 1$ olduğundan yukardaki ifadenin paydası daima pozitiftir. Şu halde $(\text{Th})''(x)$ 'in işareti Sh $x$ 'in

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


işaretine bağlıdır: yukarda ispat edilenlerden dolayı $x < 0$ için $\mathrm{Sh}\, x < 0$ ve $(\mathrm{Th})''(x) > 0$ dır, yani $\mathrm{Th}\, x$ fonksiyonu konvekstir; $x > 0$ için $\mathrm{Sh}\, x > 0$ ve $(\mathrm{Th})''(x) < 0$ dır yani $\mathrm{Th}\, x$ fonksiyonu konkavdır. Bu bilgilere göre, $\mathrm{Th}\, x$ fonksiyonunun grafiği Şekil 75 'te gösterilen şekildedir:




Şekil 75

7.4. $f(x) = \mathrm{Coth}\, x$ fonksiyonu

$$f(x) = \mathrm{Coth}\, x = \frac{\mathrm{Ch}\, x}{\mathrm{Sh}\, x}$$

olduğuna göre, verilen fonksiyon $x = 0$ noktasında tanımlı değil dolayısıyla da süreksizdir. Üstelik, her $x \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{Ch}\, x \geq 1$ olmasından dolayı, $f$ fonksiyonu hiçbir reel x değeri için sıfır olamaz, dolayısıyla yatay eksenini hiçbir noktada kesmez.

$$\lim_{x \to 0^+} \mathrm{Coth}\, x = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \mathrm{Coth}\, x = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u < 0}} \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}} = -\infty$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Coth} x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\,(1 + e^{-2x})}{e^x\,(1 - e^{-2x})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{Coth} x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}\,(e^{2x} + 1)}{e^x\,(e^{2x} - 1)}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = -1$$

dir: şu halde $x = 0$ doğrusu fonksiyon için bir dik asemptottur, $y = 1$ ve $y = -1$ doğruları ise fonksiyonun yatay asemptotlarıdır.

Fonksiyonun tanımından hareket edilecek olursa

$$\operatorname{Coth}(-x) = \frac{\operatorname{Ch}(-x)}{\operatorname{Sh}(-x)} = \frac{\operatorname{Ch} x}{-\operatorname{Sh} x} = -\operatorname{Coth}(x)$$

elde edilir, yani fonksiyon tektir. Her $x \in IR$ için

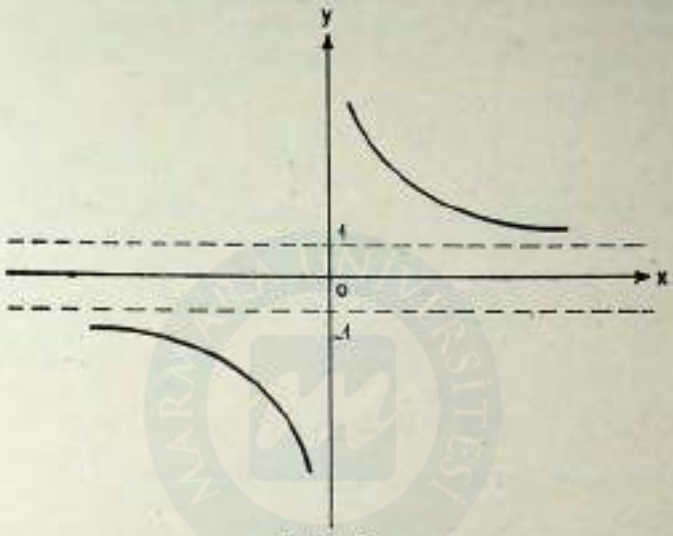
$$(\operatorname{Coth})'(x) = -\frac{1}{\operatorname{Sh}^2 x} < 0$$

olduğundan, fonksiyon bütün reel doğru üzerinde eksilendir ve dolayısıyla hiç bir ekstremum noktası yoktur.

$$(\operatorname{Coth})''(x) = \frac{2 \operatorname{Ch} x}{\operatorname{Sh}^3 x}$$

olduğuna göre, ikinci türevin işareti Sh $x$'in işareti ile aynıdır, çünkü Ch fonksiyonu bütün reel doğru üzerinde pozitiftir. $x < 0$ için Sh $x < 0$ olduğuna göre $(\operatorname{Coth})''(x) < 0$ olur ve fonksiyon konkavdır; $x > 0$ için Sh $x > 0$ olduğuna göre $(\operatorname{Coth})''(x) > 0$ olur ve fonksiyon konvekstir. Üstelik Ch fonksiyonu hiçbir $x$ için sıfır olamayacağına göre, fonksiyonunun dönüm noktaları yoktur. Bu bilgilere göre, Coth $x$ fonksiyonunun grafiği Şekil 76'da gösterilen şekildedir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Şekil 76.

7.5. $f(x) = \text{Sech } x$ fonksiyonu,

$$f(x) = \text{Sech } x = \frac{1}{\text{Ch } x}$$

ve her $x \in \text{IR}$ için $\text{Ch } x \geq 1 > 0$ olduğuna göre, fonksiyon bütün IR reel doğrusu üzerinde tanımlı ve süreklidir. Ayrıca, fonksiyonun hiç bir reel $x$ değeri için sıfıra eşit olamayacağı meydandadır, yani fonksiyonun grafiği yatay eksenı hiç bir noktada kesmez.

$$\text{Sech } (-x) = \frac{1}{\text{Ch } (-x)} = \frac{1}{\text{Ch } x} = \text{Sech } x$$

olmasından ötürü, fonksiyon dik eksenini 1 noktasında keser.

$$\text{Sech } (0) = \frac{1}{\text{Ch } (0)} = 1$$

olduğundan, fonksiyon dik eksenini 1 noktasında keser.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \text{Sech } x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}} = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olduğundan, fonksiyon yatay ekseni asemptot olarak kabul etmektedir ve her $x$ için $\mathrm{Ch}\, x \geqslant 1 > 0$ olduğundan, fonksiyon her $x$ için pozitif kalır, yani grafiği üst yarım düzlemdedir.

$$(\mathrm{Sech})'(x) = -\frac{\mathrm{Sh}\, x}{\mathrm{Ch}^2 x}$$

olduğundan, fonksiyon $x < 0$ için artan, $x > 0$ için eksilendir ve $x = 0$ kritik noktasında fonksiyonunun bir maksimumu vardır.

$$(\mathrm{Sech})''(x) = \frac{-\mathrm{Ch}^3 x + 2\,\mathrm{Sh}^2 x\,\mathrm{Ch}\, x}{\mathrm{Ch}^4 x} = \frac{\mathrm{Ch}\, x\,(2\,\mathrm{Sh}^2 x - \mathrm{Ch}^2 x)}{\mathrm{Ch}^4 x}$$

$$= \frac{-1 + \mathrm{Sh}^2 x}{\mathrm{Ch}^3 x}$$

olduğuna göre, fonksiyonun dönüm noktaları

$$\mathrm{Sh}^2 x - 1 = 0$$

koşulunu sağlayan $x$ noktalarındadır. Bu denklemi $x$ değişkenine göre çözmek için verilen denklemi

$$(\mathrm{Sh}\, x - 1)\,(\mathrm{Sh}\, x + 1) = 0$$

şeklinde yazmak yerinde olur. İlk çarpan

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} - 1 = 0$$

yani

$$(e^x)^2 - 2e^x - 1 = 0$$

şekline girer ve $t = e^x$ yazılarak

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklem $1 \pm \sqrt{2}$ sayılarını kök olarak kabul eder. $-$ işaretli köklü ifade probleme bir çözüm

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


olamaz çünkü negatif bir sayıdır ve $t = e^x$ daima pozitiftir. Şu halde bu çarpanın verdiği tek çözüm

$$t = e^x = 1 + \sqrt{2}$$

dir, yani

$$x_1 = \text{Log } (1 + \sqrt{2})$$

dir. İkinci çarpan

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} + 1 = 0 \tag{1}$$

şeklindedir ve buradan

$$(e^x)^2 + 2e^x - 1 = 0$$

yani, $t = e^x$ dönüşümü ile,

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

bulunur. Bu ikinci kuadratik denklemin kökleri $-1 \pm \sqrt{2}$ sayılarıdır: bunlardan sadece $-1 + \sqrt{2}$ sayısı pozitif olduğundan probleme çözüm olarak kabul edilebilir ve

$$t = e^x = -1 + \sqrt{2}$$

yani

$$x_2 = \text{Log } (-1 + \sqrt{2})$$

dir. $x_1$ ve $x_2$ noktaları başlangıç noktasına göre simetrik durumdalar: gerçekten orta noktaları

$$m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\text{Log } (1 + \sqrt{2}) + \text{Log } (-1 + \sqrt{2})}{2}$$

$$= \frac{\text{Log } ((\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1))}{2} = \frac{\text{Log } (2 - 1)}{2} = \frac{\text{Log } 1}{2} = 0$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Üstelik

$$\mathrm{Sh}^2 x - 1 = (\mathrm{Sh}\, x + 1)\ (\mathrm{Sh}\, x - 1)$$

olduğundan, $(\mathrm{Sech})''(x) < 0$ olması için

$$-1 < \mathrm{Sh}\ x < 1$$

olması gerekir ve (a), (b)' denklemleri ele alındığında bu koşul

$$\mathrm{Sh}\, x_2 < \mathrm{Sh}\, x < \mathrm{Sh}\, x_1$$

şeklini alır. $\mathrm{Sh}\, x$ fonksiyonu artan bir fonksiyon olduğuna göre, $(\mathrm{Sech})''(x) < 0$ olması için

$$x_2 < x < x_1$$

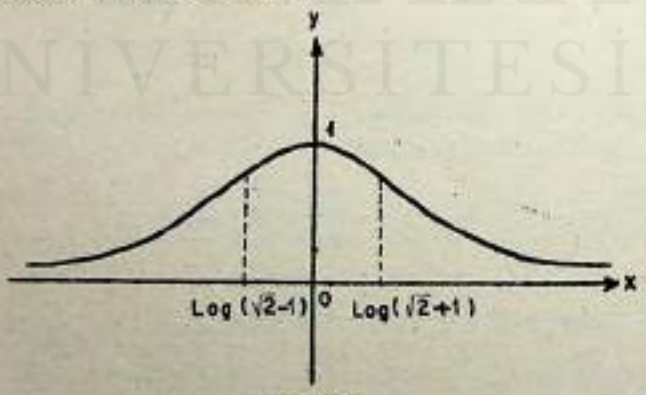
olmalı, yani $x$ değişkeni

(c) $$\mathrm{Log}\ (-1 + \sqrt{2}) < x < \mathrm{Log}\ (1 + \sqrt{2})$$

koşulunu sağlamalıdır.

$$x < \mathrm{Log}\ (-1 + \sqrt{2}), \quad \mathrm{Log}\ (+1 + \sqrt{2}) < x$$

için $(\mathrm{Sech})''(x) > 0$ olduğundan, fonksiyon konveks olur: (c) koşulunu sağlayan $x$ değerleri için fonksiyon konkavdır ve $x_1, x_2$ noktaları fonksiyonun dönüm noktalarıdır. Sech $x$ fonksiyonunun grafiği Şekil 77'de verilmiştir.




Şekil 77.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


7.6. $f(x) = \text{Cosech } x$ fonksiyonu.

$$f(x) = \text{Cosech } x = \frac{1}{\text{Sh } x}$$

ve $x = 0$ için Sh fonksiyonu sıfıra eşit olduğundan, fonksiyon $x = 0$ için tanımlı değildir; bu noktanın dışında fonksiyon sürekliidir.

$$\lim_{x \to 0^+} \text{Cosech } x = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} \frac{2}{e^u - e^{-u}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \text{Cosech } x = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ u < 0}} \frac{2}{e^u - e^{-u}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \text{Cosech } x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \text{Cosech } x = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^x - e^{-x}} = 0$$

olduğundan dik ve yatay eksenler verilen fonksiyonun asemptotlarıdır. Üstelik

$$\text{Cosech } (-x) = \frac{1}{\text{Sh } (-x)} = \frac{1}{-\text{Sh } x} = -\text{Cosech } x$$

olduğundan, fonksiyon tektir.

$$(\text{Cosech})'(x) = -\frac{\text{Ch } x}{\text{Sh}^2 x}$$

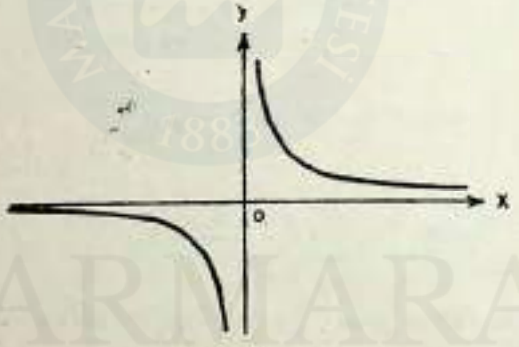
olduğundan, her $x \in \mathbb{R}$ için, bu fonksiyon eksilen bir fonksiyondur; bu nedenle ekstremum noktaları yoktur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(\text{Cosech})''(x) = \frac{-(\text{Sh}^3 x - 2\,\text{Sh}\,x\,\text{Ch}^2 x)}{\text{Sh}^4 x} =$$

$$= \frac{\text{Sh}\,x\,(2\,\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x)}{\text{Sh}^4 x} = \frac{1 + \text{Ch}^2 x}{\text{Sh}^2 x}$$

olduğundan, fonksiyonun ikinci türevinin işareti, Sh fonksiyonunun işaretine bağlıdır. Ayrıca, $\text{Ch}^2 x \geqslant 1$ olduğundan, ikinci türevi sıfır yapan $x$ değerleri yoktur ve dolayısıyla fonksiyonun dönüm noktaları bulunmaz. $x < 0$ için $\text{Sh}\,x$ olduğundan $(\text{Cosech})''(x) < 0$, yani fonksiyon konkav, $x > 0$ için $\text{Sh}\,x > 0$ olduğundan $(\text{Cosech})''(x) > 0$, yani fonksiyon konvekstir. Buna göre, Cosech $x$ fonksiyonunun grafiği aşağıda Şekil 78 de verilmiştir.




Şekil 78

## 8 — HİPERBOLİK FONKSİYONLU KISIMLARI BULUNAN FONKSİYONLARIN GRAFİK ÇİZİMLERİ

Genel yöntemler bu tür fonksiyonlara aynen uygulanır.

8.1. *Örnekler*

8.1.1. $f(x) = \text{Ch}\,x + \text{Cos}\,x$

fonksiyonunun grafiği.

Fonksiyonun peryodik olmadığı görülür; ayrıca

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

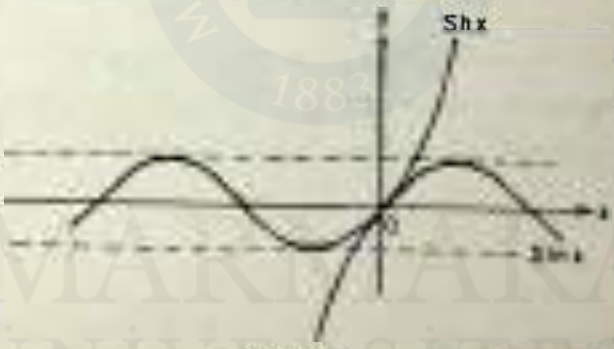


$$f(-x) = \text{Ch}\ (-x) + \cos\ (-x) = \text{Ch}\ x + \cos x = f(x)$$

olduğundan, fonksiyon çifttir. Bu nedenle inceleme $[0, +\infty[$ aralığına daraltılabilir.

$$f'(x) = \text{Sh}\ x - \sin x$$

dir. $f'(x) = 0$ için $\text{Sh}\ x = \sin x$ olması gerekir: aynı grafik üzerinde iki fonksiyonun eğrileri çizilecek olursa, $x = 0$ noktasının dışında buna olanak olmadığı görülür, çünkü iki eğrinin başlangıçtaki teğet doğruları $y = x$ açı ortay doğrusudur. $\text{Sh}\ x$, $x > 0$ için konveks olduğundan daima bu doğrunun üstünde kalır, $\sin x$ fonksiyonu ise daima bu eğrinin altındadır. Şu halde fonksiyonun tek kritik noktası $x_1 = 0$ noktasıdır.




Şekil 79.

Fonksiyonun $x > 0$ için artan olacağı aynı özelliğin bir sonucudur, çünkü her $x > 0$ için bu özellikten dolayı $\text{Sh}\ x > \sin x$ olur, yani $f' > 0$ kalır

$$f''(x) = \text{Ch}\ x - \cos x$$

dir. $\text{Ch}\ x$, her $x$ için 1'den büyük veya 1'e eşit ve $\cos x$ fonksiyonu daima 1'den küçük veya 1'e eşit olmasından, ikinci türev daima pozitif veya sıfırdır. Dolayısıyla fonksiyon $x > 0$ için konveks olan bir fonksiyondur.

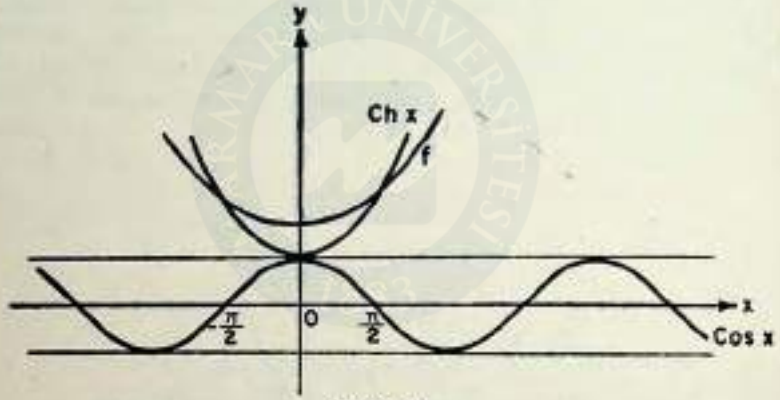
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(0) = 2$$

ve

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\mathrm{Ch}\, x + \cos x) = +\infty$$

olduğuna göre, aranan fonksiyonun grafiği Şekil 80'de verilmiştir:




Şekil 80.

8.1.2. $f(x) = \mathrm{Ch}\, x \cos x$

fonksiyonunun grafiği

$$f(-x) = \mathrm{Ch}\,(-x) \cos(-x) = \mathrm{Ch}\, x \cos x = f(x)$$

olduğundan, fonksiyon çifttir, fakat peryodik değildir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\mathrm{Ch}\, x \neq 0$ olduğundan, fonksiyonun sıfır noktaları, $\cos x$ fonksiyonunun sıfır noktalarıdır. $x \geq 0$ yarım doğrusu üzerinde inceleme yapmakla, fonksiyonun çift olmasından bütün grafiğini elde etmek olanağı sağlanmış olur, dolayısıyla sadece $x \geq 0$ için sıfır noktaları üzerinde durulabilir: bunlar, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ noktalarıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

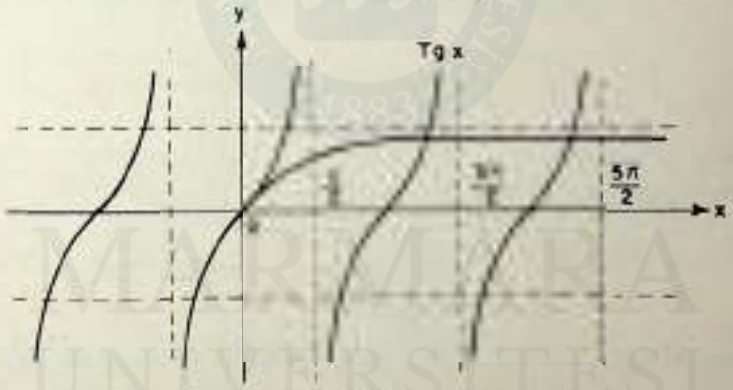

$$f'(x) = \text{Sh}\, x \cos x - \text{Ch}\, x \sin x$$

olduğuna göre, türevin sıfır noktaları

$$\text{Th}\, x = \text{tg}\, x$$

bağıntısını sağlayan noktalardır. Th $x$ ve tg $x$'in grafiklerini bir arada çizmek suretiyle $(2k-1)\,\frac{\pi}{2}$ ve $(2k+1)\,\frac{\pi}{2}$ ile sınırlanan her aralıkta tek bir arakesit noktası bulunduğundan, her

$\left[(2k-1)\,\frac{\pi}{2};\ (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\right]$ aralığında fonksiyonun tek bir ekstremum noktası vardır. Üstelik $f'$ fonksiyonunun sıfırlarında fonksiyonun işaretinin değiştiği, dolayısıyla bu sıfırlarda fonksiyonun ekstremumlarının bulunduğu görülür.




Şekil 81

$$f''(x) = \text{Ch}\, x \cos x - \text{Sh}\, x \sin x - \text{Sh}\, x \sin x - \text{Ch}\, x \cos x$$

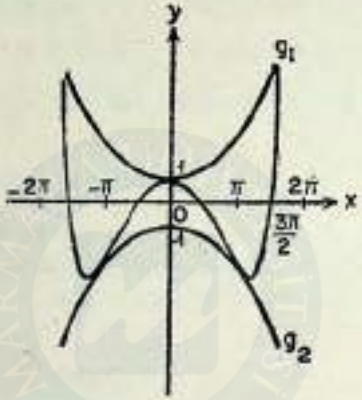
$$= -2\,\text{Sh}\, x \sin x$$

olduğundan, $x > 0$ için $f''$ nin işareti sin $x$'in işaretinin fonksiyonudur ve sin $x$'in pozitif olduğu aralıklarda fonksiyon konkav, sin $x$'in negatif olduğu aralıklarda fonksiyon konvekstir.

Fonksiyonun grafiğini çizmek için $g_1(x) = \text{Ch}\, x$ ve $g_2(x) = -\text{Ch}\, x$ fonksiyonlarını çizmekte yarar vardır, çünkü $\cos x = \pm 1$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olduğu noktalarda, verilen fonksiyonun grafiğinin bu eğriler üzerinde bulunan noktaları vardır. $f$ fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilen şekildedir:




Şekil 82.

8.2. *Uygulamalar*

1) $f(x) = \text{Th}\,\dfrac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(Uyarı: $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve elde edilen sonuçlardan faydalanınız; fonksiyonun süreksizlik noktasındaki sağ sol limitlerini alarak teğetlerini belirtiniz.)

2) $f(x) = a\ \text{Ch}\,x + b\,\text{Sh}\,x \quad (a > 0)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(Uyarı: $-a < b < a$ koşulunun sağlanması halinde, $f'$ nün bir kökü vardır ve bu köke $(a - b^2)^{1/2}$ ye eşit bir minimum tekabül eder. $b < -a$ veya $b > a$ ise türevin işareti $b$ nin işaretine eşittir. İlk halde $\text{Ch}\,x$ 'e benzeyen, ikinci halde $\text{Sh}\,x$ 'e benzeyen bir eğri elde edilir.)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


3) $f(x) = \text{Ch } 3x - 3 \text{ Ch } x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

4) $f(x) = \dfrac{1}{\text{Ch } x + \text{Ch } a}$ ($a$ sabit) fonksiyonunun dönüm noktalarını bulunuz.

Yanıt : $\text{Ch } x_1 = \dfrac{\text{Ch } a + \sqrt{8 + \text{Ch}^2 a}}{2}$ koşulunu sağlayan $x_1$ noktası dönüm noktasıdır.)

## 9 — HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN MAKÜSLARI

### 9.1. *Argüman hiperbolik sinüs*

Hiperbolik sinüs fonksiyonu IR üzerinde sürekli ve monoton olduğundan, her $x$ reel sayısına karşın $x = \text{Sh } y$ olacak şekilde tek bir $y$ sayısı bulunur. Bu $y$ sayısı, hiperbolik sinüs fonksiyonunun makûs fonksiyonudur ve Arg Sh $x$ olarak gösterilir, yani

$$y = \text{Arg Sh } x \iff x = \text{Sh } y$$

dir.

Hiperbolik sinüs fonksiyonunun makûs fonksiyonu logaritma fonksiyonu cinsinden

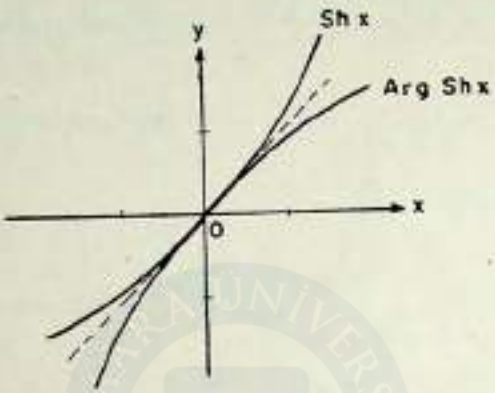
$$\text{Arg Sh } x = \text{Log } (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

şeklinde açıklanır ve

$$(\text{ArgSh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

dir. Arg Sh $x$ fonksiyonunun grafiği Şekil 83'de gösterilmiştir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 83.

9.1.1. *Örnekler*

a) $f(x) = 2x \operatorname{Arg\,Sh}(x^2 - 1)$ fonksiyonunun türevi.

$$f'(x) = 2 \operatorname{Arg\,Sh}(x^2 - 1) + 2x \frac{2x}{\sqrt{1 + (x^2 - 1)^2}}$$

$$= 2 \operatorname{Arg\,Sh}(x^2 - 1) + \frac{4x^2}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 2}}$$

olduğu zincir kuralını ve yukardaki türev alma bağıntısını uygulamak suretiyle görülür.

b) $f(x) = \operatorname{Arg\,Sh}(\sin \frac{x+1}{2})$ fonksiyonunun türevi.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\cos(\frac{x+1}{2})}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{x+1}{2})}}$$

dir.

*9.2. Argüman hiperbolik kosinüs*

$x \geq 0$ için $\operatorname{Ch} x \geq 1$ koşulunu sağlayan ve kesin olarak artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla fonksiyonun bu parçası injek-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


tiftir. Her $x \geqslant 1$ sayısına karşın, $x = \mathrm{Ch}\, y$ olacak şekilde tek bir $y \geqslant 0$ sayısı vardır. Bu $y$ sayısına hiperbolik fonksiyonun argümanı denir ve

$$\left.\begin{array}{l} y = \mathrm{Arg\ Ch}\, x \\ (x \geqslant 1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Ch}\, y$$

dir. $x \leqslant 0$ için $\mathrm{Ch}\, x \geqslant 1$ koşulunu sağlayan ve kesin olarak eksilen bir fonksiyondur. Fonksiyonun bu parçası da bu nedenle injektiftir. Şu halde her $x \geqslant 1$ sayısına karşın $x = \mathrm{Ch}\, y$ olacak şekilde tek bir $y \leqslant 0$ sayısı vardır. Bu $y$ sayısı hiperbolik kosinüs fonksiyonunun $x \leqslant 0$ için tanımlanan maküs fonksiyonudur ve

$$\left.\begin{array}{l} y = -\ \mathrm{Arg\ Ch}\, x \\ (x \geqslant 1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{Ch}\, y$$

dir.

Hiperbolik kosinüs fonksiyonunun $x \geqslant 0$ parçası için tanımlanan maküs fonksiyonu logaritma fonksiyonuna bağlı olarak

$$\mathrm{Arg\ Ch}\, x = \mathrm{Log}\ (x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$x \leqslant 0$ için ise

$$\mathrm{Arg\ Ch}\, x = \mathrm{Log}\ (x - \sqrt{x^2 - 1})$$

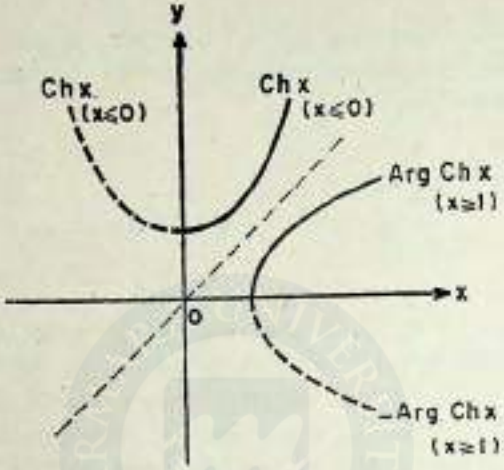
şeklinde açıklanır.

$$(\mathrm{Arg\ Ch})'(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}$$

dir.

Arg Ch $x$ fonksiyonlarının grafikleri Şekil 84'de gösterilmiştir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 84.

9.2.1. *Örnekler*

a) $f(x) = \text{Arg Ch } (\sqrt{x+1})$ fonksiyonunun türevi.

