MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No : 436
İKTİSADİ İDARİ BİLİMLER FAKÜLTESİ YAYIN No : 376

FİNANS MATEMATİĞİ

Prof. Dr. OSMAN YOZGAT

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

III. Baskı

İSTANBUL — 1986

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN No : 436
İKTİSADİ İDARİ BİLİMLER FAKÜLTESİ YAYIN No : 376

FİNANS MATEMATİĞİ

Prof. Dr. OSMAN YOZGAT

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

III. Baskı

İSTANBUL — 1986

FATİH YAYINEVİ MATBAASI — 527 23 72
Alibaba Türbe Sok. No. 21/3 Nuruosmaniye - İST.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖNSÖZ

Üçüncü Baskı

İkinci baskının tükenmiş bulunması ve bu esere olan talebin fazlalığı, üçüncü baskıyı yapmamıza neden olmuştur.

Finans Matematiğinin günlük hayatımızda, dün olduğu gibi bugün ve gelecekte de önemini kaybetmeyip bilâkis daha aktif bir rol oynayacağı bir gerçektir.

Bu kitabın hazırlanışındaki gaye günlük yaşantımızda önemli bir yer tutan bu konuda öğrencilere ve bu mevzu ile ilgili kişilere yararlı olmaktır.

Bu eserde önce Finans Matematiğinin temelini teşkil eden, logaritma ve diziler ele alınıp gerekli açıklamalar yapılmış ve bilahare bileşik faiz, amortismanlar ve rantlar teker teker ele alınarak örnekleriyle anlatılmaya çalışılmıştır.

Sermaye piyasasının kurulmasıyla önemi bir kat daha artan istikraz daha detaylı bir tarzda ele alınarak, bu mevzunun geniş bir şekilde açıklanmasına gayret sarfedilmiştir.

Eserin basılmasını sağlıyan Marmara Üniversitesi Basın ve Yayın kurumuna teşekkürlerimi sunarım.

Prof. Dr. Osman YOZGAT

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

LOGARİTMA

Tanım :

Tabanı 1 den farklı ve (+) olan üstlü kemiyetin üssüne o kıymetin değerinin logaritması denir.

a ve A pozitif olduğuna göre,

$a^x = A$ ... (1)

eşitliğini düşünelim, burada;

a = Taban

x = Üs

A = Kuvvet (veya ref) işleminin sonucu olur.

1°) a ve x belli ise; A ref işlemiyle bulunur.

2°) A ve x belli ise; a, (1) eşitliğinde her iki yanın x inci kuvvetten kökünü almakla bulunur.

Yani $a = \sqrt[x]{A}$ olur.

3°) a ve A belli ise; bu halde üs bilinmeyen olur.

İşte bu üssü bulmak için matematiğe yeni bir işlem eklemek zorunluğu doğuyor.

Bu işleme Logaritma denir. Genel olarak,

$$\log_a A = x \quad \ldots (2)$$

şeklinde yazılır ve A nın a tabanına göre logaritması x dir denir.

Şu halde, A gibi bir sayının a tabanına göre logaritması, A sayısını elde etmek için a nın yükseltilmesi gereken üssüdür.

Örnek :

1. $2^3 = 8$ eşitliğinde, 8 in iki tabanına göre logaritması 3 olur ve $\log_2 8 = 3$ şeklinde gösterilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2. $10^3 = 1000$ eşitliğinde, 1000 in 10 tabanına göre logaritması 3 olur ve $\log_{10} 1000 = 3$ şeklinde gösterilir.

Üslü ve Logaritmalı Fonksiyonlar :

Tanım :

a sabit ve pozitif bir sayı olmak üzere $y = a^x$ şeklindeki fonksiyonlara üslü fonksiyonlar denir. Üslü fonksiyonlar x in bütün değeri için belirlidir.

$y = a^x$ fonksiyonunun değişimini incelemeye başlamadan $a < 1$ ise, $a^{\infty} = 0$ olduğunu kabul edelim.

Üslü Fonksiyonların Grafikleri :

$y = a^x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için x in bazı değerleri için fonksiyonun alacağı değerleri hesaplayalım.

1°) $a > 1$ farzedelim.

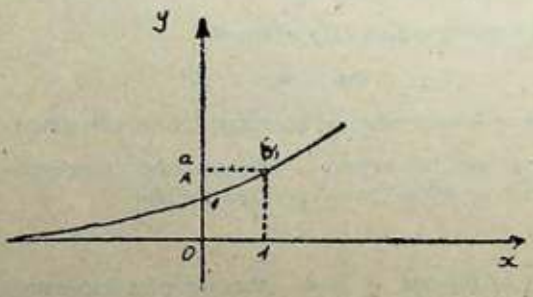
$x \to -\infty$ için $y = a^{-\infty} = \dfrac{1}{a^{\infty}}$ düşünülerek $y \to 0$ olur.

$x = 0$ için $y = a^0 = 1$, $x = 1$ için $y = a$, $x \to +\infty$ için $y \to +\infty$ bulunur.

Tabloyu yapalım.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	0	↗	1	↗	0	↗	$+\infty$

Bu tablodan yararlanarak grafiği çizelim.



MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2°) $a < 1$ olsun,

$x \to -\infty$ için $y = a^{-\infty} \to \infty$

$x = 0$ için $y = 1$

$x = 1$ için $y = a$

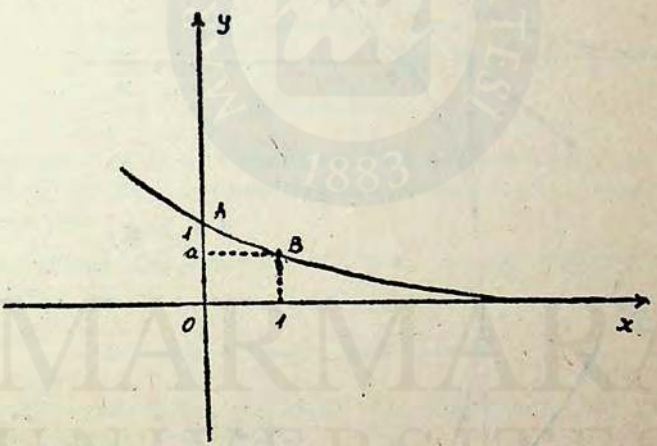
$x \to +\infty$ için $y \to 0$

bulunur.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↘	a	↘	0

bulunur.

Grafiği çizelim.



Bu grafiklerin incelenmesinden anlaşılıyor ki, a pozitif olmak üzere $y = a^x$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olup x in bütün değerleri için pozitiftir ve daima A (0, + 1) noktasından geçer.

Logaritma Fonksiyonu :

$y = \log_a x$ şeklindeki fonksiyonlara logaritma fonksiyonu denir.

Logaritmanın tanımından dolayı $y = \log_a x$ in anlamı $x \quad a^y$ dir.

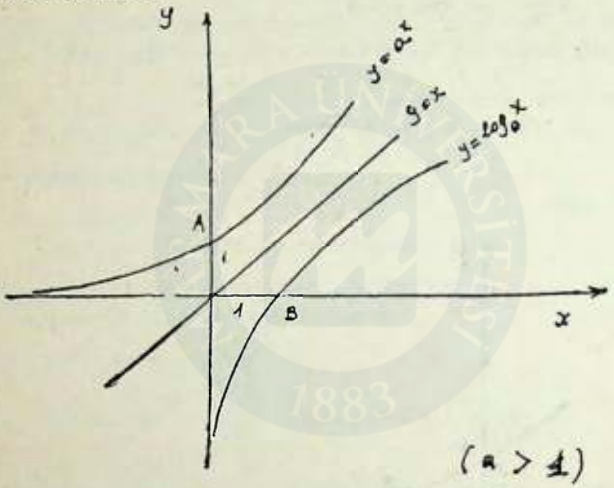
Yukarıdaki $y = a^x$ fonksiyonu karşılaştırılacak olursa, logaritma fonksiyonu ile üslü fonksiyon bir diğerinin ters fonksiyonudur. Yani üslü fonksiyonda x ile y nin yerleri değiştirilerek logaritma fonksiyonu elde edilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

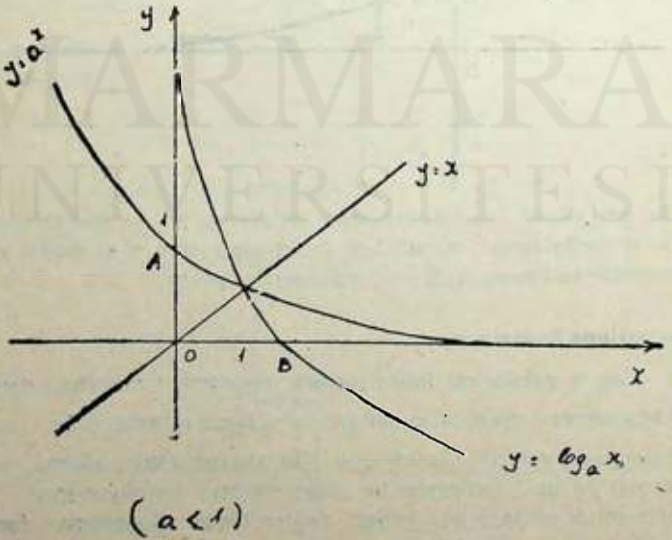
Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

Logaritma fonksiyonunun grafiğini elde etmek için üslü fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriğini alınmalıdır. Çünkü, $y = x$ olduğuna göre $A(x_1, y_1)$ noktasının simetriği $B(y_1, x_1)$ dir. Yani apsis ile ordinatlar yer değiştirir.

O halde grafikler;



$(a > 1)$



$(a < 1)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Logaritma fonksiyonlarının incelenmesinden anlaşılacağı üzere, y ne olursa olsun, x ler daima pozitiftir. Bu sebeple, yalnız pozitif sayıla rın logaritmaları vardır.

Şu halde;

1°) Bütün pozitif sayıların logaritması vardır.

2°) 1 sayının bütün tabanlara göre logaritması 0 dır.

3°) a^p nin logaritması p dir.

4°) 1 den büyük sayıların logaritmaları pozitiftir.

5°) 1 den küçük sayıların logaritmaları negatiftir.

6°) 0 ve negatif sayıların logaritmaları yoktur.

Logaritma Türleri :

Aritmetik işlemlerde kullandığımız logaritmaların tabanı daima (10) dur. Tabanı 10 olan logaritma sistemine bayağı logaritma veya ondalık logaritma denir.

10 tabanına göre yazılmış logaritmaları çok kullanacağımız için taban yazılmaz.

$\log_{10} a = \log a$ gibi düşünülür.

Bundan sonra tabanı yazılmamış olan logaritmaların hep 10 tabanına göre yazıldığını kabul edeceğiz.

Pratikte iki çeşit logaritma sistemi kullanılır.

1°) Tabanı $a = e = 2{,}718281$ olan tabii logaritma $e^x = b$ den $Lb = x$ şeklinde gösterilir.

2°) Tabanı $a = 10$ olan ondalık logaritma sistemidir, $10^x = b$ den $\log b = x$ şeklinde gösterilir.

Logaritmanın Özellikleri :

1 — Bir çarpımın logaritması, çarpanların ayrı ayrı logaritmaları toplamına eşittir. b ve c nin a tabanına göre logaritmaları x, y olsun,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$a^x = b$ $\quad a^y = c$ $\quad \ldots\ldots (1)$

$x = \log_a b$ $\quad y = \log_a c$ dir.

(1) deki iki eşitliği taraf tarafa çarpalım.

$b \cdot c = a^x \cdot a^y$

$b \cdot c = a^{x+y}$ $\quad \ldots\ldots (2)$ bulunur.

(2) de logaritmanın tarifine göre $(x + y)$, $b \cdot c$ nin logaritması olur. Yani,

$\log_a (b \cdot c) = x + y$ veya,

$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \ldots\ldots (1)$ bulunur.

Bu sonucu bir çok çarpanlar için de aynı şekilde düşünebiliriz.

$\log_a (b \cdot c \cdot d \ldots) = \log_a b + \log_a c +$
$\log_a d + \ldots$

2 — Bir bölümün logaritması, payın logaritması ile paydanın logaritmasının farkına eşittir.

b ve c nin a tabanına göre logaritmaları x, y olsun.

$a^x = b$ $\quad a^y = c$ $\quad \ldots\ldots (1)$

$x = \log_a b$ $\quad y = \log_a c$ $\ldots\ldots$ dır.

(1) deki eşitlikleri taraf tarafa bölelim.

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{b}{c},\ a^{x-y} = \frac{b}{c} \ldots\ldots (2)$$ bulunur.

Logaritmanın tarifine göre (2) de $(x - y)$, $(\frac{b}{c})$ nin a tabanına göre logaritması olur. Yani,

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = x - y \quad \text{veya}$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \ldots\ldots \text{(II) bulunur.}$$

3 — Bir üslü kemiyetin logaritması, temel sayı logaritması ile üssü çarpımına eşittir.

Üslü kemiyet b^n olduğuna göre bunu,

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots\ldots b}_{n \text{ tane}}$$

şeklinde yazarız.

Her iki tarafın a tabanına göre logaritmasını alalım. (1 e göre)

$$\log_a b = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \log_a b + \ldots\ldots \log_a b}_{n \text{ tane}}$$

$$\boxed{\log_a b^n = n \cdot \log_a b} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III) bulunur.}$$

4 — Bir köklü kemiyetin logaritması, temel sayı logaritmasının kök üssüne bölümüne eşittir.

Köklü kemiyet $\sqrt[n]{b}$ olduğuna göre bunu,

$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ şeklinde yazabiliriz.

Her iki tarafın a tabanına göre logaritmasını alırsak,

$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}}$ veya (III) e göre,

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b} \quad \ldots\ldots \text{(IV) bulunur.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukarıda gördüğümüz logaritma özellikleri yardımı ile bazı ifadelerin logaritmalarını alabiliriz.

Yukarıda geçen özellikleri ondalık logaritma ile

$$\log A \cdot B = \log A + \log B \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\log \frac{A}{B} = \log A - \log B \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\log A^n = n \log A \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log A \quad \ldots\ldots (4)$$

şeklinde yazabiliriz.

5 — Bazen logaritma özelliklerinden faydalanarak logaritma toplam ve farkları, çarpım ve bölüm logaritmaları haline getirilir.

Örnek :

1. $\frac{1}{2} (\log a - \log b) = \frac{1}{2} \log \frac{a}{b} = \log \sqrt{\frac{a}{b}}$

2. $\frac{1}{2} ([3 \log x - (\log y + 2 \log z)] = \frac{1}{2} [\log x^3 - (\log y + \log z^2)] = \frac{1}{2} (\log x^3 - \log yz^2) = \frac{1}{2} \log \frac{x^3}{yx^2} = \log \sqrt{\frac{x^3}{yz^2}}$

6 — Ondalık logaritma (bayağı logaritma) :

Herhangi bir sayının logaritmasının bir tam kısmı, bir de kesir kısmı olacaktır.

Örneğin, $10^{1,39794} = 25$ bağlılığı varsa, $\log 25 = 1,39794$ şeklinde yazılır. Burada 25 in logaritması olan 1,39794 sayısının tam kısmı 1, kesir kısmı 0,39794 dür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Logaritmanın tam kısmına karakteristik, kesir kısmına mantis denir.

$$\log 25 = 1{,}39794$$
$$= \underset{\text{Karakteristik}}{1} + \underset{\text{Mantis}}{0{,}39794}$$

İşte bir sayının logaritmasının kesir kısmını yani mantisini, logaritma cetveli adını verdiğimiz kitaplarda bulabiliriz.

Bizim kullanacağımız cetvellerde logaritmaların ondalık kısmı beş basamağa kadardır. Bu türlü cetvellere beş ondalıklı logaritma cetveli denir.

7 — Bir sayının logaritmasının tam kısmını (karakteristiğini) bulmak :

a) Sayı 1 den büyükse :

$10^0 = 1$ olduğundan $\log 1 = 10$
$10^1 = 10$ » $\log 10 = 1$
$10^2 = 100$ » $\log 100 = 2$
$10^3 = 1000$ » $\log 1000 = 3$
$10^n = 1000\ldots0$ » $\log 1000\ldots0 = n$ olur.

(n tane) (n tane)

Yukarıdaki incelemeden anlaşılıyor ki, 1 ilâ 10 arasındaki sayıların logaritmaları 0 ile 1 arasında olur. Yine 10 ile 100 arasındaki bir sayının logaritması 1 ile 2 arasında bir sayıdır.

Örneğin :

6 nın logaritmasının karakteristiği 0
43 » » » 1
569 » » » 2
1295 » » » 3 dür.

Kural : 1 den büyük bir sayının logaritmasının tam kısmı (karakteristiği) rakamları sayısından 1 eksiktir. 1 den büyük 6,83 gibi kesirli sayıların logaritmalarının tam kısmı da, virgülden önceki tam kısmın rakamları sayısından 1 eksik olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

log 28,5 = 1, ...
log 352,3 = 2, ... gibi.

b) Sayı 1 den küçükse :

$10^0 = 1$ olduğundan log 1 = 0 olur.

$(10)^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$ olduğundan $\log 0{,}1 = \bar{1}$

$(10)^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$ » $\log 0{,}01 = \bar{2}$

$(10)^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ » $\log 0{,}001 = \bar{3}$

$(10)^{-n} = \frac{1}{\underbrace{1000 \ldots 0}_{n \text{ tane}}} = 0{,}\underbrace{00 \ldots 01}_{(n-1) \text{ tane}}$ $\log 0{,}\underbrace{00 \ldots 01}_{(n-1) \text{ tane}} = \bar{n}$

Yukarıdaki incelemede anlaşılıyor ki,

1	ile	0,1	arasındaki	sayıların	logaritması,	0	ile	$\bar{1}$ arasında
0,1	»	0,01	«	«	«	$\bar{1}$	«	$\bar{2}$ »
0,01	»	0,001	«	«	«	$\bar{2}$	«	$\bar{3}$ »
0,001	»	0,0001	«	«	«	$\bar{3}$	«	$\bar{4}$ »

olur. Logaritmaların kesir kısımları (yani mantisleri) daima pozitif alındığından, örneğin;

0,4 ün 0,08 in ve 0,007 nin logaritmaları

$\log 0{,}4 = \bar{1} + 0{,}60206 = \overline{1{,}60206}$

$\log 0{,}08 = \bar{2} + 0{,}90309 = \overline{2{,}90309}$

$\log 0{,}007 = \bar{3} + 0{,}84510 = \overline{3{,}84510}$ şeklinde gösterilir.

Kural : 1 den küçük bir sayının logaritmasının negatif olan tam kısmı (karakteristiği) ilk başlayan sayının solundaki sıfır sayısı (virgülden önce ve sonra)kadar olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek :

$$\underbrace{\log 0{,}065}_{\text{2 tane}} = \bar{2}, \ldots\ldots$$

$$\underbrace{\log 0{,}000572}_{\text{4 tane}} = \bar{4}, \ldots\ldots$$

KOLOGARİTMA

Bir sayının tersinin logaritmasına o sayının kologaritması denir. Örneğin (b) gibi bir sayının tersi $(\frac{1}{b})$ dir.

Tanıma göre :

$$\text{Colog } b = \log (\frac{1}{b}) \text{ dir.}$$

Halbuki ikinci özellik gereğince;

$$\log (\frac{1}{b}) = \log 1 - \log b$$

$\log 1 = 0$ olduğundan,

$\text{Colog } b = -\log b$ veyahut $\log b + \text{colog } b = 0$

bulunur. Bundan şu anlaşılır.

1 — Herhangi bir sayının logaritması ile kologaritmasının cebirsel toplamı (0) dır.

2 — Bir sayının kologaritması, logaritmasının ters işaretlisidir.

3 — (—log b) yerine (+ colog b) alınabileceğinden kologaritma kullanmak suretiyle logaritmalardan çıkarma işlemini kaldırıp toplama işlemine çevrilir.

4 — Bir sayının logaritması belli iken kologaritması pratik bir şekilde kolay olarak yazılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 1.

$$\log 20 = 1{,}30103 \quad \text{olduğundan}$$

$$\operatorname{Colog} 20 = \bar{2}{,}69897$$

$$\log 20 + \operatorname{Colog} 20 = 0 \quad \text{olur.}$$

Örnek 2.

$$\log 3 = 0{,}47712$$

$$\operatorname{Colog} 3 = \bar{1}{,}52288$$

$$\log 3 + \operatorname{Colog} 3 = 0 \quad \text{olur.}$$

Örnek 3.

$$\log 0{,}004 = \bar{3}{,}60206 \quad \text{olduğundan}$$

$$\operatorname{Colog} 0{,}004 = 2{,}39794$$

$$\log 0{,}004 + \operatorname{Colog} 0{,}004 = 0 \quad \text{olur.}$$

Pratik Sonuç :

Bir sayının logaritması pozitif ise kologaritması negatiftir, ters olarak logaritması negatif ise kologaritması pozitiftir. Kologaritmanın mantisini bulmak için logaritmanın en sağdaki rakamını (10) a, diğerini (9) a tamamlarız. Bu suretle logaritma ile kologaritmanın mantisleri toplamı (+ 1) ettiğinden kologaritmanın karakteristiği de logaritmanın karakteristiğine (+ 1) eklenerek işareti değiştirilir.

Örneğin :

3,72063 bir sayının logaritması olsa kologaritmasının mantisi, sağdaki (3) ü (10) yapan ve diğer rakamları 9 a tamamlayan rakamları yazarsak (27937) olur. Karakteristiğe gelince $3 + 1 = 4$ olup, işaret değiştirerek (—4) bulunur. Şu halde kologaritmada $\bar{4}{,}27937$ yazılır.

Aynı metodla;

$\log 9 = 0{,}95424$ olduğundan

$\operatorname{colog} 9 = \bar{1}{,}04576$ bulunur.

karakteristik $1 = (0 + 1)$ toplamına işaret değiştirmekle $\bar{1}$ olur.

$\log 0{,}0012 = \bar{3}{,}07918$ olduğundan

$\operatorname{colog} 0{,}0012 = 2{,}92082$ bulunur.

karakteristik $(-3 + 1)$ toplamına işaret değiştirmekle $(+ 2)$ olur.

Logaritma Cetvelinin Kullanılması

Kullanacağımız logaritma cetvelinde 1 den 10.000 e kadar olan sayıların logaritmalarının yalnız ondalık kısımları (mantisleri) beş ondalık olarak bulunur.

1 — Verilen bir sayının logaritmasının bulunması,

2 — Logaritması verilen bir sayının bulunması gibi iki problemin bilinmesi gerekmektedir.

1 — Bir sayının Logaritmasını bulmak :

a. Cetvelin N harfinin bulunduğu satırda 3 rakamlı sayılar ve onların yanında ve hizasında 0 sütununda da bu sayıların logaritmalarının ondalık kısımları vardır.

Örneğin :

1. 385 sayısının logaritmasının ondalık kısmı 58546 ve $\log 385 = 2{,}58546$ dır.
2. $\log 378 = 2{,}57749$
3. $\log 391 = 2{,}59218$

b. Logaritması istenen sayı 4 rakamlı ise, soldan üç rakamı N harfinin bulunduğu sütundan, dördüncü rakamı ise sayfanın üst tarafından yatay olarak sıralanan rakam olarak alınır. İlk üç rakamın yatay sütunu ve dördüncü rakamın düşey sütununun birleştiği yere rastlayan sayı aranan ondalık kısım olur.

Örneğin :

1. 3764 sayısının logaritmasının ondalık kısmı 57565 olur ve $\log 3764 = 3{,}57565$ dir.
2. $\log 3904 = 3{,}59151$
3. $\log 3819 = 3{,}58195$

c. Log 38,63 şeklinde ise 3863 ün logaritmasının kesir kısımları aynı olur. Yalnız tam kısım farklıdır.

$$\log 38{,}63 = 1{,}58692$$

Aynı şekilde;

$$\log 0{,}370 = \bar{1}{,}56820$$

$$\log 3{,}915 = 0{,}59273$$

$$\log 381{,}5 = 2{,}58149$$

$$\log 0{,}038 = \bar{2}{,}57978$$

d. Dört rakamdan fazla sayıların logaritmalarını bulmak için aşağıdaki örneklerde göreceğimiz gibi ufak bir hesap yapmak gerekmektedir.

Örnek :

1) Log 38268 i bulalım. Cetvelden $\log 38260 = 4{,}58274$

$\log 38270 = 4{,}58286$

bulunur. Sayılar arasındaki fark (10) olunca logaritma arasındaki fark 12 olur. (58286 − 58274 = 12) Beşinci rakam 8

Sayılar Farkı	Logaritma Farkı
10	12
8	x

orantısından, $x = \dfrac{8 \times 12}{10} = 9{,}6$ eder.

Bu farkı 4,58274 e eklersek,

$$\begin{array}{r} 4{,}58274 \\ 9{,}6 \\ \hline \end{array}$$

$\log 38268 = 4{,}582836$ olur.

Not : Orantı yardımıyla bulduğumuz 9,6 sayısını cetvelin yan tarafındaki 12 farka karşılık 8 sayısının karşısında bulabilirsiniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 2 :

$$\log 553{,}27 = ?$$

Cetvelde bu logaritmanın mantisi yerine log 55327 nin mantisini arayalım. 55327 sayısı cetvelde bulunmadığından, bu sayıyı aralarına alan 55320 ve 55330 sayılarına karşılık olan mantisleri alırız.

log 55320	için	mantis	74288
log 55327	«	«	—
log 55330	»	»	74296

1. ve 3. satırdaki sayıların 10 farkına mantislerin 8 farkı olmasına karşılık, 1. ve 2. satırdaki sayıların 7 farkına mantislerin kaç farkı olacağı

10	sayı farkı	8 mantis farkı
7	x	x

orantısından $x = \dfrac{7 \times 8}{10} = 5{,}6$ bulunur.

Not : Aynı fark daha basit olarak üst başında 8 mantis farkı yazılı olan küçük kenar tablosunda, çizginin solundaki 7 sayı farkı karşısında okunabilir. Böylece 55327 sayısına ait mantis, 74288 + 5,6 = 74293,6 olur. Bu da yuvarlak yapılırsa, sayısının logaritması için, log 553,27 = 2,74294 elde edilir.

2 — Logaritması verilen bir sayıyı bulmak:

a. Verilen logaritmanın ondalık kısmı cetvelde aynen varsa, bu ondalık kısma karşılık gelen sayı cetvelden doğrudan doğruya okunur.

Örneğin :

Logaritması 2,59461 olan sayıyı bulalım. Logaritmanın ondalık kısmı olan 59461 sayısına karşılık gelen sayı cetvelde 3932 dir. Logaritmasının tam kısmı 2 olduğundan sayının 3 basamaklı olduğu yani 393,2 olduğu anlaşılır.

Aynı şekilde;

$$\log 1{,}56573 = 36{,}79$$
$$\log 0{,}58906 = 3{,}882$$
$$\log \bar{2}{,}56820 = 0{,}037 \quad \text{bulunur.}$$

b. Verilen logaritmanın ondalık kısmı cetvelde aynen yoksa; sayıyı bulmak için aşağıdaki gibi işlem yapılır.

Örneğin :

$$\log x = 2{,}59481 \quad \text{olsun,}$$

59481 ondalık kısmını cetvelde bulamıyoruz. Buna yakın 59472 ve 59483 var. Birinciye karşılık gelen sayı 3933, ikinciye karşılık gelen sayı ise 3934 dür.

O halde,

Sayılar farkı	Logaritmalar farkı
1	11
x	9 (Birinci sayı ile verilen arasındaki fark)

$$x = \frac{9}{11} = 0{,}81$$

$$\begin{array}{r} 3933 \\ 0{,}81 \\ \hline 3933{,}81 \end{array}$$ bulunur.

Logaritmanın tam kısmı 1 olduğundan sayı 2 rakamlı olur ki;

$x = 39{,}3381$ bulunur.

Örnek 2 :

Log A = 3,74330 olsun, 74330 un mantisi cetvelde olmadığından bu mantisi aralarına alan mantisler ile bu mantislere sıra ile denk gelen sayıları yazalım.

74327	mantisine	55370
74330	»	—
74335	»	55380

1. ve 3. satırdaki mantislerin 8 farkına, sayıların 10 fark göstermesine karşılık 1.ve 2. satırdaki mantislerin 3 farkına sayıların hangi farkı verdiği,

8 mantis farkı	10 sayı farkı
3 » »	x » »

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

orantısından, yahut üst başında 8 mantis farkı yazılı bulunan küçük kenar tablosunda, çizginin sağ tarafında 3 mantis farkına (şayet yoksa buna, en yakın fark) karşısında x = 4 sayı farkını buluruz. Sonra fark 55370'i ekleriz ve karakteristiğinin 3 olduğunu düşünürsek, A = 5337,4 dür.

Örnek :

Log B = $\bar{2}$,75040 eşitliğine uyan B sayısını bulalım.

Üst başında (0) olan sütunda 75'i, bunun satırında bulunmadığı için üst satırda 0401'i aralarına alan 035 ; 043 mantisleri ile bu mantislere karşılık olan sayıları alırız.

75035	mantise	56280 sayı
75040	»	
75043	»	56290 »

1. ve 3. satırlardaki mantislerin 8 farkına sayıların 10 fark göstermesine karşılık, 1 ve 2. satırlardaki mantislerin 5 farkına hangi sayı farkının gözükeceğini 8 başlıklı küçük tabloda çizginin sağ tarafındaki 4,8 ≃ 5 mantis farkı karşısında 6 olarak okuruz. Bu farkı 56280 sayısına eklersek ve karakteristiğin $\bar{2}$ olduğunu da göz önüne alırsak, B = 0,056286 buluruz.

Logaritma İşlemleri

Bütün logaritma işlemlerinde, verilen veya cetvelde bulunan logaritmaların ondalık kısımlarının daima pozitif olacağını unutmamalıdır.

1 — Logaritmaların Toplamı :

Bir çarpımın logaritması alınırken, logaritmaların toplamı elde edilir.

Logaritmaları toplarken, ondalık kısımlar toplanır elde kalan tam sayıların cebirsel toplamına eklenir.

Örnek 1 :

A = 0,74635 × 0,05763 işlemini şöyle çözebiliriz.

log A = log 0,74635 + 0,05763

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\log 0{,}74635 = \bar{1},87294$$

$$\log 0{,}05763 = \bar{2},76065$$

$$\log A = 2{,}63359$$

$A = 0{,}043012$ bulunur.

2 — Logaritmaların Çarpımı :

Bir logaritmayı bir sayı ile çarpmak için önce bu sayı mantis ile çarpılır ve elde varsa bu sayının karakteristikle çarpımına eklenerek karakteristik bulunur.

Örnek :

$\bar{7},51527 \times 3$ ü alalım.

3 ü mantisle çarpalım. 54581 çıkar ve elde 1 kalır. $3 \times (-7) = -21$ olup, $-21 + 1 = -20$ olduğundan $\bar{7},51527 \times 3 = 20{,}54581$ bulunur.

3 — Bölme :

a. $\bar{8},52416$ yı 4 e bölelim.

$$\frac{\bar{8},52416}{4} = \frac{^{-}8 + 0{,}52416}{4} = {}^{-}2 + 0{,}13104 = \bar{2},13104 \text{ bulunur.}$$

b. Karakteristik bölünen sayının katı değilse aynı sayıları ekleyip çıkararak karakteristiği bölenin katı yapmalı, sonra bölmeye devam etmelidir.

Örnek :

$\bar{7},25495$ i 5 e bölelim.

$\bar{7},25495 = -10 + 3{,}25495$ olduğundan,

$$\frac{\bar{7},25490}{5} = \frac{^{-}10 + 3{,}25495}{5} = {}^{-}2 + 0{,}65099 = 2{,}65099$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

DİZİLER

A — Aritmetik Dizi :

1 — Tanım :

Birbiri ardı sıra yazılmış bir çok sayılar düşünelim. Bu sayılardan herhangi biri ile kendinden önce gelen sayı arasındaki fark daima aynı kalıyorsa bu çeşit diziye aritmetik dizi denir.

Bu sabit kalan farka dizinin ortak farkı ve her sayıya da dizinin terimleri denir.

Çok zaman, bir dizinin baş tarafında (÷) işaret konursa bu dizinin bir aritmetik dizi olduğu anlaşılır.

Örnek 1 : ÷ 6, 9, 12, 15, 18 bu aritmetik dizide;

6 ⟶ ilk terim

18 ⟶ son terim

9 − 8 = 3 ⟶ ortak fark

dizi beş terimlidir.

2 : ÷ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35

bu dokuz terimli aritmetik dizide :

İlk terim ⟶ 3

Son terim ⟶ 35

Ortak fark ⟶ 7 − 3 = 4 dür.

3 : ÷ 5, 3, 1, —1, —3, —5, —7.

bu yedi terimli aritmetik dizide :

İlk terim ⟶ 5

Son terim ⟶ —7

Ortak fark ⟶ 3 − 5 = —2 dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Genel olarak bir aritmetik dizinin ilk terimini g_1 ortak farkını d ile gösterirsek n terimli bir aritmetik diziyi :

$$\div\ g_1, g_1 + d, g_1 + 2d, g_1 + 3d \ldots\ldots\ldots g_1 + (n-1)\,d$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada ortak fark :

1°) $d > 0$ olursa, dizinin terimleri gittikçe büyür.

Bu çeşit dizilere çoğalan aritmetik dizi denir.

$$\div\ 5, 9, 13, 17, 21 \ldots\ldots\ldots \text{(ortak fark} = 4)$$

gibi.

2°) < 0 olursa, dizinin terimleri gittikçe küçülür. Bu çeşit dizilere azalan aritmetik dizi denir.

$$\div\ 7, 4, 1, -2, -5 \ldots\ldots\ldots \text{(ortak fark} -3) \text{ gibi.}$$

n terimli bir aritmetik dizinin terimleri;

$\div\ g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots\ldots g_n$ ise

$g_2 - g_1 = g_3 - g_2 = \ldots = g_n - g_{n-1} = d$ olur.

Ortak farkı r olan n terimli bir aritmetik dizi

$\div\ g_1, g_2, g_3, g_4 \ldots\ldots\ldots g_n$ olduğuna göre,

İlk terim	g_1
2. terim	$g_2 = g_1 + d$
3. terim	$g_3 = g_2 + d = g_1 + 2d$
(n−1) nci terim	$g_{n-1} = g_{n-2} + d = g_1 + (n-2)\,d$
n. terim	$g_n = g_{n-1} + d = g_1 + (n-1)\,d$

bulunur.

Şu halde n. terim :

$$g_n = g_1 + (n-1)\,d \ldots\ldots\ldots (1)$$

bağlılığı ile hesaplanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 1 :

İlk terimi 1 ve ortak farkı 2 olan bir aritmetik dizinin 15 ci terimini bulunuz.

(1) bağlılığından $g_{15} = 1 + (15-1).2$ $g_{15} = 29$ olur.

Örnek 2 :

$\div$ 7, 3, -1, -5 ..... aritmetik dizinin 10 uncu terimini bulunuz Ortak fark $d = 3-7 = -4$ dür. (1) bağlılığında, $g = 7$, $d = -4$, $n = 10$ koyarsak,

$g_{10} = 7 + (10-1) \cdot (-4) = 7 - 36$ $g_{10} = -29$ bulunur.

$3 - g_n = g_1 + (n-1)$ bağlılığı yardımıyla dizinin g_1, d, n, gn gibi 4 elemanından üçü verilince dördüncüyü bulabiliriz.

Verilen		Formül
1°) g_1 , d , u	g_n	$g_n - g_1 + (n-1)\ d$
2°) d , d , g_n	g_1	$g_1 - g_n - (n-1)\ d$
3°) g_1 , n , g_n	d	$d = \dfrac{g_n - g_1}{n-1}$
4°) g_1 , d , g_n	n	$n = \dfrac{g_n - g_1}{d} + 1$

Not :

Verilen a, b gibi iki sayı arasına bu sayılarla beraber bir aritmetik dizi teşkil etmek üzere n tane sayı yerleştirmek istenirse,

a ——→ ilk terim
b ——→ son terim
n ÷ 2 ——→ terim sayısı olur.

$d = \dfrac{b-a}{n+1}$ olarak bulunur.

Özel olarak, $n = 1$ ise $d = \dfrac{b-a}{2}$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Dizi a, $\frac{a+b}{2}$, b şeklindedir.

$\frac{a+b}{2}$ ye, a ile b nin aritmetik ortalaması denir.

4 — Bir aritmetik dizinin herhangi iki terimi verilince dizinin bütün elemanlarını bulabiliriz.

Örnek :

Bir aritmetik dizinin 5. terimi $\frac{1}{2}$, 13. terimi $\frac{11}{2}$ olduğuna göre dizinin ilk terimini ve ortak farkını buluruz.

(1) bağlılığından;

$g_5 = g + 4d \longrightarrow g + 4d = \frac{1}{2}$

$g_{13} = g + 12d \longrightarrow g + 12d = \frac{11}{2}$ eder.

g ve d ye bağlı bu iki denklemin ortak çözümünden,

$g = -\frac{7}{2}$, $d = \frac{3}{4}$ bulunur.

5 — Sınırlı bir aritmetik dizinin iki ucundan eşit uzaklıkta bulunan terimler toplamı sabit ve birinci terim ile sonuncu terimin toplamına eşittir.

Ortak farkı d olan ve g ile başlayan n terimli aritmetik dizi, $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots g_{p+1}, g_{n-(p-1)} \ldots\ldots g_{n-3}, g_{n-2}, g_{n-1}, g_n$ şeklindedir.
Baştan $p+1$ inci terim g_{p+1}

Sondan $p+1$ » » $g_{n-(p-1)}$ olsun.

tariften;

$g_{p+1} = g_1 + p \cdot d$ ..... (1)
$g_n = g_{n-(p-1)} + p \cdot d$ ..... (2)
(2) den $g_{n-(p-1)} = g_n - p \cdot d$ ..... (3) bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(1) ve (3) taraf tarafa toplanırsa,

$g_{p+1} + g_{n-(p-1)} = g_1 + g_n$ elde edilir.

Bu da bize, baştan ve sondan herhangi p + 1 ci terimler toplamının, ilk ve son terim toplamına eşit olduğunu gösterir.

Eğer dizinin terim sayısı tek ise, dizinin orta terimi baştan ve sondan eşit uzaklıkta olur ki, bu terimin iki katı birinci ve sonuncu terimlerin toplamına eşit olur.

6 — Bir aritmetik dizinin toplamı :

n terimli aritmetik dizi,

$\div g_1 , g_2 , g_3 \cdots\cdots\cdots g_{n-2} , g_{n-1} , g_n$ olsun.

n terim toplamını S_n ile gösterelim.

$S_n = g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_{n-2} + g_{n-1} + g_n \cdots (1)$

Aynı diziyi bir de sondan başlayarak yazalım;

$S_n = g_n + g_{n-1} + g_{n-2} + \cdots + g_3 + g_2 + g_1 \cdots (2)$

(1) ve (2) eşitliklerini taraf tarafa toplayalım,

$2S_n = (g_1 + g_n) + (g_2 + g_{n-1}) + (g_3 + g_{n-1}) + \cdots + (g_{n-2} + g_3) +$

$(g_{n-1} + g_2) + (g_n + g_1) \cdots (3)$ elde edilir.

(3) eşitliğinin ikinci tarafındaki parantez içindeki ifadeler dizinin baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimler toplamı şeklindedir. Bunların her biri $(g_1 + g_n)$ değerine eşit olduğundan,

$2S_n = n (g_1 + g_n)$ veya

$$\boxed{S_n = \frac{n (g_1 + g_n)}{2}}$$ (II) bağlılığı bulunur.

Görülüyor ki, bir dizinin terimleri toplamı, ilk ve son terimler toplamının yarısının terim sayısı ile çarpımına eşittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : ÷ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19; 21; 23 şeklinde verilen 10 terimli bir aritmetik dizinin terimleri toplamı,

$$S_{10} = \frac{(5 + 23) \cdot 10}{2} = 140 \text{ eder.}$$

Toplam formülünde g_n yerine $g_n = g_1 + (n-1)\,d$ konursa toplam formülü

$$S_n = \frac{n}{2}\,[g_1 + g_1 (n-1)\,d]$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}\,[2g_1 + (n-1)\,d]} \quad \text{(III) şeklini alır.}$$

Örnek :

İlk terimi 20 ve ortak farkı -2 olan bir aritmetik dizinin 12 terimli toplamını bulunuz,

$g = 20 \qquad d = -2 \qquad n = 12$ dir.

$$S_{12} = \frac{12}{2}\,[2 \cdot 20 + (12-1) \cdot (-2)]$$

$S_{12} = 108$ bulunur.