Zincir kuralını uygulayarak

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

elde edilir

b) $f(x) = \text{Arg Ch } (\sqrt{x+1})$ fonksiyonunun bir doğal logaritma olarak yazılışı.

$$y = \text{Arg Ch } (\sqrt{x+1})$$

bağıntısından

$$\text{Ch } y = \sqrt{x+1}$$

yani

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sqrt{x+1}$$

elde edilir ve $e^y = t$ yazılacak olursa, buradan

$$t^2 - 2\sqrt{x+1}\,t + 1 = 0$$

bulunur. Bu kadratik denklemin kökleri

$$t_1 = \sqrt{x+1} \pm \sqrt{(x+1)-1} = \sqrt{x+1} \pm \sqrt{x}$$

şeklindedir. Bu ifadelerin bir anlamı olması için $x \geq 0$ olması gerektiği meydandadır. Bu koşul altında

$$t_1 = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0$$

ve dolayısıyla

$$e^{y_1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$$

yazılır, yani

$$y_1 = \text{Log}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$$

elde edilir ve

$$\text{Arg Ch}\,x = \text{Log}\,(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$$

bulunur. Aynı şekilde, her $x > 0$ için $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} > 0$ dır buradan

$$e^{y_2} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\text{Arg Ch}\,x = \text{Log}\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

### 9.3. *Argüman hiperbolik tangent*

Hiperbolik tangent fonksiyonu bütün $x$ değerleri için kesin artan ve değerlerini $]-1, +1[$ açık aralığı içinde alan bir fonksiyondur: şu halde bu fonksiyon injektiftir ve $]-1, +1[$ açık aralığında seçilen her $x$ sayısına karşın $x = \text{Th } y$ olacak şekilde tek bir $y$ sayısı vardır. Bu $y$ sayısı hiperbolik tangent fonksiyonunun maküs fonksiyonu olan $y = \text{Arg Th } x$ dir, yani

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{Arg Th } x \\ (-1 < x < 1) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \text{Th } y$$

dir.

Hiperbolik tangent fonksiyonunun argumanı $]-1, +1[$ açık aralığı üzerinde tanımlanmış bir fonksiyondur ve logaritma fonksiyonuna bağlı olarak

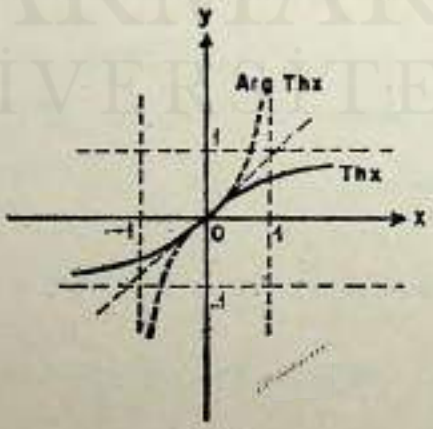
$$\text{Arg Th } x = \frac{1}{2} \text{ Log } \frac{1+x}{1-x}$$

şeklinde açıklanır.

$$(\text{Arg Th})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

dir.

Arg Th $x$ fonksiyonunun grafiği Şekil 85'te gösterilmiştir:




Şekil 85.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


9.3.1. *Örnekler*

a) $f(x) = \text{Arg Th}\,\dfrac{x-1}{x^2+1}$ fonksiyonunun türevi.

Türev alma işlemine geçmeden, fonksiyonun tanım bölgesini incelemek yerinde olur.

$$-1 < \frac{x-1}{x^2+1} < 1$$

olması gerektiğine göre,

$$-x^2-1 < x-1 < x^2+1$$

yani

$$x^2+x > 0, \quad x^2-x+2 > 0$$

olması gerekir. İkinci bağıntı her $x$ için sağlanır; birincisi ise $[-1, 0]$ aralığının dışındaki noktalar tarafından sağlanır. Şu halde verilen fonksiyon

$$]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$$

cümlesi üzerinde tanımlıdır.

Zincir kuralını uygulayarak

$$\text{Arg Th})' \left(\frac{x-1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)^2} \cdot \frac{x^2+1-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{(x^2+1)^2-(x-1)^2}{(x^2+1)^2}} \cdot \frac{1+2x-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+2x-x^2}{x(x^2+x+2)}$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) $f(x) = \text{Arg Th } \sqrt{x}$ fonksiyonunun logaritma olarak ifadesi.

Fonksiyonun tanımlanabilmesi için $\sqrt{x} \in ]-1, +1[$ olabilmesi gereklidir bu ise, ancak $x \in ]0, 1[$ için doğrudur. Şu halde verilen fonksiyon ancak bu aralık üzerinde incelenebilir.

$$y = \text{Arg Th } \sqrt{x}$$

bağıntısından

$$\sqrt{x} = \text{Th } y$$

yani

$$\sqrt{x} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

dir. Buradan, $x \in ]0, 1[$ olduğu için

$$e^{2y} = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} > 0$$

dır, yani

$$y = \text{Arg Th } \sqrt{x} = \frac{1}{2} \text{ Log } \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}\right)$$

tir.

9.4. *Argüman hiperbolik kotangent*

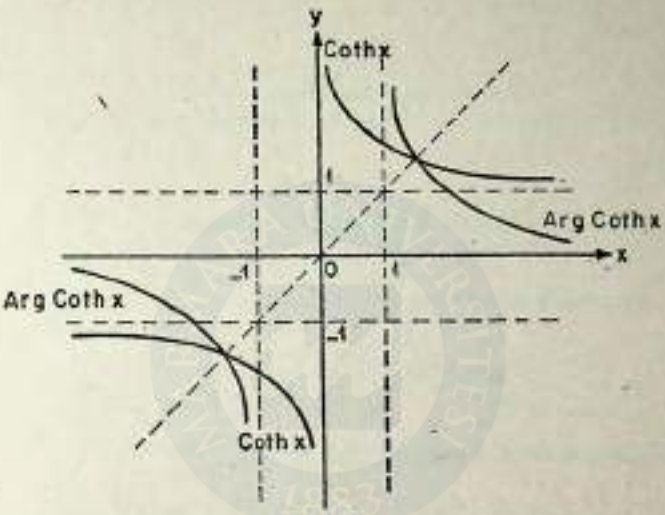
Hiperbolik kotangent, $x > 0$ ve $x < 0$ değerleri için kesin olarak eksilen, değerlerini $y > 1$ ve $y < -1$ bölgelerinde alan bir fonksiyondur ve bu bölgeler üzerinde injektiftir. Şu halde $|x| \geqslant 1$ koşulunu sağlayan her $x$ değeri için $x = \text{Coth } y$ olacak şekilde tek bir $y$ sayısı vardır. $\text{Coth } x$ fonksiyonunun maküsunu gösteren bu $y$ sayısı $y = \text{Arg Coth } x$ şeklinde gösterilir ve

$$\left.\begin{array}{l} y = \text{Arg Coth } x \\ |x| \geqslant 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = \text{Coth } y$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Hiperbolik kotangent fonksiyonunun grafiği Şekil 86'da gösterilmiştir.




Şekil 86.

9.4.1. *Örnekler*

a) $f(x) = \text{Arg Coth } x$ fonksiyonunun doğal logaritma cinsinden yazılışı.

$$y = \text{Arg Coth } x$$

bağıntısından

$$x = \text{Coth } y$$

yani

$$x = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1}$$

elde edilir ve bu bağıntıyı $e^{2y}$'ye göre çözerek

$$e^{2y} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

dir. $|x| \geq 1$ olduğundan bu ifadenin bir anlamı vardır, çünkü ikinci yanı daima pozitif kalır. Şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{x+1}{x-1}$$

dir, yani

$$\operatorname{Arg\,Coth}\, x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{x+1}{x-1}$$

dir.

b) $f(x) = \operatorname{Arg\,Coth}\, x$ fonksiyonunun türevi.

Yukardaki bağıntıdan hareket ederek

$$\operatorname{Arg\,Coth}\, x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{x+1}{x-1}$$

yazılabilir ve zincir kuralını kullanarak

$$(\operatorname{Arg\,Coth})'(x) = \frac{1}{2} \frac{x-1}{x+1} \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \frac{-2}{x-1} = \frac{1}{1-x^2}$$

elde edilir.

9.5. *Argüman hiperbolik sekant*

Hiperbolik sekant $x \geq 0$ değerleri için kesin eksilen ve değerlerini $]0, 1[$ aralığında alan bir fonksiyon olup injektiftir. Şu halde $]0, 1[$ aralığına ait her $x$ değeri için, $x = \operatorname{Sech} y$ olacak şekilde tek bir $y > 0$ sayısı vardır. Bu $y$ sayısı hiperbolik sekant fonksiyonunun $x > 0$ için tanımlanan mahûs fonksiyonudur.

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{Arg\,Sech}\, x \\ 0 < x \leq 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Sech}\, y$$

dir.

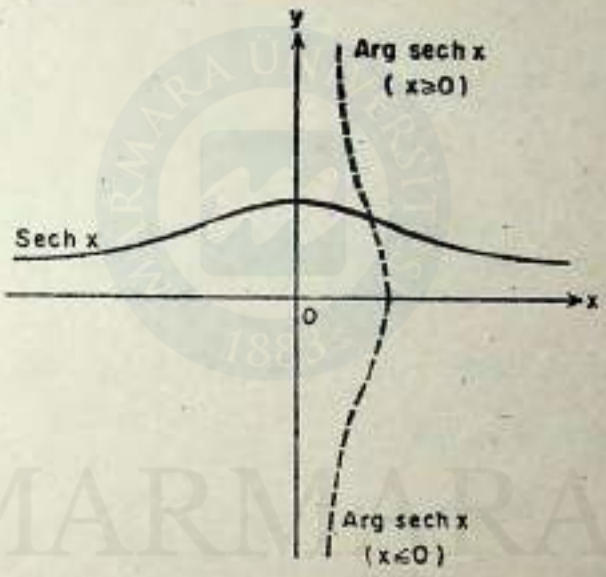
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Benzer şekilde, $x < 0$ değerleri için hiperbolik sekant fonksiyonunun maküs fonksiyonu

$$\left.\begin{array}{c} y = -\operatorname{Arg\,Sech}\, x \\ 0 < x \leqslant 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Sech}\, y$$

olarak bulunur.

Bu fonksiyonların grafikleri Şekil 87'de gösterilmiştir.




Şekil 87.

9.5.1. *Örnekler*

a) $f(x) = \operatorname{Arg\,Sech}\, x$ fonksiyonlarının doğal logaritma cinsinden yazılışları.

$$y = \operatorname{Arg\,Sech}\, x$$

bağıntısından

$$x = \operatorname{Sech}\, y$$

elde edilir ve tanımından

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$$

yazılır. Şu halde

$$x\,(e^y)^2 - 2\,e^y + x = 0$$

denklemi elde edilir ve buradan, $e^y = t$ dönüşümünü yaparak

$$x\,t^2 - 2t + x = 0$$

bulunur, yani

$$t = (1 \pm \sqrt{1 - x^2})\ \frac{1}{x}$$

dır. $x \in ]0, 1]$ olduğuna göre, $0 \leqslant 1 - x^2 < 1$ dır ve dolayısıyla her iki kök pozitiftir. Şu halde, $e^y = t$ bağıntısından $y = \text{Log}\ t$ 'yi çözerek, pozitif olan Arg Sech $x$ için

$$\text{Arg Sech}\ x = \text{Log}\ [(1 + \sqrt{1 - x^2})\ \frac{1}{x}]$$

ve negatif olan Arg Sech $x$ için

$$\text{Arg Sech}\ x = \text{Log}\ [(1 - \sqrt{1 - x^2})\ \frac{1}{x}]$$

elde edilir.

b) $f(x) = \text{Arg Sech}\ x$ fonksiyonunun türevi.

Maküs fonksiyonların türevini veren genel formülü uygulayarak

$$(\text{Arg Sech})'\,(x) = \frac{1}{(\text{Sec})'\,(\text{Arg Sech}\ x)}$$

$$= \frac{1}{-\ \text{Sech}\ (\text{Arg Sech}\ x)\ \text{Th}\ (\text{Arg Sech}\ x)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$= \frac{-1}{x \operatorname{Th}\ (\operatorname{Arg} \operatorname{Sech} x)}$$

elde edilir.

$$\operatorname{Ch}^2 u - \operatorname{Sh}^2 u = 1$$

bağıntısından

$$1 - \operatorname{Th}^2 u = \operatorname{Sech}^2 u$$

yani

$$\operatorname{Th} u = \sqrt{1 - \operatorname{Sech}^2 u}$$

elde edilir. Şu halde

$$\operatorname{Th}\ (\operatorname{Arg} \operatorname{Sech} x) = \sqrt{1 - (\operatorname{Sech}\ (\operatorname{Arg} \operatorname{Sech} x))^2}$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

dır ve dolayısıyla

$$(\operatorname{Arg} \operatorname{Sech})'\ (x) = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

dır.

*9.6. Argüman hiperbolik kosekant*

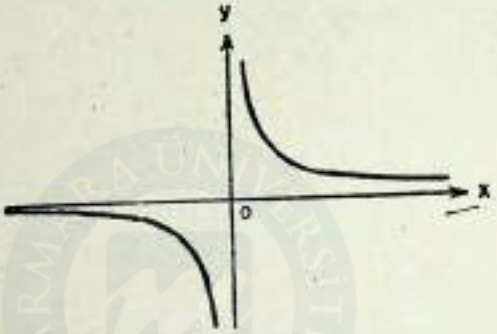
Hiperbolik kosekant fonksiyonu, sıfırdan farklı bütün $x$ değerleri için tanımlı ve her $x \neq 0$ için eksilen bir fonksiyondur; bu nedenle bu fonksiyon bütün tanım cümlesi üzerinde injektiftir. Sıfırdan farklı olma koşulunu yerine getiren her $x$ değeri için $x = \operatorname{Cosech} y$ olacak şekilde bir $y$ sayısı vardır. Hiperbolik kosekantın makûs fonksiyonu olan bu $y$ sayısı, Arg Cosech $x$ şeklinde gösterilir ve

$$\left.\begin{array}{l} y = \operatorname{Arg} \operatorname{Cosech} x \\ x \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad x = \operatorname{Cosech} y$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu fonksiyonun grafiği Şekil 88'de gösterilmiştir:




Şekil 88.

9.6.1. *Örnekler*

a) $f(x) = \text{Arg Cosech } x$ fonksiyonunun doğal logaritma cinsinden yazılışı.

$$y = \text{Arg Cosech } x$$

bağıntısından

$$x = \text{Cosech } y$$

elde edilir ve tanımdan

$$x = \frac{2}{e^y - e^{-y}}$$

bulunur. Şu halde

$$x\,(e^y)^2 - 2\,e^y - x = 0$$

dır ve buradan, $e^y = t$ dönüşümünü kullanarak,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$x t^2 - 2t - x = 0$$

kuadratik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri



$$t = (1 \pm \sqrt{1 + x^2}) \frac{1}{x}$$

şeklindedir. $-$ işaretli kökün ele alınması halinde $t$ negatif olur ve $e^y = t$ bu durumda yazılamaz. Şu halde

$$t = \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

dır ve $e^y = t$ yazarak bu son eşitlikten

$$y = \text{Arg Cosech } x = \text{Log} \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

elde edilir.

b) $f(x) = \text{Arg Cosech } x$ fonksiyonunun türevi.

$$\text{Arg Cosech } x = \text{Log} \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$$

yazılışını uygulayarak

$$(\text{Arg Cosech})'(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \frac{1}{x^2} \left(x \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}} - (1 + \sqrt{1 + x^2})\right)$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$$

elde edilir.

10. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki fonksiyonların türev fonksiyonlarını bulunuz:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1. $f(x) = \text{Arg Sh } \frac{1}{x}$ Yanıt : $f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$

2. $f(x) = \text{Arg Sh } (\text{tg } x)$ Yanıt : $f'(x) = \frac{\text{Sec}^2 x}{\sqrt{1+\text{tg}^2 x}}$

3. $f(x) = \text{Arg Sh } x + \frac{1}{3}\text{Sh}^3 x$

Yanıt : $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \text{Sh}^2 x \text{ Ch } x$

4. $f(x) = x^3 \text{ Arg Sh } \sqrt{\sin 2x}$

Yanıt : $f'(x) = 2x \text{ Arg Sh } \sqrt{\sin 2x} + \frac{x^2 \cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}\ \sqrt{1+\sin 2x}}$

5. $f(x) = (\text{Arg Sh } x)^{\frac{1}{3}}$

Yanıt : $f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(\text{Arg Sh } x)^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

11. *Hiperbolik fonksiyonların maküsları ile ilgili bağıntılar.*

Hiperbolik fonksiyonların maküslarını ilgilendiren, hiperbolik fonksiyonların sağladıkları bağıntılardan elde edilebilen birçok ilginç bağıntı vardır. Aşağıdaki örnekler bunların elde ediliş şekillerini açıklamaya yarayacaktır:

11.1. $|\text{Arg Sh } x| = \text{Arg Ch } \sqrt{x^2+1}$

dir.

Gerçekten

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$|y| = |\operatorname{Arg\,Sh}\, x|$$

ise

$$x = \operatorname{Sh}|y|$$

ve

$$x^2 + 1 = \operatorname{Sh}^2|y| + 1 = \operatorname{Ch}^2|y|$$

dır. Şu halde

$$|\operatorname{Arg\,Sh}\, x| = |\operatorname{Arg\,Sh}\,(\operatorname{Sh} y)| = |y|$$

$$\operatorname{Arg\,Ch}\sqrt{x^2+1} = \operatorname{Arg\,Ch}\,(\operatorname{Ch}|y|) = |y|$$

dır ve istenen eşitlik böylece sağlanmış olur.

11.2. $\operatorname{Arg\,Ch}\, x = \operatorname{Arg\,Sh}\sqrt{x^2-1}$

dir.

Yukarda uygulanan yöntemle çözülür.

11.3. $2\operatorname{Arg\,Th}\,(\operatorname{tg} x) = \operatorname{Arg\,Th}\,(\sin 2x)$

dir.

$$\operatorname{Arg\,Th}\,(\operatorname{tg} x) = y$$

olsun. Buradan

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{Th} y$$

dir.

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

olduğuna göre

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{Th} y}{1+\operatorname{Th}^2 y}$$

elde edilir ve (2.15) te $b = a = y$ alınması halinde elde edilen sonuçtan

$$\sin 2x = \operatorname{Th} 2y$$

yani

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$2y = \text{Arg Th } (\sin 2x)$$

veya

$$y = \frac{1}{2} \text{ Arg Th } (\sin 2x)$$

bulunur. $y$ için elde edilen iki ifadeyi eşitlemekle istenen eşitlik elde edilir.

11.4. $$\text{Arg Th } \frac{2x}{1+x^2} = 2 \text{ Arg Th } x$$

dir.

$$\text{Arg Th } x = y$$

olsun: buradan

$$x = \text{Th } y$$

ve

$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2 \text{ Th } y}{1 + \text{Th}^2 y} = \text{Th } 2y$$

olduğundan

$$2y = \text{Arg Th } \frac{2x}{1+x^2}$$

yani

$$y = \frac{1}{2} \text{ Arg Thø } \frac{2x}{1+x^2}$$

elde edilir. $y$ için elde edilen iki ifadeyi eşitlemekle, aranan eşitlik bulunur.

*11.5. Alıştırmalar*

a) $\text{Arg Th } (\sin x) = \text{Arg Ch } \left(\frac{1}{\cos x}\right)$ eşitliğini kanıtlayınız.

b) $\text{Arg Coth } x = \text{Arg Th } \frac{1}{x}$ ; $(|x| > 1)$, eşitliğini kanıtlayınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


c) Arg Sech $x = \text{Arg Ch}\ \dfrac{1}{x}$; $(0 < x \leqslant 1)$, eşitliğini kanıtlayınız.

d) Arg Cosech $x = \text{Arg Sh}\ \dfrac{1}{x}$; $(x \neq 0)$, eşitliğini kanıtlayınız.

11.5. $2\ \text{Arg Sh}\ x + \text{Arg Th}\ \dfrac{1}{2} = \text{Arg Ch}\ 2$

denklemini çözmek.

Logaritmalı yazılışlara geçerek

$$2\ \text{Log}\ (x + \sqrt{x^2+1}) = \text{Log}\ (2 + \sqrt{2^2-1}) - \frac{1}{2}\ \text{Log}\ \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \text{Log}\ (2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2}\ \text{Log}\ 3$$

$$= \text{Log}\ (2 + \sqrt{3}) - \text{Log}\ \sqrt{3}$$

$$= \text{Log}\ \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \text{Log}\ (1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

elde edilir. Şu halde

$$\sqrt{x^2+1} + x = (1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})^{\frac{1}{2}}$$

veya

$$x^2 + 1 = x^2 - 2x\,(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3})^{\frac{1}{2}} + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

dir. Bu durumda

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}$$

dir.

11.7. $\operatorname{Arg\,Sh}\, y = 2 \operatorname{Arg\,Sh}\, x$

$\operatorname{Arg\,Ch}\, y = 3 \operatorname{Arg\,Ch}\, x$

sisteminin çözülmesi.

Sistemin veriliş şekli, gerek $x \geqslant 1$ gerekse $y \geqslant 1$ olduğunu gösterir. Üstelik

$$\operatorname{Sh} 2a = 2 \operatorname{Sh} a \operatorname{Ch} a = 2 \operatorname{Sh} a \sqrt{\operatorname{Sh}^2 a + 1}$$

olduğuna göre, $a = \operatorname{Arg\,Sh}\, x$ alarak

$$\operatorname{Sh} 2a = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

elde edilir ve

$$2a = 2 \operatorname{Arg\,Sh}\, x = \operatorname{Arg\,Sh}\, (2x\sqrt{x^2 + 1})$$

dir. Şu halde

$$y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ch} 3b &= \operatorname{Ch}(2b + b) = \operatorname{Ch} 2b \operatorname{Ch} b + \operatorname{Sh} 2b \operatorname{Sh} b \\ &= \operatorname{Ch}^2 b + \operatorname{Sh}^2 b \operatorname{Ch} b + 2 \operatorname{Sh}^2 b \operatorname{Ch} b \\ &= \operatorname{Ch}^3 b + 3 \operatorname{Sh}^2 b \operatorname{Ch} b \\ &= \operatorname{Ch}^3 b + 3(\operatorname{Ch}^2 b - 1) \operatorname{Ch} b \\ &= 4 \operatorname{Ch}^3 b - 3 \operatorname{Ch} b\end{aligned}$$

dir. Bu kez $b = \operatorname{Arg\,Ch}\, x$ yazılması halinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\text{Ch } 3b = 4x^3 - 3x$$

elde edilir, yani

$$3b = 3 \operatorname{Arg Ch} x = \operatorname{Arg Ch} (4x^3 - 3x)$$

dir. Şu halde

$$y = 4x^3 - 3x$$

dir.

$y$ için elde edilen bu iki ifadeyi eşitleyerek

$$2\sqrt{x^2 + 1} = 4x^3 - 3$$

veya

$$16x^6 - 28x^3 + 5 = 0$$

elde edilir. Bikuadratik bu denklemi çözmek için $x^3 = t$ dönüşümü yapmak yeter. Elde edilen iki kök

$$\frac{14 \mp \sqrt{196 - 80}}{16} = \frac{7 \mp \sqrt{29}}{8}$$

olup, ancak 1 sayısından büyük olanı bir anlam taşır: şu halde

$$x^3 = \frac{7 + \sqrt{29}}{8}$$

veya

$$x = \sqrt[3]{\frac{7 + \sqrt{29}}{8}}$$

dir. Buna göre

$$y = \frac{\sqrt{(7 + \sqrt{29})(15 + \sqrt{29})}}{4}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

## BÖLÜM ONDOKUZ

## İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

### 0 — İLKEL FONKSİYON CETVELİ

Önceki Bölümlerin konuları incelenirken elde edilen türev fonksiyonlarından hareket edilerek ilkel fonksiyonlar çıkarılabilir. Aşağıda böyle bir türev ve ilkel fonksiyon cetveli verilmiştir.

1) Her $p \in Q$ için $f(x) = x^p$ ise $f'(x) = px^{p-1}$ dir.

$$\Longrightarrow \quad 1') \quad \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + k \quad (p \neq -1)$$

2) $(\sin)'(x) = \cos x$

$$\Longrightarrow \quad 2') \quad \int \cos x \, dx = \sin x + k$$

3 $(\cos)'(x) = -\sin x$

$$\Longrightarrow \quad 3') \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + k$$

4) $(\mathrm{tg})'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \mathrm{tg}^2 x$

$$\Longrightarrow \quad 4') \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + k$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \mathrm{tg}\, x + k$$

$$\int (1 + \mathrm{tg}^2 x) \, dx = \mathrm{tg}\, x + k$$

5) $(\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow \quad 5') \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + k$$

6) $(\arccos)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow \quad 6') \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + k$$

7) $(\operatorname{arc\,tg})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \quad 7') \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + k$$

8) $(\mathrm{Log})'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow \quad 8') \quad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{Log}\, x + k$$

9) $(\exp)'(x) = \exp(x)$

$$\Rightarrow \quad 9') \quad \int e^x\, dx = e^x + k$$

10) $(\mathrm{Ch})'(x) = \mathrm{Sh}\, x$

$$\Rightarrow 10') \quad \int \mathrm{Sh}\, x\, dx = \mathrm{Ch}\, x + k$$

11) $(\mathrm{Sh})'(x) = \mathrm{Ch}\, x$

$$\Rightarrow 11') \quad \int \mathrm{Ch}\, x\, dx = \mathrm{Sh}\, x + k$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

12) $(\mathrm{Th})'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{Ch}^2 x}$

$= 1 - \mathrm{Th}^2 x$

$= \mathrm{Sech}^2 x$

$\Longrightarrow$ 12') $\displaystyle\int \frac{dx}{\mathrm{Ch}^2 x} = \mathrm{Th}\, x + k$

$\displaystyle\int (1 - \mathrm{Th}^2 x)\, dx = \mathrm{Th}\, x + k$

$\displaystyle\int \mathrm{Sech}^2 x\, dx = \mathrm{Th}\, x + k$

13) $(\mathrm{Arg\,Sh})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Longrightarrow$ 13') $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{Arg\,Sh}\, x + k$

$= \mathrm{Log}\,(x + \sqrt{1+x^2}) + k$

14) $\mathrm{Arg\,Ch})'(x) = \dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$

$\Longrightarrow$ 14') $\displaystyle\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{Arg\,Ch}\, x + k$

$= \mathrm{Log}\,(x \pm \sqrt{x^2-1}) + k$

15) $(\mathrm{Arg\,Th})'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

$\Longrightarrow$ 15') $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \mathrm{Arg\,Th}\, x + k$

$= \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,\dfrac{1+x}{1-x}$

Bu cetvelde yer alan ilkel fonksiyonlar, daha karmaşık ilkel fonksiyonların hesaplanmasında daima kullanılacaktır.

*0.1. Doğrudan doğruya hesaplanabilen ilkel fonksiyonlar*

Hiçbir özel yönteme baş vurmadan hesaplanabilen birçok ilkel fonksiyon vardır. Yapılacak tek şey, sadece ifadeleri açmak veya bilinen basit cebirsel veya trigonometrik formüllerle integre edilecek fonksiyonları hesaplamak yeterlidir. Aşağıdaki örnekler bu türden bazı fonksiyonları göstermektedir.

0.1.1. *Örnekler*

0.1.1.1. $\int (x - \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx$ ilkel fonksiyonunu bulmak.

Bu örnekte toplamı açmak ve böylece bilinen şekillere indirgenen integralleri ayrı ayrı hesaplamak mümkündür:

$$\int (x - \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx = \int x\, dx - \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x\, dx - \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

elde edilir ve 1) den dolayı

$$\int (x - \frac{1}{\sqrt{x}})\, dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{2} x^2 - 2 x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + 2\sqrt{x} + k$$

dır.

0.1.1.2. $\int (x^2 + \frac{1}{x^2})^2\, dx$ ilkel fonksiyonunu hesaplamak.

İntegrand olarak verilen binomun karesi hesaplanarak çözüm elde edilir: gerçekten

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int (x^2 + \frac{1}{x^2})^2\,dx = \int (x^4 + 2 + x^{-4})\,dx = \int x^4\,dx + \int 2\,dx + \int x^{-4}\,dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + 2x + \frac{x^{-3}}{-3} = \frac{1}{5}x^5 + 2x - 3\frac{1}{x^3} + k$$

dır.

0.1.1.3. $\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\,dx$ ilkel fonksiyonunu hesaplamak.