Özel haller :

1°) Tam sayılarla yazılan bir dizide ilk (n) tam sayı toplamı :

$g_1 = 1, \qquad g_n = n$ olduğundan,

$S_n = \dfrac{n\,(g_1 + g_n)}{2}$ formülünden, $\boxed{S_n = \dfrac{n\,(1 + n)}{2}}$ (IV)

bulunur.

Örnek :

1 den 1000 e kadar sayıların toplamını bulunuz.

$$S_{1000} = \frac{1000\,(1 + 1000)}{2} = 500500$$

2°) Birbirini takip eden tek sayılarla yazılan bir dizide, ilk (n) tek sayının toplamı;

(III) formülünde $g_1 = 1, d = 2$ konursa,

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2g + (n-1)\cdot 2] = \frac{n}{2} \cdot 2n$$

$$\boxed{S_n = n^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(V) bağlılığı bulunur.}$$

Örnek :

1 den 15 e kadar tek sayıların toplamını bulunuz.

1 den 15 e kadar tek sayılar dizisindeki terim sayısı $n = 8$ dir. (V) formülünden, $S_n = 8^2 = 64$ eder.

3°) Birbirini takip eden çift sayılarla yazılan bir dizide, ilk (n) çift sayı toplamı

(III) formülünden, $g_1 = 2, d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[4 + (n-1).2] = \frac{n}{2}\,(2 + 2n)$$

$$\boxed{S_n = n\,(n + 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(VI) bağlılığı bulunur.}$$

Örnek :

20 ye kadar olan çift sayıların toplamını bulunuz.

$$g_1 = 2, \quad d = 2, \quad n = \frac{20}{2} = 10$$

olduğundan, VI formülünden,

$$S_{10} = 10 \cdot (10 + 1) = 110$$

4°) Tam sayılarla yazılan bir dizinin ilk (n) terimlerinin kareleri toplamı :

$S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots n^2$ olsun.

Bunu hesaplamak için aşağıdaki özdeşliği gözönüne alalım.

$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

(n) yerine sıra ile 0, 1, 2, 3 ..... (n) koyalım ve taraf tarafa toplayalım.

$1^3 = 0 + 0 + 0 + 1$
$2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$
$3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$
.....
$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$
$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$$(n + 1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = S_n^2$ ve $1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

koyarsak,

$$(n + 1)^3 = 1 + 3S_n^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

buradan,

$$\boxed{S_{n_2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad \ldots\ldots \text{(VII) bulunur.}$$

Örnek :

1 den 100 e kadar olan sayıların kareleri toplamı,

$$S_{100}^2 = \frac{100(100+1)(200+1)}{6} = 338350 \text{ eder.}$$

B — Geometrik Dizi :

1 — Tanım :

Birbiri ardısıra yazılmış bir çok sayılar düşünelim. Bu sayılardan herhangi birinin kendinden önce gelen sayıya oranı daima aynı kalıyorsa bu çeşit diziye geometrik dizi denir.

Bu sabit kalan oranı dizinin ortak çarpanı ve her sayıya da dizinin terimleri denir.

Çok zaman bir dizinin baş tarafına ($\div\div$) işareti konursa bu dizinin bir geometrik dizi olduğu anlaşılır.

Örnek 1 : $\div\div$ 1, 3, 9, 27, 81

Bu beş terimli dizide :

$1 \longrightarrow$ ilk terim

$81 \longrightarrow$ son terim

$\frac{3}{1} = 3 \longrightarrow$ ortak çarpandır.

Örnek 2 : $\div\div \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

Bu altı terimli geometrik dizide :

$\frac{1}{2} \longrightarrow$ ilk terim

$\frac{1}{64} \longrightarrow$ son terim

$\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow$ ortak çarpandır.

Genel olarak, bir geometrik dizinin ilk terimini g, ortak çarpanını k ile gösterirsek n terimli geometrik diziyi $\div\div$ g, $g \cdot k$, $g \cdot k^2$, $g \cdot k^3$, $g \cdot k^4$ ..... $g \cdot k^{n-1}$ şeklinde yazarız.

1°) Bir geometrik dizide ortak çarpan pozitif ve birden büyükse dizinin terimleri gittikçe büyür. Bu çeşit dizilere çoğalan diziler denir.

÷÷ 8, 12, 18, 27	$k = \frac{3}{2}$
÷÷ 1, 4, 16 64	$k = 4$

Çoğalan geometrik diziler.

2°) Bir geometrik dizide, ortak çarpan pozitif ve birden küçük olursa dizinin terimleri gittikçe küçülür. Bu çeşit dizilere azalan geometrik dizi denir.

÷÷ 10, 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, ...	$k = \frac{1}{2}$
÷÷ 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, ...	$k = \frac{1}{3}$

Azalan geometrik diziler.

Yukarıdaki tariflerden anlaşılacağı gibi n terimli bir geometrik dizi, ÷÷ $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots g_n$ ise

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{g_3}{g_2} = \frac{g_4}{g_3} = \ldots \frac{g_n}{g_{n-1}} = k \quad \text{olur.}$$

2 — Geometrik dizinin herhangi bir terimini bulmak:

Ortak çarpanı k olan n terimli geometrik diziyi,

÷÷ $g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots g_n$ ile göstererek,

İlk terim g_1

2. terim $g_2 = g_1 k$

3. terim $g_3 = g_2 k = g_1 \cdot k^2$

.....

.....

(n−1) inci terimi $g_{n-1} = g_{n-2} \cdot k = g_1 k^{n-2}$

n « » $g_n = g_{n-1} \cdot k = g_1 k^{n-1}$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şu halde n ci terim,

$$\boxed{g_n = g_1 k^{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

bağlılığı ile hesaplanır. Bir geometrik diziyi aşağıdaki şekilde de yazabiliriz.

$$g_1, g_1 k, g_1k^2, g_1k^3, \ldots\ldots\ldots, g_1k^{n-1}, g_1k^n$$

Örnek 1 :

İlk terimi 1 ve ortak çarpanı 3 olan bir geometrik dizinin 8. terimini bulunuz.

$g_1 = 1$, $k = 3$, $g_8 = ?$

(1) formülünden, $g_8 = 1 \cdot 3^7 = 2187$

Örnek 2 :

İlk terimi 4 ve ortak çarpanı $-\frac{1}{2}$ olan bir geometrik dizinin 10 uncu terimini bulunuz.

$g_1 = 4$, $k = -\frac{1}{2}$, $g_{10} = ?$

(1) formülünden $g_{10} = 4\,(-\frac{1}{2})^9 = -\frac{4}{512} = -\frac{1}{128}$

3 — n terimli bir geometrik dizinin iki ucundan eşit uzaklıkta bulunan terimler çarpımı sabit ve birinci terim ile sonuncu terim çarpımına eşittir.

Örnek :

÷÷ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 gibi bir geometrik dizide,

ilk ve son terimler çarpımı	$1 \times 64 = 64$
baştan sondan ikinci terimler çarpımı	$2 \times 32 = 64$.
» » üçüncü terimler çarpımı	$4 \times 16 = 64$
» » dördüncü terimler çarpımı	$8 \times 8 = 64$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Genel olarak ortak çarpanı k olan n terimli bir geometrik dizi,

$g_1 , g_2 , g_3 \cdots g_{p+1} \cdots g_{n-(p-1)} \cdots g_{n-1} , g_n$ olsun. Baştan ve sondan $p+1$ nci terimleri g_{p+1} ve $g_{n-(p-1)}$ olur.

I) bağıntısına göre, $g_{p+1} = g_1 k^p$ ..... (1)

$g_n = g_{n-(p-1)} k^p$ veya $g_{n-(p-1)} = \frac{g_n}{k^p}$ ... (2) olur.

(1) ve (2) yi taraf tarafa çarpalım.

$g_{n+1} \cdot g_{n-(p-1)} = g_1 k^p \cdot \frac{g_n}{k^p} = g_1 \cdot g_n$ buiunur.

Not : Geometrik dizi tek terimli ise, ortadaki terimin kendi kendisi ile çarpımı g_1 , g_n çarpımına eşit olur.

4 — Bir geometrik dizide her terim, iki tarafındaki terimler arasında orta orantılı (veya geometrik orta)dır.

$\div\div$ $g_1 , g_2 , \ldots\ldots\ldots g_{p-1} , g_p , g_{p+1} \cdots g_{n-1} , g_n$ geometrik dizisinde ortak çarpan k olsun.

Geometrik dizi tarifine göre,

$$\frac{g_p}{g_{n-1}} = \frac{g_{p+1}}{g_p} = k$$

$g_p^2 = g_{p-1} \cdot g_{n-1}$ veya $g_p = \sqrt{g_{p-1} \cdot g_{p+1}}$ bulunur.

5 — n terimli bir geometrik dizinin bütün terimleri çarpımı, ilk ve son terimlerin n inci kuvvetlerinin geometrik ortasına eşittir.

$\div\div$ $g_1 , g_2 , g_3 \ldots\ldots\ldots g_{n-2} , g_{n-1} , g_n$ geometrik dizisinde, terimler çarpımını p ile gösterelim.

$p = g_1 . g_2 . g_3 \ldots\ldots\ldots g_{n-2} . g_{n-1} . g_n \ldots\ldots\ldots$ (1)

baştan sondan çarpanların yerini değiştirerek,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$p = g_n \cdot g_{n-1} \cdot g_{n-2} \cdots\cdots g_3 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdots\cdots$ (2)

(1) ve(2) yi taraf tarafa çarpalım;

$p \; p^2 = g_1 \cdot g_n \cdot g_2 g_{n-1} \cdot g_3 g_{n-2} \cdots g_{n-2} \cdot g_3 \cdot g_{n-1} \cdot g_2 \cdot g_n g_1$ olur.

$g_1 g_n = g_2 g_{n-1} = g_3 g_{n-2} = \cdots\cdots$ olduğundan,

$p^2 = (g_1 g_n)^n$ veya

$$\boxed{p = \sqrt{(g_1 \cdot g_n)^n}}$$ olur.

Örnek :

$\div\div$ 1, 2, 4, 8, 16 geometrik dizisinin terimleri çarpımını, $g_1 = 1$ $g_n = 16$ $n = 5$ olduğundan,

$p_5 = \sqrt{(1 \cdot 16)^5} = 1024$ eder.

6 — a, b gibi iki sayı arasında, bir geometrik dizi yapacak şekilde n kadar sayı yerleştirmek;

Böyle bir geometrik dizide;
İlk terim = a, terim sayısı = n + 2, n = 2 ci terim = b dir.
Ortak çarpanı k ile gösterelim.
Tariften : $b = a \cdot k^{n+1}$ olur. Buradan,

$$k^{n+1} = \frac{b}{a} \quad \text{veya} \quad k = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}} \quad \text{bulunur.}$$

Böylece ortak çarpanı ve ilk terimi belli olan geometrik dizinin bütün terimlerini yazabiliriz.

Örnek :

1 ve 256 sayıları arasında bir geometrik dizi olacak şekilde 3 sayı yerleştiriniz.

$a = 1, \quad b = 256$

$$k = \sqrt[4]{\frac{256}{1}} = 4 \quad \text{bulunur.}$$

Dizi : $\div\div$ 1, 4, 16, 256 olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7 — Bir geometrik dizinin ilk (n) teriminin toplamı : Ortak çarpımı (k) olan (n) terimli geometrik dizi.

$g_1 , g_2 , g_3 \ldots\ldots , g_n$ olsun.

n terim toplamını S_n ile gösterelim.

$S_n = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_{n-1} + g_n \ldots\ldots$ (1) olur.

Eşitliğin her iki tarafını k ile çarpalım.

$S_n k = g_1 k + g_2 k + g_3 k + \ldots\ldots + g_{n-1} k + g_n k \ldots\ldots$ (2)

(1) ve (2) yi taraf tarafa çıkarırsak ve geometrik dizinin tarifine göre;

$g_1 k = g_2 \; ; \; g_2 k = g_3 \; ; \ldots\ldots ; \; g_{n-1} k = g_n$

olduğunu düşünürsek,

$S_n k - S_n = g_n k - g_1$ veya

$S_n (k-1) = g_n k - g_1$

$S_n = \dfrac{g_n . k - g_1}{k - 1}$ elde edilir.

$g_n = g_1 k^{n-1}$ yerine koyarsak :

$$S_n = g_1 \frac{k^n - 1}{k-1} \quad \text{veya} \quad \boxed{S_n = g_1 \frac{1-k^n}{1-k}} \quad \ldots \text{(II)}$$

bulunur.

($k \neq 1$ olmalıdır. $k = 1$ olursa dizinin bütün terimleri birbirine eşit olur. O zaman $S_n = n g_1$ olur.)

Örnek :

÷÷ 1, 3, 9, 27, ... şeklindeki geometrik dizinin ilk 8 terim toplamını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$g_1 = 1,\ k = \frac{3}{1} = 3,\ n = 8$ dir.

(II) formülünden,

$$S_8 = \frac{1 \cdot (1-3)^8}{1-3} = 3280$$ bulunur.

8 — Sonsuz terimli geometrik dizinin toplamı :

$S_n = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_{n-1} + g_n$ veya

$S_n = g_1 + g_1k + g_1k^2 + g_1k^3 + \ldots\ldots + g_1k^{n-2} + g_1k^{n-1}$ olsun.

$$S_n = g_1 \frac{1-k^n}{1-k} \qquad (II)$$

geometrik dizisini ve n terim toplamını düşünelim.

a) $k > 1$ ise (yani dizi çoğalan bir dizi ise) :

(II) formülünü, pay paydayı (-1) ile çarparak;

$$S_n = \frac{g_1}{k-1}(k^n-1)$$ şeklinde düşünebiliriz.

n sonsuza uzanırsa, $\frac{g_1}{k-1}$ sabit kalır. Fakat (k^n-1) çarpanı sonsuza uzanacağından toplam yani S_n de sonsuza uzanır.

b) $k = 1$ ise dizi;

$S_n = g_1 + g_1 + g_1 + \ldots\ldots g_1$ şeklini alır.

n büyüdükçe S_n toplamı da büyüyecektir.

c) $k < 1$ ise (yani dizi azalan bir dizi ise);

(II) formülünü,

$$S_n = \frac{g_1}{1-k}(1-k^n)$$ şeklinde yazabiliriz.

n sonsuza uzandığından $(1-k^n)$ çarpanı 1 olur. O zaman (n sonsuz çoğaldığı zaman)

$$\boxed{n \to \infty \; S_n = \frac{g_1}{1-k}}$$ ..... (III) değerini alır.

Bu sonuç bize azalan bir dizinin bütün terimleri toplamının bir sayıya ($\frac{g_1}{1-k}$ sayısının) eşit olacağını gösterir.

Örnek 1 :

$\div\div$ 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots \frac{1}{2^n}$ sonsuz terimli geometrik dizinin terimleri toplamını bulunuz.

$g_1 = \frac{1}{2}, k = \frac{1}{2}, n = \infty$ dir.

$S_n \to \infty = \frac{g_1}{1-k}$ bağıntısından,

$$S_n \to \infty = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \text{ olur}$$

Örnek 2 :

$\div\div$ 9; -3, 1, $-\frac{1}{3}$ ..... sonsuz terimli geometrik dizinin terimleri toplamını bulunuz.

$g = 9, k = -\frac{1}{3}, n = \infty$ dir.

$$S_n \to \infty = , \frac{g_1}{1-k} = \frac{9}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{27}{4} \text{ olur.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BİRİNCİ BÖLÜM

BİLEŞİK FAİZ

(Mürekkep Faiz, Faizin Faizi)

Bileşik Faizin Hesabı :

Eğer alacaklı yıl sonunda, altı ayın veya üç ayın sonunda faizin ödenmesinden vazgeçerse ve bunu borçluya ödünç verilen kapitale ek olarak kullanılması için rıza gösterecek olursa, böylece bu faiz önce verilen bir kapital niteliğine girer ve ondan sonraki dönemin sonunda ise faizden kapitale geçer ve böylece devrelerden yeniden bir gelir meydana gelmiş olur.

Bu ifadeyi şöyle de özetleyebiliriz;

Her hesap dönemi sonunda hesaplanan faiz tutarı kapital sahibine verileceği yerde, kapitale eklenir ve kapitalin bir kısmını oluşturur.

Esas itibariyle bileşik faiz, Almanya da gerek Medeni Hukuka (paragraflar 248, 289, 291) ve gerekse Ticaret Hukukuna (paragraf 352) göre yasaklanmıştır. Sadece özel şartlar altında kanun bileşik faizin hesabını kabul eder. Medeni Kanunun 248 nci paragrafı ve II nci bendine göre tasarruf kuruluşları, kredi veren yerler ve Bankalar bu bileşik faiz yasağından muaf kılınmıştır. Ticaret Kanunu paragraf 351 I e göre alıcı hesaplarında faiz bütün borç artığı üzerinden hesaplanır; şayet bu toplam faiz içinde bileşik faiz olsa bile yukarda belirtildiği gibi işlem görür.

Bileşik faiz hesabı, kurumlarda ve sigorta işletmelerinde, irat hesabında aynı zamanda tahvilât ve ipotek işlemlerinde kullanılır.

Mevzuatımızda ise, şahıs hesaplarında faize faiz hesaplanması yasak olmakla beraber, bankaların carî hesaplarında bileşik faize izin verilebilir. Türk Ticaret Kanununun 87 - 99 ncu maddeleri bu konuyu ayrıntılı olarak içermektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bileşik faiz hesaplanmasında, yıllık, altı aylık veya üç aylık devreler göz önüne alınarak işlemler yapılmaktadır.

Eğer her faiz döneminin sonunda faiz kapitale eklenirse, o zaman faiz de faizlenmiş olur. Bu difere faizin eklenmesi ile bir kapitalin son kıymeti meydana çıkarılır ki, böylece yıllar boyunca bütün faiz geliri faizlenmiş olur.

Basit faiz ile bileşik faiz arasındaki farkı bir örnekle açıklayalım.

Örnek 1 :

Bir şahıs 100.000 TL. bir kapitali % 6 faiz fiatı üzerinden, 3 yıl için bankaya yatırmış olsun.

Basit faize göre : Bankada 3 yıl kalmış kapital için yılda % 6 dan 18.000 Tl. bir faiz hesaplanacaktır.

Aynı kapitali 3 yıl için % 6 dan bileşik faiz ile hesapladığımızda, adı geçen sürenin sonunda elde edeceğimiz tutar, şöyle hesaplanır :

Yatırılan Tutar	100.000.— TL.
% 6 Faiz Tutarı	6.000.— »
1. yıl sonundaki kapital tutarı	106.000.— »
2. yıl sonunda elde edilen faiz tutarı	6.360.— »
2. yıl sonundaki kapital tutarı	112.360.— »
3. yıl sonunda elde edilen faiz tutarı	6.741,60 »
3. yıl sonundaki kapital tutarı	119.101,60 »

Örneğimizdeki faiz tutarı ;

119.101.60 — 100.000.00 = 19.101,60 TL.

Bu durumda bileşik faiz ile basit arasında fark ise 1.101.60 Liradan ibaret bulunmaktadır. Şöyle ki;

19.101,60 — 18.000.00 = 1.101,60 TL.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 2:

5.0000 TL. bir kapital yılda % 4 ile faizlendirildiği takdirde 5 yıl sonra ne kadar olmuştur.

Yatırılan kapital	5.000.— TL.
% 4 faiz tutarı	200.— »
1. yol sonundaki kapital tutarı	5.200.— »
2. yıl sonunda elde edilen faiz tutarı	208.— »
2. yıl sonundaki kapital tutarı	5.408.— »
3. yıl sonunda elde edilen faiz tutarı	216.32 »
3. yıl sonundaki kapital tutarı	5.624.32 »
4. yıl sonunda elde edilen faiz tutarı	224.97 »
4. yıl sonundaki kapital tutarı	5.849.29 »
5. yıl sonunda elde edilen faiz tutarı	233.97 »
5. yıl sonundaki kapital tutarı	6.083.26 »

Yukarıda verdiğimiz iki örnekten de anlaşılacağı gibi, bileşik faiz hesaplanmasında dört muhtelif unsur bulunmaktadır. Şöyle ki;

2. Örneğimizde;

5.000 TL.	Başlangıç kapitali
% 4	Faiz fiatı
5 yıl	Devre adedi
6.083,26	Devre sonu kapitali (Nihai kapital, baliğ)

Yukarıda adı geçen unsurlar genellikle aşağıdaki harflerle ifade edilir.

K_0 = Başlangıç kapitali

P = Faiz fiati

n = Devre adedi

K_n = Devre sonu kapitali (baliğ)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Devre sonu kapitalinin (Baliğ'in) hesaplanması :

Bankaya yatırılan kapitalin, belirli devreler sonunda faiziyle beraber neye baliğ olacağını şöyle bir formülle de hesaplayabiliriz; bir devre sonunda bankaya yatırılan 1 Lira P/100 miktarında bir faiz getirecektir. Bu oranı i harfi ile ifade edebiliriz. Bu durumda adı geçen devre sonunda 1 TL. faiz ile beraber 1 + i ye baliğ olur ki, bunu da «q» ile ifade edebiliriz.

Şu halde «q» faiz emsali olur.

Bu durumu, bir tablo ile de şöyle gösterebiliriz :

Devreler	Devre başında kapital tutarı	Devre sonlarında faiz tutarları	Devre sonlarında kapital bir faiz tutarları
1	1	i	$1 + i = q$
2	q	$q \cdot i$	$q + q \cdot i = q^2$
3	q^2	$q^2 \cdot i$	$q^2 + q^2 \cdot i = q^3$
4	q^3	$q^3 \cdot i$	$q^3 + q^3 \cdot i = q^4$
n	q^{n-1}	$q^{n-1} \cdot i$	$q^{n-1} + q^{n-1} \cdot i = q^n$

Şu halde 1 Lira n ci devre sonunda bileşik faizi ile birlikte «q^n» olduğuna göre devre başı kapitalinin 1 Lira yerine «K_0» olduğu kabul edildiğinde devre sonu kapitalin (baliğ'in) hesaplanması için aşağıdaki formül elde edilmiş olur.

$$K_n = k_0 \cdot q^n \qquad (1)$$

Formülün uygulamada kullanılışını gösterebilmek için bir kaç örnek ele alalım.

Örnek 1 :

2.500 Lira % 5 de n 10 yıl sonra kaç liraya baliğ olur?

Logaritma ile çözümü;

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$\log K_n = \log k_0 + n \log q$$

rakamları yerine koyduğumuzda,

$$K_n = 2.500\ (1,05)^{10}$$
$$\log K_n = \log 2.500 + 10 \cdot \log 1,05$$
$$\log K_n = 3,39794 + 10 \cdot 0,02119$$
$$\log K_n = 3,39794 + 0,21190$$
$$\log K_n = 3.60984$$
$$K_n = 4.072,23$$

Hazır tablo yardımı ile çözüm :

Baliğ cetveli, bileşik faiz metoduna göre 1 Liranın çeşitli faiz fiatları üzerinden, çeşitli devreler sonundaki baliğlerini vermektedir.

Tablo, muhtelif devreler (n) sütunuyla çeşitli faiz fiatları sütunlarına ayrılmıştır. Tabloda 1 Liranın % 5 den 10 yıl sonraki değerini bulmak istersek, 10. devreden sağa doğru ilerler ve % 5 sütunu ile kesiştiği yerde 1,62889 rakamını buluruz.

Demek ki, 1 Lira % 5 den 10 yıl faizde kalsa 10 yıl sonraki değeri 1.628,89 Lira olacaktır. (Tablo I)

2.500 Liranın % 5 den 10 yıl sonraki değerini bulmak için 1 Liranın 10 yıl sonundaki değerini 2.500 Lira ile çarpmak gerekmektedir.

$$K_n = 2.500\ (1,05)^{10}$$
$$(1.05)^{10} = 1.628,89 \quad \text{olduğundan,}$$
$$K_n = 4.072,22$$

Örnek 2 :

15.000 Lira % 4 den 5 yıl sonra kaç liraya baliğ olur?

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$
$$K_n = 15.000\ (1,04)^5$$
$$\log K_n = \log 15.000 + 5 \cdot \log 1,04$$
$$\log 15.000 = 4,17609$$
$$5 \log 1,04 = 0,08515$$
$$K_n = 18.249 \text{ TL.} \quad 4.261,24$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablo ile yapıldığında, Tablo I.

$(1,04)^5 = 1,21665$

$K_n = 15000 \times (1,04)^5 = 15000 \times 1,21665$

$K_n = 18.249,75$.— TL. bulunmuş olur.

Devre başı kapitalin hesaplanması (Başlangıç kapitali) :

Başlangıç kapitalini basit yoldan şöyle hesaplayabiliriz :

Örnek : % 4 faiz fiatı ile yatırılan bir kapital 6 yılda 6.000 TL. baliğ olmuştur. Bu baliğ'in başlangıç kapitali nedir?

6. yılın sonunda baliğ	6.000,00 TL.
6. yılın sonunda faiz tutarı	230,77 »
5. yılın sonunda baliğ	5.769,23 »
5. yılın sonunda faiz tutarı	221,89 »
4. yılın sonunda baliğ	5.547,34 »
4. yılın sonunda faiz tutarı	213,36 »
3. yılın sonunda baliğ	5.333,98 »
3. yılın sonunda faiz tutarı	205,15 »
2. yılın sonunda baliğ	5.128,83 »
2. yılın sonunda faiz tutarı	197,26 »
1. yılın sonunda baliğ	4.931,57 »
1. yılın sonunda faiz tutarı	189,68 »
Devre başı kapitali	4.741,89 »

Devre başı kapitalini (başlangıç kapitali) 1 No.lu formülden yararlanarak da şöyle hesaplayabiliriz :

(1) Formül.

$K_n = K_0 . q^n$ buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$K_0 = \frac{k^n}{q^n} \quad (2) \text{ bulunur.}$$

Aynı örneği 2 No. lu formülü ile çözelim.

$$K_0 = \frac{6.000}{(1{,}04)^6}$$

$$\log K_0 = \log K_n - n \cdot \log q$$

$$\log K_0 = \log 6.000 - 6 \cdot \log 1{,}04$$

$$\log 6.000 = 3.77815$$

$$-6 \log 1.04 = 0{,}10218$$

$$\Longrightarrow \log 6.000 - 6 \log 1{,}04 = 3{,}67597$$

$$K_0 = 4742{,}1 \text{ TL.}$$

Aynı örneği tablo aracılığı ile hesaplıyabiliriz. (Tablo II) labloda % 4 faiz fiatı üzerinden 6 yıl süre bir bankada bırakıldığı takdirde 1 liranın bugünkü değeri ifade edilmektedir. Örneğimizde, devre sonu kapitali (nihai kıymet 1 lira olmayıp 6.000 TL. olmasından adı geçen rakamın 6.000 Lira ile çarpılması gerekir) 4.741,88 TL. dir.

$$0{,}79031 \times 6.000 = 4.741{,}86 \text{ TL.}$$

Faiz Fiatının Hesaplanması :

(1) No. lu formülden giderek faiz fiatını şöyle hesaplayabiliriz.

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$q^n = \frac{K_n}{K_0}$$

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$1 + \frac{P}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$100 + P = 100 \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$\boxed{P = 100 \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 100}$$

Örnek 1 :

25.000 TL. bir kapital 5 yıl süresince 33.450,69 TL. baliğ olmuştur. Adı geçen kapitale bankanın yürüttüğü faiz fiatı nedir?

$$p = 100 \sqrt[5]{\frac{33450.69}{25.000}} - 100$$

$$\log \sqrt[5]{\frac{33450,69}{25.000}} = \frac{\log 33450.69 - \log 25.000}{5}$$

$$\log 33.450.60 = \quad 4,52440$$

$$-\log 25.000.— = -4,39794$$

$$0,12646$$

$$\frac{0,12646}{5} = 0,02530$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\log \sqrt[5]{\frac{33450,69}{25000}} = \log 0,02530$$

$$\sqrt[5]{\frac{33450,69}{25000}} = 1,06$$

$100 \times 1,06 - 100$
$106 - 100 = 6$
Faiz Fiatı = % 6 dır.

Faiz Fiatını şu şekilde de bulabiliriz :

$K_n = K_0 \cdot q^n$
$\log K_n = \log K_0 + n \cdot \log q$
$n \cdot \log q = \log K_n - \log K_0$

$$\log q = \frac{\log K_n - \log K_0}{n}$$

Örnek 2 :

1.500 TL. nın 10 yılda 2220,36 liraya baliğ olabilmesi için % kaçtan faize verilmesi gerekmektedir?

$2220,36 = 1.500 \cdot q^{10}$
$\log 2220,36 = \log 1.500 + 10 \log . q$

$$\log q = \frac{\log 2220,36 - \log 1.500}{10}$$

$$\log q = \frac{3,34642 - 3,17609}{10}$$

$\log q = 0,017033$
$q = 1,04$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ olduğundan,

$$1 + \frac{p}{100} = 1,04$$
$p = 0,04$

Tablo yardımıyla çözüm;

$$2220{,}36 = 1.500 \cdot q^{10}$$

$$q^{01} = \frac{2220{,}36}{1.500} = 1{,}48024$$

Tablo (I) de 10. devreye ait baliğler gözden geçirildiğinde; 1,48024 ün % 4 e denk geldiği görülür.

Devre Adetlerinin Tesbiti (Zaman) :

(1) No. lu temel formül $K_n = K_0 \cdot q^n$ den,

$$q^n = \frac{K_n}{K_0} \quad \text{hesaplanması gerekir.}$$

$$n \log q = \log K_n - \log K_0$$

$$\boxed{n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log q}} \quad (4)$$

Örnek :

25.000 TL. kapitali % 6 faiz fiatıyla Bankaya yatırdığımızda 71.370 TL. baliği elde etmek için adı geçen kapitalin ne kadar devre bankada kalması gerekmektedir.

$$n = \frac{\log 71.370 - \log 25.000}{\log 1{,}06}$$

$$\begin{aligned} \log 1{,}06 &= 0{,}02531 \\ \log 71.370 &= 4{,}85352 \\ -\log 25.000 &= 4{,}39794 \\ \hline & 0{,}45558 \end{aligned}$$

$$n = \frac{4{,}85352 - 4{,}39794}{0{,}02531}$$

$$n = \frac{0{,}45558}{0.02531} = 18 \text{ yıl}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablo yardımıyla çözüm;

$K_n = (K_o \cdot q^n)$ formülünden q^n için bir kıymet saptanır sonra baliğ cetvelinden verilmiş yüzde oranında n yılı için hesaplanmış faizlendirme faktörü oranı, ya tam olarak veya yaklaşık olarak, bulunmuş değere ait dönemler ortaya çıkar.

$$q^n = \frac{K_n}{K_o} = \frac{71,370}{25.000} = 2,85434$$

Tablo (I) de % 6 hizasında yaklaşık değer 2,85434 için $n = 18$ yıl görülür.

Devre başında hesaplanan faiz (peşin faiz) şöyle bir formülle hesaplanır.

K_n = Devre sonu kapitali (baliğ)
K_o = Devre başı (başlangıç) kapitali
q_a = Faiz emsali
n = Devre adedi

Baliğin hesaplanması bileşik faiz hesaplarında q_b devre sonlarında hesap edilen faiz emsalini ifade eder.

$q_b = 1 + \frac{p}{100}$ ye eşit olduğu halde q_a ; $1 - \frac{p}{100}$ ye eşittir.

Devreler	Devre başında kapital	Devre sonunda kapital
1	q_a	$1 = \frac{q_a}{q_a}$
2	1	$\frac{1}{q_a}$
3	$1/q_a$	$1/q_a^2$
4	$1/q_a^2$	$2/q_a^3$
n	$1/q_a^{n-2}$	$1/q_a^{n-1}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Herhangi bir devre başında q_a lık bir kapital «n» inci yıl sonunda $1/q_a^{n-1}$ ya varmaktadır.

Başlangıç kapital q_a olmayıp 1 olsaydı «n» yıl sonunda (baliğ) devre sonu kapital $1/q_a^n$ olacaktı. Başlangıç kapitali «K_o» olarak kabul edecek olursak «n» inci sene sonunda nihayi sermaye $\frac{K_o}{q_a^n}$ olacak. O halde devre sonu kapitalinin hesaplanabilmesi için aşağıdaki formül elde edilmiş olur.

$$K_n = \frac{K_o}{q_a^n} \qquad (5)$$

Örnek :

Bir şahıs % 6 peşin bileşik faiz fiatı üzerinden 32.720.— TL. bir bankaya yatırmıştır. Beş yıl sonunda adı geçen şahsın bankasından alacağı tutar ne kadar olacaktır?

$$K_n = \frac{32.720}{(0,94)^5}$$

$$\log K_n = \log 32.720 - 5 \cdot \log 0,94$$
$$-5 \log 0,94 \text{ colog} = \underbrace{0,13435 \quad \log 3,2720 - 4,51481}_{4,64916}$$

$$\log K_5 = 4,64916$$

$$K_5 = 44.582.— \text{ TL.}$$

Devre Başı Kapitalinin Hesaplanması :

$$K_n = \frac{K_o}{q_a^n}$$

$$\frac{K_o}{q_a^n} = K_n$$

$$K_o = K_n \cdot q_a^n \qquad (6)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek :

Bir şahıs 5 yıl süre ile % 6 peşin bileşik faiz fiatı üzerinden bankasına yatırmış olduğu tutarın 44.582.— TL. sına vardığını görmüştür. Başlangıçta adı geçen şahsın bankasına yatırmış olduğu devre başı meblağ ne kadardır?

$$K_0 = 44.582 \times 0{,}94^5$$

$$\log K_0 = \log 44.582 + 5 \cdot \log 0{,}94$$

$$\log 44.582 = 4{,}64916$$

$$5 \log 0{,}94 = \underline{1{,}86565}$$

$$4{,}51481$$

$$\log K_0 = 4{,}51481$$

$$K_0 = 32.720.— \text{ TL.}$$

Faiz Fiyatının Hesaplanması :

$$K_n = \frac{K_0}{q_a^n}$$

$$q_a^n = \frac{K_0}{K_n}$$

$$\boxed{q_a = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}} \qquad (7)$$

Örnek :

Bir şahıs 5 yıl süre ile 32.720.— TL. sını peşin bileşik faiz ile bir bankaya yatırmış ve sürenin bitiminde parası 44.582.— TL. sına baliğ olmuştur. Bankanın uyguladığı faiz fiatı nedir?

$$\log q_a = \frac{\log 32.720 - \log 44.582}{5}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\log 32.720 = 4,51481$$

$$-\log 44.582 = -4,64916$$

$$-0,13435$$

$$-0,13435 \div 5 = -0,02686$$

$$q_a = 0,94$$

$$p_a = 100 - 94 = 6\ (\%\ 6)$$

Devre Adedinin Hesaplanması :

$$K_n = \frac{K_o}{q_a^n} \qquad q_a^n = \frac{K_o}{K_n}$$

$$n \log q_a = \log K_o - \log K_n$$

$$\boxed{n = \frac{\log K_o - \log K_n}{\log q_a}} \qquad (8)$$

Örnek :

Bir şahıs % 6 peşin bileşik faiz fiatı üzerinden 32.720.— TL. bir bankaya yatırmış ve bir süre sonra yatırılan paranın 44.582.— TL. na baliğ olduğunu görmüştür.

Arada geçen süre ne kadardır?

$$n = \frac{\log 32.720 - \log 44.582}{\log 0,94}$$

$$\log 32.720 = 4.51481$$

$$-\log 44.582 = -4,64916$$

$$-0,13435$$

$$\log 0,94 = \bar{1},97313 = 0,02687$$

$$0,13435 + 0,02687 = 5$$

$n = 5$ yıldır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Sürenin Kesirli Olması Hali :

Bileşik faiz problemlerinde süre her zaman tam yıl olmayabilir.

Örneğin;

Süre 5 yıl, 2 ay 14 gün gibi hem tam yıl hem de yılın parçaları halinde verilebilir. Bu gibi durumlarda problemler iki yöntemle çözümlenebilir.

Birinci yöntem :

Bu usulde kapitlin tam devre için bileşik faizle baliği bulunur ve baliğ üzerinden devrenin kesrine ait bölüm hesaplanarak faizi kendisine eklenir.

Bu esasa göre baliğ veren formül şöyle çıkarılabilir :

(Devrenin kesirli kısmı $\frac{h}{H}$ ile ifade edilmektedir.)

Yani $\frac{h}{H}$ ifadesinde 3 ay, $\frac{3}{12}$ ve $\frac{90}{360}$ şeklinde gösterilir, diğer bir ifade ile H, bir devre içinde bulunan ay ve gün sayısını, h ise bu devre içinde bulunan parçayı göstermektedir.

Devrenin tam bölümüne ait baliğ «K_0q» dir. Bu baliğin, devrenin kesirli bölümü için basit faizi ise: $K_0 q^n \cdot \frac{h}{H} \cdot p$ den ibaret olacaktır.

Yukarıda yapılan tanım üzerine kapitalin tam devre için bulunan baliğe ve bu baliğin devrenin kesirli bölümü için hesaplanan basit faizi eklendiğinde;

$$K_n = K_0q^n + K_0 q^n \cdot \frac{h}{H} \cdot p \text{ olur.}$$

ortak olan Kq^n parantezine alındığında formül,

$$K_n = K_0q^n \left(1 + \frac{h}{H} \cdot p\right) \quad \text{halini alır.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İkinci yöntem

Bu yöntemde devrenin tam ve kesirli bölümü için bileşik faiz yöntemi uygulanır.

Sürenin kesirli kısmı $\frac{h}{H}$ ile ifade olunursa baliğ formülü

$$K_n = K_0 q^n \cdot \frac{h}{qH}$$

$$K_n = K_0 q^{n+} \frac{h}{H} \qquad \text{olacaktır.}$$

Örneğin :

5.000 Lira % 5 faiz fiatı ile 5 yıl 3 ay 15 gün sonra kaç liraya baliğ olur?

Birinci yöntemle :

3 ay yılın 1/4 ü 15 gün ise 1/24 ü olduğundan,

$$\frac{h}{H} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{7}{24} \quad \text{olur.}$$

$$K_n = 5.000\,(1{,}05)^5\,(1 + \frac{7}{24} \cdot 0{,}05)$$

$$K_n = 5.000\,(1{,}05)^5\,(1 + \frac{0{,}35}{24})$$

$$K_n = 5.000\,(1.05)^5\ \ (\frac{24.35}{24})$$

$$\log K_n = \log\ 5.000 + 5\ .\ \log\ 1.05 + \log\ 24{,}35 - \log\ 24$$

$$\log K_n = 3{,}69897 + 0{,}10595 + 1{,}38650 - 1{,}38021$$

$$\log K_n = 3{,}81121 \qquad K_n = 6474{,}57$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İkinci yöntemle

$$K_n = 5.000\,(1.05)^5 + \frac{7}{24}$$

$$K_n = 5.000\,(1.05)^5\ \frac{127}{24}$$

$$\log K_n = \log 5000 + \frac{127}{24} \log 1{,}05$$

$$\log K_n = \log 5000 + \frac{127}{24}\ 0{,}02119$$

$$\log K_n = 3{,}81110$$

$$K_n = 6473.—$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

AMORTİSMAN

Amortisman Mevzuu :

V.U.K. Madde 313:

İşletmede bir yıldan fazla kullanılan ve yıpranmaya, aşınmaya veya kıymetten düşmeye maruz bulunan gayrimenkullerle 269 uncu madde gereğince gayrımenkul gibi değerlenen iktisadi kıymetlerin, alet, edavat, mefruşat ve demirbaşlarını ve sinema filmlerinin birinci kısımdaki esaslara göre tesbit edilen değerinin bunların kullanılabilecekleri süre zarfında yok edilmesi amortisman mevzuunu teşkil eder.