İntegrant olarak gözüken ifade basit bir şekle sokulabilir. Gerçekten

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sin x$$

dir ve dolayısıyla

$$\int 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

dır.

0.1.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ilkel fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\int x^2 (1 - \sqrt[3]{x})\,dx$ Yanıt : $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{10}x^3\sqrt[3]{x} + k$

2. $\int \frac{(1 - \sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ Yanıt : $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{9}x^{\frac{5}{3}} + k$

3. $\int (1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^3\,dx$ Yanıt : $x - 3x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} + k$

4. $\int \frac{x^{\frac{1}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx$ Yanıt : $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + k$

5. $\int \frac{e^x}{e^{x+1}}\,dx$ Yanıt : $\frac{x}{e} + k$

## 1 — DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Eğer bir $f(u)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olan $F(u)$ bilinyorsa,

$$\int f(g(x))\ (g'(x))\ dx \tag{1.1}$$

ilkel fonksiyonu zincir kuralı uygulanarak hesaplanabilir. Gerçekten, $F \circ g$ bileşke fonksiyonunun türevi, baştaki varsayımdan ötürü,

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x))\ (g'(x))$$

dır. Şu halde

$$\int f(g(x))\ (g'(x))\ dx = \int (F \circ g)'(x)\ dx = (F \circ g)(x) + k$$

olarak çözülmüş olur.

Aynı sonucu $g(x) = u$ yazmak suretiyle de varılır:

$$du = g'(x)\ dx$$

olduğundan, yukarda verilen ilkel fonksiyon $\int f(u)\ du$ şeklini alır ve yine baştaki varsayımdan ötürü

$$\int f(g(x))\ (g'(x))\ dx = \int f(u)\ du = \int F'(u)\ du = F(u) + k$$

$$= F(g(x)) + k = (F \circ g)(x) + k$$

elde edilir.

### 1.1. *Örnekler*

1.1.1. $\int 2x\sqrt{x^2+1}\ dx$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$x^2 + 1 = g(x)$ olarak seçilirse, $f(g(x)) = \sqrt{x^2+1}$ olarak alınabilir ve $g'(x) = 2x$ olduğundan verilen ilkel fonksiyon (1.1) şeklindedir. $f$ fonksiyonu $f(u) = \sqrt{u}$ şeklinde de gösterilebilir ve burdan hemen ilkel fonksiyonu $F(u) = \dfrac{u^{3/2}}{3/2}$ yazılabilir. Bu koşullar altında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$F(u) = (F \circ g)\ (x)$$

olduğundan

$$\int 2x \sqrt{x^2 + 1}\, dx = \frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + k$$

dır.

1.1.2. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3 + 5}}$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$g(x) = x^3 + 5$ olarak seçilirse, $g'(x) = 3x^2$ olacaktır.

$f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ alınması halinde

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3 + 5}} = \frac{1}{3} \int f(g(x))\ (g'(x))\, dx$$

şeklini alır. $F(u) = 2\sqrt{u} + k$ olduğundan

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3 + 5}} = \frac{1}{3} (F \circ g)\ (x) + k = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 5} + k$$

dır.

Aynı ilkel fonksiyonu bulmak için $u = g(x) = x^3 + 5$ yazılabilir: $du = g'(x)\, du = 3x^2\, dx$ olduğundan

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3 + 5}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3} \sqrt{u} + k = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 5} + k$$

bulunur.

1.1.3. $\int \frac{(2x + 3)\, dx}{(x - 2)\ (x + 5)}$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$\frac{2x + 3}{(x - 2)\ (x + 5)}$ fonksiyonunu, bir bileşke fonksiyonu ile bi-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



leşke işlemindeki ilk fonksiyonunun türevinin çarpımı şeklinde yazabilmek için paydayı bir polinom şeklinde yazıp

$$g(x) = x^2 + 3x - 10 = u$$

olarak seçmek gerekir. $du = (2x + 3)\,dx$ den

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x-2)\,(x+5)} = \int \frac{du}{u} = \text{Log}\,|u| + k$$

$$= \text{Log}\,|x^2 + 3x - 10| + k$$

elde edilir. $k = \text{Log}\,c$ yazılırsa

$$\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x-2)\,(x+5)} = \text{Log}\,(c\,|(x-2)\,(x+5)|)$$

elde edilir. Logaritma fonksiyonu 0 için tanımlanamadığına göre, bu ilkel fonksiyon, $x_1 = -5$ ve $x_2 = 2$ noktalarında tanımlı değildir. Bu sonuç şaşırtıcı bir sonuç değildir, çünkü zaten bu iki özel $x$ değeri için integrasyon işareti altında gözüken fonksiyon da tanımlı değildir.

**1.1.4.** $\int \frac{\sin x\,dx}{2 + \cos x}$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$2 + \cos x = u$ alınırsa $du = -\sin x\,dx$ bulunur ve

$$\int \frac{\sin x\,dx}{2 + \cos x} = \int \frac{-du}{u} = -\text{Log}\,|u| + k = -\text{Log}\,|2 + \cos x| + k$$

elde edilir. $\cos x$ fonksiyonu $-1$, $+1$ arasında değiştiğinden her $x$ değişken değeri için $2 + \cos x > 0$ dır. Dolayısıyla ilkel fonksiyon mutlak değer işaretinden kurtarılabilir ve çözüm, $k = \text{Log}\,c$ yazarak

$$\int \frac{\sin x\,dx}{2 + \cos x} = \text{Log}\,\frac{c}{2 + \cos x}$$

şekline girer.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1.1.5. $\int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{Log} x}\, dx}{x}$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$1 + \operatorname{Log} x = u$ olarak seçilirse $\frac{dx}{x} = du$ olacaktır ve

$$\int \frac{\sqrt{1 + \operatorname{Log} x}\, dx}{x} = \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3} (\operatorname{Log} x + 1)^{\frac{3}{2}} + k$$

elde edilir.

1.1.6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$\sqrt{x} = u$ yazılacak olursa, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} = 2 \int \frac{du}{\cos^2 u} = 2 \operatorname{tg} u + k = 2 \operatorname{tg} \sqrt{x} + k$$

elde edilir.

1.1.7. $\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x}\, dx$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

Kullanılacak dönüşümler daima hemen gözüken dönüşümler olmayabilir: bu ilkel fonksiyon böyle bir durumu gösteren bir örnektir.

$u = \sin x - \cos x$ yazılması halinde $du = (\cos x + \sin x)\, dx$ elde edilir. Öte yandan

$$3 + \sin 2x = 3 + 2 \sin x \cos x = 4 - (\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x)$$

$$= 4 - (\sin x - \cos x)^2$$

$$= (2 - (\sin x - \cos x)) (2 + (\sin x - \cos x))$$

$$= (2 - u)(2 + u)$$

olduğundan verilen ikel fonksiyon

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x}\, dx = \int \frac{du}{(2-u)(2+u)}$$

şekline girer ve

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin 2x}\, dx = \int \frac{du}{(2-u)(2+u)}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2+u} + \frac{1}{2-u}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{du}{2+u} - \frac{1}{4}\int \frac{-du}{2-u}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\text{Log}\,(2+u) - \text{Log}\,(2-u)\right) + k$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{Log}\,\frac{2+u}{2-u} + k$$

$$= \frac{1}{4}\,\text{Log}\,\frac{2+\sin x - \cos x}{2-\sin x + \cos x} + k$$

$$= \text{Log}\, c\left(\frac{2+\sin x - \cos x}{2-\sin x + \cos x}\right)^{\frac{1}{4}}$$

elde edilir. Bu çözümde yine mutlak değer işaretini kullanmak gereği yoktur, çünkü her $x$ reel değeri için $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonları $-1$ ile 1 arasında kaldıklarından gerek $2 + \sin x - \cos x$, gerekse $2 - \sin x + \cos x$ ifadeleri sıfırdan büyük veya sıfıra eşit kalırlar. Ancak verilen ikel fonksiyon

$$2 - \sin x + \cos x = 0$$

denkleminin çözümü olan $x$ değerleri için tanımlı değildir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1.1.8. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

Bu ilkel fonksiyonunun dönüşüm yöntemi ile hesabı için seçilecek fonksiyon hemen gözüken fonksiyolardan değildir ve ancak alışkanlık sayesinde akla gelebilecek olan dönüşümlerdendir.

$u = x - \frac{1}{x}$ alınması halinde

$$u = \frac{x^2-1}{x} \quad \text{ve} \quad du = \frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2}\,dx = \frac{x^2+1}{x^2}\,dx$$

şeklinde elde edilir. Üstelik

$$x^2 - 1 = ux \quad \text{ten} \quad x^4 - 2x^2 + 1 = u^2x^2$$

veya

$$x^4 - x^2 + 1 = (u^2+1)\,x^2$$

dir. Şu halde

$$\sqrt{x^4-x^2+1} = x\sqrt{u^2+1}$$

dir ve verilen ilkel fonksiyon

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4-x^2+1}} = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^2\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$$

şekline girer. Halbuki bu son ifadede gözüken integrand, Arg Sh $u$ 'nun türevidir ve dolayısıyla

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x\sqrt{x^4-x^2+1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \text{Arg Sh } u + k$$

$$= \text{Log}\,|\,u + \sqrt{1+u^2}\,| + k$$

$$= \text{Log}\left|\frac{x^2-1}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2}\right| + k$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$= \text{Log} \left| \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}{x} \right| + \text{Log } c$$

$$= \text{Log} \left( c \left| \frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}{x} \right| \right)$$

dır. İkel fonksiyonun

$$x = 0 \quad \text{ve} \quad x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = 0$$

için bir anlamı yoktur; ikinci koşulun çözümü yine $x = 0$'ı verir.

1.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ikel fonksiyonları hesaplayınız.

1. $\int e^x \sqrt{e^x + 1}\, dx$

Yanıt : $\frac{2}{3} (e^x + 1)^{\frac{3}{2}} + k$

2. $\int \frac{x^3}{x^4 + 2}\, dx$

Yanıt : $\text{Log} \left( k (x^4 + 2)^{\frac{1}{4}} \right)$

3. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Yanıt : $\sqrt{x^2 - 1} + k$

4. $\int \frac{e^x\, dx}{(e^x + 3)^2}$

Yanıt : $-\frac{1}{3} \frac{1}{(e^x + 3)^3} + k$

5. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$

Yanıt : $\text{Log} \left( k (e^x + e^{-x}) \right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6. $\int \frac{\cos 2x}{3 - \sin 2x}\, dx$

Yanıt : $\text{Log} \frac{k}{\sqrt{3 - \sin 2x}}$

7. $\int \frac{e^{2x}\, dx}{\sqrt{e^{2x} + 4}}$

Yanıt : $2\sqrt{e^{2x} + 4} + k$

8. $\int \frac{(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2}\, dx$

Yanıt : $x + \text{Log}\,(x^2 + 2) + k$

9. $\int \frac{(\sin x + 4)\cos x\, dx}{\sin x + 2}$

Yanıt : $\text{Log}\,(\text{Sin}\, x + 2)^2 + \sin x + k$

10. $\int \frac{(\cos^2 t + \cos t - 1)\sin t\, dt}{\cos t - 1}$

Yanıt : $\frac{1}{\text{Log}\,(\cos t - 1)} - \frac{(\cos t - 1)^2}{2} - 3\,(\cos t - 1) + k$

11. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$

Yanıt : $-\frac{1}{2\sin^2 x} + k$

12. $\int \frac{x}{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

Yanıt : $-\frac{1}{(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}} + k$

13. $\int e^x \sin e^x\, dx$

Yanıt : $k - \cos e^x$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


14. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$

Yanıt : $\frac{2}{9} (x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} + k$

15. $\int \frac{1}{x \operatorname{Log} x}\, dx$

Yanıt : $\operatorname{Log} (\operatorname{Log} x) + k = \operatorname{Log} (c \operatorname{Log} x)$

16. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

Yanıt : $k - \operatorname{Arctg} (\sin x)$

17. $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$

Yanıt : $\operatorname{Log} (e^x + 1) + k = \operatorname{Log} (c\,(e^x + 1))$

18. $\int \frac{(\operatorname{Log} x)^4}{x}\, dx$

Yanıt : $\frac{1}{5} (\operatorname{Log} x)^5 + k$

19. $\int \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

Yanıt : $\frac{(\operatorname{arc} \sin x)^2}{2} + k$

20. $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

Yanıt : $\frac{1}{4} \sin^4 x + k$

21. $\int \frac{x\, dx}{(a^2 + x^2)^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Yanıt : $\frac{1}{2(1 - n)} \frac{1}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

22. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+k$

23. $\int \frac{x^2}{x^3-a^3}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{3}\operatorname{Log}|x^3-a^3|+k=\operatorname{Log}(k\sqrt[3]{|x^3-a^3|})$

24. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{\cos x}+k$

25. $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+k$

26. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

Yanıt : $\operatorname{Arctg}(e^x)+k$

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$

Yanıt : $\frac{1}{2}\operatorname{Arg\,Ch}(x^2)+k$

28. $\int \frac{dx}{x(1+\operatorname{Log} x)^3}$

Yanıt : $-\frac{1}{2(1+\operatorname{Log} x)^2}+k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



29. $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+5}\,dx$

Yanıt : $\text{Log}\sqrt{3x^2-2x+5}+k$

$= \text{Log}\,(c\sqrt{3x^2-2x+5})$

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\text{Log}^2 x}}$

Yanıt : $\text{Arc sin}\,(\text{Log}\,x)+k$

31. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

Yanıt : $-\text{Log}\,(1+\cos^2 x)+k$

$= \text{Log}\,\frac{c}{1+\cos^2 x}$

32 $\int \frac{\cos\,(\text{Log}\,x)\,dx}{x}$

Yanıt : $\sin\,(\text{Log}\,x)+k$

33 $\int x\,e^{1+x^2}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}\,e^{1+x^2}+k$

34. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$

Yanıt : $\frac{2}{3}\,(x-2)\,\sqrt{x+1}+k$

35. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$

Yanıt : $2(2+\sqrt{x})-4\,\text{Log}\,(2+\sqrt{x})+k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

36. $\int \frac{e^x\,dx}{(3+e^x)\sqrt{e^x-1}}$

Yanıt : $\text{Arc tg}\,\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}+k$

37. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$

Yanıt : $2\ \text{Arc tg}\,\sqrt{x}+k$

38. $\int \frac{x^2}{a^6-x^6}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{6a^3}\,\text{Log}\,\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}+k$

## 2 — KISMİ İNTEGREYON YÖNTEMİ

$f$ ve $g$ uygun aralıklar üzerinde tanımlanmış, türetilebilen iki fonksiyon ise

$$(f\cdot g)'(x) = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$$

dir. Bu bağıntı

$$f(x)\cdot g'(x) = (f\cdot g)'(x) - f'(x)\cdot g(x)$$

şeklinde düzenlenirse ve

$$f\in\mathcal{R}_{[a,b]}\ ,\ g\in\mathcal{R}_{[a,b]} \implies (f\cdot g)\in\mathcal{R}_{[a,b]}$$

teoremi yardımıyla

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = \int (f\cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

yazılabilir. $(f\cdot g)'$ fonksiyonunun bir ilkel fonksiyonu $(f\cdot g)$ fonksiyonu olacağından

$$(2.1)\qquad \int f(x)\cdot g'(x)\,dx = (f\cdot g)(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Bu formülü daha basit bir şekilde yazmak için

$$f(x) = u, \quad g(x) = v$$

almak uygundur. Bu yazılıştan

$$f'(x)\,dx = du, \quad g'(x)\,dx = dv$$

elde edilir ve (2.1) bağıntısı bu kez

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du \tag{2.2}$$

şekline girer.

2.1. *Örnekler*

2.1.1. $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$ ikeli fonksiyonunu bulmak.

$x^3 = p$ dönüşümü alınırsa $dp = 2x\,dx$ bulunur ve verilen ikeli fonksiyon

$$\int x^2 e^{-x^3}\,dx = \int x^2 e^{-x^3} x\,dx = \frac{1}{2}\int p\,e^{-p}\,dp$$

şekline girer.

$$u = p \quad \text{ve} \quad dv = e^{-p}\,dp$$

seçilirse

$$v = -e^{-p}$$

dir ve kısmi integrasyon yöntemini uygulayarak

$$\frac{1}{2}\int p\,e^{-p}\,dp = -\frac{1}{2}\,p\,e^{-p} + \frac{1}{2}\int e^{-p}\,dp$$

$$= -\frac{1}{2}\,p\,e^{-p} - \frac{1}{2}\,e^{-p}$$

$$= -\frac{1}{2}\,e^{-p}(p+1)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + k$$

bulunur.

2.1.1.1. *Uyarı*: Yukarda hesaplanması istenen ilkel fonksiyon, hesabı kolaylaştıran dönüşüm uygulanmadan

$$u = x^2 \quad \text{ve} \quad dv = x\, e^{-x^2} dx$$

seçilmek koşuluyla, doğrudan doğruya kısmi integrasyon yöntemini uygulamakla çözülebilir.

2.1.2. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$ ilkel fonksiyonunu bulmak.

$$u = \operatorname{arc\ tg} x \quad \text{ve} \quad x\, dx = dv$$

seçilirse,

$$v = \frac{x^2}{2}$$

bulunur. Bu durumda

$$\int x \operatorname{arc\ tg} x\, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\ tg} x - \frac{1}{2} \int x^2 \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\ tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\ tg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arc\ tg} x - x + \operatorname{arc\ tg} x) + k$$

elde edilir.

2.1.3. $\int (\operatorname{Log} x)^2 dx$ ilkel fonksiyonunu bulmak $(x > 0$ dır!).

$$\operatorname{Log} x = u \quad \text{ve} \quad \operatorname{Log} x\, dx = dv$$

alınırsa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$v = \text{Log } x\, dx$$

şeklindedir; şu halde kısmi integrasyon yöntemini uygulamadan önce ilk olarak bu ilkel fonksiyonu hesaplamak gerekir.

$$v = \int \text{Log } x\, dx$$

ilkel fonksiyonu da kısmi integrasyon yöntemini kullanarak hesaplanacaktır:

$$\text{Log } x = s \quad \text{ve} \quad dx = dt$$

seçilirse

$$t = x$$

olur ve (2.2) formülünü $s$ ve $t$ fonksiyonları için uygulayarak

$$\int \text{Log } x\, dx = x \text{ Log } x - \int x \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x \text{ Log } x - \int dx$$

$$= x\ (\text{Log } x - 1) + h$$

elde edilir. Buna göre, $h$ integrasyon sabitine sıfır değerini vererek,

$$v = x\ (\text{Log } x - 1)$$

alınabilir ve

$$\int (\text{Log } x)^2\, dx = \int (\text{Log } x)\ (\text{Log } x)\, dx = (\text{Log } x)\ (x\ (\text{Log } x - 1))$$

$$- \int x\ (\text{Log } x - 1)\ \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x\ (\text{Log } x)^2 - x\ (\text{Log } x) - \int (\text{Log } x - 1)\, dx$$

$$= x\ (\text{Log } x)^2 - x\ (\text{Log } x) - \int \text{Log } x\, dx + \int dx$$

$$= x\ (\text{Log } x)^2 - x\ (\text{Log } x) - x\ (\text{Log } x - 1) + x + k$$

$$= x\ ((\text{Log } x)^2 - 2\ (\text{Log } x + 2)) + k$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.1.3.1. *Uyarı :* Hesabı istenen ilkel fonksiyonun yazılış şekli, $x$ değişkeninin pozitif bir değişken kabul edilmesi gerektiğini gösterir; ayrıca bu husus sorunun ifadesinde de açıklanmıştır. Bu nedenle, doğal logaritmaların argümanlarının mutlak değerini almağa gerek yoktur.

2.1.4. - $\int x\sqrt{1+x}\,dx$ ilkel fonksiyonunu bulmak.

$$x = u \quad \text{ve} \quad \sqrt{1+x}\,dx = dv$$

olarak seçilirse ,

$$v = \int \sqrt{1+x}\,dx$$

olur ve $t = 1 + x$ dönüşümü uygulanırsa

$$v = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + h$$

şeklinde bulunur. $h$ integrasyon sabiti sıfıra eşit alınabilir ve kısmi integrasyon yöntemini uygulayarak

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

elde edilir. Son integral tekrar $t = 1 + x$ dönüşümünü uygulayarak hesaplanır ve

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\,\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}} + k$$

$$= \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\left(x - \frac{2}{5}(1+x)\right) + k$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= \frac{2}{3}\,(1+x)^{\frac{1}{2}}\,\frac{3x-2}{5} + k$$

elde edilir.

2.1.5. $x > 0$ halinde $\int \frac{3\,(\mathrm{Log}\,x+1)}{x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$ ilkel fonksiyonunu bulmak.

$$3\,(\mathrm{Log}\,k+1) = u \quad \text{ve} \quad \frac{dx}{x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\frac{1}{2}}} = dv$$

olarak seçilirse

$$v = \int \frac{dx}{x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\frac{1}{2}}}$$

dir. Bu ilkel fonksiyonu hesaplamak için $\mathrm{Log}\,x = t$ dönüşümünü uygulamak yeterlidir: gerçekten $dt = \frac{dx}{x}$ bulunur ve

$$v = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2\sqrt{t} = 2\sqrt{\mathrm{Log}\,x} + h$$

dir, $h$ integrasyon sabitini sıfır kabul etmekte bir sakınca olmadığına göre

$$v = 2\sqrt{\mathrm{Log}\,x} \quad \text{ve} \quad du = 3\,\frac{dx}{x}$$

tir. Şu halde

$$\int \frac{3\,(\mathrm{Log}\,x+1)}{x\,(\mathrm{Log}\,x)^{\frac{1}{2}}}\,dx = 6\,(\mathrm{Log}\,x+1)\,\sqrt{\mathrm{Log}\,x} - 6\int \frac{\sqrt{\mathrm{Log}\,x}}{x}\,dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= 6\left((\text{Log } x + 1)\ (\text{Log } x)^{\frac{1}{2}} - \int \frac{\sqrt{\text{Log } x}}{x}\, dx\right)$$

elde edilir. Son ifadede yer alan

$$\int \frac{\sqrt{\text{Log } x}}{x}\, dx$$

ilkel fonksiyonunu hesaplamak için $\text{Log } x = t$ dönüşümünü uygulamak yeterlidir: gerçekten, verilen ilkel fonksiyon

$$\int \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}\, t^{3/2} = \frac{2}{3}\ (\text{Log } x)^{\frac{3}{2}} + h$$

şeklinde hesaplanır. Şu halde

$$\int \frac{3\ (\text{Log } x + 1)}{x\ (\text{Log } x)^{\frac{1}{2}}}\, dx = 6\left((\text{Log } x + 1)\ (\text{Log } x)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left. - \frac{2}{3}\ (\text{Log } x)^{\frac{3}{2}}\right) + k$$

$$= 6\ (\text{Log } x)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \text{Log } x - \frac{2}{3}\,\text{Log } x\right) + k$$

$$= 6\ (\text{Log } x)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{3}\,\text{Log } x\right) + k$$

dır.

2.1.6. $\int x^2\ \text{Log}\ (x^4 - 1)\ dx$ ilkel fonksiyonunu bulmak.

Bazı hallerde kısmî integrasyon yöntemini uygulamadan, ve-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



rilen ilkel fonksiyonu daha elverişli bir şekle dönüştürmek gerekebilir: yukarıdaki ilkel fonksiyon böyle bir durum gösterir. $x^3 = u$ dönüşümünün uygulanması halinde

$$\int x^2 \operatorname{Log}(x^3 - 1)\, dx = \frac{1}{3} \int \operatorname{Log}(u^3 - 1)\, du$$

elde edilir. Şu halde hesaplanması istenen ilkel fonksiyon

$$\frac{1}{3}\int \operatorname{Log}(u^3 - 1)\, du = \frac{1}{3}\int \operatorname{Log}(|u-1|\,|u+1|)\, du$$

$$= \frac{1}{3}(\operatorname{Log}|u-1| + \operatorname{Log}|u+1|)\, du$$

şeklindedir. Bu kez, $u - 1 = x$ veya $u + 1 = x$ dönüşümleri sayesinde

$$\int \operatorname{Log}|u-1|\, du = \int \operatorname{Log} x\, dx$$

$$\int \operatorname{Log}|u+1|\, du = \int \operatorname{Log} x\, dx$$

elde edilir ve

$$\int \operatorname{Log} x\, dx$$

kısmî integrasyon yöntemi ile, $U = \operatorname{Log} x$, $V = x$ alarak,

$$\int \operatorname{Log} x\, dx = x \operatorname{Log} x - x = x(\operatorname{Log} x - 1) + h$$

şeklinde hesaplanır, $h$ integrasyon sabitesini sıfır kabul ederek

$$\int \operatorname{Log}|u-1|\, du = (u-1)(\operatorname{Log}|u-1| - 1)$$

$$\int \operatorname{Log}|u+1|\, du = (u+1)(\operatorname{Log}|u+1| - 1)$$

dir. Şu halde

$$\int x^2 \operatorname{Log}(x^3 - 1)\, dx = \frac{x^3+1}{3} \operatorname{Log}|x^3 + 1|$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$+\frac{x^3-1}{3}\operatorname{Log}|x^3-1|-\frac{1}{3}(x^3-1+x^3+1)+k$$

$$=\frac{x^3+1}{3}\operatorname{Log}|x^3+1|+\frac{x^3-1}{3}\operatorname{Log}|x^3-1|-\frac{2}{3}x^3+k$$

dir.

2.1.7. $\int x^2 e^{2x}\,dx$ ilkel fonksiyonunu bulmak.

Bazı hallerde kısmi integrasyon yönteminin tek bir uygulaması sonucu vermeğe yeterli olmayabilir ve yöntemi arka arkaya birkaç defa tekrarlamak zorunluğu ile karşılaşılabilir. Yukardaki ilkel fonksiyon böyle bir duruma örnektir. Gerçekten,

$$u=x^2 \quad \text{ve} \quad dv=e^{2x}\,dx$$

alınacak olursa,

$$du=2x\,dx \quad \text{ve} \quad v=\frac{1}{2}e^{2x}$$

olacağından

$$\int x^2 e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}\,dx$$

elde edilir.

$$\int x e^{2x}\,dx$$

ilkel fonksiyonunun bulunması için kısmi integrasyon yöntemini tekrar uygulamak gerekir: bu defa

$$u=x \quad \text{ve} \quad dv=e^{2x}\,dx$$

alınacak olursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$du = dx \quad ve \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$$

dir ve

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

elde edilir. Şu halde

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 1) e^{2x} + k$$

dir.

2.1.7.1. *Uyarı :* Bu yöntem, $P(x)$ bir polinomu göstermek üzere,

$$\int P(x) \; e^{ax} dx$$

şeklinde bütün ikel fonksiyonların hesabı için uygulanacaktır. Yukardaki örneğin gösterdiği gibi, sonuç , $Q(x)$, $P(x)$ ile aynı derecede olan bir polinomu göstermek üzere, $Q(x)\ e^{ax}$ şeklinde olan bir ifadeye eşittir. Bu özellikten yararlanarak, *belirsiz katsayılar* metodu ile $Q(x)$ polinomunu bulmak olanakları da vardır. Örneğin

$$\int (x^4 - 7x^3 + x - 1) \; e^{2x} dx$$

ikel fonksiyonunun hesaplanması istensin. Yukarda kaydedilenlere göre, bu ikel fonksiyon

$$(A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E) \; e^{2x}$$

şeklinde bir ifade ile verilmiştir. Bu ifadeyi türeterek

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)\,e^{5x}+5\,(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\,e^{5x}$$

$$=(5Ax^4+(4A+5B)x^3+(3B+5C)x^2+(2C+5D)x+(D+5E))\,e^{5x}$$

bulunur. Şu halde

$$5Ax^4+(4A+5B)x^3+(3B+5C)x^2+(2C+5D)x+(D+5E)$$

$$=x^4-7x^3+x-1$$

dir yani

$$5A=1$$
$$4A+5B=-7$$
$$3B+5C=0$$
$$2C+5D=1$$
$$D+5E=-1$$

dir. Bu durumda

$$A=\frac{1}{5};\quad B=-\frac{39}{25};\quad C=\frac{117}{125};\quad D=-\frac{109}{625};\quad E=-\frac{516}{3125}$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\int (x^4-7x^3+x-1)\,e^{5x}\,dx=\frac{1}{3125}\,(625x^4-4875x^3+2925x^2$$
$$+545x-516)\,e^{5x}+k$$

dır.