Normal Amortisman :

Madde 315 :

Amortismana tabi iktisadi kıymetlerin değeri ilgili Bakanlıklarla, Ticaret ve Sanayi Odaları, Ticaret Odaları, Sanayi Odaları ve Ticaret Borsaları Birliğinin mütalâası alınarak Maliye Bakanlığınca tesbit ve ilân olunan nispetler üzerinden yok edilir.

Amortisman nispetlerinin tesbitinde;

1 — Belli iş ve sanat kolları ayrı ayrı dikkate alınır.

2 — Amortismana tabi kıymetlerin tecrübeye dayanan ortalama ömürleri hesaba katılır.

Azalan Bakiyeler Yöntemiyle Amortisman :

Madde 315 :

Bilanço esasına göre defter tutan mükelleflerden dileyenler, amortismana tabi iktisadi değerlerini azalan bakiyeler üzerinden amortisman yöntemiyle yok edebilir.

Bu yöntemin tatbikinde;

1. Her yıl, üzerinden amortisman hesaplanacak değer, evvelce ayrılmış olan amortismanlar toplamının tenzili suretiyle saptanır.

2. Yöntemle uygulanacak amortisman oranı % 25 i geçmemek üzere normal amortisman nispetinin 2 katıdır.

3. Bu usulde amortisman süresi normal amortisman oranlarına göre hesaplanır.

Bu sürenin son yılına devreden bakiyeler, o yıl tamamen yok edilir.

1.000 TL. değerinde bir demirbaş eşya % 10 üzerinden normal amortismanla amorti edilmiştir.

Normal amortismana göre:

Yıllar	Eşya bedeli	Amortisman oranı	Amortisman miktarı	Artık
1	1000	% 10	100	900
2	1000	% 10	100	800
3	1000	% 10	100	700
4	1000	% 10	100	600
5	1000	% 10	100	500
6	1000	% 10	100	400
7	1000	% 10	100	300
8	1000	% 10	100	200
9	1000	% 10	100	100
10	1000	% 10	100	000
			1000	

Azalan Bakiyeye göre Amortisman :

Yıllar	Eşya değeri	Amortisman oranı	Ayrılan amortisman	Artık
1	1.000.—	% 20	200.—	800.—
2	800.—	% 20	160.—	640.—
3	640.—	% 20	128.—	512.—
4	512.—	% 20	102.40	409.60
5	409.60	% 20	81.92	327.68
6	327.68	% 20	65.54	262.14
7	262.14	% 20	52.43	209.71
8	209.71	% 20	41.94	167.77
9	167.77	% 20	33.55	134.22
10	134.22	%100	134.22	—.—
			1.000.—	

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek :

1.000 Liraya satın aldığımız bir demirbaşın her yıl sonunda amortisman karşılığı olarak azalan bakiye değerinden % 20 düşülmektedir. Adı geçen demirbaşın beşinci yıl sonundaki değeri hesaplanmak istendiğinde doğrudan doğruya bileşik peşin faiz formülünden yararlanarak öğrendiğimizi çözebiliriz.

$$K_0 = K_n q_s^n$$

$$K_0 = 1000 \times 0.80^5$$

$$\log 1000 = 3,00000$$

$$5 \log 0,80 = + \underline{51545 - 1}$$

$$3,51545 - 1$$

$$\log K_0 = 2,51545$$

$$K_0 = 327.68$$

Bu bulduğumuz değeri tabloda da 5. yılın karşısındaki değere karşılık geldiği görülmektedir.

Amortismana tabi tutulan sabit kıymetin satın alma bedelinin hesaplanması :

Örnek :

Bir demirbaş eşyanın 4. yıl sonundaki kıymeti 409,60 TL. dır. Amortisman oranı % 20 olduğu halde demirbaşın satın alma bedeli nedir?

$$K_n = \frac{409,60}{0,80^4}$$

$$\log K_n = \log 409,60 - 4 \log 0,80$$

$$\log 409,60 = 2,61.236$$

$$-4 \log 0,80 = -4 \times \bar{1},90309 = + 0,38764 =$$

$$\log K_n = 3.00.000$$

$$K_n = 1000 \text{ TL.}$$

Demek oluyor ki, demirbaş eşya 1.000 TL. ya satın alınmıştır.

Devre Adedinin Hesaplanması :

Amortisma tabi tutulan demirbaş eşyanın satınalma azalan değeri ile amortisman yüzde oranı belli ise formül ile devre adedini hesaplamak mümkündür.

Örnek :

1.000 TL. satın alınan bir demirbaş eşyanın % 20 amortisman oranı uygulanması sonucunda azalan kıymeti kaç yıl sonra 512.— TL. olacaktır?

$$n = \frac{\log K_o - \log K_n}{\log q_n}$$

$$n = \frac{\log 512 - \log 1000}{\log 0{,}80}$$

$$\log 512.00 = \quad 2,70.927$$

$$-\log \quad 1000 = -3.00.000$$

$$-0.29.073$$

$$\log 0{,}80 = -1{,}90309 = 0{,}90309 - 1 = -0{,}09691$$

$$= 0{,}29073 \div -0{,}09691$$

$$n = 3$$

Amortisman Yüzde Oranının Hesabı :

Azalan bakiyeler üzerinden amortisman metodunda, amirtosman yüzde oranının hesaplanabilmesi için formülden yararlanabiliriz.

Örnek :

1000 TL. ya satın alınmış olan bir demirbaş eşyanın 2 yıl sonundaki artık değeri 640 TL. olduğuna göre uygulanan amortisman yüzde nispeti nedir?

$$\log q_n = \frac{\log K_o - \log K_n}{n}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\log q_a = \frac{\log 640 - \log 1.000}{2}$$

$$\log 640 = 2,80.618$$

$$-\log 1000 = -3,00.000$$

$$-0,19.382$$

$$-0,19382 \div 2 = -0,09691 = 0,90309 - 1 = \bar{1},90309$$

$$q_a = ,080$$

$$p_a = 20$$

Denk Faiz Fiatı :

a) Verilmiş altı aylık yüzde oranından yıllık yüzde oranının tesbit edilmesi.

Örnek :

6 aylık % 5 faiz fiatı hangi yıllık faiz fiatına denk gelir, diğer bir ifade ile, hangi yıllık faiz fiatı ile bir kapital % 5 altı aylık faiz fiatı ile aynı yıllık faizi getirir.

% 5 faiz fiatı ile 1 TL. altı ay sonunda $1 + \frac{5}{100} = 1,05 = q$ olur.

% 5 faiz fiatı ile 1 TL. ikinci altı ayda $1,05^2 = 1,1025 = q^2$ olmuştur.
100 TL. iki altı ayda = bir yılda 100 q^2 = 110,25 faiz ise 10,25 olmuştur.
O halde altı aylık yüzde oranı % 5, yıllık yüzde oranı % 10,25 dir.

Formülle çözüm :

(p) yıllık yüzde oranı = 100 q^2 — 100
yıllık yüzde oranı, altı aylık yüzde oranından hesaplanır.

$$p = 100\,(q^2 - 1)$$

değerleri yerine koyalım.

$$p = 100\,(1,05^2 - 1) = \%\ 10,25$$

b) Verilmiş yıllık yüzde oranı yardımı ile altı aylık yüzde oranının hesaplanması :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek :

Hangi altı aylık yüzde oranı % 6 yıllık yüzde oranına denktir?

Eğer altı aylık yüzde oranı % 3 olursa yıllık yüzde oranı,

$100\,(q^2-1) = 100\,(1{,}03^2-1) = 100\,(1{,}0609-1) = \%\ 6{,}09$

olur.

Eğer % 6,09 yıllık yüzde oranı % 3, altı aylık yüzde oranına denk ise % 6 yıllık yüzde oranı $\frac{3.6}{6{,}09} = \%\ 2{,}955$ altı aylık yüzde oranına denktir.

Formülle çözüm :

Aranan yüzde oranını x olarak kabul edelim, böylece 1. altı ayın sonunda 1 TL. $= 1 + \frac{x}{100}$ olur.

Bir yılın sonunda ise;

$$(1 + \frac{x}{100})^2 = 1 + i = q$$

o halde,

$$q = (1 + \frac{x}{100})^2;\ 1 + \frac{x}{100} = \sqrt{q};\ \frac{x}{100} = \sqrt{q} - 1 \text{ dir.}$$

yıllık yüzde oranından altı aylık yüzde oranı $x = 100\,(\sqrt{q}-1)$ değerleri koyalım,

$$\log \sqrt{q} = 1/2 \log 1{,}06 = 1/2\ .\ 0{,}2531 = 0{,}012655$$

$$\sqrt{q} = 1{,}029559$$

$$x = (1{,}029559 - 1)\ 100 = \%\ 2{,}955$$

üç aylık yüzde oranını (x) % 6 yıllık yüzde oranı yardımı ile hesaplanma formülü :

$$q = (1 + \frac{x}{100})^4 = (\sqrt[4]{q} - 1)\ 100 = \%\ 1{,}46$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ANİ FAİZ

Bu konumuzda devre adedinin sonsuza çıkarmak suretiyle her an için de bu devre adedinin hesaplanabilmesinin matematiksel bakımdan mümkün olduğunu açıklamağa çalışacağız.

Devre adetlerinin sonsuz olarak hesaplarımızda yer almaları doğal olarak bizi denk faiz problemi ile karşılaştırmış olur. Aynı bundan önce incelediğimiz denk faiz problemlerinde olduğu gibi yıllık faiz fiatına karşılık ve devre adetleri sonsuz olan faiz fiatının hesaplanmasını gerekli kılar.

Ani Faiz Hesap Formülünün Düzenlenmesi :

Açıklamamıza bir örnekle başlayalım : Önce, elimizde bulunan 1 TL. değerindeki bir kapitalin 1 yıl süresince 1 TL. faiz getirdiğini farz edelim. Şu halde 1 TL. bir kapital 1 yıl sonunda faizi ile birlikte 2 TL. na baliğ olacaktır. Yine aynı yıllık faiz fiatı üzerinden devre adetinin 2 ye çıkarıldığını kabul edelim. Bu kez başlangıç kapitali 6 ay sonunda 1,5; TL. ve yılın sonunda ise 2,25 TL. olacaktır. Bu şekilde, aynı yıllık faiz fiatını alıp, devre adetlerini artıracak olursak aşağıdaki tablo elde edilmiş olur.

$(1 + 1)$		$= 2$
$(1 +)^2$	$= 1{,}50^2$	$= 2{,}25$
$(1 + 1/2)^3$	$= 1{,}33^3$	$= 2{,}346$
$(1 + 1/4)^4$	$= 1{,}25^4$	$= 2{,}441$
$(1 + 1/5)^5$	$= 1{,}20^5$	$= 2{,}489$
$(1 + 1/10)^{10}$	$= 1{,}10^{10}$	$= 2{,}594$
$(1 + 1/20)^{20}$	$= 1{,}05^{20}$	$= 2{,}653$
$(1 + 1/100)^{100}$	$= 1{,}01^{100}$	$= 2{,}704$
$(1 + 1/1000)^{1000}$	$= 1{,}001^{1000}$	$= 2{,}7171$
$(1 + 1/10000)^{10000}$	$= 1{,}0001^{10000}$	$= 2{,}7182$

Yukarıda elde ettiğimiz tabloyu genelleştirecek olursak aşağıdaki sonucu elde etmiş oluruz.

$$(1 + i) < (1 + \frac{i}{2})^2 < (1 + \frac{i}{3})^3 < (1 + \frac{i}{4})^4 \ldots < (1 + \frac{i}{100})^{100}$$

$$< (1 + \frac{i}{1000})^{1000} \ldots < (1 + \frac{i}{10000})^{10000} \ldots < (1 + \frac{i}{m})^m < e = 2{,}7182818$$

yaklaşmış oluruz. (e) kıymeti ise aynı zamanda tabii logaritmaların tabanını teşkil etmektedir. Ani faiz fiatının hesaplanmasında tabii logaritma kullanılmaktadır.

Yukarıdaki açıklamamızda ani faiz fiatı % 100 olarak kabul edilmiştir. Yıllık ani faiz fiatı t' olarak ifade edilirse;

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e \quad \ldots\ldots\ldots 1$$

$$\lim \left(1 + \frac{t'}{m}\right)^m = e^{t'} \quad \ldots\ldots\ldots 2$$

$$(1 + t) = \lim \left(1 + \frac{t'}{m}\right)^m$$

$$\boxed{1 + t) = e^{t'}}$$

eşitliği bulunur.

Şimdi (1) No.lu eşiklikten (2) No.lu eşitliğe nasıl geçildiğini açıklayalım.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

olduğuna göre,

$$\lim \left(1 + \frac{t'}{m}\right)^m = ?$$

Bu limit aşağıdaki eşitliklerle ifade edilebilir.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{t'}}\right)^m$$

$$\lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{t'}}\right)^{\frac{m}{t'}} \right\}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

«m» sonsuza giden bir sayı olduğundan $\frac{m}{t'}$ ifadesi de sonsuza giden büyük bir sayı ifade eder. Bu bakımdan $\frac{m}{t'}$ değeri de «m» in ifade ettiği anlamı taşır.

$$\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{t'}}\right)^{\frac{m}{t'}} = \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = e \quad \text{dir.}$$

Buna göre;

$$\lim \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{t'}}\right)^{\frac{m}{t'}} \right\}^{t'} = e^{t'}$$

eşitliğin sol tarafını;

$$\lim \left(1 + \frac{t'}{m}\right)^{m}$$

eşitliğinden elde ettiğimize göre;

$$\lim \left(1 + \frac{t'}{m}\right)^{m} = e^{t'}$$

olur.

Demek oluyor ki, başlangıçta ifade ettiğimiz $(1 + t) = e^{t'}$ ifadesi doğrudur.

$$\log \text{nat} (1 + p) = t' \log \text{nat } e$$

«e» nat logaritmanın tabanı olduğundan nat log e = 1 dir.

$$\text{nat log } (1 + p) = t'$$

Örnek :

Yıllık % 5 faiz fiatına karşılık ani faiz hesap metoduna göre yıllık faiz fiatı nedir?

$$t' = \log \text{nat } (1{,}05)$$

Bu rakamın log nat'ını hesaplamak için önce rakamı «Brick» logaritmasına göre hesaplamak ve ondan sonra 0,4343 rakamı ile bölmek gerekir.

Şu halde:

$$\log 1{,}05 = 0{,}02119$$

$$\log \text{nat } 1{,}05 = \frac{0{,}02119}{0{,}4343} = 0{,}04878955$$

Demek oluyor ki, $t' = 0{,}04879$ a eşittir. Bu suretle yıllık % 5 faiz fiatına karşılık ani faiz hesap metoduna göre yıllık faiz fiatı ise, 4,878955 dir.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı gibi yıllık faiz fiatını ifade eden (i) nin 100 ile çarpılması gibi (t') nün de 100 ile çarpılması gerekmektedir.

Ani Faizin Bir Rantabilite Hesaplama Metodu Olarak Ele Alınması :

Genel Bilgi

Bilindiği gibi, işletmeler genellikle her yıl sonunda bilançolarını yaparken, adı geçen devre sırasında elde etmiş oldukları sonucu da hesaplamak zorundadırlar. Elde edilen sonuç pozitif veya negatif olabilir. Pozitif olduğu takdirde, yani işletme bir net kâr elde etmesi halinde, adı geçen kârları başlangıç kapitaline oran etmek suretiyle işletmelerinin yıllık rantabilite oranını bulmuş olurlar.

Basit Şekilde Rantabilite Oranının Hesaplanması :

Örneğin :

Bir işletmenin bir yıl esnasında elde ettiği safi kârın 10.000.— TL. ve başlangıç kapitalinin de 50.000.— TL. olduğunu kabul edelim. 10.000,—'i 150.000.—'e oranladığımız takdirde rantabilite oranının % 20 olduğu anlaşılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Fakat bu şekilde hesaplanan bir rantabilite oranı gerçeğe pek de uygun bulunmamaktadır. Nedeni ise, kârın bir yıl sonunda hemen elde edilmiş bir sonuç olmayıp, devre esnasında birçok devamlı ve çeşitli süreçlerin bir sonucudur. Şu halde, rantabilite oranlarının bir yıldan daha küçük devreler için hesaplanması ve yıllık rantabilite oranının bulunabilmesi için de adı geçen oranları toplamak suretiyle elde etmek daha doğrudur.

Şöyle ki, bir işletmenin 50.000.— TL. ile faaliyete başlayarak her iki ayda bir elde ettiği kârları ile sağladığı rantabilite oranları aşağıda görüldüğü şekilde toplanmak suretiyle yıllık rantabilite oranı elde edilmiş bulunmaktadır.

			İki ayda bir hesaplanan rantabilite oranı :
50.000	Başlangıç kapitali		
2.000	Kâr	(1)	% 4,00
52.000	Başlangıç kapitali		
2.000	Kâr	(2)	% 3,85
54.000	Başlangıç kapitali		
1.000	Kâr	(3)	% 1,85
55.000	Başlangıç kapitali		
1.000	Kâr	(4)	% 1,82
56.000	Başlangıç kapitali		
2.000	Kâr	(5)	% 3,57
58.000	Başlangıç kapitali		
2.000	Kâr	(6)	% 3,45
60.000			%18,54

Yukarıda görüldüğü gibi, örneğimizde yıl sonunda yapılan rantabilite hesabında oran % 20 olduğu halde, her iki ayda bir elde edilen kârlara göre elde edilen rantabilite hesaplarında ise oran % 18,54 dür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aynı örneği tekrar ele alalım. Yalnız bu kez işletmenin elde ettiği 10.000 TL. lık kârı kapitalin muhtelif her iki aylık devrelerine birinci örnekten daha başka bir şekilde dağıtalım :

TL.		İki ayda bir hesaplanan rantabilite oranı :
50.000	Başlangıç kapitali	
500	Kâr (1)	% 1,00
50.500	Başlangıç kapitali	
500	Kâr (2)	% 0,99
51.000	Başlangıç kapitali	
1.500	Kâr (3)	% 2,94
52.500	Başlangıç kapitali	
2.000	Kâr (4)	% 3,81
54.500	Başlangıç kapitali	
2.500	Kâr (5)	% 4,59
57.000	Başlangıç kapitali	
3.000	Kâr (6)	% 5,26
60.000		% 18,59

Yukarıda görüldüğü gibi işletmenin bir yıl esnasında elde ettiği kâr miktarı değişmekle beraber her devreye düşen kâr miktarının değişmesi yüzünden her iki ayda bir hesaplanan rantabilite oranı % 18,54 den % 18,59'a çıkmış bulunmaktadır.

Örneğimizi üçüncü bir kez daha ele alalım ve elde edilmiş olan 10.000.— TL. lık kârı iki aylık devrelerine yukarıda gösterilen şekillerden başka bir şekilde dağıtalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

TL.		İki ayda bir hesaplanan rantabilite oranı :
50.000	Başlangıç kapitali	
—.—	Kâr (1)	——
50.000	Başlangıç kapitali	
—.—	Kâr (2)	——
50.000	Başlangıç kapitali	
—.—	Kâr (3)	——
50.000	Başlangıç kapitali	
—.—	Kâr (4)	——
50.000	Başlangıç kapitali	
4.500	Kâr (5)	% 9,00
54.500	Başlangıç kapitali	
5.500	Kâr (6)	% 10,09
60.000		% 19,09

Burada da işletmenin bir yıl esnasında elde ettiği kâr miktarı değişmemekle beraber her devreye düşen kâr miktarının değişmesi yüzünden her iki ayda bir hesaplanan rantabilite oranı tekrar dğişmiş bulunmaktadır. Sonuç olarak da yıllık rantabilite oranı değişmektedir.

Ani Faiz Hesap Metodu ile Rantabilite Oranının Hesaplanması :

Bir de işletmenin yılı sonsuz devrelere ayırmak suretiyle her an düzenli aynı tempo dahilinde adı geçen süre sırasında elde ettiği rantabilite oranını hesaplamak mümkündür ki, bu da ancak ani faiz hesap metodu ile sağlanabilir.

$$t' = \log at\,(1 + i)$$

$$= \log nat\ 1{,}20$$

$$\log (1{,}20) = 0{,}07918$$

$$\log nat\ 1{,}20 = \frac{0{,}07918}{0{,}4343}$$

$$t' = 18{,}23$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Demek oluyor ki, ani faiz hesap metoduna göre adı geçen işletmenin rantabilitesi % 18,23 dür.