2.1.6. $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$ ilkel fonksiyonu bulmak,

$$u=e^{ax}\quad\text{ve}\quad dv=\cos bx\,dx$$

alarak

$$du=a\,e^{ax}\,dx\quad\text{ve}\quad v=\frac{1}{b}\sin bx$$

bulunur: şu halde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


(2.1.8.1) $$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

dir. Şu halde I ilkel fonksiyonunun hesaplanması

(2.1.8.2) $$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

ilkel fonksiyonunun hesaplanmasına indirgenmiş olur. Bu ilkel fonksiyon da kısmi integrasyon yöntemi ile bulunur. Bunun için

$$u = e^{ax} \quad \text{ve} \quad dv = \sin b x \, dx$$

almak yeterlidir:

$$du = a e^{ax} \quad \text{ve} \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx$$

dir ve

(2.1.8.3) $$J = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

elde edilir. şu halde (2.1.8.2) ile tanımlanan J sayesinde (2.1.8.1) ve (2.1.8.3) bağıntıları

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} J$$

$$J = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} I$$

sistemini teşkil ederler. Bu sistem

$$bI + aJ = e^{ax} \sin bx$$

$$-aI + bJ = -e^{ax} \cos bx$$

şekline girer ve

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$J = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$$

elde edilir.

2.1.8.1. *Uyarı :* Kısmî integrasyon yöntemi uygulandığında, birçok hallerde bir ilkel fonksiyonun bulunması, bu ilkel fonksiyonla yakından ilgili olan ikinci bir ilkel fonksiyonun hesaplanması ile sağlanır ve sonuçta, iki ilkel fonksiyon bir arada elde edilir. Yukarda incelenen ilkel fonksiyon buna bir örnektir. Böyle bir durum ortaya çıktığı zaman, verilen ilkel fonksiyon ek ilkel fonksiyona bağlıdır denir. Örneğin

$$I = \int e^{ax} \cos^2 x \, dx$$

ilkel fonksiyonunun hesaplanması için

$$J = \int e^{ax} \sin^2 x \, dx$$

ek ilkel fonksiyonunu ele almak yerinde olur.

$$I + J = \int e^{ax} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int e^{ax} \, dx$$

olduğundan

(a) $$I + J = \frac{1}{a} e^{ax}$$

elde edilir. Öte yandan

$$I - J = \int e^{ax} (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int e^{ax} \cos 2x \, dx$$

dir 2.1.8 deki sonuçları uygulayarak

(b) $$I + J = \frac{2 \sin 2x + a \cos 2x}{a^2 + 4} e^{ax}$$

elde edilir. (a) ve (b) den gerek I gerekse J ek ilkel fonksiyonunun ifadesi elde edilir:

$$I = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2 \sin 2x + a \cos 2x}{a^2 + 4} + \frac{1}{a} \right\} e^{ax} + k$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$J = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a} - \frac{2\sin 2x + a\cos 2x}{a^2+4}\right\}e^{ax} + k$$

dır.

2.2. *Alıştırmalar*

Kısmi integrasyon yönteminden yararlanarak aşağıdaki ilkel fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

Yanıt : $x \operatorname{Arc\,tg} x - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2) + k$

2. $\int x^2 \cos x\,dx$

Yanıt : $-x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + k$

3. $\int e \arcsin x\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}(x^2 \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} + k)$

4. $\int x^5\sqrt{1-x^2}\,dx \quad (|x| \leq 1)$

Yanıt : $-\frac{1}{3}x^4(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\frac{2}{5}x^3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$

$$+\frac{2}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}(1-x^2)^{\frac{7}{2}} + k$$

5. $\int \sqrt{x}\operatorname{Log} x\,dx$

Yanıt : $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}(\operatorname{Log} x - \frac{2}{3}) + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6. $\int x \sin x \, dx$

Yanıt : $-x \cos x + \sin x + k$

7. $\int x \, a^x \, dx$

Yanıt : $\frac{a^x}{\text{Log } a} \left(x - \frac{1}{\text{Log } a}\right) + k$

8. $\int (e^x + 2x)^2 \, dx$

Yanıt : $\frac{1}{2} e^{2x} + 4 (x - 1) e^x + \frac{4}{3} x^3 + k$

9. $\int \frac{x - \text{arc sin } x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

Yanıt : $-\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} (\text{Arc sin } x)^2 + k$

10. $\int \frac{\text{arc tg } \sqrt{x}}{x^2} \, dx$

Yanıt : $-\text{arc tg } \sqrt{x} \left(\frac{x + 1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}} + k$

11. $\int e^{-3x} \cos 2x \, dx$

Yanıt : $\frac{e^{-3x}}{5} (\sin 2x - \cos 2x) + k$

12. $\int x \, (\text{arc tg } x)^2 \, dx$

Yanıt : $\frac{1}{2} (1 + x^2) \, (\text{artg } x)^2 - x \, \text{arctg } x$

$+ \frac{1}{2} \text{Log } (1 + x^2) + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


13. $\int x^{\frac{3}{2}} \operatorname{Log} 3x\, dx$

Yanıt : $\frac{2}{25} x^{\frac{5}{2}} (5 \operatorname{Log} 3x - 2) + k$

14. $\int x \sec^2 x\, dx$

Yanıt : $x \operatorname{tg} x + \operatorname{Log} |\cos x| + k$

15. $\int \sec^3 x\, dx$

Yanıt : $\frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{Log} |\sec x + \operatorname{tg} x| + k$

16. $\int (\operatorname{Log} x)^3\, dx$

Yanıt : $x (\operatorname{Log} x)^3 - 3x (\operatorname{Log} x)^2 + 6x \operatorname{Log} x + 6x + k$

17. $\int x^3 \operatorname{Log} x\, dx$

Yanıt : $\frac{1}{3} x^3 (\operatorname{Log} x - \frac{1}{3}) + k$

18. $\int x^3 \operatorname{Log} x\, dx$

Yanıt : $\frac{1}{4} x^4 (\operatorname{Log} x - \frac{1}{4}) + k$

19. $\int x^3 (\operatorname{Log} x)^3\, dx$

Yanıt : $\frac{x^3}{27} ((3 \operatorname{Log} x)^2 - 2(3 \operatorname{Log} x) + 2) + k$

20. $p$ herhangi bir reel sayı olmak üzere $\int x^p \operatorname{Log} x\, dx$

Yanıt : $p \neq -1$ olması halinde

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} \operatorname{Log} x - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} + k; \; p = -1 \text{ ise}$$

$$\frac{1}{2} (\operatorname{Log} x)^2 + k$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

21. $\int \operatorname{arc\,sin} x\, dx$

Yanıt : $x \operatorname{Arc\,sin} x + \sqrt{1 - x^2} + k$

22. $\int \operatorname{Arg\,Sh} x\, dx$

Yanıt : $x \operatorname{Arg\,Sh} x - \sqrt{1 + x^2} + k$

23. $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$

Yanıt : $x \operatorname{tg} x + \operatorname{Log} |\cos x| + k$

24. $\int x \operatorname{Ch} \frac{x}{2}\, dx$

Yanıt : $2x \operatorname{Sh} \frac{x}{2} - 4 \operatorname{Ch} \frac{x}{2} + k$

25. $\int x^2 \operatorname{arc\,tg} x\, dx$

Yanıt : $\frac{x^3}{3} \operatorname{Arc\,tg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \operatorname{Log} (1 + x^2) + k$

26. $\int \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1})\, dx$

Yanıt : $x \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} + k$

27. $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$

Yanıt : $x \operatorname{tg} x + \operatorname{Log} |\cos x| - \frac{1}{2} x^2 + k$

28. $\int \cos x \operatorname{Log} (1 + \cos x)\, dx$

Yanıt : $\sin x \operatorname{Log} (1 + \cos x) + x - \sin x + k$

29. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Yanıt : $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{a} + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



30. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}a^2\,\text{Arg Sh}\,\frac{x}{a}+k$

31. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}a^2\,\text{Arg Ch}\,\frac{x}{a}+k$

32. $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}+2\,\text{Arg Sh}\,\frac{x+1}{2}+k$

33. $\int \sqrt{x(3x-2)}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{6}(3x-1)\sqrt{3x^2-2x}-\frac{1}{18}\sqrt{3}\,\text{Arg Ch}\,(3x-1)+k$

34. $\int x^3 e^{2x}\,dx$

Yanıt : $(\frac{x^3}{2}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{4}-\frac{3}{8})\,e^{2x}+k$

35. $\int e^{\arcsin x}\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}e^{\arcsin x}(x+\sqrt{1-x^2})+k$

36. $\int \text{Sh}\,x\cos x\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{2}(\text{Ch}\,x\cos x+\text{Sh}\,x\sin x)+k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

37. $\int \operatorname{Ch} x \sin x \, dx$

Yanıt : $\frac{1}{2} (\operatorname{Sh} x \sin x - \operatorname{Ch} x \cos x) + k$

38. $\int (\operatorname{Arc} \sin x)^2 \, dx$

Yanıt : $x (\operatorname{Arc} \sin x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2} \operatorname{Arc} \sin x - 2x + k$

39. $\int \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\sqrt[3]{x}) \, dx$

Yanıt : $x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{2} \operatorname{Log} (1 + x^{\frac{2}{3}}) - \frac{1}{2} x^{\frac{2}{3}} + k$

40. $\int \frac{x^3 \operatorname{Log} x}{(x^3 + 1)^3} \, dx$

Yanıt : $- \frac{\operatorname{Log} x}{6(x^3 + 1)^2} + \frac{1}{18} \operatorname{Log} \left| \frac{x^3}{x^3 + 1} \right| + \frac{1}{18 (x^3 + 1)} + k$

## 3 — RASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRASYONU BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ

Bir $x$ değişkeninin rasyonel fonksiyonları, aynı $x$ değişkeninin $h(x)$ ve $g(x)$ gibi iki polinomunun oranı olarak

$$R(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlardır. $h(x)$ polinomunun derecesi $g(x)$ polinomunun derecesinden küçük olan rasyonel fonksiyonlarda, eğer payda çarpanlara ayrılabilirse $\frac{h(x)}{g(x)}$ rasyonel

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


fonksiyonu paydaları daha basit olan birtakım oranların toplamı şeklinde yazılabilir. Bu işlem yardımıyla rasyonel fonksiyonun şekil fonksiyonunu bulma işlemi kolaylaşmış olur.

Halbuki *cebirin esas teoremi* adı altında bilinen klasik bir teoreme göre, $n$ - inci dereceden reel katsayılı her cebirsel denklemin tam $n$ tane kökü vardır: ancak bu köklerin hepsi reel sayılar olmayabilirler. Reel olmayan kökler, bu tür denklemlerde daima çiftler şeklinde gelir ve

$$b^2 - 4ac < 0$$

olacak şekilde reel katsayılı

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

tipinden kuadratik denklemlerin kökleri olarak gösterilebilirler. Buna göre, reel katsayılı her polinom, reel köklere tekabül eden reel katsayılı bir takım lineer çarpanlara ve reel olmayan kök çiftlerine tekabül eden reel katsayılı kuadratik çarpanlara ayrılır, yani daima

$$g(x) = (a_1 x + b_1)\ (a_2 x + b_2) \dots (a_n x + b_n)\ (A_1 x^2 + 2B_1 x + C_1)$$

1) $$(A_2 x^2 + 2B_2 x + C_2) \dots (A_r x^2 + 2B_r x + C_r)$$

şeklinde bir ayrılış vardır ve bu ayrılış tektir. Bu duruma göre, rasyonel fonksiyonları daha basit şekillere sokma olanakları doğar.

1. *Örnekler*

1.1. $$\frac{A}{(ax + b)\ (cx + d)}$$

rasyonel fonksiyonu daima

$$\frac{B}{ax+b} + \frac{C}{cx+d}$$

şeklinde iki kesirin toplamı olarak yazılabilir.

Gerçekten,

$$\frac{B}{ax+b} + \frac{C}{cx+d} = \frac{B\,(cx + d) + C\,(ax + b)}{(ax + b)\ (cx + d)}$$

olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$B(cx + d) + C(ax + b) \equiv A$$

olacak şekilde B ve C sayıları seçilecek olursa gayeye erişilmiş olur. Halbuki son idantiklik

$$(cB + aC)x + (dB + bC) \equiv A$$

şekline girer yani

$$cB + aC = 0$$
$$dB + bC = A$$

sistemini sağlayan B ve C sayılarını belirlemek gerekir. İlk denklemden elde edilen

$$C = -\frac{c}{a}B$$

ikinci denklemde yerine konduğunda

$$\frac{ad - bc}{a}B = A$$

yani

$$B = \frac{a}{ad - bc}A$$
$$C = \frac{-a}{ad - bc}A$$

dır. B ve C nin bu şekilde seçilmesi ile istenen sonuca varılır.

Bu konunun bir uygulaması olarak

$$\int \frac{3\,dx}{x^2 + x - 2}$$

ikel fonksiyonunun bulunması problemi ele alınsın. İkel fonksiyonu aranan fonksiyon

$$\frac{3}{x^2 + x - 2} = \frac{3}{(x - 1)(x + 2)}$$

rasyonel fonksiyonu olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

yazılabilir. A ve B sayılarını bulmak için

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A-B)}{x^2+x-2}$$

olduğunu kaydetmek yetterlidir zira bu son yazılıştan

$$(A+B)x+(2A-B)=3$$

elde edilir yani

$$A+B=0$$

$$2A-B=3$$

bulunur. Bu sistemin çözümü, iki denklemin toplanmasından görüleceği gibi,

$$A=1$$

$$B=-1$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{3}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

elde edilir ve toplamın integrali integrallerin toplamına eşit olduğundan

$$\int\frac{3\,dx}{x^2+x-2}=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}$$

dır. İlk integralde $u=x-1$, ikincisinde $v=x+2$ dönüşümünü uygulayarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \frac{3\,dx}{x^2+x-2} = \text{Log}\,|x-1| - \text{Log}\,|x+2| + k$$

$$= \text{Log}\,\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + \text{Log}\,c$$

$$= \text{Log}\,c\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$$

bulunur.

3.1.2. $$\frac{Ax+B}{(ax+b)\,(cx+d)}$$

rasyonel fonksiyonu daima

$$\frac{C}{ax+b} + \frac{D}{cx+d}$$

şeklinde iki kesirin toplamı olarak yazılabilir.

Gerçekten, aynı yöntemle

$$\frac{Ax+B}{(ax+b)\,(cx+d)} = \frac{C\,(cx+d) + D\,(ax+b)}{(ax+b)\,(cx+d)}$$

yani

$$Ax + B = (cC + aD)\,x + (dC + bD)$$

elde edilir ve buradan

$$cC + aD = A$$

$$dC + bD = B$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemden $C$ ve $D$ yi çözmekle istenen elde edilmiş olur.

Bu konunun bir uygulaması olarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\int \frac{1-x}{6x^2-x-2}\,dx$$

ilkel fonksiyonunun bulunması problemi ele alınsın. İlkel fonksiyonu aranan fonksiyon

$$\frac{1-x}{6x^2-x-2}$$

rasyonel fonksiyonudur. $6x^2-x-2$ polinomu

$$6x^2-x-2=(2x+1)\ (3x-2)$$

şeklinde iki çarpana ayrılabileceğinden

$$\frac{1-x}{6x^2-x-2}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{3x-2}$$

yazılabilir. A ve B sayılarını belirlemek için

$$1-x=A(3x-2)\ +\ B(2x+1)$$

ıdantikliğini çözmek gerekir. Bu ıdantiklik

$$3A+2B=-1$$
$$-2A+\ B=\ 1$$

denklem sistemini belirtir ve buradan

$$A=-\frac{3}{7};\quad B=\frac{1}{7}$$

elde edilir. Şu halde

$$\int \frac{1-x}{6x^2-x-2}\,dx=\int\left(-\frac{3}{7}\,\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{7}\,\frac{1}{3x-2}\right)dx$$

dir ve toplamın integrali integrallerin toplamına eşittir teoremini uygulayarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \frac{1-x}{6x^2-x-2}\,dx = -\frac{3}{7}\int \frac{dx}{2x+1} + \frac{1}{7}\int \frac{dx}{3x-2}$$

bulunur. İlk integrale $u = 2x + 1$, ikincisine $v = 3x - 2$ dönüşümünü uygulayarak

$$\int \frac{1-x}{6x^2-x-2}\,dx = -\frac{3}{14}\operatorname{Log}|2x+1| + \frac{1}{21}\operatorname{Log}|3x-2| + k$$

$$= \operatorname{Log}\frac{\sqrt[21]{|3x-2|}}{\sqrt[14]{|2x-1|^3}} + \operatorname{Log} c$$

$$= \operatorname{Log} c\,\frac{\sqrt[21]{|3x-2|}}{\sqrt[14]{|2x-1|^3}}$$

elde edilir.

3.1.3. Verilen rasyonel fonksiyonun ifadesinde yer alan $g$ fonksiyonu birbirlerine eşit çarpanlara ayrılabilir bu şekilde tekrarlanan çarpanlara tekabül eden kökün birden fazla sayılması gerektiğinden, bu tür köklere *çokkat kök* denir ve tekrarlanan çarpanın kuvvetine, kökün *çokkatlılığı* denir. Bu durumda da rasyonel fonksiyonu bir toplam olarak göstermek mümkündür. Örneğin

$$\frac{Hx+K}{(x-a)^n} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \cdots + \frac{M}{(x-a)^n}$$

şeklinde bir ayrılışı yazmak mümkündür.

Bu yöntemi uygulamak üzere

$$\int \frac{2\,dx}{x^3+2x^2+x}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


ilkel fonksiyonunun bulunması problemi ele alınsın.

İlkel fonksiyonu aranan rasyonel fonksiyonun

$$\frac{2}{x^3+2x^2+x} = \frac{2}{x(x^2+2x+1)}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

şeklinde yazılabilmesi için

$$2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

idantikliğini gerçekleyen $A$, $B$ ve $C$ sayılarının bulunması gerekir. İdantiklik

$$2 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

şekline girdiğinden

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A + B + C &= 0 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü

$$A = 2, \quad B = -2, \quad C = -2$$

olduğundan

$$\frac{2}{x^3+2x^2+x} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\int \frac{2\,dx}{x^3+2x^2+x} = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}\right) dx$$

yazılabilir ve tekrar toplamın integralinin integrallerin toplamına eşit olduğunu ifade eden teoremi uygulamak suretiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \frac{2\,dx}{x^3+2x^2+x} = 2\int \frac{dx}{x} - 2\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

yazılır. İlk integralden ilkel fonksiyon derhal elde edilir; ikincisi $u = x+1$ dönüşümünü uygulamak suretiyle tekrar bir logaritma olarak elde edilir ve üçüncüsü ise bir kuvvet fonksiyonunun ilkel fonksiyonuna aynı dönüşümle indirgenir. Şu halde

$$\int \frac{2\,dx}{x^3+2x^2+x} = 2\,\mathrm{Log}\,|x| - 2\,\mathrm{Log}\,|x+1| + \frac{2}{x+1} + k$$

$$= \mathrm{Log}\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2}{x+1} + k$$

dır.

3.1.4. $R(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ rasyonel fonksiyonunda yer alan $g(x)$ polinomunun reel çarpanlara ayrılamayan $(ax^2+2bx+c)^n$ şeklinde bir çarpanı varsa

$$\frac{Hx+K}{(ax^2+2bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+2bx+c} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+2bx+c)^n}$$

şeklinde bir toplama daima indirgenebilir.

Bu yöntemi uygulamak için

$$\int \frac{11x^2-6x+3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$$

ilkel fonksiyonunun bulunması problemi ele alınsın.

$$\frac{11x^2-6x+3}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

olacak şekilde $A$, $B$, $C$, $D$ ve $E$ sayılarını belirlemek mümkündür. Gerçekten

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$11\ x^3 - 6x + 3 = A(x^2+1)^2 + (Bx + C)\ (2-2)\ (x^2+1) + (Dx + E)\ (x-2)$$

yani

$$11\ x^3 - 6x + 3 = (A + B)\ x^4 + (C - 2B)\ x^3 + (2A+B-2C+D)\ x^2 + (C-2B+E-2D)\ x + (A-2E-2C)$$

elde edilir. Şu halde katsayıları belirtecek olan denklem sistemi

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2B + C &= 0 \\ 2A + B - 2C + D &= 11 \\ -2B + C - 2D + E &= -6 \\ A - 2C - 2E &= 3 \end{aligned}$$

şeklindedir ve çözüldüğünde

$$A = \frac{7}{5};\ B = -\frac{7}{5};\ C = -\frac{14}{5};\ D = 4,\ E = 2$$

elde edilir.

Buna göre

$$\int \frac{11\ x^3 - 6x + 3}{(x-2)\ (x^2+1)^2}\,dx = \frac{7}{5}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{7}{5}\int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}$$

dir. $u = x - 2$ dönüşümü ile

$$I_1 = \int \frac{1}{x-2}\,dx = \text{Log}\,|x-2| + k$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I_1 = \int \frac{x+2}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{1+x^2}$$

dir ve ilk integral $u = x^2 + 1$ dönüşümü ile hesaplanır, ikincisi ise Arctg $x$'e eşittir. Şu halde

$$I_2 = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,(x^2+1) + 2\,\text{Arctg}\,x + k$$

$$= \text{Log}\,\sqrt{x^2+1} + 2\,\text{Arctg}\,x + k$$

dır.

$$I_3 = \int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

dır: İlk integral tekrar $u = x^2 + 1$ dönüşümü ile hesaplanır; ikincisi ise

$K_2$ ile gösterilecek olan özel bir integraldir.

$$K_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

integrali kısmi integrasyon yöntemi ile hesaplanabilir: gerçekten

$$u = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{ve} \quad dv = dx$$

alınırsa,

$$du = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx \quad \text{ve} \quad v = x$$

bulunur. Şu halde

$$K_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} - \left(\int \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\left(\int \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}\,dx\right.$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,dx - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2K_1 - 2K_2$$

olup

$$2K_2 = \frac{x}{1+x^2} + K_1$$

yani

$$K_2 = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} x$$

elde edilir. Buna göre, başta verilen ilkel fonksiyon

$$\int \frac{11x^2 - 6x + 3}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{7}{5}\operatorname{Log}|x-2| - \frac{7}{5}\operatorname{Log}\sqrt{x^2+1}$$

$$- \frac{14}{5}\operatorname{Arctg} x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} + \operatorname{Arctg} x + k$$

$$= \operatorname{Log}\left[\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+1}}\right]^{\frac{7}{5}} + \frac{x-2}{x^2+1} - \frac{9}{5}\operatorname{Arctg} x + k$$

elde edilir.

3.1.5. $R(x) = \dfrac{h(x)}{g(x)}$ rasyonel fonksiyonunun ilkel fonksiyonu incelenmek istendiğinde, $h(x)$ polinomunun derecesi $g(x)$ polinomunun derecesinden büyük ise, yukarıda açıklanan yöntemlere başvurmadan önce pay paydaya bölünerek, $h(x)$ polinomunun derecesi $g(x)$ 'inkinden küçük olmak üzere

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$R(x) = P(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$

şekline getirilir: bu ifadede yer alan $P(x)$, $x$ cinsinden bir polinomdur.

Bu yöntemi uygulamak için

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{2x^2 + 3x + 1}\, dx$$

ilkel fonksiyonunun bulunması problemi ele alınsın. İlkel fonksiyonu bulunması gereken rasyonel fonksiyon

$$R(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{2x^2 + 3x + 1}$$

fonksiyonudur: paydaki polinomunun derecesi paydakinden büyük olduğundan pay paydaya bölünerek

$$R(x) = x - \frac{x + 1}{2x^2 + 3x + 1}$$

bulunur.

$$\frac{x + 1}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{x + 1}{(x + 1)\,(2x + 1)} = \frac{1}{2x + 1}$$

olduğundan

$$R(x) = x - \frac{1}{2x+1}$$

dır ve dolayısıyla

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{2x^2 + 3x - 1}\, dx = \int \left(x - \frac{1}{2x+1}\right) dx = \int x\, dx - \int \frac{dx}{2x + 1}$$

elde edilir: ilk integral derhal, ikincisi ise $u = 2x + 1$ dönüşümü ile hesaplanabilir ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{2x^2 + 3x - 1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Log}|2x+1| + k$$

$$= \frac{1}{2}\,(x^2 - \operatorname{Log}|2x+1|) + k$$

bulunur.

3.2. *Alıştırmalar*

İntegrandları rasyonel fonksiyonlar olan aşağıdaki ilkel fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\int \frac{dx}{x^2-4}$ Yanıt : $\operatorname{Log} c \sqrt[4]{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}$

2. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6}$ Yanıt : $\operatorname{Log} c \sqrt[5]{\left|\frac{x+1}{x+6}\right|}$

3. $\int \frac{dx}{(x-3)\,(x+2)}$ Yanıt : $\operatorname{Log} c \sqrt[5]{\left|\frac{x-3}{x+2}\right|}$

4. $\int \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}$

Yanıt : $\operatorname{Log}\left(c\,\frac{\sqrt{|x+1|}\cdot\sqrt{|x+3|}}{|x+2|}\right)$

5. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+x}$ Yanıt : $\operatorname{Log}\frac{cx^2}{|x+1|}$

6. $\int \frac{(x+2)\,dx}{(2x+1)\,(x+1)}$ Yanıt : $\operatorname{Log}\left|\sqrt[3]{\frac{(2x+1)^2}{(x+1)}}\right| + c$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7. $\int \frac{(16x^2 - 4x - 81)\,dx}{(x-3)\,(x+4)\,(x-1)}$

Yanıt : $3 \operatorname{Log} |x-3| + 5 \operatorname{Log} |x+4| + 7 \operatorname{Log} |x-1| + k$

$= \operatorname{Log} c\,|(x-3)^3\,(x+4)^5\,(x-1)^7|$

8. $\int \frac{x^4\,dx}{(2+x)\,(x^2-1)}$

Yanıt : $\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{6} \operatorname{Log} \left|\frac{x-1}{(x+1)^8}\right| + \frac{16}{3} \operatorname{Log} |x+2| + k$

9. $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx$

Yanıt : $\frac{x^2}{2} + x + \operatorname{Log} |x| - \frac{2}{3} \operatorname{Log} |x-2| - \frac{1}{3} \operatorname{Log} |x+1| + k$

10. $\int \frac{2x^2 - 3x + 3}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$

Yanıt : $3 \operatorname{Log} |x| - \frac{2}{x-1} - \operatorname{Log} |x-1| + k$

11. $\int \frac{x^2 + 1}{x(x-1)^2}\,dx$

Yanıt : $2 \operatorname{Log} |x-1| - \operatorname{Log} |x| - \frac{x}{(x-1)^2} + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


12. $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$

Yanıt : $-\frac{1}{3}\operatorname{Log}|x+1| + \frac{1}{6}\operatorname{Log}(x^2-x+1)$

$+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{Arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + k$

13. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\ (x^2+4)}$

Yanıt : $\frac{1}{3}\operatorname{Arctg}\ x - \frac{1}{6}\operatorname{Arctg}\frac{x}{2} + k$

14. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)\ (x^2+4x+5)}$

Yanıt : $\frac{2}{3\sqrt{7}}\operatorname{Arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3}\operatorname{Arctg}(x+2) + k$

15. $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2\,(x+1)}\,dx$

Yanıt : $\operatorname{Log}|x+1| - \frac{x+2}{2(x^2+2x+3)}$

$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$

16. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}\,dx$

Yanıt : $5x + \operatorname{Log}\left((x^2(x+2)^4)\ |x-2|^3\right) + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

17. $\int \frac{dx}{(x+1)\ (x+2)^2\ (x+3)^3}$

Yanıt : $\frac{9x^2+50x+68}{4\ (x+2)\ (x+3)^2} + \frac{1}{8} \operatorname{Log} \left| \frac{(x+1)\ (x+2)^{14}}{(x+3)^{17}} \right| + k$

## 4 — RASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRASYONUNA İNDİRGENEBİLEN İNTEGRALLER

### 4.1. $\int R\ (\sin x, \cos x)\ dx$ şeklinde olan integraller

$$\int R\ (\sin x, \cos x)\ dx$$

şeklinde olan ikel fonksiyonlar

$$y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

dönüşümü ile $y$ değişkeninin bir rasyonel fonksiyonunun ikel fonksiyonuna indirgenebilirler. Gerçekten, trigonometrik ıdantiklikler

$$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}; \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

ve dönüşümün tarım bağıntısı kullanılarak

$$dx = \frac{2\,dy}{1+y^2}$$

elde edilir.