Elde Edilen Rantabilite Oranları Arasında Karşılaştırma :

Her yıl sonunda hesaplama suretiyle elde edilen rantabilite oranları :	Her iki ay sonunda hesaplama suretiyle elde edilen rantabilite oranları :	Ani faiz hesaplama metoduna göre hesaplanan rantabilite oranları :
% 20	% 18.54	% 18,23
% 20	% 18.59	% 18.23
% 20	% 19.09	% 18.23

Yukarıdaki tabloda da açıkça görüldüğü gibi her yıl sonunda elde edilen rantabilite oranı ile, ani faiz hesap metoduna göre hesaplanan rantabilite oranları her üç durumda da hiç bir değişiklik göstermemekle beraber her iki ay sonunda hesaplama suretiyle elde edilen yıllık rantabilite oranları kârın devrelere dağıtımındaki değişiklik dolayısıyla değişikler göstermektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

RANT HESAPLARI

Belirli bir süre için, aralarındaki ara daima aynı kalmak üzere bir devre başında veya sonunda eşit veya matematik bir kanun dahilinde artan veya azalan taksitlerle yapılan ödemelere rant denilmektedir.

Rantlara günlük yaşantımızda çok rastlanmaktadır. Tahvilât faizlerinin ve hayat sigorta primlerinin ödenmeleri, rantlara örnek teşkil eder.

Ödemeler arasındaki zaman aralığında devre ve her devrede ödenen miktara da taksit adı verilir. Taksitler devre sonlarında ödeniyorsa «devre sonu rant», devre başlarında ödeniyorsa «devre başı rant» adını alır.

Rantların Türleri

1 — Rant taksitleri tutarının değişip değişmediğine göre;

a) Taksit tutarları değişmeyen rantlar; bu tür rantlarda her devre ödenen rant taksitleri hiçbir değişiklik göstermez.

b) Taksit tutarları değişen rantlar; bu tür rantlarda her devre ödenen rant taksitleri matematiksel bir kuralla değişir.

2 — Rantların devam sürelerine göre;

a) Muvakkat rantları; bu tür rantlarda devam süreleri önceden tesbit edilmiş bulunur.

b) Devamlı rantlar; bu tür rantlarda devam süreleri sonsuz kabul edilir.

c) Şart bağlı rantlar; bu tür rantlarda ilk ve son rant taksidinin tarihi şarta bağlı bulunmasından, devam sürelerinin önceden tesbitine imkân yoktur. Buna bir örnek olarak kaydi hayat şartıyla ödenen rantları göstermek yerinde olur.

Muvakkat Rantlar :

Muvakkat rantlar; devre sonlarında ödenen rantlar, devre başlarında ödenen rantlar ve müeccel rantlar olmak üzere üçe ayrılır.

1 — Devre sonlarında ödenen rantlar :

Belirli bir devam süresi esnasında rant taksitleri her devrenin sonunda ödendiği taktirde bunlara devre sonunda ödenen rantlar adı verilir. Bunlar da, ya nihai veya bugünkü değeri gözönüne alınır.

2 — Rantların nihaî kıymeti :

Rantların nihaî değeri meselesinden, belirli bir süre için aralarındaki ara aynı kalmak üzere, her devre sonunda eşit taksitlerle yapılan ödemelerin bileşik faizler ile beraber tutarının bulunması belirtilmektedir.

Rantların nihaî değerlerinin hesaplanması;

Örneğin;

Bir şahıs bankaya % 4 bileşik faiz fiatı üzerinden 5 yıl süreyle her yılın sonunda 1.000 TL. yatırmaktadır. Acaba yatırılan bütün taksitler faiz tutarıyla birlikte neye baliğ olur?

Adı geçen sürenin bitiminde bankada toplanacak olan miktara, rantların nihaî değeri adı verilir ve R harfiyle ifade olunur.

Bu problem birçok şekillerde çözümlenebilir.

a) Problemin, basit hesap işlemiyle çözümlenmesi,

İlk olarak yatırılan 1.000 Lira rant taksidinin 4 yıl süreyle % 4 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî değerinin hesaplanması;

İkinci olarak yatırılan rant taksitinin 3 yıl süreyle % 4 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî değerinin hesaplanması;

Üçüncü olarak yatırılan rant takstinin 2 yıl süreyle % 4 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî değerinin hesaplanması;

Dördüncü olarak yatırılan rant taksitinin 1 yıl süreyle % 4 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî değerinin hesaplanması gerekir.

Bundan başka sonuncu olarak yatırılan 1.000 Liralık rant taksitine ise bir faiz yürütülmeyeceği için hesaplarımızda yalnız 1.000 Lira olarak yer alması lâzım gelir. Şöyle ki;

	1.169.86 TL.
	1.124.86 «
	1.081.60 «
	1.040.— «
	1.000.— «
Rantların nihaî değerleri :	5.416.32 «

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Formülün düzenlenmesiyle,

Yukarda ele almış olduğumuz örnekte ilk yatırılan rant taksitinin nihaî değeri aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$rq^{n-1}$$

Yalnız (1) numaralı bileşik faiz formülünde «K_0» harfi ile ifade edilen başlangıç kapitalinin yerine yukarıda «r» harfi alınmıştır. Bundan başka yukarıdaki problemin çözümünde açıkça görüldüğü gibi devre adetleri 5 olmakla beraber ilk yatırılan rant taksidine 4 yıl süreyle faiz hesaplanmış olması dolayısıyle dönem adetleri de bir tane eksiltilmiş bulunmaktadır.

İkinci olarak yatırılan rant taksitinin nihaî değeri ise aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmıştır.

$$rq^{n-2}$$

Üçüncü olarak yatırılan rant taksitinin nihaî değeri ise aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmıştır.

$$rq^{n-3}$$

Dördüncü olarak yatırılan rant taksitinin nihaî değeri ise aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmıştır.

$$rq$$

Sonuncu olarak yatırılan rant taksitine ise hiç faiz yürütülmediğinden dolayı hesaplarımızda ancak taksitin kendisi yer almış bulunmaktadır.

$$r$$

Şu halde hesaplanan değerleri ters olarak sıralamak suretiyle toplayacak ve bu toplama «R_n» diyecek olursak aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

$$R_n = r + rq + rq^{n-3} + rq^{n-2} + rq^{-1}$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını «q» ile çarpalım.

$$R_n q = rq + rq^2 + \ldots\ldots + rq^{n-2} + q^{n-1} + rq^n$$

elde etmiş olduğumuz bu denklemde bir önceki denklemi çıkaralım.

$$\begin{array}{rl} R_n q = & rq + rq^2 + \ldots\ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1} + rq^n \\ -R_n = & r - rq - \ldots\ldots - rq^{n-3} - rq^{n-2} - rq^{n-1} \\ \hline R_n q - R_n = & rq^n - r \end{array}$$

elde edilmiş olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$R_n(q-1) = r(q^n-1)$$

$$R_n = \frac{r(q^n-1)}{q-1} \text{ veya } R_n = rs_n \text{ konur.}$$

elde etmiş olduğumuz formülü aynı probleme uygulayalım.

$$R_n = \frac{1000(1{,}04^5-1)}{1{,}04-1}$$

$$\log R_n = \log 1000 + \log(1{,}04^5-1) - \log 0{,}04$$

$$\log 1000 = 3{,}\text{———}$$
$$\log(1{,}04^5-1) = 1{,}33568$$
$$-\log 0{,}04 = \overline{1{,}39794}$$
$$\log R_n = 3{,}73362$$
$$R_n = 5.415{,}25$$

Demek oluyor ki; problemdeki verilere göre bankada birikecek olan tutar 5.415,25 Türk Lirasıdır.

c) Tablo vasıtasiyle:

Bu gibi problemlerin çözümü I No. lu tablodan yararlanarak yapılır.

$$R_n = r\frac{q^n-1}{q-1}$$

$$\frac{0{,}21665}{0{,}04} \times 1000 = 5.416{,}25 \text{ TL.}$$

Rant Taksitinin Tutarının Hesaplanması :

Formül aracılığı ile;

$$R_n = r\frac{r(q^n-1)}{q-1}$$

$$R_n(q-1) = r(q^n-1)$$

$$r = \frac{R_n(q-1)}{q^n-1}$$

Örnek :

% 4,5 faiz fiatı ile 15 yılda 5.196 Lira biriktirebilmek için her yıl sonunda kaç lira yatırmak gerekir?

$$r = \frac{5.196\ (0{,}045)}{(1{,}045)^{15} - 1}$$

$$\log r = \log 5.196 + \log 0{,}045 - \log (1{,}045^{15} - 1)$$

$$\log 5.196 = 3{,}71567$$

$$+ \log 0{,}045 = \bar{2}{,}65321$$

$$- \log (1{,}045^{15} - 1) = 0{,}02906$$

$$\log r = 2{,}39794$$

$$r = 250.—\ \text{TL.}$$

Tablo I yardımıyla çözüm :

$$\frac{1{,}93528 - 1}{0{,}045} = 20{,}7840$$

$$r = \frac{5{,}196}{20{,}7840} = 250$$

$$r = 250 \quad \text{TL.}$$

Rant Taksitlerinin Adedinin Hesaplanması :

Rant formülünden n için istenen formülü şöyle çıkarabiliriz :

$$R_n = \frac{r\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$R_n = (q - 1) = r\,(q^n - 1)$$

$$q^n = \frac{R_n\,(q - 1) + r}{r}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$n \log q = \log \frac{R_n (q-1) + r}{r}$$

$$n = \frac{1}{\log q} \cdot \log \frac{R_n (q-1) + r}{r}$$

Örneğin :

Bir işletme her yıl sonunda bir bankaya % 4 faiz fiatı üzerinden 4.000 TL. yatırmaktadır. Adı geçen işletme biriktirdiği tutarın 21.661.— TL. olduğunu gördüğünde acaba ne kadar bir süre geçmiş olacaktır?

$$n = \frac{1}{\log 1{,}04} \log \frac{21{,}661\,(0{,}04) + 4.000}{4.000}$$

$$= \frac{1}{\log 1{,}04} \log 1{,}216 = \frac{1}{0{,}01703} \cdot 0{,}08493 = 4{,}992$$

n = 4 yıl, 11 ay, 27 gün

Faiz Fiatının Bulunması :

$$R_n = \frac{r\,(q^n - 1)}{q-1}$$

$$\frac{R_n}{r} = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

q ya eşit bir formülün bulunmasının imkânsız olduğu görülmektedir. şu halde eşitliğin ikinci tarafına çeşitli faiz fiatlarının uygulanması suretiyle $\frac{R_n}{r}$ ye eşit bir değer elde etmeğe çalışmak gerekmektedir.

Örnek :

15 yıl süreyle her yıl sonunda yatırılan 200 Liranın 4.269,70 Liraya baliğ olabilmesi için faiz fiatı ne olmalıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{R_n}{r} + \frac{4.269.70}{200} = 21,3485$$

p = % 4 olsun.

$$\frac{(1,04)^{15}-1}{1.04-1} = 20.0235$$

olduğuna göre aranılan faiz fiatı % 4 den büyüktür.

p = % 5 olsun.

$$\frac{(1,05)^{15}-1}{1,05-1} = 21,5785$$

olduğuna göre gerçek faiz fiatı % 4 ile % 5 arasında bulunmaktadır.

Kapital	Yüzde
20,0235	0,04
21,3485	?
21,5785	0,05

Kapital farkları 1,555 ve 1,325, yüzdeler farkı 0,01. Şöyle bir orantı kurabiliriz :

1,555 — 0,01.
1,325 — x

$$x = \frac{1,325 \times 0,01}{1,555} = 0,0085$$

p = 0,04 + 0,0085
p = 0,0485
p = % 4,85

Rantların Bugünkü Değerinin Hesaplanması :

Belirli bir süre esnasında aralarındaki ara daima aynı kalmak koşuluyla —bir devre başında veya sonunda— eşit veya matematik bir kuralla artan veya azalan taksitlerin iskonto edilmiş toplamına rantların bugünkü değeri denilmektedir.

1 — Rantların bugünkü değerlerinin hesaplanması :

Örnek :

Bir işletme yaşlanmış bulunan bir memuruna 5 yıl süreyle ve her yıl sonunda 1.200 Lira ödemeği taahhüt etmek şartiyle işine son vermiş bulunmaktadır. Fakat adı geçen kimse eline toplu bir miktar para geçmesini istediğinden adı geçen süre esnasında alacağı tutarlara karşılık bir defaya mahsus olmak üzere bir tazminat talep etmektedir. Yıllık faiz fiatı % 6 olduğuna göre adı geçen emeklinin eline bir defalık toplu olarak geçecek olan tutar ne olacaktır?

Bu tür hesaplara rantların bugünkü değeri denir ve R_0 harfi ile ifade edilir.

a) Basit çözüm usulü :

Her elde edilecek rant taksitinin ayrı ayrı iskonto edilmesi suretiyle.

İlk elde edilecek 1.200 Liralık rant taksitinin 1 yıl süreyle % 6 bileşik iskonto fiatı üzerinden bugünkü değerinin hesaplanması.

İkinci olarak elde edilecek 1.200 Liralık rant taksitinin 2 yıl süreyle % 6 bileşik iskonto fiatı üzerinden bugünkü değerinin hesaplanması.

Üçüncü olarak elde edilecek 1.200 Liralık rant taksitinin 3 yıl süreyle % 6 bileşik iskonto fiatı üzerinden bugünkü değerinin hesaplanması,

Dördüncü olarak elde edilecek 1.200 Liralık rant taksitinin 4 yıl süreyle % 6 bileşik iskonto fiatı üzerinden bugünkü değerinin hesaplanması,

Beşinci olarak elde edilecek 1.200 Liralık rant taksitinin 5 yıl süreyle % 6 bileşik iskonto fiatı üzerinden bugünkü değerinin hesaplanması gerekir.

Şöyle ki,

$$\frac{1,200}{1,06} = 1.132,05 \text{ TL}$$

$$\frac{1,200}{1,06^2} = 1.067,99 \text{ TL}$$

$$\frac{1,200}{1.06^3} = 1.007,54 \text{ TL.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{1,200}{1,06^4} = 950,51 \text{ TL.}$$

$$\frac{1,200}{1,06^5} = 896,70 \text{ TL.}$$

$$5,065,79 \quad \text{Rantların bugünki değeri}$$

b) Formül düzenlemesi ile :

Yukarıda ele almış olduğumuz örnekte ilk elde edilecek rant taksitinin bugünkü değeri aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$\frac{r}{q}$$

İkinci olarak elde edilecek rant taksitinin bugünki değeri aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$\frac{r}{q^2}$$

Üçüncü olarak elde edilecek rant taksitinin bugünkü değeri aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$\frac{r}{q^3}$$

Dördüncü olarak elde edilecek rant taksitinin bugünkü değeri aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$\frac{r}{q^4}$$

Beşinci olarak elde edilecek rant taksitinin bugünki değeri aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$\frac{r}{q^5}$$

Şu halde «n» inci yıla ait rant taksitinin bugünkü değeri de aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanacaktır.

$$\frac{r}{q^n}$$

Bundan dolayı, yukarıdaki değerleri toplayacak ve bu toplama «R_o» diyecek olursak aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

$$R_o = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \ldots\ldots + \frac{r}{q^n}$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafın «q» ile çarpalım.

$$R_o\, q = r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{r}{q^{n-1}}$$

Elde etmiş olduğumuz bu denklemden bir önceki denklemi çıkaralım

$$R_o\, q = r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{r}{q^{n-1}}$$

$$-R_o = -\frac{r}{q} - \frac{r}{q^2} - \frac{r}{q^3} - \ldots\ldots - \frac{r}{q^n}$$

$$R_o\, q - R_o = r - \frac{r}{q^n}$$

elde edilmiş olur.

$$R_o\,(q-1) = \frac{rq^n - r}{q^n}$$

$$\boxed{R_o = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q-1)}} \quad \text{veya}$$

$$R_o = \frac{R_n}{q^n} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = r a_n \; ; \; a_n = \frac{1}{q^n}\,\frac{q^n-1}{q-1}$$

yazarız.

Elde etmiş olduğumuz formülü aynı örneğe uygulayalım.

$$R_o = \frac{1200\,(1{,}06)^5 - 1}{1{,}06^5 \times 0{,}06}$$

$$\log R_o = \log 1200 + \log (1{,}06^5 - 1) - \log 1{,}06^5 - \log 0{,}06$$

$$\log 1200 = 3{,}07918$$

$$+ \log (1{,}06^5 - 1) = \bar{1}{,}52927$$

$$- \log 1{,}06^5 = \bar{1}{,}87345$$

$$- \log 0{,}06 = 1{,}22185$$

$$\log R_o = 3{,}70375$$

$$R_o = 5.055{,}35$$

Tablo vasıtasıyla çözüm;

Tablo IV in % 6 faizli sütununda 5. yıla karşılık gelen rakamı (4, 2136 yı) 1.200 ile çarparız.

$$4.2136 \times 1.200 = 5.054{,}83.\text{— TL.}$$

Rant Taksit Tutarının Hesaplanması :

Formül aracılığiyle;

$$R_o = \frac{r\,(q^n - 1)}{q^n\,(q - 1)}$$

$$r = \frac{R_o q^n\,(q - 1)}{q^n - 1}$$

Örnek :

% 6 faiz fiatı üzerinden bir bankaya yatırılmış olan 73.600,87 TL. nın sıfır oluncaya kadar 10 yıl süre ile ve her yılın sonunda çekilecek rant taksitlerinin tutarı nedir?

$$r = \frac{73.600{,}87 \times 1{,}06^{10} \times 0{,}06}{1{,}06^{10} - 1}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\log r = \log 73.600,87 + 10 \log 1,06 + \log 0,06 - \log (1,06^{10} - 1)$$

$$\begin{aligned} \log 73.600,87 &= 4,86693 \\ +\ 10 \log 1,06 &= 0,25310 \\ +\ \log 0,06 &= \bar{2},77815 \\ -\log (1,06^{10} - 1) &= 0,10182 \\ &= 4,00000 \end{aligned}$$

$$r = 10.000,— \text{ TL.}$$

IV. Tablo ile çözüm :

7,360,099 Tablo IV. ten bulunan sayı

$$r = \frac{73.600,87}{7,360,099} = 10.000,— \text{ TL.}$$

Rant Taksitlerinin Adedinin Hesaplanması:

Formül ile;

$$R_o = r \cdot \frac{q^1 - 1}{q^n (q - 1)}$$

$$q^n = \frac{r}{r - R_o (q - 1)} \text{ olduğuna göre,}$$

$$n \log q = \left\{ \log \frac{r}{r - R_o (q - 1)} \right\}$$

$$\boxed{n = \frac{1}{\log q} \cdot \log \left\{ \frac{r}{r - R_o (q - 1)} \right\}}$$

Örnek :

Bir anonim şirketin bankasında 600.205,47 TL. lık bir alacağı vardır. Banka yılda % 4 faiz vermektedir. Anonim şirket ise her yılın sonunda bankadan 100.000 TL. çekecek olursa, bu işlemi kaç kez tekrar edebilir

$$n = \frac{1}{\log 1{,}04} \times \log \frac{100.000}{100.000 - 600205{,}47 \times 0{,}04}$$

$$= \frac{1}{0{,}01703} \times 0{,}11923 = \frac{0{,}11923}{0{,}1703} = 7$$

Demek oluyor ki, anonim şirket bankasından 7 kez her yıl sonunda 100.000 er lira çekebilir.

Tablo IV yardımıyla;

$$\frac{600205{,}47}{100.000} = 6{,}00205$$

Yukarıda elde edilen rakama ait dönem adedi ise tabloda 7 dir.

Devre Başında Ödenen Rantlar :

Belirli bir devam süresi esnasında rant taksitleri her devrenin başında ödendiği taktirde bunlara devre başında ödenen rantlar denir.

Devre başında ödenen rantların nihaî kıymetinin bulunması :

a) Basit hesap metodunun uygulanması :

Örnek :

Bir kimse 5 yıl süreyle her yıl başında bankaya 100 Lira yatırmıştır. Faiz fiatı % 5 olduğuna göre 5 yılın sonunda rantların nihaî kıymeti nedir.