#### 4.1.1. *Örnekler*

1.1.1. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$ ikel fonksiyonunun hesaplanması.

Yukarda açıklanan dönüşümlerle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dy}{1+y^2}}{\frac{5+5y^2+3-3y^2}{1+y^2}} = \int \frac{2\,dy}{2y^2+8}$$

$$= \int \frac{dy}{y^2+4}$$

$$= \int \frac{dy}{4\,(\frac{y^2}{4}+1)} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{dy}{2}}{(\frac{y}{2})^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{1+y^2}$$

elde edilir ve $v = \frac{y}{2}$ dönüşümü ile elde edilen bu son ifade derhal integre edilerek

$$\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} v + k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2} + k$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (\frac{1}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + k$$

bulunur.

4.1.2.2. $\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması

Yukarda açıklanan dönüşümlerle

$$\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left( \frac{1+y^2+1-y^2}{1+y^2} \Big/ \frac{8y^2}{(1+y^2)^2} \right) \frac{2\,dy}{1+y^2}$$

$$= \int \frac{4\,dy}{(1+y^2)^2} \cdot \frac{(1+y^2)^2}{8y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1+y^2}{y^2}\,dy$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2y^2} + \operatorname{Log} y \right) + k$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \frac{1}{2}\left(\text{Log}\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\,\text{cotg}^2\,\frac{x}{2}\right) + k$$

elde edilir.

4.1.1.3. $\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması.

Verilen ilkel fonksiyon, bilinen trigonometrik idantiklikler sayesinde

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 2\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{2\sin x\,(1+\cos x)}$$

şekline girer ve yukarda açıklanan dönüşümlerle

$$\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dy\,/\,(1+y^2)}{\frac{2y}{1+y^2}\,\frac{1+y^2+1-y^2}{1+y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+y^2}{2y}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{4}\int y\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left(\text{Log}\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}\,\text{tg}^2\,\frac{x}{2}\right) + k$$

elde edilir.

4.1.2. *Alıştırmalar*

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$ Yanıt : $\text{Log}\left|\text{tg}\,\frac{x}{2}\right| + k$

2. $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$ Yanıt : $\frac{1}{5}\,\text{Log}\left|\frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\text{tg}\,\frac{x}{2}-2}\right| + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


3. $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$ Yanıt : $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + k$

4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ Yanıt : $-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x + k$

5. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$ Yanıt : $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right) + k$

6. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$ Yanıt : $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \operatorname{Log}|\cos x| + k$

7. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$ Yanıt : $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + k$

8. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ Yanıt : $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \operatorname{tg} x + k$

9. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$ Yanıt : $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg} x) + k$

10. $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x}\, dx$ Yanıt : $\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + \operatorname{Log}|\operatorname{tg} x|) + k$

4.1.3. *Uyarı*

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R^*(\sin^2 x, \cos^2 x)\, dx$$

ise

$$t = \operatorname{tg} x$$

dönüşümü ile bazen daha kısa ve kolay integrasyon yapılabilir. Gerçekten,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

bağıntısından

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$t^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

yani

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

elde edilir ve dönüşümün tanımından

$$dt = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx$$

yani

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

bulunur.

Örneğin

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2}} = \int \frac{(1+t^2)\, dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + k$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x + k$$

dır. Bu yöntem için alıştırma olarak Alıştırma 4.1.2. de 3), 4), 8) ve 9) da sorulan integraller hesaplanabilir.

4.2. $\int R(e^x)\, dx$ *şeklinde olan integraller*

$$\int R(e^x)\, dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonlar

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$y = e^x$$

dönüşümü ile $y$ değişkeninin bir rasyonel fonksiyonunun ikinci fonksiyonuna indirgenebilir çünkü dönüşümün tanım bağıntısından

$$dy = e^x\,dx$$

elde edilir.

4.2.1. *Örnekler*

4.2.1.1. $\int \dfrac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1}\,dx$ ikinci fonksiyonunun hesaplanması.

Yukarıda açıklanan dönüşüm ile

$$\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1}\,dx = \int \frac{y^2 - 2y}{y^2 + 1}\,\frac{dy}{y} = \int \frac{y - 2}{y^2 + 1}\,dy$$

$$= \int \frac{y\,dx}{y^2 + 1} - 2\int \frac{dy}{1 + y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{y^2 + 1} - 2\int \frac{dy}{1 + y^2}$$

elde edilir: sonuç olarak elde edilen toplamda gözüken ilk integral $u = y^2 + 1$ dönüşümü ile, ikincisi ise doğrudan doğruya hesaplanarak

$$\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} + 1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 + y^2) - 2\operatorname{arctg} y + k$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1 + e^{2x}) - 2\operatorname{arctg}(e^x) + k$$

bulunur.

4.2.1.2. $\int \dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}\,dx$ ikinci fonksiyonunun hesaplanması.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukarda açıklanan dönüşüm ile

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx = \int \frac{y^2}{y^2-1}\,\frac{dy}{y} = \int \frac{y^2}{y^2-1}\,dy$$

$$= \int \frac{y^2-1+1}{y^2-1}\,dy = \int \frac{y^2-1}{y^2-1}\,dy + \int \frac{dy}{y^2-1}$$

$$= \int dy + \int \frac{dy}{(y+1)(y-1)}$$

$$= \int dy - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y-1}$$

$$= y - \frac{1}{2}\operatorname{Log}|y+1| + \frac{1}{2}\operatorname{Log}|y-1| + k$$

$$= e^x + \operatorname{Log}\left|\frac{e^x+1}{e^x+1}\right| + k$$

elde edilir.

4.2.2. *Alıştırmalar*

1. $\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^x+2}$

Yanıt : $\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4\operatorname{Log}(e^x+2) + k$

2. $\int \frac{e^{2x}\,5x}{e^x-1}$

Yanıt : $e^x + \operatorname{Log}|e^x-1| + k$

3. $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx$

Yanıt : $2\operatorname{Log}|e^x-1| + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



4. $\int \frac{e^x\,dx}{(1+e^{2x})^2}$

Yanıt : $\frac{e^x}{2(1+e^{2x})} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + c$

5. $\int \frac{dx}{1+3e^x+2e^{2x}}$

Yanıt : $x + \operatorname{Log}\frac{e^x+1}{(2e^x+1)^2} + c$

6. $\int \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$

Yanıt : $\operatorname{Log}\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} + \operatorname{arctg} e^x + c$

4.2.3. *Uyarı :*

$$\int R(\operatorname{Sh} x, \operatorname{Ch} x)\,dx$$

şeklinde olan bütün ilkel fonksiyonlar, hiperbolik fonksiyonların tanımını kullanarak,

$$\int R(e^x)\,dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonlara indirgenebilirler.

Ayrıca

$$\int R(\operatorname{Sh} x, \operatorname{Ch} x)\,dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonlar, 4.1. de açıklanan yönteme benzer bir yöntemle doğrudan doğruya da integre edilebilirler. Gerçekten

$$t = \operatorname{Th}\frac{x}{2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dönüşümünün kullanılması halinde, hiperbolik fonksiyonların sağladıkları bağıntılardan dolayı

$$\operatorname{Ch} x = \frac{1 + \operatorname{Th}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{Th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\,;\quad \operatorname{Sh} x = \frac{2 \operatorname{Th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{Th}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

ve tanım bağıntısından dolayı da

$$dx = \frac{2\,dt}{1 - t^2}$$

elde edilir.

Örneğin

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^3 x}$$

ikili fonksiyonunun hesaplanması problemi ele alınsın.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{Sh}^3 x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1 - t^2}}{\frac{(2t)^3}{(1 - t^2)^3}} = \int \frac{2\,dt}{1 - t^2} \cdot \frac{(1 - t^2)^3}{(2t)^3}$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{(1 - t^2)^2\,dt}{t^3}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ \int \frac{dt}{t^3} - 2 \int \frac{dt}{t} + \int t\,dt \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{t^2} - 2 \operatorname{Log} t + \frac{t^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left( \operatorname{Th}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{Coth}^2 \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left| \operatorname{Th} \frac{x}{2} \right| + k$$

dır. Halbuki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\frac{1}{8}\left(\mathrm{Th}^2\frac{x}{2}-\mathrm{Coth}^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{Sh}^4\frac{x}{2}}{\mathrm{Ch}^2\frac{x}{2}}-\frac{\mathrm{Ch}^2\frac{x}{2}}{\mathrm{Sh}^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Sh}^4\frac{x}{2}-\mathrm{Ch}^4\frac{x}{2}}{4\,\mathrm{Sh}^2\frac{x}{2}\,\mathrm{Ch}^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\left(\mathrm{Sh}^2\frac{x}{2}-\mathrm{Ch}^2\frac{x}{2}\right)\left(\mathrm{Sh}^2\frac{x}{2}+\mathrm{Ch}^2\frac{x}{2}\right)}{\mathrm{Sh}^2 x}=-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{Ch}\,x}{\mathrm{Sh}^2 x}$$

olup, istenen ilkel fonksiyon

$$\frac{dx}{\mathrm{Sh}^2 x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{Ch}\,x}{\mathrm{Sh}^2 x}+\mathrm{Log}\left|\mathrm{Th}\,\frac{x}{2}\right|\right)+k$$

şeklindedir.

İkinci bir örnek olarak

$$\int \mathrm{Sh}^3 x\,dx$$

ilkel fonksiyonu aranısın. Yukarda açıklanan dönüşüm sayesinde

$$\int \mathrm{Sh}^3 x\,dx=\int\frac{(2t)^3}{(1-t^2)^3}\,\frac{2\,dt}{1-t^2}=16\int\frac{t^3\,dt}{(1-t^2)^4}$$

$$=16\int\frac{(t-t^3+t)\,dt}{(1-t^2)^4}=16\left(\int\frac{t\,dt}{(1-t^2)^3}+\int\frac{t\,dt}{(1-t^2)^4}\right)$$

$$=-8\left(\int\frac{-2t\,dt}{(1-t^2)^3}+\int\frac{-2t\,dt}{(1-t^2)^4}\right)$$

elde edilir. $u=1-t^2$ dönüşümünün uygulanması halinde $-2t\,dt=du$ ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \mathrm{Sh}^3 x\,dx = -8\left(\int u^{-3}\,du + \int u^{-4}\,du\right) = -8\left(\frac{1}{-2u^2} + \frac{1}{-3u^3}\right)$$

$$= 8\,\frac{3u+2}{6u^3} = 4\,\frac{3(1-t^2)+2}{3\,(1-t^2)^3}$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{5 - 3\,\mathrm{Th}^2\,\frac{x}{2}}{(1-\mathrm{Th}^2\,\frac{x}{2})^3} + k$$

elde edilir.

4.2.3.1. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki hiperbolik fonksiyonlu ilkel fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\int \frac{dx}{\mathrm{Ch}\,x}$

Yanıt : $2 \operatorname{arc\,tg} e^x + k$

2. $\int \frac{dx}{\mathrm{Sh}\,x}$

Yanıt : $\mathrm{Log}\,\mathrm{Th}\,\frac{x}{2} + k$

3. $\int \frac{dx}{\mathrm{Th}^2 x}$

Yanıt : $x - \mathrm{Coth}\,x + k$

4. $\int \mathrm{Ch}^4 x\,dx$

Yanıt : $\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{Sh}\,4x}{4} + 2\,\mathrm{Sh}\,2x + 3x\right) + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



4.3. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ *şeklinde olan integraller.*

$$\int R\,(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonlar

$$t^n = ax + b$$

dönüşümü kullanılarak integre edilir.

4.3.1. *Örnekler*

4.3.1.1. $\int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması.

Bu ilkel fonksiyon $(2x-3)^{\frac{1}{6}}$ irrasyonel ifadesinin bir rasyonel fonksiyonu olduğuna göre

$$t^6 = 2x - 3$$

dönüşümü kullanılır.

$$x = \frac{t^6+3}{2}$$

dan

$$dx = 3t^5\,dt$$

ve

$$(2x-3)^{\frac{1}{2}} = t^3\,; \quad (2x-3)^{\frac{1}{3}} = t^2$$

dir. Şu halde

$$\int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1} = \int \frac{3t^8\,dt}{t^2+1}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{t^6}{1+t^2} = t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{1+t^2}$$

olduğuna göre

$$\int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}\,dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1} = 3\left(\int t^5\,dt - \int t^4\,dt + \int t^2\,dt - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2}\right)$$

$$= \left(\frac{t^7}{2} - \frac{t^6}{5} + \frac{t^3}{3} - t + x\,\mathrm{arctg}\,t\right) + k$$

$$= 3\left(\frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{6}} - (2x-3)^{\frac{1}{6}} + \mathrm{arctg}\,(2x-3)^{\frac{1}{6}}\right) + k$$

dır.

4.3.1.2 $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\,(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$ ikel fonksiyonunun hesaplanması.

Bu fonksiyon $\sqrt[6]{x}$ in bir rasyonel fonksiyonu olarak yazılabileceğinden,

$$t^6 = x$$

dönüşümü uygulanacaktır.

$$dx = 6t^5\,dt$$

olduğundan

$$\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\,(1+\sqrt[3]{x})}\,dx = \int \frac{(t^6 + t^4 + t)\,6t^5\,dt}{t^6\,(1+t^2)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$= 6 \int \frac{t^5 + t^3 + 1}{t^2 + 1}\, dt = 6 \int \left(t^3 + \frac{1}{1 + t^2}\right) dt$$

$$= 6 \int t^3\, dt + 6 \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{3}{2}\, t^4 + 6 \operatorname{arctg} t + k$$

$$= \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}} + 6 \operatorname{arctg} x^{\frac{1}{6}} + k$$

elde edilir.

4.3.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ikili fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5} - \sqrt[6]{x}}\, dx$

Yanıt : $4\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 24\sqrt[8]{x} + 24 \operatorname{Log} \left|\sqrt[24]{x} - 1\right| + k$

2. $\displaystyle\int \frac{x + 1}{\sqrt[3]{3x + 1}}\, dx$

Yanıt : $\dfrac{x + 2}{5} \sqrt[3]{(3x + 1)^2} + k$

3. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x + 1} + 1}$

Yanıt : $\dfrac{2x + 1}{12} \left(2\sqrt{2x + 1} - 3\right) + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x} + \sqrt{x}}$

Yanıt : $6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[6]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \text{Log}\,(1 + \sqrt[6]{x})\right) + k$

5. $\int x\sqrt{a-x}\,dx$

Yanıt : $\frac{2}{15}(3x^2 - ax - 2a^2)\sqrt{a-x} + k$

6. $\int \frac{x^3\,dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$

Yanıt : $t = \sqrt[3]{x+1}$ olmak üzere

$$\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{10}}{10} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^8}{2} + \frac{4}{7}t^7 - \frac{2}{3}t^6 + \frac{7}{5}t^5 - \frac{7}{4}t^4 + \frac{7}{3}t^3 - 4t^2 + 8t - 8\log|t+1| + k$$

7. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-1}}$

Yanıt : $\frac{2}{35}(5x^3 + 6x^2 + 8x + 16)\sqrt{x-1} + k$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx$

Yanıt : $\text{arc tg}\,\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x+1} + k$

9. $\int \frac{\sqrt{1+x}\,dx}{1 + \sqrt[4]{1+x}}$

Yanıt : $6\left(\frac{x-6}{7}\sqrt[4]{x+1} - \frac{1}{5}(x+1)^{\frac{5}{4}} + \frac{1}{3}\sqrt{x+1}\right) + 6\,\text{arctg}\,\sqrt[4]{x+1} + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.4. $\int R\left(x, \sqrt[q]{\int \frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$ *şeklinde olan integraller.*

$$\int R\left(x, \sqrt[q]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$$

şeklinde olan ikkel fonksiyonlar

$$t^q = \frac{ax+b}{cx+e}$$

dönüşümü uygulanarak integre edilebilirler: dönüşüm formülünden

$$x = -\frac{et^q - b}{ct^q - a}\,;\quad dx = \frac{ae - bc}{(ct^q - a)^2}\, qt^{q-1}\, dt$$

elde edilir.

4.4.1. *Örnekler*

4.4.1.1. $\int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\, dx$ ikkel fonksiyonunun hesaplanması.

Yukarda açıklanmalara dayanarak

$$t^3 = \frac{2-x}{2+x}$$

dönüşümünü kullanmak yerinde olur. Buradan

$$x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}$$

ve

$$2 - x = \frac{4t^3}{1+t^3}\,;\quad dx = \frac{-12\,t^2\,dt}{(1+t^3)^2}$$

elde edildiğine göre verilen ikkel fonksiyon için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx = -\int \frac{2\,(1+t^3)^2\,t\,12\,t^2}{16\,t^4\,(1+t^3)^2}\,dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}$$

$$= \frac{3}{4t^2} + k = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + k$$

elde edilir.

4.4.1.2. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}}$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması.

$$\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5} = (x-1)\,(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$$

olduğundan, hesabı istenen ilkel fonksiyon yukarda açıklanan tiptendir ve

$$\frac{x+2}{x-1} = t^4$$

dönüşümünü uygulamak yerinde olur. Bu dönüşümden

$$x = \frac{t^4+2}{t^4-1}$$

elde edilir ve buradan

$$x-1 = \frac{3}{t^4-1}\;;\; x+2 = \frac{3t^4}{t^4-1}\;;\; dx = \frac{-12\,t^3}{(t^4-1)^2}\,dt$$

çıkar. Şu halde

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}} = \int \frac{dx}{(x-1)\,(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}$$

$$= \int \frac{(t^4-1)\,(t^4-1)\,(-12t^3)\,dt}{3\,3t^4\cdot(t^4-1)^2\,t}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= -\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{4}{3}\,\frac{1}{t} + k = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}} + k$$

elde edilir.

4.4.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ilkel fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\int \dfrac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

Yanıt : $\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} + k$

2. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^3\,(x-1)^4}}$

Yanıt : $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + k$

3. $\int (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,dx$

Yanıt : $(1-\dfrac{x}{2})\sqrt{1-x^2} - \dfrac{3}{2}\arcsin x + k$

4. $\int \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\,dx$

Yanıt : $2\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2}} - \sqrt{2x-x^2} + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5. $\int \sqrt{\dfrac{x+a}{x+b}}\,dx$ Yanıt : $\sqrt{(x+a)\,(x+b)}$

$+\,(a-b)\,\mathrm{Log}\,(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+k$

6. $\int \sqrt{\dfrac{a-x}{b+x}}\,dx$

Yanıt : $\sqrt{(x-x)\,(b+x)}+(a+b)\arcsin\sqrt{\dfrac{x+b}{a-x}}+k$

7. $\int \dfrac{2+x}{1+x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\,dx$

Yanıt : $\sqrt{1-x^2}-2\,\dfrac{1-x}{1+x}+k$

$\int \mathrm{R}(x,\ \sqrt{k^2-x^2})\ dx$ *şeklinde olan integraller*

$$\int \mathrm{R}\,(x,\ \sqrt{k^2-x^2})\,dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonlar

$$x = k\,\sin t \quad (\text{veya } x = k\,\cos t)$$

şeklinde bir dönüşümle hesaplanabilirler.

4.5.1. *Örnekler*

4.5.1.1 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$x = a\,\sin t$ dönüşümünü ile

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\sqrt{1-\sin^2 t}\;a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t)\right) + k$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + k$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} + k$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + k$$

elde edilir.

4.5.1.2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ ilkel fonksiyonunun bulunması.

$x = \sin t$ dönüşümünü uygulayarak

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t \, dt}{\cos t \sin t} = \int \frac{dt}{\sin t}$$

elde edilir ve $y = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ dönüşümünü kullanarak

$$\sin t = \frac{2y}{1+y^2}; \quad dt = \frac{2}{1+y^2} dy$$

elde edildiğinden

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dy}{y} = \operatorname{Log} y + k = \operatorname{Log} \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + k$$

$$= \operatorname{Log} \left| \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right| + k = \operatorname{Log} \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right| + k$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.5.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ilkel fonksiyonları hesaplayınız :

1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

Yanıt : $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \operatorname{Arcsin} x + k$

2. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

Yanıt : $\frac{x}{8}(2x^2-1)\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin x + k$

3. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}}$

Yanıt : $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + k$

4.6. $\int R(x, \sqrt{x^2-k^2})\,dx$ *şeklinde olan integraller*

$$\int R(x, \sqrt{x^2-k^2})\,dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonların hesaplanması için

$$x = k\ \mathrm{Ch}\ t$$

dönüşümü kullanılır.

4.6.1. *Örnekler*

4.6.1.1 $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması.

$$x = \mathrm{Ch}\ t \qquad \text{ve} \qquad dx = \mathrm{Sh}\ t\ dt$$

olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dx = \int \sqrt{(\mathrm{Ch}^2 t - 1)^3}\,\mathrm{Sh}\,t\,dt = \int \mathrm{Sh}^4 t\,dt$$

$$= \int \left(\frac{\mathrm{Ch}\,2t - 1}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{Ch}^2 2t\,dt - \frac{1}{2}\int \mathrm{Ch}\,2t\,dt + \frac{1}{4}\int dt$$

$$= \frac{1}{8}\int (\mathrm{Ch}\,4t + 1)\,dt - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sh}\,2t + \frac{t}{4}$$

$$= \frac{1}{32}\,\mathrm{Sh}\,4t + \frac{t}{8} - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,2t + \frac{t}{4} + k$$

$$= \frac{1}{32}\,2\,\mathrm{Sh}\,2t\,\mathrm{Ch}\,2t - \frac{1}{4}\,2\,\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}\,t + \frac{3}{8}t + k$$

$$= \frac{1}{16}\,2\,\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}\,t\,(\mathrm{Sh}^2 t + \mathrm{Ch}^2 t) - \frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}\,t\,\mathrm{Ch}\,t + \frac{3}{8}t + k$$

$$= \frac{1}{8}\,x\sqrt{x^2-1}\,(x^2 - 1 + x^2) - \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}$$

$$+ \frac{3}{8}\,\mathrm{Arg\,Ch}\,x + k$$

$$= \frac{1}{8}\,x\sqrt{x^2-1}\,(2x^2 - 1) - \frac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}$$

$$+ \frac{3}{8}\,\mathrm{Log}\,(x + \sqrt{x^2-1}) + k$$

elde edilir.

4.6.1.2. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$ ikili fonksiyonunun hesaplanması.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x = a \operatorname{Ch} t \quad \text{ve} \quad dx = a \operatorname{Sh} t\, dt$$

olduğuna göre

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \int a^2 \sqrt{\operatorname{Ch}^2 t - 1} \operatorname{Sh} t\, dt = a^2 \int \operatorname{Sh}^2 t\, dt$$

$$= a^2 \int \frac{\operatorname{Ch} 2t - 1}{2}\, dt$$

$$= \frac{a^2}{4} \int \operatorname{Ch} 2t\, 2\, dt - \frac{a^2}{2} \int dt$$

$$= \frac{a^2}{4} \operatorname{Sh} 2t - \frac{a^2}{2} t + k$$

$$= \frac{a^2}{2} \operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} t - \frac{a^2}{2} \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1}) + k$$

$$= \frac{a^2}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Log} (x + \sqrt{x^2 - 1}) + k$$

dir.

4.6.3. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ilkel fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\int \dfrac{dx}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

Yanıt : $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{1}{2} \operatorname{Arg Ch} x + k$

2. $\int (x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}\, dx$

Yanıt : $\dfrac{x}{8} (2x^2 - 5a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + \dfrac{3x^4}{8} \operatorname{Arg Ch} \dfrac{x}{a} + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



4.7. $\int R(x, \sqrt{k^2 + x^2})\, dx$ *şeklinde olan integraller,*

$$\int R(x, \sqrt{k^2+x^2})\, dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonların hesaplanması için

$$x = k \operatorname{Sh} t$$

dönüşümü kullanılır.

4.7.1. *Örnekler*

4.7.1.1. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması.

$x = \operatorname{Sh} t$ ve dolayısıyla $dx = \operatorname{Ch} t\, dt$ yazılması halinde

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\operatorname{Ch} t}{\operatorname{Sh}^3 t \operatorname{Ch} t}\, dt = \int \frac{dt}{\operatorname{Sh}^3 t} = -\operatorname{Coth} t + k$$

$$= -\frac{\operatorname{Ch} t}{\operatorname{Sh} t} + k = -\frac{\sqrt{1+\operatorname{Sh}^2 t}}{\operatorname{Sh} t} + k = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + k$$

elde edilir.

4.7.1.2. $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması.

$x = a \operatorname{Sh} t$ dönüşümü kullanılması halinde

$$x^2 + a^2 = a^2(\operatorname{Sh}^2 t + 1) = a^2 \operatorname{Ch}^2 t$$

$$dx = a \operatorname{Ch} t$$

olduğundan

$$\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}} = \int \frac{a^3 \operatorname{Sh}^3 t\, a \operatorname{Ch} t\, dt}{a^5 \operatorname{Ch}^5 t} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\operatorname{Sh}^3 t}{\operatorname{Ch}^4 t}\, dt$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \frac{1}{a^2} \int (\text{Th } t)^2 \frac{dt}{\text{Ch}^2 t}$$

elde edilir ve $\text{Th } t = u$ dönüşümünü uygulayarak

$$= \frac{1}{a^2} \int u^2 \, du = \frac{1}{3a^2} u^3 + k = \frac{1}{3a^2} \text{Th}^3 t + k$$

$$= \frac{1}{3a^3} \frac{\text{Sh}^3 t}{\text{Ch}^3 t} + k = \frac{1}{3a^3} \frac{x^3}{\text{Ch}^3 t} + k = \frac{1}{3a^2} \frac{x^3}{(a^2+x^2)^3} + k$$

elde edilir.

4.7.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki ilkel fonksiyonları hesaplayınız:

1. $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^3} dx$

Yanıt : $\text{Arg Sh } \frac{x}{a} - \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + a^2} + k$

2. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1 + x^2}}$

Yanıt : $\frac{2x^2 - 1}{3x^3} \sqrt{1 + x^2} + k$

4.8. $R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})\, dx$ *şeklinde olan integraller.*

$$\int R\,(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})\, dx$$

şeklinde olan ilkel fonksiyonların hesaplanması, irrasyonel kısmının cebirsel işlemlerle ve lineer bir dönüşümle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\sqrt{k^2 - t^2}, \quad \sqrt{k^2 + t^2} \quad \text{veya} \quad \sqrt{t^2 - k^2}$$

şekillerinden birine indirgenmesi yolu ile yapılır.

4.8.1. *Örnekler*

4.8.1.1 $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}$ ikinci fonksiyonunun hesaplanması.

Karakök işareti altında bulunan kuadratik ifade yukarıdaki şekillerden üçüncüsüne indirgenebilir çünkü

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x - 3 &= (2x)^2 + 2(2x) - 3 \\ &= (2x)^2 + 2(2x) + 1 - 4 \\ &= (2x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

tür. Dolayısıyla

$$t = 2x + 1$$

dönüşümü ele alınabilir. Buradan

$$x = \frac{t-1}{2}; \quad dx = \frac{1}{2}\,dt$$

$$x + 3 = \frac{t+5}{2}$$

elde edilir ve

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}} = \frac{1}{4}\int \frac{(t+5)}{\sqrt{t^2-4}}\,dt$$

bulunur. Şu halde $t = 2\,\mathrm{Ch}\,u$ dönüşümünü uygulayarak

$$= \frac{1}{4}\int \frac{(2\,\mathrm{Ch}\,u + 5)\,2\,\mathrm{Sh}\,u\,du}{\sqrt{4\,\mathrm{Ch}^2 u - 4}}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \frac{1}{4} \int \frac{(2\,\mathrm{Ch}\,u + 5)\,2\,\mathrm{Sh}\,u\,du}{2\,\mathrm{Sh}\,u}$$

$$= \frac{1}{4} \int (2\,\mathrm{Ch}\,u + 5)\,du$$

$$= \frac{1}{4}\,2\,\mathrm{Sh}\,u + \frac{5}{4}\,u + k$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4\,\mathrm{Ch}^2 u - 4} + \frac{5}{4}\,u + k$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{t^2 - 4} + \frac{5}{4}\,\mathrm{Arg\,Ch}\,\frac{t}{2} + k$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + \frac{5}{4}\,\mathrm{Log}\,\left(\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} - 1}\right) + k$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + \frac{5}{4}\,\mathrm{Log}\,\frac{t + \sqrt{t^2 - 4}}{2} + k$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + \frac{5}{4}\,\mathrm{Log}\,(t + \sqrt{t^2 - 4})$$

$$- \frac{5}{4}\,\mathrm{Log}\,2 + k$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 + 4x - 3} + \frac{5}{4}\,\mathrm{Log}\,(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x - 3}) + K$$

elde edilir.