İlk yatırılan 100 T. Liralık rant taksitinin 5 yıl süre ile % 5 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî kıymetinin hesaplanması,

İkincisi olarak yatırılan 100 T. Liralık rant taksitinin 4 yıl süre ile % 5 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî kıymetinin hesaplanması,

Üçüncüsü olarak yatırılan 100 T. Liralık rant taksitinin 3 yıl süre ile % 5 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî kıymetinin hesaplanması,

Dördüncü olarak yatırılan 100 T. Liralık rant taksitinin 2 yıl süre ile % 5 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî kıymetinin hesaplanması,

Beşinci olarak yatırılan 100 T. Liralık rant taksitinin 1 yıl süre ile % 5 bileşik faiz fiatı üzerinden nihaî kıymetinin hesaplanması gerekir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şöyle ki;

127.63
121.55
115.76
110.25
105.00

580.19

b) Formülün çıkarılması :

Almış olduğumuz örnekte ilk yatırılan rant taksitinin nihaî kıymeti aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$rq^n$$

İkinci olarak yatırılan rant taksitinin nihaî kıymeti ise aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$rq^{n-1}$$

Üçüncü olarak yatırılan rant taksitinin nihaî kıymeti ise aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$rq^{n-2}$$

Dördüncü olarak yatırılan rant taksitinin nihaî kıymeti ise aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$rq^{n-3}$$

Beşinci olarak yatırılan rant taksitinin nihaî kıymeti ise aşağıda görüldüğü şekilde hesaplanmış bulunmaktadır.

$$rq^{n-4}$$

Şu halde hesaplanan kıymetleri ters olarak sıralamak suretiyle toplayacak ve bu toplamı "R'_n" diyecek olursak aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

$$R'_n = rq + \ldots + rq^{n-3} + rq^{n-2} + rq^{n-1} + rq^n$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını «q» ile çarpalım.

$$R'_n q = rq^2 + \ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1} + rq^n + rq^{n+1}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Elde etmiş olduğumuz denklemlerden bir önceki denklemi çıkaralım.

$$R'_n q = rq^2 + \ldots + rq^{n-2} + rq^{n-1} + rq^n + rq^{n+1}$$
$$-R'_n = -rq - \ldots - rq^{n-3} - rq^{n-2} - rq^{n-1} - rq^n$$
$$R'_n q - R'_n = rq^{n+1} - rq$$

elde edilmiş olur.

$$R'_n (q-1) = rq (q^n - 1) \qquad \boxed{R'_n = \frac{rq\,(q^n - 1)}{q-1}}$$

veya

$$R'_n = R_n \cdot q = rqs_n = rq\,\frac{q^n-1}{q-1} = rs'_n\,;\; s'_n = s_n q = q\,\frac{q^n-1}{q-1}$$

Örneğimizi formüle uyguladığımızda;

$$R'_n = 100 \times 1{,}05 \times \frac{1{,}05^5 - 1}{1{,}05 - 1}$$

$$\log R_n' = \log 100 + \log 1{,}05 + \log (1{,}05^5 - 1) - \log 0{,}05$$

$$\begin{aligned} \log\ 100 &= 2{,}\text{——} \\ \log\ 1{,}05 &= 0{,}02119 \\ \log\ (1{,}05^5 - 1) &= 1{,}44135 \\ -\log\ 0{,}05 \ \text{colog} &= 1{,}30103 \\ \log\ R'_n &= 2{,}76357 \\ R'_n &= 580{,}20 \end{aligned}$$

Rantın Nihai Kıymetinin Tablo Vasıtasıyla Bulunması :

Elde ettiğimiz sonucu, çeşitli faiz fiatlarına göre her devre yatırılmakta olan 1 Liranın çeşitli dönemler sonlarındaki kıymeti,

R'_n = r.tablodaki rakam.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örneğimizdeki rakamları dikkate alırsak, III tabloda % 5 faiz sütununda ve 5. dönem sütunundaki yazılı rakam 5,80191 dir. Bu rakam her yıl başında yatırılan 1 Liralık rantların 5 yıl süreyle ve % 5 faiz fiatı ile hesaplanan nihaî kıymetinden başka bir şey değildir. Örneğimizde, taksitlerin tutarı 100 Lira olduğundan, elde ettiğimiz rakamı 100 ile çarpmak gerekir.

Buna göre rantların nihaî kıymeti $100 \times 5{,}80191 = 580{,}20$ TL.

Rant Taksitlerinin Hesaplanması : Devre başında ödenen taksitler

Rant taksitinin rant nihaî kıymet formülünden elde edilmesi:

$$R'_n = r \cdot q \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

$$r = \frac{R'_n (q-1)}{q (q^n - 1)} \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek :

Bir işletme 5 yıl sonra yeni bir bina inşa edebilmek için, 50.000 Lira toplamak mecburiyetindedir. Bu tutarı toplayabilmek için % 5 faiz fiatı üzerinden her yıl başında bir tarafa ayırması gereken tutar ne kadardır?

$$r = \frac{50.000 \times 0{,}05}{1{,}05\,(1{,}05^5 - 1)}$$

$$\log r = \log 50.000 + \log 0{,}05 - \log 1{,}05 - \log (1{,}05^5 - 1)$$

log 50.000	= 4,69897
log 0,05	= 2,69897
−log 1,05 colog	= 1,97881
−log (1,05⁵−1) colog	= 0,55864
	3,93539

$\log r = 3{,}93539$

$r = 8.617.70$ TL. olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu durumda örneğimizde her yıl başında 8.617,60 Liralık bir taksitin bankaya yatırılması gerekiyor.

Aynı problem tablo vasıtasıyla da çözümlenebilir.

III. tablodaki % 5 faiz fiatına 5. ci döneme isabet eden rakam ile, R'_n yani rantların nihaî kıymetini taksim edersek r, yani rant taksitini buluruz.

Örneğimizde 50.000 i tabloda elde ettiğimiz 5,80191 e bölerek 8.617,80 TL. elde etmiş oluruz.

Rant Taksitleri Adedinin Hesaplanması : Devre başında ödenen taksitler

Rant taksitleri adedinin rantların nihaî kıymet formülünden elde edilmesi.

$$R'_n = r \cdot q \frac{(q^n - 1)}{(q - 1)}$$

formülünden n i elde edebilmek için, formülün iki tarafının logaritmalarının alınması gerekir.

$$q^n = \frac{R'_n (q-1)}{r \cdot q} + 1 \quad \text{olduğuna göre,}$$

$$n \cdot \log q = \log \left\{ \frac{R'_n (q-1)}{r \cdot q} + 1 \right\}$$

Buna göre;

$$n = \frac{\log \left\{ \frac{R'_n (q-1)}{rq} + 1 \right\}}{\log q}$$

ve nihayet,

$$n = \frac{1}{\log q} \cdot \log \left\{ \frac{R'_n (q-1) + rq}{rq} \right\}$$

formülü bulunur.

Örnek :

Bir şahıs her yıl başında bankaya 7.155,83 TL. yatırmıştır. Banka yatırılan taksitlere % 6 faiz hesaplamış ev belirli bir süre sonunda bankadaki toplanan para 100.000 T. Liraya varmıştır. Acaba adı geçen şahıs kaç yıl süreyle bankaya para yatırmış bulunmaktadır?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$n = \frac{1}{\log q} \cdot \log \left\{ \frac{R'_n (q-1) + rq}{rq} \right\}$$

$$n = \frac{1}{\log 1{,}06} \cdot \log \left\{ \frac{100.000 \times (0{,}06) + 7.155{,}83 \times (1{,}06)}{7.155.83 \times 1{,}06} \right\}$$

$$n = \frac{1}{\log 1{,}06} \cdot \log 1{,}79102 = \frac{1}{0{,}02530} \cdot 0{,}25310 = 10$$

$n = 10$ yıldır.

Devre Başında Ödenen Rantların Bugünkü Değerlerinin Hesaplanması

Rantların bugünkü değeri muhtelif taksitlerin iskonto edilmiş kıymetlerinin toplamına eşit demektir.

Sonuca varabilmek için her taksitin ayrı ayrı iskonto edilmesi gerekir.

Şöyle ki,

Her rant taksitinin r olduğunu kabul edersek;

Dönem	Ait olduğu rant taksitinin iskonto kıymeti
1	r
2	$\frac{r}{q}$
3	$\frac{r}{q^2}$
n−1	$\frac{r}{q^{n-2}}$
n	$\frac{r}{q^{n-1}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şu halde dönem başında ödenen bütün rantların taksitlerinin halihazır kıymeti,

$$R'_0 = r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{r}{q^{n-2}} + \frac{r}{q^{n-1}}$$

Bu denklemin her iki yanını q ile çarparsak ve elde ettiğimiz denklemlerden birinci denklemi çıkarırsak;

$$R'_0 q = rq + r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{r}{q^{n-3}} + \frac{r}{q^{n-2}}$$

$$-R'_0 = -r - \frac{r}{q} - \frac{r}{q^2} - \ldots - \frac{r}{q^{n-3}} - \frac{r}{q^{n-2}} - \frac{r}{q^{n-1}}$$

$$R'_0 q - R'_0 = rq - \frac{r}{q^{n-1}}$$

$$R'_0 (q-1) = \frac{rq \cdot q^n - rq}{q^n}$$

nihayet bu formül elde edilir.

$$\boxed{R'_0 = \frac{rq\,(q^n-1)}{q^n\,(q-1)}}$$

Örnek :

Bir kollektif şirketin ortaklarından biri herhangi bir nedenden ötürü şirketten ayrılmıştır. Bu ayrılan ortak 4 yıl olmak üzere her yıl başında 10.000 Liralık bir rant elde etmektedir. Ortak bu rantlara karşılık bir defaya mahsus olmak üzere tazminat almak istediği takdirde, şirketten alacağı tazminatın halihazır kıymeti % 5 iskonto fiatı üzerinden ne kadar tutar?

$$R'_0 = \frac{10.000 \times 1{,}05 \times (1{,}05^4 - 1)}{1{,}05^4 \times 0{,}05}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\log R'_{\circ} = \log 10.000 + \log 1{,}05 + \log (1{,}05^4 - 1) - 4 \times \log 1{,}05 - \log 0{,}05$$

log 10.000	=	4,———
+log 1,05	=	0,02119
+log $(1{,}05^4-1)$	=	$\bar{1}$,33347
−4 log 1,05 colog	=	$\bar{1}$,91523
−log 0,05 colog	=	1,30102
		4,57091

$$\log R'_{\circ} = 4{,}57091$$

$R'_{\circ}$ = 37.233,33 TL. verilecek tazminat tutarı.

Elde ettiğimiz sonucu tetkik edebilmek için 4 sene müddetle her sene başında bankaya yatırılan tutardan 10 ar bin liralık rantın düşürüldüğünü farzedelim.

Aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi, tazminat olarak aldığı tutar yerine ayrılan ortağın 4 kez, her yıl başında 10.000 Liralık bir rant alması kâfidir.

Yıl	Yıl başında mevcut olan tutar	Yıl başında alınan rant taksiti	Yıllık faiz tutarı	Yıl sonunda mevcut olan tutar
1	37.223,33	10.000	1.361,67	28.595,—
2	28.595,—	10.000	9299,75	19.524,75
3	19.524,75	10.000	476,25	10.000,—
4	10.000,—	10.000	——	—

Rant taksitinin, rantların halihazır kıymet formülünden elde edilmesi

$$R'_{\circ} = rq\,\frac{(q^n - 1)}{q^n (q-1)} \quad \text{formülünden,}$$

$$r = \frac{R'_{\circ}\, q^n (q-1)}{q\,(q^n - 1)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek :

Bir işletmenin 1.1.1969 tarihinde bankasındaki cari hesabında 810,78 Liralık bir alacak artığı bulunmaktadır. İşletme bu tutarı eskiden işletmesinde çalışan bir müstahdeme 10 yıl süre ile her yıl başında bir rant olarak vermek istemektedir.

Bankasında bu paraya % 5 faiz yürüterek ödediğini kabul edersek, acaba bu müstahdemin eline her yıl başında ne kadar bir para geçecektir?

$$r = \frac{810{,}78 \times 1{,}05^{10} \times 0{,}05}{1{,}05 \times (1{,}05^{10}-1)}$$

$$\log R = \log 810{,}78 + 10 \log 1{,}05 + \log 0{,}05 - \log 1{,}05 - \log (1{,}05^{10}-1)$$

$$\begin{aligned}
&\log 810{,}78 && = 2{,}90890\\
&10 \log 1{,}05 && = 0{,}21190\\
+\ &\log 0{,}05 && = 2{,}69897\\
-\ &\log 1{,}05 \ \text{colog} && = 1{,}97881\\
-\ &\log (1{,}05^{10}-1) \ \text{colog} && = 0{,}20143\\
& && \overline{\quad 2{,}00001}
\end{aligned}$$

$$\log r = 2{,}00001$$

$$r = 100$$

Rant taksitlerinin adedinin halihazır kıymet formülünden elde edilmesi.

$$R_0' = \frac{rq\,(q^n-1)}{q\,(q-1)} \quad \text{formülünden,}$$

$$\boxed{n = \frac{1}{\log q} \cdot \log \frac{rq}{rq - R_0'\,(q-1)}}$$

formülü bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek :

Bir işletmenin bankasında 454.60 TL. sı mevcuttur. Banka % 5 faiz vermektedir. İşletme bu parayı her yıl başında 100 Liralık taksitlerle hayır cemiyetlerine yardım maksadıyla tediye edecektir. Acaba işletme bu yardımı kaç kez tekrarlayacaktır?

$$n = \frac{1}{\log 1{,}05} \times \log \frac{100 \times 1{,}05}{100 \times 1{,}05 - 454.60 \times 0{,}05}$$

$$= \frac{1}{0{,}02119} \times 0{,}10595$$

$$= 0{,}10595 \div 0{,}02110 = 5$$

Demek oluyor ki, işletme bu yardımı 5 kez tekrar edebilir.

GECİKTİRİLMİŞ RANTLAR

Genel Bilgi

Bazen rantların ödenmesi bir süre için ertelenir. Örneğin, kendini sigorta ettiren bir şahsın, sigorta primlerini yaptığı anlaşmaya göre bir kaç yıl sonra ödemeğe başlaması gibi.

Şu halde ödenmesi belirli bir süre için ertelenmiş olan rantlara geciktirilmiş rantlar adı verilir.

Geciktirilmiş rantlarda nihaî kıymet, tıpkı muvakkat rantlarda olduğu gibi hesaplanır. Buna karşılık bugünkü değerin hesaplanması ise bazı değişikliklerin yapılmasını gerektirir. Biz burada yalnız devre sonlarında ödenen müeccel rantların bugünkü değerlerinin ve onunla ilgili diğer problemlerin nasıl yapıldığını göreceğiz.

Devre sonlarında ödenen geciktirilmiş rantların bugünkü değeri:

Bir rantın «n» devre devam edeceğini ve «m» devre içinde de müeccel bulunduğunu kabul edelim. Şu halde rantın devam süresi $n + m$ devre olmuş olur. Bu durum karşısında iki işlemin uygulanması gerekir.

Önce erteleme süresini dikkate almadan «n» sürelik rantın bugünkü değerini hesaplamak, sonra elde edilen sonucu, m devre için herhangi bir iskonto fiatı üzerinden, iskontoya tabi tutmak gerekir.

$$R_0 = \frac{\dfrac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)}}{q^m}$$

$$R_0 = \frac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)} \div \frac{q^m}{1}$$

$$R_0 = \frac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)} \times \frac{1}{q^m}$$

$$\boxed{R_0 = \frac{r(q^n-1)}{q^{n+m}(q-1)}}$$

Örnek :

8 yıl süre ile her yıl sonunda ödenen ve baştan 4 yıl geçiktirilmiş bulunan 400,— TL. lık bir rantın % 5 faiz fiatı üzerinden bugünkü değeri ne kadardır?

$$R_0 = \frac{400\,(1{,}05^8-1)}{1{,}05^{8+4} \times 0{,}05}$$

$$\log R_0 = \log 400 + \log (1{,}05^8-1) - 12 \log 1{,}05 - \log 0{,}04$$

log 400	= 2,60206
+log $(1{,}05^8-1)$	= $\bar{1}$,67834
−log 12 (1,05) colog	= $\bar{1}$,74572
−log (0,05) colog	= 1,30103
log R_0	= 3,32715
R_0	= 2.124.00 TL.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Rant taksitinin tutarının hesaplanması :

$$R_0 = \frac{r(q^n-1)}{q^{n+m}(q-1)}$$

$$r = \frac{R_0 q^{n+m}(q-1)}{q^n-1}$$

Örnek :

Bir şahıs bankaya 2.124,— TL. yatırmıştır. Adı geçen şahıs bu paradan 4 yıl süre ile hiç bir şey çekmiyor. Dört yıl sonra ise sekiz yıl süre ile her yıl sonunda bir miktar para çekmeyi düşünmektedir. Banka mevduata % 5 faiz ödediğine göre her yılın sonunda bu şahsın bankadan çekebileceği tutar ne kadar olacaktır?

$$r = \frac{2.124.00 \times 1.05^{8+4} \times 0,05}{(1,05^8 - 1)}$$

$$\log r = \log 2.124.00 + 12 \log 1,05 + \log 0,05 - \log (1,05^8-1)$$

log 2.124.00	= 3,32715
+12 log 1,05	= 0.25428
+log 0,05	= 2,69897
−log (1,05⁸−1) colog	= 0,32166
	2,60206

$$\log r = 2,60206$$

$$r = 400$$

Rant Taksitlerinin Adedinin Hesaplanması :

$$R_0 = \frac{r(q^n-1)}{q^{n+m}(q-1)}$$

$$n = \frac{\log r - \log [r - r_0 q^m (q-1)]}{\log q}$$

Örnek :

Bir şahıs bir bankaya % 5 faiz fiatı üzerinden 2,124.— TL. yatırmıştır. Adı geçen şahıs bu paradan 4 yıl süre ile hiç bir şey çekmeyecektir. Ondan sonra ise her yıl sonunda 400 TL. çekmek istemektedir. Bu koşullar altında bu şahıs, bu işlemi kaç kez tekrarlıyabilir?

$$n = \frac{\log 400 - \log (400 - 2.124 \times 1{,}05^4 \times 0{,}05)}{\log 1{,}05}$$

$$\begin{aligned} &\log\ 2.124{,}— && = 3{,}32715 \\ +\ &4\ \log\ 1{,}05 && = 0{,}08476 \\ +\ &\log\ 0{,}05 && = 2{,}69897 \\ & && \overline{\quad\quad} \\ & && 2{,}11088 \Longrightarrow 129{,}10 \end{aligned}$$

$$400 - 129{,}10 = 270{,}90$$

$$n = \frac{\log 400 - \log 270{,}90}{\log 1{,}05}$$

$$\begin{aligned} &\log\ 400 && = 2{,}60206 \\ -&\log\ 270{,}90\ \text{colog} && = 3{,}56735 \\ & && \overline{\quad\quad} \\ & && 0{,}16941 \end{aligned}$$

$$\log 1{,}05 = 0{,}02119$$

Şu hade $n = \frac{0{,}16941}{0{,}02119} = 8$

Rantın Tescil Edildiği Sürenin Hesaplanması :

$$R_0 = \frac{r(q^n - 1)}{q^{n+m}(q-1)}$$

$$m = \frac{\log r + \log (q^n - 1) - [n \log q + \log R_0 + \log (q-1)]}{\log q}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek :

Bir şahıs bir bankaya % 5 faiz fiatı üzerinden 2.124,00 TL. yatırmıştır. Ve belirli bir süre sonra, on yıl sonunda 400 er TL. çekmek isteyecektir. Banka rant taksitlerinin ödenmesine kaç yıl sonra başlayacaktır?

$$m = \frac{\log 400 + \log (1{,}05^8 - 1) - 8 \log 1{,}05 + \log 2{,}14 + \log 0{,}05}{\log 1{,}05}$$

$$m = \frac{0{,}08476}{0{,}02119} = 4$$

Daimi Rantlar

İlk taksidi belirli bir tarihte ödenmeye başlayıp her devre sonunda veya başında sonsuza kadar devam eden ödemeli rantlara daimi rant adı verilir.

Daimi rantlarda taksitlerin adedi sonsuz olduğundan, bu rantların fiilen bugünkü değerlerini hesaplamak mümkün olmaz. Yalnız yapılacak hesaplarla ancak bugünkü değerin taksit tutarları ve faiz fiatı bulunabilir.