4.8.1.2. $\int \frac{(5x + 4)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ ilkel fonksiyonunun hesaplanması.

Karekök işareti altında bulunan kuadratik ifade, yukardaki şekillerden ikincisine indirgenebilir çünkü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x + 1)^2 + 4$$

tir. Bu durumda

$$t = x + 1$$

dönüşümüne gitmek yerinde olur: bu dönüşümün tanım bağıntısından

$$dt = dx$$

$$x = t - 1 \quad \text{ve} \quad 5x + 4 = 5t - 1$$

çıkar, yani

$$\int \frac{(5x + 4)\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{(5t - 1)\,dt}{\sqrt{t^2 + 4}}$$

bulunur. Şu halde $t = 2\,\mathrm{Sh}\,u$ dönüşümünü uygulayarak

$$= \int \frac{(10\,\mathrm{Sh}\,u - 1)\,2\,\mathrm{Ch}\,u\,du}{2\,\mathrm{Ch}\,u}$$

$$= \int (10\,\mathrm{Sh}\,u - 1)\,du$$

$$= 10\,\mathrm{Ch}\,u - u + k$$

$$= 5\,(2\,\mathrm{Ch}\,u) - \mathrm{Arg\,Sh}\,\frac{t}{2} + k$$

$$= 5\sqrt{t^2 - 4} - \mathrm{Log}\,\left(\frac{t}{2} + \sqrt{\frac{t^2}{4} + 1}\right) + k$$

$$= 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \mathrm{Log}\,\frac{t + \sqrt{t^2 + 4}}{2} + k$$

$$= 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \mathrm{Log}\,2 - \mathrm{Log}\,(t + \sqrt{t^2 + 4}) + k$$

$$= 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \mathrm{Log}\,(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}) + K$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.8.1.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ ikisel fonksiyonunun hesaplanması.

Karekök işareti altında bulunan kuadratik ifade, yukardaki şekillerden birincisine indirgenebilir çünkü

$$1-2x-x^2 = 2-1-2x-x^2 = 2-(1+2x+x^2) = 2-(x+1)^2$$

dir. Bu durumda

$$t = x+1$$

dönüşümünü uygulamak yerinde olur ve bu dönüşümün tanım bağıntısından

$$dt = dx$$

elde edildiğinden

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}}$$

bulunur. Şu halde $t = \sqrt{2}\sin u$ dönüşümünü uygulayarak

$$= \int \frac{\sqrt{2}\cos u\, du}{\sqrt{2-2\sin^2 u}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\cos u\, du}{\sqrt{2}\cos u}$$

$$= \int du$$

$$= u + k$$

$$= \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + k$$

$$= \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + k$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



4.8.2. *Uyarı*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})\, dx$$

ilkel fonksiyonunun hesaplanması için

a) $a > 0$ ise $\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = t \pm \sqrt{a}\, x$

b) $c > 0$ ise $\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$

c) $ax^2 + 2bx + c = a\,(x - p)\,(x - q)$ ise

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = (x - p)\, t$$

dönüşümlerine başvurulabilir. Bu dönüşümlere *Euler dönüşümleri* denir.

Örneğin

4.8.2.1. $$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

ilkel fonksiyonu ele alınsın. Bu örnekte $a = 1 > 0$ olduğundan

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x$$

dönüşümü seçilebilir: her iki tarafın karesinin alınması halinde

$$x^2 + 2x + 2 = t^2 - 2tx + x^2$$

elde edilir ve buradan

$$2x + 2tx = t^2 - 2$$

$$x = \frac{t^2 - 2}{2\,(1 + t)}$$

$$dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(1 + t)^2}\, dt$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t-x=1+t-\frac{t^2-2}{2(1+t)}$$

$$=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}$$

bulunur. Şu halde

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{2(1+t)(t^2+2t+2)\,dt}{(t^2+4t+4)\,2(1+t)^2}$$

$$\int\frac{(t^2+2t+2)\,dt}{(1+t)(t+2)^2}$$

elde edilir.

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+2)^2}$$

olduğundan

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}$$

$$=\text{Log}\,|t+1|+\frac{2}{t+2}+k$$

$$=\text{Log}\,|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|$$

$$+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+k$$

elde edilir.

4.8.2.2. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

ilkel fonksiyonu verilmesi halinde $c=1>0$ olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - 1$$

Euler dönüşümü uygulanabilir ve her iki tarafın karesini alarak

$$x^2 - x + 1 = t^2 x^2 - 2tx + 1$$

yazı

$$(2t - 1)\, x = (t^2 - 1)\, x^2$$

veya

$$x = \frac{2t - 1}{t^2 - 1}$$

ve

$$dx = -2\,\frac{t^2 - t + 1}{(t^2 - 1)^2}\,dt$$

$$x + \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{t}{t - 1}$$

elde edilir. Şu halde

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t-1)\,(t+1)^2}\,dt$$

dir.

$$\frac{-2t^2 + 2t - 2}{t(t-1)\,(t+1)^2} = \frac{2}{t} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t-1} - \frac{3}{(t+1)^2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1}$$

olduğundan

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{2\,dt}{t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{3\,dt}{(t+1)^2}$$

$$= 2\,\mathrm{Log}\,|t| - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,|t-1| - \frac{3}{2}\,\mathrm{Log}\,|t+1| + \frac{3}{t+1} + k$$

elde edilir. Dönüşümün tanımından

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$t = \frac{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x}$$

dır ve bu ifadeyi yerine koymak suretiyle ilkel fonksiyonun kesin şekli elde edilir.

4.8.2.3. $\int \frac{x\,dx}{(\sqrt{7x - 10 - x^2})^3}$

ilkel fonksiyonunun ele alınması halinde, gerek $a = -1 < 0$, gerekse $c = -10 < 0$ olması, ilk iki Euler dönüşümlerinin kullanılamamalarına neden olur. Halbuki

$$7x - 10 - x^2 = (x - 2)\,(5 - x)$$

dir. Buna göre, üçüncü tipten bir Euler dönüşümü uygulanabilir:

$$\sqrt{7x - 10 - x^2} = (x - 2)\,t$$

yazılacak olursa

$$(x - 2)\,(5 - x) = (x - 2)^2 t^2$$

yani

$$5 - x = (x - 2)\,t^2$$

bulunur. Şu halde

$$x = \frac{5 + 2t^2}{1 + t^2}; \quad dx = \frac{-6t\,dt}{(1 + t^2)^2}$$

$$(x - 2)\,t = \left(\frac{5 + 2t^2}{1 + t^2} - 2\right) t = \frac{3t}{1 + t^2}$$

ve dolayısıyla

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x - 10 - x^2}} = -\frac{6}{27} \int \frac{5 + 2t^2}{t^2}\,dt = -\frac{2}{9} \int \frac{5\,dt}{t^2}$$

$$-\frac{2}{9} \int 2\,dt$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$= \frac{10}{9}\,\frac{1}{t} - \frac{4}{9}\,t + k$$

elde edilir.

$$t = \frac{\sqrt{7x - 10 - x^2}}{x - 2}$$

ifadesini kullanarak aranan ikel fonksiyonun kesin şekli elde edilir.

4.8.3. *Alıştırmalar*

1. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + 2x + 4}}$

Yanıt : $2 \operatorname{Log} |\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x| - \frac{3}{2(\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1)} - \frac{3}{2} \operatorname{Log} |\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x - 1| + k$

2. $\int \sqrt{x^2 + x + 1}\,dx$

Yanıt : $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{3}{8} \operatorname{Log} |2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + k$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

Yanıt : $\arcsin \frac{x - 2}{2} + k$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$

Yanıt : $\arcsin \frac{x+2}{3} + k$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$

Yanıt : $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x-3}{5} + k$

6. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 2x}}\, dx$

Yanıt : $\sqrt{x^2 + 2x} + 2 \operatorname{Log} | x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x} | + k$

7. $\int \frac{(2x+3)\, dx}{\sqrt{9x^2 + 6x + 4}}$

Yanıt : $\frac{2}{9} \sqrt{9x^2 + 6x + 4}$

$+ \frac{7}{9} \operatorname{Log} | 3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x + 4} | + k$

8. $\int \frac{(8x-3)\, dx}{\sqrt{12x - 4x^2 - 5}}$

Yanıt : $-2 \sqrt{12x - 4x^2 - 5} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{2x-3}{2} + k$

5. *İndirgeme formülleri*

Genellikle ispat edilen(1)

(5.1) $K_{m+1} = \frac{2m-1}{2m} K_m + \frac{1}{2m} \frac{t}{(1+t^2)^m}$ ;

(1) GS - AG, s. 384, s. 398-399; s. 417-418'e bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$K_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m} \; ; \; m \in \mathbb{N}$$

(5.2) $$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x;$$

$$I_n = \int \sin^n x \, dx \; ; \; n \in \mathbb{N};$$

(5.3) $$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} + \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x \; ;$$

$$J_n = \int \cos^n x \, dx \; ; \; n \in \mathbb{N};$$

(5.4) $$I_n = x^n e^x - I_{n-1} \; ; \; I_n = \int x^n e^x \, dx \; ; \; n \in \mathbb{N};$$

(5.5) $$J_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\text{Log } x)^n - \frac{n}{n+1} J_{n-1} \; ;$$

$$J_n = \int x^n (\text{Log } x)^n \, dx \; ; \; m, n \in \mathbb{N}$$

indirgeme formüllerinden başka daha birçok indirgeme formülünün elde edilebileceği meydandadır.

Bu çeşit formüllerin çoğaltılması mümkündür.

5.1. *Örnekler*

5.1.1. $$I_n = \int x^n \cos ax \, dx, \qquad n \in \mathbb{N}$$

için bir indirgeme formülünün bulunması.

Kısmi integrasyon yönteminin, $u = x^n$, $v = \frac{1}{a} \sin ax$ seçilerek uygulanması halinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I_n = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\, dx$$

elde edilir. İkinci integrale aynı yöntemin $u = x^{n-1}$, $v = -\frac{1}{a}\cos ax$ seçilerek uygulanması halinde

$$I_n = \frac{x^n}{a} \sin ax + \frac{nx^{n-1}}{a^2} \cos ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2} \tag{5.1.1}$$

indirgeme formülü elde edilir.

5.1.2. $I_n = \int \mathrm{Sh}^n x\, dx\,; \quad n \in \mathbb{N}$

için bir indirgeme formülünün bulunması.

$$I_n = \int \mathrm{Sh}^n x\, dx = \int \mathrm{Sh}^{n-1} x\, (\mathrm{Sh}\, x\, dx)$$

yazılabileceğinden, kısmi integrasyon yönteminin $u = \mathrm{Sh}^{n-1} x$, $v = \mathrm{Ch}\, x$ seçerek uygulanması halinde

$$I_n = \mathrm{Sh}^{n-1} x\, \mathrm{Ch}\, x - (n-1) \int \mathrm{Sh}^{n-2} \mathrm{Ch}^2 x\, dx$$

$$= \mathrm{Sh}^{n-1} x\, \mathrm{Ch}\, x - (n-1) \int \mathrm{Sh}^{n-2} x\, (1 + \mathrm{Sh}^2 x)\, dx$$

$$= \mathrm{Sh}^{n-1} x\, \mathrm{Ch}\, x - (n-1) \int \mathrm{Sh}^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \mathrm{Sh}^n x\, dx$$

bulunur, yani

$$I_n = \mathrm{Sh}^{n-1} \mathrm{Ch}\, x - (n-1)\, I_{n-2} - (n-1)\, I_n$$

veya

$$I_n = \frac{1}{n} \mathrm{Sh}^{n-1} x\, \mathrm{Ch}\, x - \frac{n-1}{n} I_{n-2} \tag{5.1.2}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



5.2. *Alıştırmalar*

Aşağıdaki indirgeme formüllerini hesaplayınız:

1. $I_n = \frac{1}{n} Ch^{n-1} x \operatorname{Sh} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$;

$I_n = \int \operatorname{Ch}^n x\,dx \; ; \; n \in \mathbb{N}$

2. $I_n = I_{n-2} + \frac{2}{n-1} \sin(n-1)x$; $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx \; ; \; n \in \mathbb{N}$

3. $(np+1)\, I_n = x(a+bx^p)^n + anp\, I_{n-1}$ ;

$I_n = \int (a+bx^p)^n\,dx \; ; \; n, p \in \mathbb{N}$

4. $I_n = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$ ; $I_n = \int \operatorname{tg}^n x\,dx \; ; \; n \in \mathbb{N}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM YİRMİ

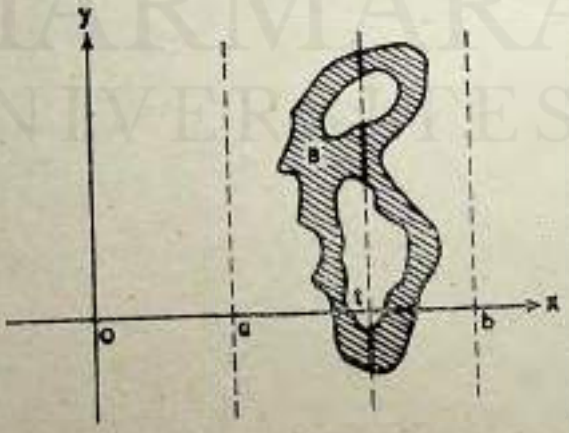
## İNTEGRAL KAVRAMININ UYGULANMASI

### 1 — ALAN HESAPLARI

$x = a$ ve $x = b$ doğrularının belirttikleri şerit içinde tamamen kalan sonlu bir B bölgesinin A alanı

$$A = \int_a^b U(t)\, dt$$

formülü ile hesaplanır: bu formülde integrand olarak yer alan $U(t)$ fonksiyonu $x = t$ doğrusunun B bölgesi ile arakesitinin uzunluğunu göstermektedir:



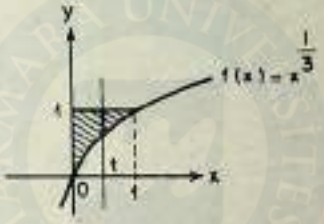

Şekil 89

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


*1.1. Örnekler*

1.1.1. $f(x) = x^{1/3}$, eğrisinin grafiği ile $x = 0$ ve $y = 1$ doğrularının belirttikleri bölgenin alanının hesaplanması.

Aşağıdaki şekilden de anlaşılacağı gibi, $U(t)$ uzunluğu, $x = t$




Şekil 90

doğrusunun $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini kestiği noktadan $y = 1$ doğrusunu kestiği noktaya kadar olan doğru parçasının uzunluğudur: şu halde

$$U(t) = 1 - t^{1/3}$$

tür ve dolayısıyla aranan alan

$$A = \int_0^1 (1 - t^{1/3})\, dt = \int_0^1 dt - \int_0^1 t^{1/3}\, dt = t\Big|_0^1$$

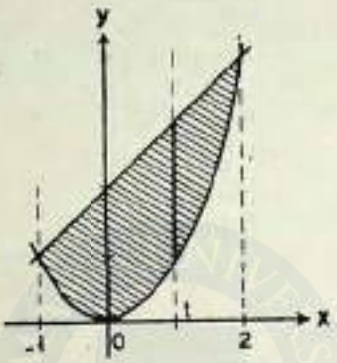
$$- \frac{3}{4} t^{1/3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

dir.

1.1.2. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği ile $y = x + 2$ doğrusu tarafından sınırlanan alanın bulunması

Aşağıdaki şekilden de anlaşılacağı gibi, $U(t)$ uzunluğu, $x = t$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 91

doğrusunun $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini kestiği noktadan $y = x + 2$ doğrusunu kestiği noktaya kadar olan doğru parçasının uzunluğudur. Şu halde

$$U(t) = t + 2 - t^2$$

dir. İntegrasyon sınırlarını belirtmek için bu kez parabol ile doğrunun arakesit noktalarının absislerini bulmak gerekir. Bu absisler

$$t + 2 = t^2$$

denkleminin kökleridir. Bu denklemden

$$t^2 - t - 2 = 0$$

elde edileceğinden

$$t_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \mp 3}{2} = -1;\ 2$$

dir. Şu halde integrasyon $-1$'den 2'ye kadar yapılacaktır. Aranan alan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

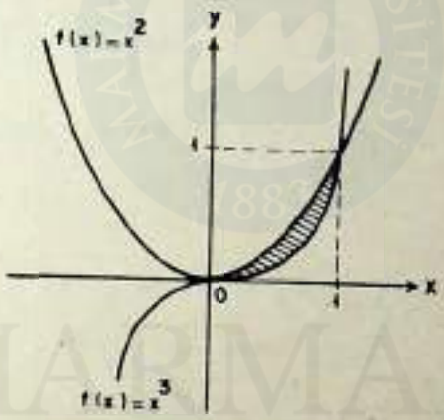


$$A = \int_{-1}^{2} (t + 2 - t^2)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + 2t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

dir.

1.1.3. $f(x) = x^3$ ve $f(x) = x^2$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan alanın hesaplanması.

Verilen iki fonksiyonun grafiklerinden de görüleceği gibi, bu iki




Şekil 92.

fonksiyonun grafikleri iki noktada kesişmektedir. Şu halde belirttikleri alanın hesaplanması için integrasyon bu iki arakesit noktasının apsisleri arasında olmalıdır.

$$x^2 = x^3$$

eşitliğinden

$$x^3 (x - 1) = 0$$

elde edilir, yani integrasyonun limitleri yukardaki denklemin kökleri olan 0 ve 1 dir. 0 ve 1 arasında alınan herhangi bir sayı için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x^2 > x^3$$

olacağından, aranan $U(t)$ fonksiyonu

$$U(t) = t^2 - t^3$$

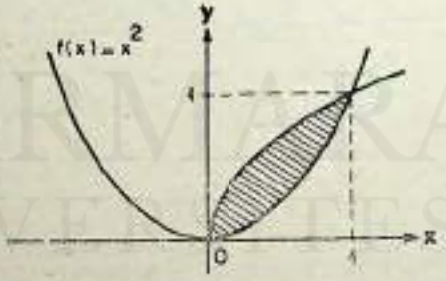
dır ve

$$A = \int_0^1 (t^2 - t^3)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

dir.

1.1.4. $f(x) = x^2$ ve $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonlarının grafikleri tarafından sınırlanan alanın hesaplanması.

Verilen iki fonksiyonun grafiklerinden de görüleceği gibi, bu iki




Şekil 93.

grafik sadece iki noktada kesişir. Bu iki noktanın apsisleri

$$x^2 = \sqrt{x}$$

denklemini çözerek bulunurlar. Bu denklem

$$x^4 = x$$

yani

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$x(x^3 - 1) = 0$$

şekline girdiğinden, integrasyon bu denklemin tek iki reel kökü olan 0 ve 1 arasında yapılacaktır. [0, 1] kapalı aralığında alınan her $t$ değeri için $\sqrt{t}$ sayısı $t^2$ den büyük olacağından

$$U(t) = \sqrt{t} - t^2$$

ve

$$A = \int_0^1 (\sqrt{t} - t^2)\, dt = \left( \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

dır.

1.2. *Alıştırmalar*

Aşağıda açıklanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız:

1. $f(x) = x^{1/3}$ ve $f(x) = x^{1/2}$

Yanıt : $\frac{1}{6}$

2. $f(x) = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ ve $x = 0$

Yanıt : $\frac{16}{3}$

3. $f(x) = -x^2$ ve $f(x) = x^4 - 20$

Yanıt : $\frac{928}{15}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. $f(x) = x^2, f(x) = (x-1)^2$ ve $y = \frac{1}{9}$

(Uyarı : Bölge 3 ayrı kısımdan oluşur!)

Yanıt : $\frac{13}{108}$

5. $f(x) = \sqrt{x}$ ve $f(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 1)$

Yanıt : $\frac{16}{21}\,(\sqrt{2})^{3/2}$

6. $f(x) = x^3 - 12x$ ve $f(x) = x^2$

(Uyarı : Bölge iki kısımdan oluşur!)

Yanıt : $78\,\frac{1}{12}$

7. $f(x) = x^3$, $y = 0$ ve $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin (1,1) noktasındaki teğeti ile belirlenen alan.

Yanıt : $\frac{1}{12}$

8. $f(x) = x^3 - x$ ve bu fonksiyonun grafiğinin $x = -1$ doğrusu tarafından kesildiği noktadaki teğeti tarafından belirlenen alan.

Yanıt : $\frac{27}{4}$

9. $f(x) = 2^x$, $f(x) = 2x - x^2$, $x = 0$ ve $x = 2$ ile sınırlanan alan.

Yanıt : $\frac{3}{\text{Log } 2} - \frac{4}{3}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



10) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ ve $f(x) = \frac{8}{x^2+4}$ fonksiyonlarının grafikleri ile sınırlanan alan.

Yanıt : $2 - \frac{4}{3}$

11.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leqslant x \leqslant 0 \text{ için} \\ \cos x & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun grafiği ile yatay eksen tarafından belirlenen bölgenin alanı.

Yanıt : $\frac{3}{2}$

## 2 — DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİ (1)

$f = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ ve $x = b$ arasında kalan grafik parçasının altında kalan alanı $x$ ekseninin etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmi

$$H = \pi \int_a^b f^2(t)\, dt$$

formülü ile hesaplanır.

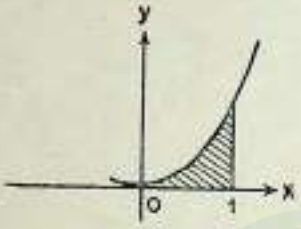
Bu formül, *pul yöntemi* ile hesaplanan dönel hacim formülüdür.

### 2.1. *Örnekler*

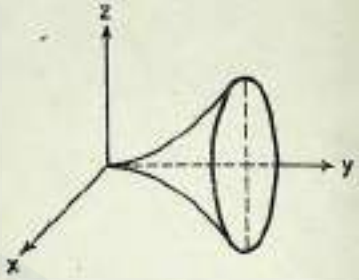
2.1.1. $f(x) = x^3$ parabolünün grafiğinin altında kalan $[0,1]$ kapalı aralığı üzerindeki parçasının yatay eksen etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacmini hesaplamak.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şekil 95'den de anlaşılacağı gibi, istenen hacim




Şekil 94.



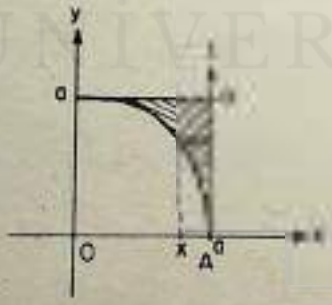

Şekil 95.

$$H = \pi \int_0^1 t^4\,dt = \frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

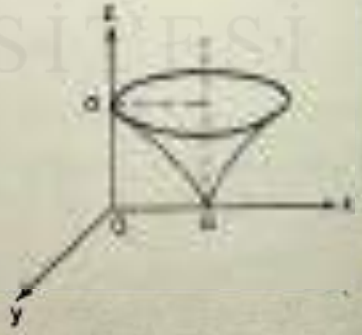
dır.

2.1.2. Bir çemberin dörtte biri ve çemberin bu parçasının uçlarındaki teğetleri ile belirlenen bölgenin, söz konusu teğetlerden bir tanesi etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmini hesaplamak.

Hesabın kolaylaştırılması için, $a$ yarıçaplı çember parçasının denkleminin, mümkün olan en basit şekilde gösterilmesinde fayda vardır. Şu halde koordinat sisteminin başlangıç noktası çemberin merkezi olarak alınsın ve Şekil 96'da gösterildiği gibi, çem-




Şekil 96.




Şekil 97.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


berin AC teğeti dönel cismin ekseni olarak seçilmiş olsun. Bu eksenden çember yayının uzaklığı $a - t$ olarak elde edilir. $t$ değişken eksen olarak kullanılan doğru üzerinde alınacağından, cismin hacmini elde etmek için $t$'nin 0'dan $a$'ya kadar değişmesi gerekir. $t$ ve $x$ arasındaki bağıntı

$$x^2 + t^2 = a^2$$

olduğundan

$$x = \sqrt{a^2 - t^2}$$

dır. Şu halde aranan hacim

$$H = \pi \int_0^a (a - x)^2 \, dt = \pi \int_0^a (a - \sqrt{a^2 - t^2})^2 \, dt$$

$$= \pi \int_0^a (2a^2 - t^2 - 2a\sqrt{a^2 - t^2}) \, dt$$

$$= \pi \left(2a^2 t - \frac{t^3}{3}\right) \Big|_0^a - 2\pi a \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \, dt$$

şeklinde elde edilir. Son terimin hesaplanmayan kısmı

$$K = \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \, dt$$

şeklindedir ve

$$K = a \int_0^a \sqrt{a^2 - t^2} \, dt = a \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2} \, dt$$

$$= a^2 \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{t}{a}\right)^2} \frac{dt}{a}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olarak yazılabilir. $u = \frac{t}{a}$ dönüşümü uygulanacak olursa, integrasyon limitleri 0 ve 1 olur ve

$$K = a^2 \int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\, du$$

dır. Halbuki

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\, du = \frac{\pi}{4}$$

tür (1) : buna göre aranan hacim

$$H = 2\pi a^3 - \frac{\pi}{3} a^3 - 2\pi a \left(a^2 \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \pi a^3 \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi a^3}{6} (10 - 3\pi)$$

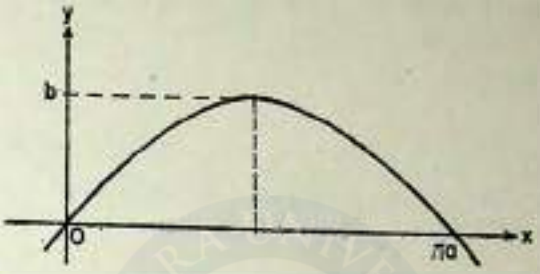
şeklinde elde edilir.

2.1.3. $f(x) = b \sin \frac{x}{a}$ fonksiyonunun tek bir yarım dalgasının yatay eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacminin bulunması.

Verilen fonksiyonun grafiği bir sinüsoid şeklindedir: değişkenin sinüsteki girişi bir yarım peryodun $[0, \pi a]$ kapalı aralığı üzerinde elde edilebileceğini göstermektedir. Buna göre aranan hacim

(1) GS - AG. s 437.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Şekil 98

$$H = \pi b^2 \int_0^{\pi a} \sin^2 \frac{t}{a}\, dt = \pi ab^2 \int_0^{\pi a} \sin^2 \frac{t}{a} \frac{dt}{a}$$

şeklinde elde edilir. Son integrali hesaplamak için $u = \frac{t}{a}$ dönüşümünü uygulamak gerekir. Bu dönüştürmede integralin limitleri 0 ve $\pi$ olur ve

$$H = \pi ab^2 \int_0^{\pi} \sin^2 u\, du = \pi ab^2 \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{4} \sin 2u\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2 ab^2}{2}$$

elde edilir.

*2.2. Alıştırmalar*

1. $f(x) = x^3$ eğrisinin altında kalan ve $x = 1$, $x = 2$ doğruları ile sınırlanan bölgenin yatay eksen etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmını hesaplayınız.

Yanıt : $\frac{127}{7}\pi$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2. Bir çemberin dörtte biri, kirişi etrafında döndürülerek bir dönel cisim elde ediliyor: bu dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Yanıt : $\frac{1}{12}\sqrt{2}\,(10-3\pi)\,\pi r^3$

3. $f(x)=\sqrt{x}$, $x=0$ ve $y=1$ ile sınırlanan bölgenin yatay eksen etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacminin hesaplanması.

Yanıt : $\frac{\pi}{2}$

4. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $y=x$ ve $y=0$ ile sınırlanan bölgenin yatay eksen etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacmını hesaplayınız.

(Uyarı: $f$ fonksiyonu, merkezi başlangıçta olan birim çemberinin üst yarısını gösterir!)

Yanıt : $\frac{\pi}{3}\,(2-\sqrt{2})$

5. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $y=x$ ve $y=0$ ile sınırlanan bölgenin dikey eksen etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacmını hesaplayınız.

Yanıt : $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{3}$

6. $f(x)=x^2+1$, $x=0$ ve $f(x)=x^2+1$ fonksiyonunun grafiğinin $x=1$ doğrusunu kestiği noktadaki teğeti ile sınırlan bölgenin yatay eksen etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacminin hesaplanması.

Yanıt : $\frac{8\pi}{15}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



7. $f(x) = 4 - x^2$ ve $y = 3$ ile sınırlanan bölgenin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacmini hesaplayınız. (*Uyarı:* eksenlere bir öteleme uygulayınız!)

Yanıt : $\dfrac{176\,\pi}{15}$

8. $f(x) = x^2$ ve $y = x$ ile sınırlanan bölgenin $x = -2$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Yanıt : 6

9. $f(x) = x^2$ ve $f(x) = 2\sqrt{2x}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin dikey eksen etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Yanıt : $\dfrac{24\,\pi}{5}$

10. $f(x) = 2\sqrt{ax}$ ve $x = a$ tarafından sınırlanan bölgenin $y = -2a$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacmini hesaplayınız.

Yanıt : $\dfrac{32\pi\,a^3}{3}$

## 3 — DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİ (2)

$f = f(x)$ ve $g = g(x)$ fonksiyonları ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin $y$ ekseninin etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin hacmi

$$H = 2\pi \int t(f(t)) - g(t))\, dt$$

formülü ile hesaplanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu formül, *kabuk yöntemi* ile hesaplanan dönel hacim formülüdür.

### 3.1. *Örnekler*

3.1.1. $f(x) = x^2$, yatay eksen ve $x = 0$, $x = a$ ile sınırlanan bölgenin $y$ ekseni etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacminin hesaplanması (1).

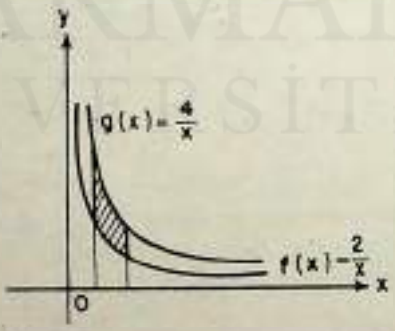
Verilen formüle göre

$$H = 2\pi \int_0^a t \cdot t^2\, dt = 2\pi \int_0^a t^3\, dt = 2\pi \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^a = \frac{\pi a^4}{2}$$

dir.

3.1.2. $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $g(x) = \dfrac{4}{x}$; $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları ile sınırlanan bölgenin $y$ ekseni etrafında döndürülmesi ile doğurulan dönel cismin hacminin hesaplanması.

Şekil 99'da görülen bölge tarafından doğurulan hacmin




Şekil 99.

1) Aynı hacmin pul metodu ile hesabı için GS-AG, s. 445-446'ya bak.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ





Şekil 100.

hesaplanması için, verilen formülden

$$H = 2\pi \int_1^2 t\left(\frac{4}{t} - \frac{4}{t}\right) dt = 2\pi \int_1^2 2\,dt = 4\pi t \Big|_1^2 = 4\pi$$

elde edilir.

*3.2. Alıştırmalar*

Kabuk yöntemi 2.2. de verilen bütün alıştırmalara uygulanabilir.

## 4 — ÇEŞİTLİ UYGULAMALAR

4.1. Dönel cisimlerin hacimlerinin hesaplanmasını sağlayan yöntemlerden faydalanarak, birçok karışık cisimlerin hacimlerini hesaplama olanakları doğar. Kullanılacak olan esas formül $H = \int A(t)\,dt$ formülüdür (1). Aşağıdaki örnekler bu olanaklar hakkında bir fikir verebilecek niteliktedir.

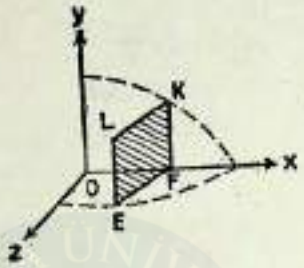
4.1.2. Tabanları $a$ yarıçaplı daireler olan iki dairesel dik silindirin eksenleri dik bir açı altında kesiştirilmektedir. İki silindirin ortak kısmının hacminin hesaplanması.

Şekil 102'de iki silindirin eksenleri $y$ ve $z$ eksenleri üzerinde alınmıştır ve hacmi aranan cisim OABCD cisminin 8 katına eşittir.

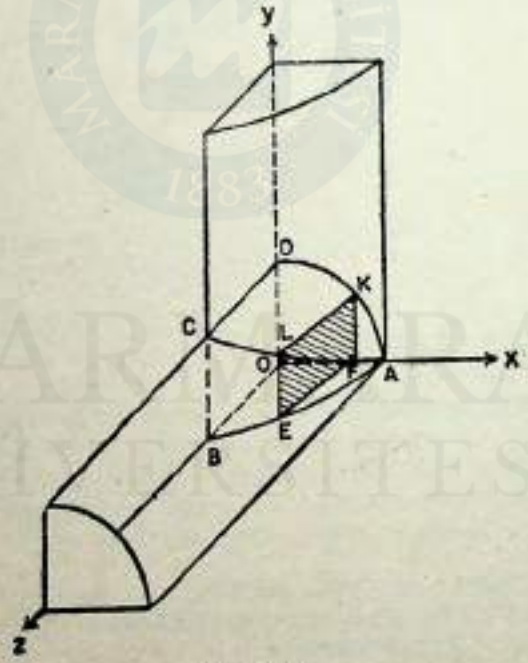
---

1) GS - AG, s. 441-443'e bak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 101.




Şekil 102.

Bu cismin hacmini elde etmek için, cismi 0 dan uzaklığı $t$ olan Ox eksenine dik bir düzlem ile kesilsin; elde edilen kesit EFKL karesidir (gerçekten DKA ve BEA $xOy$ ve $zOx$ düzleminde eşit, $a$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


yarıçaplı çemberlerdir!). Bu karenin kenar uzunluğu $EF=\sqrt{a^2-t^2}$ olup, karenin alanı $A(t) = a^2 - t^2$ dir. Şu halde aranan H hacmi

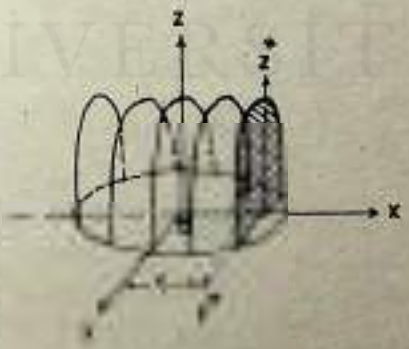
$$H = 8 \int_0^a (a^2 - t^2)\, dt$$

$$= 8\,(a^2 - \frac{t^3}{3})\Big|_0^a = 8a^3\,(1 - \frac{1}{3}) = \frac{16\,a^3}{3}$$

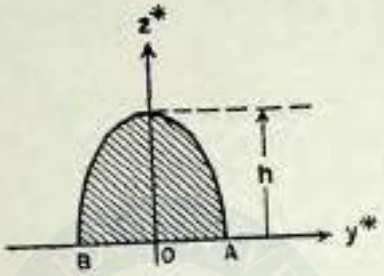
dır.

4.1.3. R yarıçaplı bir çemberin verilen belirli bir doğrultuya paralel bütün kirişleri üzerinde yükseklikleri aynı bir $b$ sayısına eşit parabolik bir eğri ile sınırlandırılmış bölgeler alınmaktadır. Böyle elde edilen cismin hacminin hesaplanması.

Verilen çemberin düzlemi $xOy$ düzlemi olarak seçilsin ve kirişlerin hepsi Oy eksenine paralel oldukları kabul edilsin. Yukarıda açıklanan cisim aşağıda Şekil 103'de gösterilmiştir. Başlangıçtan Ox ekseni üzerinde $t$ uzaklığında, bu eksene dik bir düzlem ile cisim kesildiğinde elde edilen kesit Şekil 104'de gösterilmiştir. Verilen parabolun $x_1$ $Oz_1$ eksen sistemindeki denklemi



MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ




Şekil 104.

$$z_* = my_*^2 + h$$

şeklinde olacağı aşikardır. $m$ sayısını belirlemek için parabolun $A$ ve $B$ noktalarından geçmesini sağlamak gerekir. $AB$ kirişinin uzunluğuna $a$ denecek olursa, $A$ ve $B$ noktalarının absisleri $a/2$ ve $-a/2$ olur. Halbuki $A$ ve $B$ noktalarının koordinatları

$$my_*^2 + h = 0$$

denklemini çözerek

$$\pm \sqrt{-\frac{h}{m}}$$

şeklinde hesaplanır. Bundan dolayı

$$\frac{a^2}{4} = -\frac{h}{m}$$

yani

$$m = -\frac{4h}{a^2}$$

dır ve dolayısıyla verilen parabolun denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$z_* = -\frac{4h}{a^2} y^2_* + h$$

dır. Bu durumda parabolun altında kalan alan

$$A(t) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(-\frac{4h}{a^2} y^2_* + h\right) dy_* = \left(-\frac{4h}{a^2}\frac{y^3_*}{3} + hy_*\right)\Bigg|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

$$= -\frac{4h}{a^2}\frac{a^3}{24} - \frac{4h}{a^2}\frac{a^3}{24} + h\frac{a}{2} + h\frac{a}{2}$$

$$= ha\left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3} ah$$

dır.

Şimdi $xOy$ düzleminde O noktasından $t$ uzaklığında olan ve Oy eksenine paralel bir doğru daireyi ordinatları

$$y = \pm\sqrt{R^2 - t^2}$$

olan A ve B noktalarında keser. Şu halde

$$\frac{a}{2} = \sqrt{R^2 - t^2}$$

ve

$$A(t) = \frac{4}{3} h\sqrt{R^2 - t^2}$$

dır ve dolayısıyla aranan hacim

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$H = \int_{-R}^{R} A(t)\,dt = \int_{-R}^{R} \frac{4}{3} h \sqrt{R^2 - t^2}\,dt$$

$$= \frac{8}{3} h \int_{0}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}\,dt$$

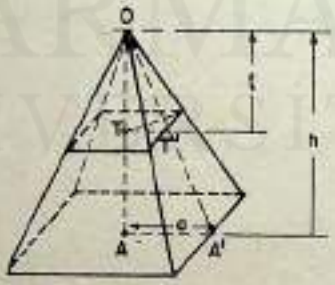
dır. $t = Ru$ dönüşümünü uygulayarak

$$H = \frac{8}{3} hR^3 \int_{0}^{1} \sqrt{1 - u^2}\,du = \frac{8}{3} \pi hR^3$$

elde edilir.

4.1.1. Yüksekliği $h$, tabanı kenarı $a$ ya eşit bir kare olan dik piramidin hacminin hesaplanması.

Piramidin yüksekliğinin bir eksen olarak, piramidin tepesinin ise bu eksen üzerindeki başlangıç noktası olarak seçildiği kabul edilsin. Bu $0x$ ekseni üzerinde 0 noktasından uzaklığı $t$ olan noktadan eksene dik bir düzlem geçirilmesi halinde cismin kesiti yine bir kare olur. Bu karenin alanını




Şekil 105.

hesaplamak için OAA' ve OTT' üçgenlerinin benzerliğini göz önüne almak yeterlidir. Aranan karenin kenar uzunluğuna $u$ denecek olursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\frac{u}{t} = \frac{a}{h}$$

bulunur. Dolayısıyla $u = \frac{a}{h}\, t$ ve karenin $A(t)$ alanı

$$A(t) = \frac{a^2}{h^2}\, t^2$$

dir ve aranan hacim

$$H = \int_0^h A(t)\, dt = \int_0^h \frac{a^2}{h^2}\, t^2\, dt$$

$$= \frac{a^2}{h^2}\, \frac{t^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\, a^2 h$$

dir.

*4.2. Alıştırmalar*

1. Düzgün dörtyüzlünün hacmini hesaplayınız.

$$\text{Yanıt} : \frac{\sqrt{2}}{12}\, a^3$$

2. Belirli bir cismin tabanı $xOy$ düzleminin $x^2 + y^2 \leqslant 1$ şartını sağlayan noktalarından oluşur. Oy eksenine dik her düzlem kesiti bir kenar olduğuna göre, cismin hacmini hesaplayınız.

$$\text{Yanıt} : \frac{16}{3}$$

3. Tabanı düzgün bir $n$-gen olan piramidin hacmini bulunuz.

$$\text{Yanıt} : \frac{1}{12}\, n a^2 h \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM YİRMİBİR

## İNTEGRAL KAVRAMININ KAPSAMININ GENİŞLETİLMESİ — ÖZGÜ OLMAYAN İNTEGRALLER

### 0. *Amaç*

Bölüm Ondört'te, *integral* kavramını açıklamak için bir yandan göz önüne alınan fonksiyonun *sınırlı* bir fonksiyon olması, öte yandan integrasyonun yapılacağı aralığın *kapalı* (ve dolayısıyla *sonlu*) bir aralık olması varsayımlarından hareket edilmişti. Bu Bölümde bu varsayımların bazı koşullar altında hafifletilmesi olanağının var olduğu gösterilecektir.

### 1. *İki örnek*

1.1. $t > 0$ için tanımlanmış olan $f(t) = \dfrac{1}{t}$ fonksiyonunun $t = 1$ ile $t = a$ ($a$ sabit, $a > 1$) arasındaki integrali göz önüne alınsın. Fonksiyon $[1, a]$ aralığında sınırlı olduğundan integralinin varlığı problemi ele alınabilir: fonksiyon, söz konusu aralıkta sürekli olduğundan, Bölüm Onbeş'teki Teorem 6.1. den dolayı integrali vardır. Üstelik Bölüm Onyedi'nin (1.1) formülüne göre

$$\int_1^a \frac{1}{t}\,dt = \operatorname{Log} t\Big|_1^a = \operatorname{Log} a - \operatorname{Log} 1 = \operatorname{Log} a$$

yazılabilir. Bu integralde integrasyonun üst limiti olan $a$ yerine $x > 1$ koşulunu sağlayan bir $x$ 'in değişkenin konması halinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \text{Log } x$$

yazılabilir. $x$ değişkeninin sınırsız büyütülmesi halinde, doğal logaritma fonksiyonunun değişkenle birlikte büyüdüğü ve verilen herhangi bir pozitif sayıdan büyük değerler alabildiği Bölüm On-yedi'de gösterilmiştir. Şu halde $f(t) = \frac{1}{t}$ fonksiyonunun grafiğinin ele alınması halinde, elde edilen eşkenar hiperbolün $t > 0$ için elde edilen kolunun altında kalan ve bir yandan $t = 1$, öte yandan $t = x$ doğruları ile sınırlanan alan, $x$ büyüdükçe belirli herhangi bir sonlu sayıya yaklaşamaz.

1.2. Her $t \neq 0$ için tanımlanmış olan $f(t) = \frac{1}{t^2}$ fonksiyonunun $t = 1$ ile $t = a$ ($a$ sabit, $a > 1$) arasındaki integrali göz önüne alınsın. Bu fonksiyon da $[1, a]$ aralığında sürekli olduğundan söz konusu aralıkta integrali vardır ve

$$\int_1^a \frac{1}{t^2}\,dt = \left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^a = 1 - \frac{1}{a}$$

yazılabilir. Burada da sabit kabul edilen $a$ üst integrasyon limitinin yerine $x > 1$ koşulunu sağlayan bir $x$ değişkeni yazılacak olursa

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{x}$$

elde edilir.

$x > 1$ koşuluna uyarak $x$ sayısının sınırsız büyütülmesi halinde pozitif kalarak gittikçe azalır ve sıfıra yaklaşır. Şu halde $x$ değişkenine, önceden seçilen, istenildiği kadar büyük belirli bir sayıdan büyük değerler verilmesi halinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int_1^u \frac{1}{t^2}\,dt$$

integrali belirli ve sonlu olan 1 sayısına yaklaşır.

2. *Birinci cinsten özgü olmayan integraller*

2.1. *Tanım : a sayısı sabit olmak üzere u sayısı $u > a$ koşulunu sağlasın ve f fonksiyonu, u sayısı sonlu kalmak şartı ile ne kadar büyük olursa olsun, her sonlu $[a, u]$ kapalı aralığı üzerinde integre edilebilen bir fonksiyon olsun.*

$$\lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx$$

*varsa*

$$\lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx \qquad (2.1.1)$$

*yazılır. Bu limitin değeri, (2.1.1) eşitliğinin ikinci yanındaki yazılışla gösterilen birinci cinsten özgü olmayan integralin değeridir.*

Özgü olmayan integral tanımında yer alan

$$\lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx$$

limitinin var olması halinde, özgü olmayan integrale *yakınsak* ve bu limitin bulunamaması halinde ise özgü olmayan integrale *ıraksak* denir.

1. de incelenen örneklerden birincisi, özgü olmayan integrali ıraksak olan bir fonksiyon ile ilgilidir; ikinci örnekte ise, özgü olmayan integrali yakınsak olan bir fonksiyon ele alınmıştır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Tanım 2.1 aşağıda açıklanan iki tanımla tamamlanır.

2.2. *Tanım:* b *sayısı sabit olmak üzere* u *sayısı* $u < b$ *koşulunu sağlasın ve* f *fonksiyonu,* u *sayısı sonlu kalmak şartı ile ne kadar küçük olursa olsun, her sonlu* [u, b] *kapalı aralığı üzerinde* integre edilebilen bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{u \to -\infty} \int_u^b f(x)\,dx$$

*varsa*

$$\lim_{u \to -\infty} \int_u^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx \tag{2.2.1}$$

*yazılır. Bu limitin değeri,* (2.2.1) *eşitliğinin ikinci yanındaki yazılışla gösterilen birinci cinsten özgü olmayan integralin değeridir.*

2.3. *Tanım :* u, U *sayıları,* $u < U$ *koşulunu sağlasın.* u *sayısı ne kadar küçük olursa olsun ve* U *sayısı ne kadar büyük olursa olsun,* f *fonksiyonu her sonlu* [u, U] *kapalı aralığı üzerinde integre edilebilen bir fonksiyon ve üstelik her* a *sabit sayısı için*

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \quad ve \quad \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

*özgü olmayan integralleri yakınsak ise,*

$$\lim_{u \to -\infty} \int_u^a f(x)\,dx + \lim_{U \to \infty} \int_a^U f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \tag{2.3.1}$$

*yazılır. İki limitin toplamının değeri,* (2.3.1) *eşitliğinin son terimindeki yazılışla gösterilen birinci cinsten özgü olmayan integralin değeridir.*

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.4. *Uyarı :* Anlamları Tanım 2.2. ve Tanım 2.3. ile açıklanan

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

sembollerinin varlıkları için gerekli olan limitler belirli ise, bu özgü olmayan integrallere *yakınsak*, bu limitler yoksa, özgü olmayan integrallere *ıraksak* denir.

2.5. *Uyarı :* Tanım 2.3. teki açıklayıcı (2.3.1) eşitliğinden hareket ederek

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \left\{ \int_{-t}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{t} f(x)\,dx \right\}$$

yazılamaz, yani

$$\lim_{u\to-\infty} \int_{u}^{a} f(x)\,dx + \lim_{U\to\infty} \int_{a}^{U} f(x)\,dx$$

(2.5.1)

$$\neq \lim_{t\to\infty} \left\{ \int_{-t}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{t} f(x)\,dx \right\}$$

dir. Durumun böyle olduğunu kanıtlamak için, tanıma göre ıraksak olan özgü olmayan bir integral için, yukardaki eşitliğin sağındaki limitinin var olduğunu göstermek yeter.

Bu tür bir örnek

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

fonksiyonunu inceleyerek elde edilir. Tanım 2.3. e göre, yukardaki fonksiyona tekabül eden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

özgü olmayan integralinin yakınsak olması için

$$\lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

limitinin belirli bir sonlu sayıya eşit olması gerekir. Halbuki

$$\int_0^t \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,(x^2+1)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,(t^2+1)$$

dir ve doğal logaritma fonksiyonu, değişken büyüdükçe verilen her sayıdan büyük kılınabileceğinden

$$\lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

yoktur ve bu nedenle Tanım 2.3. e göre, yukarıda ele alınan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

özgü olmayan integrali raksaktır.

Halbuki (2.5.1) bağıntısının ikinci yanı

$$\lim_{t\to\infty} \left\{ \int_{-t}^{a} \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int_{a}^{t} \frac{x\,dx}{x^2+1} \right\} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \left\{ \int_{-t}^{a} \frac{2x\,dx}{x^2+1} + \int_{a}^{t} \frac{2x\,dx}{x^2+1} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \lim_{t\to\infty} \left[ \text{Log}\,(x^2+1)\Big|_{-t}^{a} + \text{Log}\,(x^2+1)\Big|_{a}^{t} \right] \right\}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \to \infty} [\text{Log}\,(a^2 + 1) - \text{Log}\,(t^2 + 1) + \text{Log}\,(t^2 + 1) - \text{Log}\,(a^2 + 1)\,] = 0$$

verir.

Bu sonuç, (2.5.1) bağıntısının sağ tarafındaki kısmının ele alınarak hareket edilmesi halinde, bazı şartlar altında *yanlış* bir yargıya varma olanağının var olduğunu açıklar: bu nedenle, Tanım 2.3. aynen uygulamak zorunluluğu vardır.

2.6. *Örnek:*

Her $t \in \mathbb{R}$ için tanımlı olan $f(t) = e^{-t}$ fonksiyonunun $t = 1$ ile $t = a$ ($a$ sabit, $a > 1$) arasındaki integrali göz önüne alınsın. $f(t)$ fonksiyonu bütün $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan $[1, a]$ aralığında integrali vardır. Bölüm Onsekiz'deki (1.1) e göre

$$\int_1^a e^{-t}\,dt = (-e^{-t}) \Big|_1^a = e^{-1} - e^{-a}$$

yazılabilir. Şu halde $x > 1$ koşuluna uyan bir sayı olmak üzere

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^x e^{-t}\,dt = \lim_{x \to \infty} (e - e^{-x})$$

$$= \frac{1}{e} - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x}$$

$$= \frac{1}{e}$$

elde edilir, yani

$$\int_1^{\infty} e^{-t}\,dt$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ


birinci cinsten özgü olmayan integrali yakınsaktır ve değeri $\frac{1}{e}$ dir.

2.7. *Sonuç:* Birinci cinsten özgü olmayan yakınsak integraller, integrasyon aralığının *sonsuz* olması halinde hesaplanabilen integrallerdir.

*3 — İki örnek*

3.1. $x$ sayısı $0 < x < 1$ koşulunu sağlamak üzere

$$\int_x^1 \frac{dt}{t}$$

integrali ele alınsın. Bölüm Onyedi'deki verileri uygulayarak

$$\int_x^1 \frac{dt}{t} = \operatorname{Log} t \Big|_x^1 = \operatorname{Log} 1 - \operatorname{Log} x = -\operatorname{Log} x = \operatorname{Log} \frac{1}{x}$$

elde edilir. Şu halde $x$ sayısının sıfır sayısına pozitif kalarak yaklaşması halinde $\operatorname{Log} \frac{1}{x}$ verilen her pozitif sayıdan büyük kılınabileceğinden

$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t}$$

limiti yoktur.

3.2. Her $t > 0$ için tanımlı olan $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ fonksiyonunun

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

tanım cümlesinde sürekli olmamasından dolayı, tanım cümlesine ait her kapalı aralık üzerinde integrali vardır. $x$ sayısı $0 < x < 1$ koşulunu sağlamak üzere

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\ \Big|_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

dır. Halbuki $g(t) = \sqrt{t}$ fonksiyonunun sürekli olmasından

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

dır: şu halde

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$$

dır.

*4 — İkinci cinsten özgü olmayan integraller*

4.1. *Tanım*: $[a, b]$ *kapalı aralığının tek bir* c *noktasında sonsuz bir süreksizliği bulunan fakat bu* c *noktasını içine almayan,* $[a, b]$ *aralığının her kapalı alt aralığı üzerinde integre edilebilen bir* f *fonksiyonu verilmiş olsun.*

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx, \quad \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c-\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx \tag{4.1.1}$$

*limitleri varsa*

$$\lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{4.1.2}$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{c-\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx \tag{4.1.3}$$

*ve*

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{4.1.4}$$

*yazılır ve* (4.1.2), (4.1.3) *sayesinde belirlenen* (4.1.4) *eşitliğinin sol tarafında belirlenen sayıya aynı eşitliğin sağında yazılan ikinci cinsten özgü olmayan integralin değeri denir.*

Özgü olmayan integral tanımında yer alan (4.1.2) ve (4.1.3) limitlerinin var olması halinde, özgü olmayan integrale *yakınsak* ve bu limitlerin en az birinin bulunamaması halinde ise özgü olmayan integrale *raksak* denir.

$c$ noktası $[a, b]$ kapalı aralığının $a$ ucu ile çakışacak olursa, (4.1.3) limitinin varlığı, (4.1.4) ün tanımlanabilmesi için yeterlidir; aynı şekilde, $c$ noktası $[a, b]$ kapalı aralığının $b$ ucu ile çakışacak olursa, (4.1.2) limitinin varlığı, (4.1.4) ün tanımlanabilmesi için yeterlidir.

3. te incelenen örneklerden birincisi

$$\int_0^1 \frac{dt}{t}$$

ikinci cinsten özgü olmayan *integralinin raksak olduğunu, ikincisi* ise

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

ikinci cinsten özgü olmayan integralinin yakınsak olduğunu göstermektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.2. *Örnekler :*

4.2.1.

(4.2.1.1)

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

ikinci cinsten özgü olmayan bir integraldir, çünkü $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ fonksiyonunun $x = 0$ için $+\infty$ giden bir süreksizliği vardır. $\pm$ işaretleri, $x$ değişkeninin işaretine göre alınmak koşulu ile

$$\int \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \pm 2\sqrt{|x|} + k$$

olduğuna göre

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = -2\left(\sqrt{|-\varepsilon|} - \sqrt{|-1|}\right) = -2\left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right)$$

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2\left(\sqrt{|1|} - \sqrt{|\varepsilon|}\right) = 2(1 - \sqrt{\varepsilon})$$

dır. Şu halde

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon_1}) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon_2})$$

$$= 4$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


elde edilir. Bu sonuç (4,2.1.1) ikinci cinsten özgü olmayan integralinin yakınsak olduğunu göstermektedir.

4,2,2.

(4.2.2.1) $$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

ikinci cinsten özgü olmayan bir integraldir, çünkü $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ fonksiyonu $x = 1$ için sonsuza yaklaşır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int_{1+\varepsilon}^{2} (x-1)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left. \frac{(x-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_{1+\varepsilon}^{2}$$

$$= 2\sqrt{x-1} \Big|_{1+\varepsilon}^{2} = 2\sqrt{2-1} - 2\sqrt{1+\varepsilon-1}$$

$$= 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

dir ve

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

olduğundan ikinci cinsten özgü olmayan integral yakınsak ve değeri 2 dir.

4.3. *Sonuç:* İkinci cinsten özgü olmayan yakınsak integraller, integrali alınan fonksiyonun integrasyon aralığında sonsuz olması halinde hesaplanabilen integrallerdir.

4.4. *Uyarı:* Fonksiyonun integrasyon aralığının bazı noktalarında sonsuz değerler alması ve aynı zamanda integrasyon aralığının kendisinin sonsuz olması halinde elde edilen özgü olmayan in-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

tegrallere bazı yazarlar *üçüncü cinsten özgü olmayan integral* demektedirler. Ancak, bu tür integrallerin ayrı bir teorisi olmayacağı, birinci ve ikinci cinsten özgü olmayan integrallere ait sonuçları birleştirerek yakınsak veya ıraksaklıklarının inceleneceği apaçıktır.

*5 — Özgü olmayan integraller için bir yakınsaklık koşulu*

Elemanter yollardan ilkel fonksiyonları bulunabilen fonksiyonlardan olmayan fonksiyonların özgü olmayan integrallerini incelemek yukarda açıklanan yöntem ile yapılamaz çünkü limitleri aranacak fonksiyonların açık ifadelerini yazmak olanağı yoktur. Örneğin Matematiksel İstatistik Teorilerinde önemli bir yeri olan $f(t) = e^{-t^2}$ fonksiyonunun

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt$$

özgü olmayan integrali bu türden bir integraldir. Şu halde, değerlerini hesaplamaksızın, özgü olmayan integrallerin yakınsak olup olmadıklarını ayırabilecek olan kurallara gerek vardır. Bu tipten bir kural aşağıdaki Teorem 5.2 de açıklanmıştır. Ancak, bu teoremi kanıtlamadan önce, bir yardımcı teorem durumunda olan aşağıdaki teorem ele alınacaktır:

5.1. *Yardımcı Teorem :* $f$ *ve* $g$, $[a, b]$ *kapalı aralığı üzerinde tanımlanmış ve Riemann anlamında integre edilebilen iki fonksiyon olsun. Her* $x \in [a, b]$ *için*

$$f(x) \leqslant g(x)$$

*ise*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

*dir.*

*Kanıt :* Her $x \in [a, b]$ için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$f(x) \leqslant g(x)$$

olduğundan, her $x \in [a, b]$ için

$$0 \leqslant (g - f)\ (x)$$

dir. Bölüm Öndört, Teorem 7.5. ten dolayı

$$(b - a) \leqslant \int_a^b (g - f)\ (x)\, dx$$

yani

$$0 \leqslant \int_a^b (g + (-f))$$

dir. Şu halde, Bölüm Öndört, Teorem 7.3. ve Teorem 7.4. ü uygulayarak

$$0 \leqslant \int_a^b g - \int_a^b f$$

ve buradan

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$$

elde edilir.

5.2. *Teorem*: $f$ *ve* $g$, *her* $x \geqslant a$ *için tanımlı, sürekli ve*

$$f(x) \geqslant 0, \quad g(x) \geqslant 0$$

*koşulunu sağlayan iki fonksiyon olsun. Üstelik, her* $x \geqslant a$ *için*

$$f(x) \leqslant g(x)$$

*bağıntısı gerçeklensin. Bu koşullar altında*

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

*özgü olmayan integrali yakınsaksa*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

*özgü olmayan integrali de yakınsaktır.*

*Kanıt:* $B \geqslant a$ koşulu sağlanmak üzere herhangi bir B sayısı seçilsin. Her $x \geqslant a$ için

$$f(x) \leqslant g(x)$$

olmasından ötürü, Yardımcı Teorem 5.1. den dolayı

$$\int_a^B f(x)\,dx = \int_a^B g(x)\,dx$$

yazılabilir.

$g$ fonksiyonunun özgü olmayan integrali yakınsak ise, sonlu bir değeri vardır. Bu değer $I(g)$ ile gösterilsin. Her $B \geqslant a$ için

$$\int_a^B g(x)\,dx = I(g) \tag{5.2.1}$$

yazılabilir, çünkü $g$ fonksiyonu negatif değerler almayan bir fonksiyondur. Şu halde (5.2.1) bağıntısı ve Yardımcı Teorem 5.1. den dolayı, *her* $B \geqslant a$ için

$$\int_a^B f \leqslant \int_a^B g \leqslant I(g) \tag{5.2.2}$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Şimdi

$$F = \left\{ \int_a^B f \mid B \geqslant a \right\}$$

cümlesi göz önüne alınsın. $B = a$ olması halinde

$$\int_a^a f = 0$$

olduğundan, $0 \in F$ dir, yani $F$ cümlesi *boş değildir*. Üstelik (5.2.2) bağıntısından dolayı $F$ cümlesi *üstten sınırlı* olan bir cümledir. Şu halde $F$ cümlesinin supremumu vardır.

$$I(f) = \sup F$$

yazılsın.

Supremum tanımından dolayı, her $\varepsilon$ pozitif reel sayısı için

$$I(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^B f = I(f)$$

olacak şekilde bir $B^*$ sayısı vardır. Üstelik $f$ fonksiyonu negatif değerler almayan bir fonksiyon olduğuna göre, $B_1 < B_2$ koşulu

$$\int_a^{B_1} f \leqslant \int_a^{B_2} f$$

olduğundan

$$\int_a^B f$$

B sayısı ile birlikte artan bir sayıdır ve

$$I(f) - \varepsilon,\ I(f)$$

arasında sonsuz sayıda

$$\int_a^B f$$

vardır, yani

$$\lim_{B\to\infty} \int_a^B f = I(f)$$

tir. Şu halde $f$ fonksiyonunun özgü olmayan integrali yakınsaktır. Bu da kanıtlanması istenendir.

5.3. *Uyarı :*

Teorem 5.2. ye, özgü olmayan integraller için *Karşılaştırma Teoremi* denir.

5.4.—*Uygulama :*

Teorem 5.2., $\int_1^\infty \frac{t\,dt}{t^3+1}$

özgü olamayan integralinin yakınsak olup olmadığını araştırmak için kullanılacaktır. (Özgü olmayan integrali alınacak olan fonksiyonun bu örnekte bir rasyonel fonksiyon olması, elemanter yollardan integre edilebilmesi demektir. Ancak, bu işlemden kaçınılarak, burada gerçel hesap yapılmadan özgü olmayan integralin yakınsaklığı hakkında hüküm verilebilir.)

Her $t > 1$ için

$$0 < t^3 < t^3 + 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{t^3+1} < \frac{1}{t^3}$$

ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\frac{t}{t^3+1} < \frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2}$$

dir. Şu halde,

$$\int_1^B \frac{t\,dt}{t^3+1} < \int_1^B \frac{dt}{t^2}$$

dir. Üstelik

$$\int_1^B \frac{dt}{t^2} = \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg|_1^B = \frac{B^{-1}}{-1} - \frac{1}{-1} = 1 - \frac{1}{B}$$

olduğundan

$$\lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{dt}{t^2} = \lim_{B\to\infty} \left(1 - \frac{1}{B}\right) = 1$$

olup $g(x) = \frac{1}{x^2}$ fonksiyonunun özgü olmayan integrali yakınsaktır. Şu halde

$$\int_1^\infty \frac{t\,dt}{t^3+1}$$

özgü olmayan integrali yakınsaktır.

*6 — Özgü olmayan bir integral ile tanımlanan bir fonksiyon*

Bölüm Onaltı, Onyedi ve Onsekiz'de incelenen elemanter trasandant fonksiyonların dışında, çeşitli yollardan tanımlanan ilginç (ve artık *elemanter* sözcüğünün kapsamının dışına çıkan) trasandant fonksiyonlar vardır. Burada, özgü olmayan bir integral ile tanımlanan ve ilk olarak Euler tarafından incelenen, gerek arı, gerekse uygulamalı matematiğin birçok yerinde kullanılan *Gamma fonksiyonu* ele alınacaktır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Gamma fonksiyonu $\Gamma(x)$ şeklinde gösterilir ve

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (x > 0) \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır.

## 6.1. *Gamma fonksiyonunun varlığı*

Gamma fonksiyonundan söz edebilmek için, tanımı için kullanılan özgü olmayan integralin yakınsaklığını kanıtlamak gerekir. $x > 0$ için

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

ele alınsın. $x$ sayısı $]0, 1[$ arasında seçilmesi halinde, integrali hesaplanacak olan fonksiyonun $t = 0$ için sonsuz olduğu görülür. Bu durumda, uygun bir değer seçerek, verilen özgü olmayan integral iki ayrı kısma bölünür. Örneğin $t = 1$ değerini seçerek

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \tag{6.1.1}$$

elde edilir ve birinci integral ikinci cinsten özgü olmayan bir integral, ikinci integral ise birinci cinsten özgü olmayan bir integraldir.

$t \in [0, 1]$ için $e^{-t}$ fonksiyonu 1 sayısından küçük veya eşit kaldığından

$$t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$$

eşitsizliği elde edilir. $[0, 1]$ aralığında iki fonksiyon negatif değerler almadığına göre burdaki Teorem 5.2. uygulanabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\int_t^1 t^{x-1}\,dt = \frac{t^x}{x}\Big|_t^1 = \frac{1}{x} - \frac{t^x}{x}$$

olduğundan

$$\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 t^{x-1}\,dt = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{t^x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}$$

tir ve dolayısıyla özgü olmayan

$$\int_0^1 t^{x-1}\,e^{-t}\,dt$$

integrali yakınsar.

İkinci integralin yakınsaklığını kanıtlamak için

$$f(t) = t^{x+1}\,e^{-t}$$

fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyonun türev fonksiyonu

$$f'(t) = (x+1)\,t^x\,e^{-t} - t^{x+1}e^{-t}$$

$$= e^{-t}\,t^x\,((x+1) - t)$$

dir ve $t = x+1$ verilen fonksiyonun bir kritik değeridir. $t < x+1$ için $f'(t)$ pozitif, $t > x+1$ için $f'(t)$ negatif olduğundan, söz konusu kritik değer bir maksimum gösterir ve türev fonksiyonunun $[1, \infty[$ aralığında, başka sıfırları veya süreksizlik noktaları olmadığına göre $t = x+1$, $f$ fonksiyonun $[1, \infty[$ aralığındaki tek kritik değeridir yani

$$f(x+1) = (x+1)^{x+1}\,e^{-(x+1)}$$

değeri $f$ fonksiyonu için bir mutlak maksimumdur, yani her $t+1$ için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(6.1.2) $$f(t) = t^{x-1} e^{-t} \leqslant (x+1)^{x+1} e^{-(x+1)} = f(x+1)$$

dir. Halbuki

$$t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \frac{1}{t^2}$$

dir. (6.1.2) yi uygulayarak, her $t \geqslant 1$ için

(6.1.3) $$t^{x-1} e^{-t} \leqslant (x+1)^{x+1} e^{-(x+1)} \frac{1}{t^2}$$

$$\int_1^{\infty} (x+1)^{x+1} e^{-(x+1)} \frac{1}{t^2} dt$$

yani

(6.1.4) $$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}$$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığına bağlıdır, halbuki (6.1.4) integralinin yakınsaklığı zaten 1.2 de kanıtlanmıştır.

Böylece (6.1.1) de ve Gamma fonksiyonunun tanımında yer alan

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

özgü olmayan integralin $x \in ]0, 1[$ için yakınsadığı kanıtlanmış olur.

$x \geqslant 1$ ise

$t^{x-1} e^{-t}$

fonksiyonunun $t \in [0, 1]$ için bir süreksizliği yoktur çünkü gerek $e^{-t}$ gerekse $t^{x-1}$, $t$ değişkeninin bu aralıkta alınan değerleri

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


için sürekli birer fonksiyondur. Şu halde $t^{x-1}e^{-t}$ fonksiyonu, $[0, 1]$ aralığında integrali hesaplanabilen bir fonksiyondur ve

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

âdi bir integraldir ve belirli bir değere eşittir.

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığı ise, yukarda $x \in ]0, 1[$ olması halinde uygulanan yöntemle aynen kanıtlanır.

Dolayısıyla $x \geq 1$ olması halinde de

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

integrali yakınsar, yani (6.1) tanımı her $x > 0$ için bir anlam taşımaktadır.

### 6.2. *Gamma fonksiyonunun bazı özellikleri*

6.2.1. $$\int_\varepsilon^n t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

integrali göz önüne alınsın. $u = t^x = u(t)$ ve $v = e^{-t} = v(t)$ yazılacak olursa, $v'(t) = -e^{-t}$ ve $dv = -e^{-t}\, dt$ olur ve verilen integrale kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\int_0^n t^x e^{-t}\, dt = -\int_0^n u\, dv = -\left[u(t) \cdot v(t)\right]_\varepsilon^n + \int_\varepsilon^n v\, du$$

$$= \left(-t^x e^{-t}\right)\Big|_\varepsilon^n + x \int_0^n t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad (6.2.1.1)$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(-t^x e^{-t}) \Big|_0^B = -B^x e^{-B} = -\frac{B^x}{e^B}$$

dir.

Reel sayılar cismi Arkhimedsel olduğundan (Bölüm Sekiz, 4.1.1.)

$$p < x \leqslant p+1$$

olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Dolayısıyla, L'Hopital kuralını uygulayarak

$$\lim_{B\to\infty} \frac{B^x}{e^B} = x \lim_{B\to\infty} \frac{B^{x-1}}{e^B} = x(x-1) \lim_{B\to\infty} \frac{B^{x-2}}{e^B} = \dots$$

elde edilir ve bu yöntemi yeteri kadar arka arkaya uygulayarak

$$\lim_{B\to\infty} \frac{B^x}{e^B} = x(x-1)(x-2)\dots(x-p) \lim_{B\to\infty} \frac{B^{x-(p+1)}}{e^B}$$

bulunur: halbuki $x \leqslant p+1$ olduğundan $x-(p+1) \leqslant 0$ dır ve dolayısıyla

$$\lim_{B\to\infty} \frac{B^x}{e^B} = 0$$

bulunur. Şu halde, (6.2.1.1) de B değişkenini sonsuza yollayarak limite geçilmesi halinde

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

elde edilir, yani

(6.2.1.2) $$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

temel bağıntısı elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


6.2.2. (6.2.1.2) bağıntısı her $x > 0$ için geçerlidir: özel olarak bu koşula uyan $n$ doğal sayılar için de yazılabilir, yani her $n \in \mathbb{N}$ için

(6.2.2.1) $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

dır. Bu bağıntı bir indirgeme bağıntısı olarak kabul edilebilir.

(6.2.2.1) den hareket ederek

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\,\Gamma(n)\\
\Gamma(n) &= (n-1)\,\Gamma(n-1)\\
\Gamma(n-1) &= (n-2)\,\Gamma(n-2)\\
\Gamma(n-2) &= (n-3)\,\Gamma(n-3)\\
&\vdots\\
\Gamma(3) &= 2\,\Gamma(2)\\
\Gamma(2) &= 1\,\Gamma(1)
\end{aligned}$$

elde edilir ve taraf tarafa çarparak elde edilen yeni eşitliğin her iki tarafında yer alan terimlerle kısaltıktan sonra

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1.\Gamma(1)$$

yani

(6.2.2.2) $$\Gamma(n+1) = (n!)\,\Gamma(1)$$

elde edilir.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{B\to\infty} (-e^{-t})\Big|_0^B$$

$$= \lim_{B\to\infty} \left(1 - \frac{1}{e^B}\right) = 1$$

olduğundan (6.2.2.2) bağıntısı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(6.2.2.3) $\Gamma(n+1) = n!$

şekline girer.

Böylece, $\Gamma$ fonksiyonunun doğal sayılar cümlesi üzerinde aldığı değerler açıklanmış olur.

6.2.3. (6.2.1.2) bağıntısı her $x > 0$ için geçerli olduğundan

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)\,\Gamma(x+n-1)$$
$$\Gamma(x+n-1) = (x+n-2)\,\Gamma(x+n-2)$$
$$\Gamma(x+n-2) = (x+n-3)\,\Gamma(x+n-3)$$
$$\cdots$$
$$\Gamma(x+n-n+1) = (x+n-n)\,\Gamma(x+n-n)$$

yazılarak, yukarda yapılanlar tekrarlanır ve

(6.2.3.1) $\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,(x)$

bağıntısı elde edilir.

(6.2.2.3) ve (6.2.3.1) bağıntıları, şimdiye kadar sadece doğal sayılar için tanımlanmış olan *faktoriyel* fonksiyonunun $x > 0$ sayısı için tanımlanmasına yol açar.

(6.2.3.2) $\Gamma(x+1) = x!$

yazılacak olursa, bu fonksiyon, doğal sayılar için elemanter anlamdaki faktoriyel fonksiyon ile çakışır ve üstelik (6.2.1.2) bağıntısından dolayı doğal sayılarda geçerli olan (Bölüm İki, 4., (ii))

(6.2.3.3) $x! = x((x-1)!)$

bağıntısını da sağlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# BÖLÜM YİRMİ İKİ

## ÖZGÜ OLMAYAN İNTEGRALLERE ÖRNEKLER

### 1 — BİRİNCİ CİNSTEN ÖZGÜ OLMAYAN İNTEGRALLER

Bu tür integrallerde, integrali hesaplanacak $f$ fonksiyonu her, $u > a$ için her $[a, u]$ (veya her $U < b$ için her $[U, b]$) kapalı aralığı üzerinde sınırlı kalan bir fonksiyondur. Bu şartlar altında özgü olmayan integrallerin, aşağıda yazılı limiteri varsa

$$\lim_{u \to \infty} \int_a^u f(x)\,dx = \int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\lim_{u \to \infty} \int_{-U}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

ve, $c$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\lim_{u \to \infty} \int_{-u}^{c} f(x)\,dx + \lim_{U \to \infty} \int_{c}^{U} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

şeklinde hesaplanırlar.

$$\lim_{t \to \infty} \left[ \int_{-t}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{t} f(x)\,dx \right] \neq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{t\to\infty}\left[\int_{-t}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{t} f(x)\,dx\right]=\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

'in değerine, varsa, bazen özgü olmayan integralin *Cauchy esas* değeri denir. Yukarda yazılı limitlerin var olmaması halinde özgü olmayan integrallere *raksak*, bu limitler hesaplanabilmesi halinde özgü olmayan integrallere *yakınsak* denir.

1.1. *Örnekler:*

1.1.1. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

özgü olmayan integralini incelemek ve yakınsaksa değerini bulmak.

$a$, 0 sayısından büyük herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\int_{0}^{a}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{a}=\operatorname{arctg} a$$

elde edildiğinden

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to\infty}\operatorname{arctg} a=\frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Şu halde özgü olmayan integral yakınsak ve değeri $\pi/2$ dir.

1.1.2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{x^2\,dx}{1+x^4}$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığını incelemek.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


$$\int_0^u \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int_0^u \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = (x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^u$$

$$= u - \operatorname{arctg} u$$

dır.

$$\lim_{u\to\infty} (u - \operatorname{arctg} u)$$

hesaplanamayacağından, verilen özgü olmayan integral ıraksaktır.

1.1.3. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+x)\,dx}{1+x^2}$$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığını incelemek.

$$\int_0^r \frac{(1+x)\,dx}{1+x^2} = \int_0^r \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^r \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$= (\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2))\Big|_0^r$$

$$= \operatorname{arctg} r + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+r^2)$$

dir.

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{Log}(1+r^2) = +\infty$$

olduğundan verilen özgü olmayan integral ıraksaktır.

Ancak, söz konusu integralin Cauchy Esas Değeri hesaplanabilir: gerçekten

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int_{-r}^{r} \frac{(1+x)\,dx}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+x^2)\Big|_{-r}^{r}$$

$$= -\operatorname{arctg}(-r) - \frac{1}{2}\operatorname{Log}(1+r^2)$$

elde edildiğinden

$$\int_{-r}^{r} \frac{(1+x)\,dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} r - \operatorname{arctg}(-r)$$

$$= 2\operatorname{arctg} r$$

bulunur. Şu halde

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{(1+x)\,dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} (2\operatorname{arctg} r) = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

elde edilir, yani verilen özgü olmayan integralin Cauchy Esas Değeri vardır ve değeri $\pi$ sayısına eşittir.

### *1.2. Alıştırmalar*

Aşağıdaki özgü olmayan integrallerin yakınsak olup olmadıklarını inceleyiniz ve yakınsak olmaları halinde değerlerini bulunuz:

1. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ Yanıt : Yakınsak ve değeri 1

2. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^{3/2}}$ Yanıt : Yakınsak ve değeri 2

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


3. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ Yanıt : Iraksak

4. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ Yanıt : Yakınsak ve değeri $\frac{1}{2}$

5. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ $(p > 1)$

Yanıt : Yakınsak ve değeri $\frac{1}{p-1}$

6. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ $p < 1)$ Yanıt : Iraksak

7. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ Yanıt : Yakınsak ve değeri 2

8. $\int_3^\infty \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$ Yanıt : Yakınsak ve değeri $\frac{1}{100}$

9. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(x+1)^3}$

Yanıt : Yakınsak ve değeri $\frac{1}{2}$

## 2 — İKİNCİ CİNSTEN ÖZGÜ OLMAYAN İNTEGRALLER

$a, b$ integrasyon aralığının bir $c$ noktasında $f$ fonksiyonu sınırlı olmaktan çıkarsa ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \,, \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

varsa, ikinci cinsten özgü olmayan

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integralinin değeri bu iki limitin toplamına eşittir. Her iki limitten en az biri yoksa özgü olmayan integrale *ıraksak*, her ikisi varsa özgü olmayan integrale *yakınsak* denir.

*2.1. Örnekler:*

2.1.1. $$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığını incelemek.

$f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında $x = 0$ noktasında süreksiz olduğundan I integralini incelemek için iki limit hesaplamak gerekir. Bunlardan birincisi

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x^{-3}}{-3}\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3\varepsilon^3}\right)$$

olup, değeri sonsuzdur. Şu halde söz konusu özgü olmayan integral ıraksaktır.

2.1.2. $$\int_{-1}^{1} x^{-1/3}\,dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


özgü olmayan integralinin yakınsaklığını incelemek ve yakınsaksa değerini bulmak.

$f(x) = x^{-1/3}$ fonksiyonu $[-2, 3]$ aralığında $x = 0$ noktasında süreksizdir. Bu integrali hesaplamak için iki limit ele almak gerekir. Birincisi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\varepsilon}^{3} x^{-1/3}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{3}{2} x^{2/3}\right)\Big|_{\varepsilon}^{3} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{9} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

verir. İkincisi ise

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\varepsilon^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right) \Big| \int_{-2}^{-\varepsilon} x^{-1/3}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{3}{2} x^{2/3}\right)$$

$$= \frac{-3}{2}\sqrt[3]{4}$$

verir ve dolayısıyla verilen özgü olmayan integral yakınsak ve değeri

$$\int_{-2}^{3} x^{-1/3}\,dx = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}\right)$$

dır.

2.1.3. $$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığını incelemek.

Süreksizlik noktası integrasyon aralığının üst sınırı ile çakıştığından, bu tür bir integrali incelemek için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2}$$

limitini hesaplamakla yetinilir.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

dir ve bu limit sonsuza eşit olduğundan, verilen özgü olmayan integral ıraksaktır.

2.1.4. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığını incelemek ve yakınsaksa değerini hesaplamak.

Bu integralde de $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ fonksiyonunun 1 süreksizlik noktası integrasyon aralığının üst sınırı ile çakışmaktadır. Buna göre

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\arcsin x)\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Bu ifade özgü olmayan integralin yakınsaklığını kanıtlar ve değerinin $\pi/2$ ye eşit olduğunu gösterir.

2.1.5. $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)}$$

özgü olmayan integralinin yakınsaklığını incelemek.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu integralde yer alan $f$ fonksiyonu, integrasyon aralığının her iki ucunda süreksizdir. Bu nedenle, fonksiyonun belirli olduğu bir noktadan yaralanarak, verilen integrali iki ayrı özgü olmayan integrale ayırmak yerinde olur. $x = \frac{1}{2}$ noktası bu türden bir nokta olduğuna göre

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$$

yazılabilir. $\sqrt{x} = u$ dönüşümünü uygulayarak $du = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ elde edilir ve

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = 2\int \frac{du}{1-u^2} = \int \frac{du}{1-u} + \int \frac{du}{1+u}$$

$$= \operatorname{Log}\frac{1+u}{1-u} = \operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

bulunur. Şu halde

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\Bigg|_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\operatorname{Log}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} - \operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{\varepsilon}}{1-\sqrt{\varepsilon}}\right) = \operatorname{Log}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

dir. Öte yandan

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\operatorname{Log}\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{Log} \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon}}{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}$$

dır ve bu limit sonsuza gittiğinden, verilen özgü olmayan integral ıraksaktır.

*2.2. Alıştırmalar:*

Aşağıdaki özgü olmayan integrallerin yakınsak olup olmadıklarını inceleyiniz ve yakınsak olmaları halinde değerlerini bulunuz:

1. $\int_0^5 \frac{dx}{5 - x}$ Yanıt : Iraksak

2. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 2x}$ Yanıt : Iraksak

3. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ Yanıt : Yakınlık ve değeri $\frac{3}{2}$ dir.

4. $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^{4/3}}$ Yanıt : Iraksak

5. $\int_{-1}^{0} (x + 1)^{-5/4} dx$ Yanıt : Iraksak

6. $\int_0^2 \frac{dx}{(1 - x)^{2/3}}$ Yanıt : Yakınsak ve değeri 6 dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ


Uyarı : İntegre edilecek fonksiyon verilen aralığın bir iç noktası olan $x = 1$ 'de sonsuz olur; bu nedenle integrali iki ayrı parçaya ayırmak gerekir.

7. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{4/5}}$

Yanıt : Yakınsak ve değeri 5 tir.

Uyarı : İntegre edilecek fonksiyon verilen aralığın bir iç noktası olan $x = 1$ 'de sonsuz olur; bu nedenle integrali iki ayrı parçaya ayırmak gerekir.

8. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2x+1)^2}$

Yanıt : Iraksak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

## KAYNAKLAR


1. A. Nazım Terzioğlu, Orhan Ş. İçen, Giacomo Saban ve Haldun Şahinci *Analiz Problemleri*, İkinci Baskı, Matematik Araştırma Enstitüsü, İstanbul, (1973).
2. M. R. Spiegel, *Çözümlü Matematik Problemleri (Analiz)*, (*Hilmi* Demiray ve B. Mutlu Sümer'in çevirisi), Çağlayan Kitabevi, İstanbul, (1975).
1. APOSTOL, Tom M., *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., Menlo Park, Cal., London, Manila, Fourth Printing, (1971).
2. AUSLANDER, Louis, *Calculus - A First Course*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Ill., (1971).
3. BERS, Lipman, *Calculus*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, Chicago, San Francisco, Atlanta, Dallas Montreal, Toronto, London, Sydney, (1969).
4. The Committee on Educational Media of the Mathematical Association of America, *A Programmed Course in Calculus*, Volume I, II, W. A. Benjamin, New York, Amsterdam, (1968).
5. LANG, Serge, *A First Course in Calculus*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., Menlo Park, Calif., London, Sydney, Manila, Third Printing (1973).
6. McALOON, Kenneth and TROMBA Anthony, *Calculus*, Volume I BCD, Eagle Mathematics Series, Harcourt, Brace, Jovanovich, Inc., New York, San Francisco, (1972).
7. PROTHER, Murray, H., and MORREY, Charles B., Jr., *Calculus with Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., Menlo-Park, Cal., London, Sydney, Manila, (1970).
8. SPIVAK, Michael, *Calculus*, W. A. Benjamin, Inc., New York and Amsterdam, (1967).
9. SPIVAK, Michael, *Supplement to Calculus*, W.A. Benjamin, Inc., New York, and Amsterdam, (1967).
10. THOMAS, George B., Jr., *Calculus and Analytic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., Menlo Park, Calif., London, Sydney, Manila, Fourth Edition, (1974).

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

# İNDEKS


A

Alan hesabı 437
Alt sınır, cümlede 21
, fonksiyonlarda 2
Alt toplam 201
Aradeğer Teoremi 12
Argüman hiperbolik kosekant 339
Argüman hiperbolik kosinüs 326
Argüman hiperbolik kotangent 334
Argüman hiperbolik sinüs 327
Asemptotik doğrultu 164
Asemptot, dik 171
, eğik 171
, tanım 162
, yatay 171

B

Basit kesirlere ayırma yöntemi 382
Birinci cinsten özgü olmayan integraller 461

C

Cauchy Ortalama Değer Teoremi 118

D

Dik asemptot 171
Dönel cisimlerin hacmi (1) 443
Dönel cisimlerin hacmi (2) 449
Dönüşüm yöntemi 353

E

Eğik asemptot 171
Euler dönüşümleri 427
Euler sabiti 274

G

Gamma fonksiyonu 476

H

Hiperbolik fonksiyonlar 298

I

İkinci cinsten özgü olmayan integraller 466
İlkel fonksiyon cetveli 350
infimum 28
integral 200

K

Kabuk yöntemi 447
Kısmi integrasyon yöntemi 384
Konkav fonksiyon 148
Konveks fonksiyon 147
Kritik nokta 110
Kuvvet fonksiyonu 70

L

Leibnitz formülü 69
Lipschitz koşulu 133
Logaritma fonksiyonu 266

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

L'Hopital kuralı 139
Lokal maksimum noktası 107
Lokal minimum noktası 107

M

Maksimal eleman 25
Maksimum değeri 4
Maksimum noktası 4
Maküs cümlesi 184
Maküs fonksiyonu 184
Maküs fonksiyonunun türevi 192
Maküs trigonometrik fonksiyon, tanımı 240
, grafik çizimi 254
Minimal eleman 24
Minimum değer 4
Minimum noktası 4
Monoton artan fonksiyon 133
Monoton eksilen fonksiyon 133
Mutlak maksimum noktası 107
Mutlak minimum noktası 107

O

Ortalama Değer Teoremi 118

Ö

Özgü olmayan integraller için Karşılaştırma Teoremi 470

P

Parçalı düzgün fonksiyon 45
Parçalı sürekli fonksiyon 47
Pul yöntemi 443

R

Rasyonel fonksiyonlar 72
Rolle Teoremi 116

S

Sağ limit 47
Sağ türev 49
Sol limit 28
Sol türev 49
Simetrik türev 61
Supremum 28

T

Teğet çizimi 52
Türev tanımı 41

Ü

Üstel fonksiyon 273
Üst sınır, cümlede 21
, fonksiyonlarda 2
Üst toplam 201

Y

Yüksek mertebeden türev 62

Z

Zincir kuralı 100
Zincir tanımı 201

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

Fiatı 4000 TL.