Daimi rantların bugünkü değerinin hesaplanması :

a) Rant taksitleri devre başında ödendiği takdirde.

Devre adedi belirli olan rantlara ait bugünkü değer formülünden hareket ederiz.

$$R'_0 = \frac{rq\,(q^n - 1)}{q^n\,(q-1)}$$

Bu formül aşağıda görüldüğü şekilde yazılır.

$$R'_0 = \frac{rq \cdot q^n}{q^n\,(q-1)} - \frac{rq}{q^n\,(q-1)}$$

$$R'_0 = \frac{rq}{q-1} - \frac{rq}{q^n\,(q-1)}$$

Daimi rantlarda taksitlerin adedi sonsuz olur. Bundan ötürü yukarıdaki eşitlik şu şekilde yazılabilir :

$$R_0' = \frac{rq}{(q-1)} - \frac{rq}{q^{\infty}(q-1)}$$

Yukarıdaki eşitlikte «n» sonsuz olunca, bir rakam sonsuz ile çarpılınca sonsuz olur kaidesine göre eşitlikte q yerine ∞ yazılır.

Şöyle ki;

$$\frac{rq}{q-1} - \frac{rq}{\infty(q-1)}$$

Bir rakam sonsuzla çarpılınca o rakam sonsuz (∞) olur.

Şöyle ki;

$$\frac{rq}{q-1} - \frac{rq}{\infty}$$

Bir rakam (∞) ile bölününce sıfır olur. Bundan ötürü formülümüzdeki ikinci kısmın kıymeti sıfır olmuş olur, ve formül aşağıdaki şekli alır:

$$R'_0 = \frac{rq}{q-1}$$

Örnek :

Bir işletme bir vakıftan her yılbaşı 1.000 lira elde etmektedir. Bu tutara karşılık bir defaya mahsus (% 4 faiz fiatı üzerinden) tazminat tutarı nedir?

$$R'_0 = \frac{1000 \times 1{,}04}{0{,}04} = 26.000 \text{ TL.}$$

Demek oluyor ki, örneğimizde bir defalık tazminat tutarı 26.000 liradır. Sağlama :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Daimi rantların bugünkü değeri	26.000
1. Dönem başından alınan rant	— 1.000
	25.000
1. Döneme ait faiz tutarı	+ 1.000
	26.000
2. Dönem başında alınan rant	— 1.000
	25.000
2. Döneme ait faiz tutarı	+ 1.000
	26.000

Görülüyor ki, rantın kaynağı olan kapital her döneme ait faiz tutarını eklemek suretiyle aynı kalmaktadır.

Faiz Fiatının Hesaplanması :

Rant taksitleri devre başında ödendiği taktirde,

$$R'_o = \frac{rq}{q-1} \quad \text{formülüne göre,}$$

$$q = \frac{R'_o}{R'_o - r}$$

$$p = 100\,\frac{R'_o}{R'_o - r} - 100 \quad \text{olduğundan,}$$

$$p = \frac{100\,R'_o}{R'_o - r} - 100 \text{ formül elde edilir.}$$

Örnek :

Bir daimi rantın taksitleri devre başında 1.000 er lira olarak ödenmekte ve bugünkü değeri de 20.000 lira değerindedir. Faiz fiatı ne kadardır?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$p = \frac{100 \times 26.000}{26.000 - 1000} - 100$$

$$p = \frac{2.600.000}{25.000} - 100$$

$$p = 104 - 100 = 4$$

Demek oluyor ki, kapital % 4 faiz fiatı ile yatırılmıştır.

Rant taksitleri tutarının hesaplanması :

Rant taksitleri devre başında ödendiği taktirde;

$$R'_0 = \frac{rq}{q-1}$$ formülüne göre,

$$r = \frac{R'_0(q-1)}{q}$$ formülünü elde ederiz.

Örnek :

% 4 faiz getiren 26.000 liralık bir kapital her yıl başında ne kadar rant getirir?

$$r = \frac{26.000 \times 0{,}04}{1{,}04} = 1040 \div 1{,}04 = 1000$$

Demek oluyor ki, rant taksiti 1.000 liradır.

Rant taksitleri devre sonunda ödendiği taktirde bugünkü değerin hesaplanması;

Yine devre adedi belirli olan rantlara ait bugünkü değer formülünden hareket ederiz.

$$R_0 = \frac{r(q^n-1)}{q^n(q-1)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu formülü aşağıda görüldüğü şekilde yazabiliriz:

$$R_o = \frac{rq^n}{q^n(q-1)} - \frac{r}{q^n(q-1)}$$

$$= \frac{r}{q-1} - \frac{r}{q^n(q-1)}$$

n sonsuz olduğundan $\frac{r}{q^n(q-1)} = 0$ olur.

Bu suretle;

$$R_o = \frac{r}{(q-1)}$$ bulunur.

Örnek :

Bir işletmenin daimi bir surette % 6 rantabilite oranına karşılık gelen 5.000 liralık bir net kâr elde ettiğini farzedecek olursak, bu işletmenin kapitali ne kadardır?

$$R_o = \frac{5.000}{0,06} = 83.333,33$$

Demek oluyor ki, adı geçen işletmenin kapitali 83.333,33 liradır.

Faiz Fiatının Hesaplanması :

Rant taksitleri devre sonunda ödendiği takdirde;

$$R_o = \frac{r}{q-1}$$ formülüne göre,

$$q \equiv \frac{r + R_o}{R_o}$$

$$q = 1 + \frac{P}{100}$$ olduğundan,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$p = \frac{100\,(r + R_o)}{R_o} - 100$$

formülünü elde ederiz.

Örnek :

83.333,33 liralık bir kapital her yıl sonunda 5.000 liralık bir kâr temin ettiğine göre rantabilite oranı ne kadardır?

$$p = \frac{100\,(5.000 + 83,333,33)}{83,333,33} - 100$$

$$p = 106 - 100 = 6$$

Demek oluyor ki, söz konusu kapitalin rantabilite oranı % 6 dır.

Rant Taksitleri Tutarının Hesaplanması :

Rant taksitleri devre sonunda ödendiği taktirde;

$R_o = \frac{r}{q-1}$ formülüne göre;

$r = R_o\,(q-1)$ formülü elde edilir.

Örnek :

83.333,33 liralık kapitali olan bir işletmenin ranatbilite oranı % 6 olduğuna göre yıllık net kârı ne kadardır?

$$r = 83.333,33\ (1,06-1)$$

$$r = 5.000 \quad TL.$$

Demek oluyor ki, yıllık kâr 5.000 TL. dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İKİNCİ BÖLÜM

İSTİKRAZLAR

Kredi Temini

Bankalar genellikle, sahip oldukları nakdî olanakları iş hayatında kullanmak suretiyle kazanç temin eden birer kredi müesseseleridir. Bu durumda bankaların geliri, mevduat şeklinde toplanan tutarlarla, kendi olanaklarından sağlanan fonların, müşterilere kredi şeklinde dağıtılması suretiyle elde edilen faiz ve komisyonlar olmaktadır. Ancak bu gelirin banka yönünden normal bir gelir sayılabilmesi için, verilmiş olan bu kredinin süresinde normal olarak tahsil edilmiş veya tahsil edilebilecek durumda bulunması gereklidir. Aksi halde, yani kredinin tahsilinde güçlükler doğması veya hiç tahsil edilememesi bankayı zararlı bir duruma sokacaktır. Bu bakımdan, bir kredi muamelesinde banka yönünden başta gelen husus, kredinin temin edeceği gelir kadar, belki ondan da fazla, bu kredi konusunu teşkil eden tutarın süresinde tekrar kolaylıkla geri alınabilmesidir, yani kredinin güvenle pâsmanıdır. Kredinin süresinde tahsil edilebilme olanağı kredinin riskini teşkil etmektedir ve her kredi işleminde az veya çok bir risk bahis konusudur.

Bir kredi işleminde hiç şüphesiz asıl sorun, bu riskin derecesinin taktir ve tesbitidir. Bu oldukça güç bir sorun teşkil etmektedir.

Bankalar yaptıkları kredi işlemlerinde bu riskin derecesini tayin için çeşitli yollardan yararlanmaktadırlar.

1 — Kredinin Riskinin Tayinine Tesir Eden Unsurlar :

Ticarî ve sınaî müesseselerin bünyelerine ve hususiyetlerine göre riskin takdirine tesir eden unsurlar çeşitli olmakla beraber, bunları başlıca dört grupta toplamak mümkündür.

a — Kişisel unsurlar,
b — Teknik unsurlar,
c — İktisadî unsurlar,
d — Malî unsurlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Riskin takdiri için bu unsurlar üzerinde ayrı ayrı durularak değerlemeler yapmak ve sonunda bütün bunların sentezi olarak bir karara varmak gereklidir.

a — **Kişisel Unsurlar :**

İşletme idarecilerinin moral nitelikleri, sevk ve idare kapasiteleri ve taahhütlerine bağlılıkları, kredi riskinin kısaca kişisel unsurlarını teşkil etmektedir.

b — **Teknik Unsurlar :**

İşletmenin kuruluş yeri, kapasitesi, teknik nitelikleri üretim türleri, maliyetleri ve işin rantabiltesi bu grupta incelenebilen hususlardır. Bilhassa, sınaî müesseselerin kuruluş ve genişletmede talep edecekleri tesis ve işletme kredilerinde riskin taktiri sırasında bu teknik unsurların incelenmesi önem taşır.

c — **İktisadi Unsurlar :**

Üretilen malın piyasa şartları, satış hacmi, satış fiatı, genellikle konjonktür, yatırımlarda öncelik, döviz tasarrufları gibi ekonomik şartlarla ilgili konular risk takdirinin iktisadî unsurlarını teşkil eder. Normal olarak, uzun süreli kredilerin kârlarla ödenmesi unsurlarının dikkatli bir tetkike tabi tutulması gereklidir.

d — **Malî Unsurlar :**

İşletmenin bilânço tarihindeki malî gücü, kapital ihtiyacı, verilebilecek kredinin miktar ve koşulları, süresinde kredinin geri alınabilme ihtimalleri sonucu rantabilite gibi doğrudan doğruya finansmanla ilgili konular, kredi riskinin taktirinde malî unsurlar olarak incelenebilir. Bu unsurların tetkiki, kredi talep eden işletmenin malî hesapları denilen bilânçosuna, gelir hesaplarına, bilânço ve gelir hesaplarını teşkil eden hesapların açıklayan bilgisini kapsayan tablolara dayanılarak yapılmaktadır.

Görülüyorki, bir işletmeye verilecek kredinin güvenini temin etmek, kredi riskinin isabetle taktirini yapabilmek için, o işletmeyi teknik, ekonomik ve malî yönlerden ayrı ayrı tetkike tabi tutmak ve işletme idarecilerinin nitelikleri üzerinde durmak gerekmektedir.

Kredi açılmasını veya talebin reddedilmesi tekliflerini kapsayan analizler genellikle teknik ve ekonomik analizlerinde sonuçlarını belirten birer sonuncu inceleme belgeleridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Fakat, mali analizlerin başlıca vasıtaları müessese bilânçoları ve gelir hesapları olmaktadır.

Borç/Öz Sermaye İlişkisi :

Borç (yabancı sermaye) öz sermaye ilişkileri ile ilgili konkret normlar, yalnız bir kaç yazar tarafından ortaya konulmuştur. Ve bunlardan bilhassa, Gerstner başta gelmektedir. Gerstner, yabancı sermaye ile öz sermaye arasındaki bir eşitliğin olmasını ileri sürmektedir.

Ona göre, en sıhhatli finansman, öz sermaye ile yapılanıdır. Bir işletmede, yabancı sermaye miktarı öz sermayeye oranla ne kadar az ise, o işletme daha sağlam ve daha garantilidir.

Antoine ise, yabancı sermayenin, öz sermayeden daha az ve birden küçük olmasını işletme için daha uygun görmektedir.

Bredt ise, sanayi işletmesinde bilânço toplamının öz sermayeye nazaran 1,5 misli olması üzerinde durmaktadır.

Schmaltz'a göre, öz sermayenin yabancı sermayeye oranının 1/1 olması gerekmektedir.

Lohmann'a göre ise, bankalarca yapılan analizler sonucunda öz sermayenin yabancı sermayeye oranı 1/3 olmalıdır.

Lohmann'a göre, eğer bir iş adamı öz sermaye veya yabancı sermayeden birini seçecekse ilk önce maliyet sorusu ile karşılaşır, sonra da bu ilişkilere göre öz sermaye ile yabancı sermaye arasındaki optimal oran, öz sermayenin rantabilitesinin en yüksek olanıdır.

Hax'a göre ise şayet bir müteşebbis yeni yatırımlar için uzun süreli sermaye arıyorsa o zaman öz sermaye ile yabancı sermayenin rantabilitelerini karşılaştıracaktır. İşletmenin kârı, yabancı sermayeye ödenen faizden yüksek ise, o zaman müteşebbisin sermaye ihtiyacının tamamını veya bir kısmını yabancı sermaye ile karşılaşması bir kıymet ifade eder, zira bu durum öz sermayenin de gelirini yükseltmiş olur.

Mellorewicz'e göre ise, kapital tedariki, öz sermayenin rantabilitesinin optimaline dayanmaktadır.

Kolbe'ye göre, bir işletmede, yabancı sermaye öz sermayeye oranla ne kadar az ise o işletmenin finansman durumu daha güvenilidir. Schnettler, Kalveram, Zentne ve Schroder de aynı şeyi ifade etmektedirler.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Mellerowicz, işletmede kredinin itibarı için yeteri kadar öz sermayenin bulunması gerektiği üzerinde durmaktadır, ve bilhassa, küçük ve orta işletmelerin bankalardan kredi talep ettiklerinde öz sermayelerinin % 50 civarında olmasını yeterli addetmektedir.

Anonim şirketlerde «borçtan faydalanma» —Trade on the equity— ve manivela faktörü —Leveraje— de; gerekli sermayenin hisse senedi çıkararak mı yoksa uzun süreli borç alarak mı sağlanacağını belirlemede önemli bir yer alır. İşletmede kullanılan sermaye toplamına düşen kâr oranı ile, uzun süreli borçlara ödenen faiz oranı arasındaki fark «borçtan yararlanma» derecesini belirler.

Her hangi bir bilânçoda borç ve öz sermaye maddelerini toplayıp aralarındaki ilişkiyi iki şekilde karşılaştırmak imkânı mevcuttur.

Bir bilânçodaki borç toplamı (B) ile ve işletme sahipleri tarafından yapılan finansmanı da (S) ile gösterelim. (L) de ikisi arasındaki bağlantıyı ifade etsin. O taktirde bu bağlantı iki şekilde gösterilebilir.

$$1)\quad L = \frac{B}{S}$$

$$2)\quad L = \frac{B}{B + S}$$

(B + S) = Finansman kaynaklar toplamı veya C

Birinci rasyoda (L) = borçlar toplamı bölümü öz sermayeye eşittir.

İkinci rasyoda ise, borçları borç + öz sermayeye bölmektedir.

Borç/öz sermaye rasyosu, ne şekilde hesaplanırsa, hesaplansın «yabancı sermayeye karşılık işletme sahiplerinin işletmeye ne miktar sermaye yatırdıkları sualini cevaplandırabilecek önemli bir ölçü temin eder.»

Bu rasyonun sınaî standartlardan inhiraf etmesi iki tehlikeyi işaret eder. Firma, borçlarının faizini ve ana parayı, zamanında ödeyememek gibi tehlikeli bir duruma girmiştir.

Firmaya kredi verenler bakımından ise tehlike, firmanın başarı ve başarısızlık derecesindeki risklerini işletme sahiplerinden daha fazla bir hale gelmesi ihtimalidir.

Borç Ve Öz Sermaye Hasılatı :

Bir firmanın, alacağı borç paranın sağlayacağı kâr ödeyeceği faizi fazlası ile karşılayabildiği taktirde ancak yabancı sermaye teminine gideceği normal bir husustur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örneğin :

Öz sermaye	10.000	TL.
Yabancı sermaye	5.000	TL.
Bütün kaynaklar top.	15.000	TL.

Firmanın, bütün kaynaklar toplamı üzerinde % 10 bir randıman sağladığını farzedelim ve buna karşılık borçların faizi % 6 olsa, bu taktirde (ödenecek vergi hesaba katılmadan) durum şöyle olacaktır:

	Tutar	% Oranı :
Kaynaklar toplamı üzerinden gelir	1.500	10
Eksi ödenecek faiz	300	6
İşletme sahibinin kârı	1.200	12

% 6 faizli borç almak ve bütün kaynaklar üzerinden % 10 sağlamakla öz sermaye randımanı % 10 dan % 12 ye yükselmiştir.

Bu işletmenin aksi de varit olabilir. Şöyle ki; Toplam kaynaklar üzerinden ranadımanın % 4 e düştüğünü farz edelim :

	Tutar	% Oranı :
Kaynaklar toplamı üzerinden gelir	600	4
Eksi ödenecek faiz	300	6
İşletme sahiplerinin kazancı	300	3

O zaman durum tamamen değişecek ve mevcut borcun tesiri ile öz sermaye randımanı yukarıda gösterildiği şekilde % 3 e düşecektir.

Örnekler dikkatle incelenecek olursa borçlardan doğan tesirlerin de aynı anda karşılıklı faaliyet gösteren dört ayrı değişkene bağlı olduğu görülür.

Bu değişkenlerden birincisi (L) ile ölçülen ve kullanılan borçların öz sermayeye olan oranıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İkincisi, kullanılan borçlar sonucu olarak tahakkuk eden ödenecek faiz tutarıdır. Tabii, ödenecek faiz, alacakların talep ettiği faiz oranına, borç alınan paranın miktarına bağlıdır. Bir firmanın değişik şartlarla borç temin etmiş olması ihtimali her zaman mevcuttur. Ne kadar fazla borç almışsa, ileride alacağı ek borçlar için ödeyeceği faiz oranı da o derece artacaktır. Bir şirket (L) nin belirli bir hududa kadar, örneğin, % 20 ile kredi temin edebilir. Bu hududu aşınca ileriki borçlar için talep edilecek faiz oranı süratle artabilir. Öyle bir an gelir ki hiç kimse alacağı faiz oranı ne olursa olsun o firmaya borç vermek suretiyle parasını tehlikeye sokmak istemez.

Borçların öz sermaye gelirine olan tesiri ile ilgili üçüncü değişken, kullanılan kaynaklar toplamı (C) üzerinden elde edilen gelir oranıdır.

Belirli bir müddet zarfında (C) üzerinden elde edilecek ortalama gelir oranı, sermaye sahiplerinin paralarını o iş dalında bırakmalarını sağlayacak nitelikde olmalıdır. Aksi taktirde şirket, borçlarının faizini, zamanında ödeyememek tehlikesi ile karşılaşabilir.

Dördüncü olarak, şirket gelirinden alınacak vergi oranları ve bu vergilerin hesaplanma biçimleri de önemli rol oynarlar.

Borç/öz sermaye oranı ile ilgili iki tablodan; birincisinde, öz sermaye sabit tutuluyor, yabancı sermaye ise belirli bir miktarda arttırılıyor.

Öz sermaye için azamî rantabiliteyi ancak üçüncü ve dördüncü sütundaki öz sermaye + yabancı sermaye birleşimi verebilmektedir.

İkinci tabloda ise, işletmenin toplam sermayesi sabit tutuluyor, birinci sütunda işletme yalnız öz sermaye ile işe başlıyor, öteki sütunlarda ise azalan öz sermaye yerine yabancı sermaye temin ediliyor. Temin edilen yabancı sermaye miktarı kadar da öz sermaye faize veriliyor. Tabloda görüleceği gibi işletmenin toplam sermayesinin azamî rantabilitesini, ancak dördüncü ve beşinci sütundaki, öz sermaye + yabancı sermaye birleşimi verebilmektedir.

TABLO I

Toplam Kapital	Brüt Kâr %	Tutar	Öz Kapital	Yabancı Kapital	Yabancı Kapital Faizi %	Tutar	Safi Kâr	Öz Kapital Rantabilitesi
100000	20	20000	100000	—	—	—	20000	20,0
150000	20	30000	100000	50000	15	7500	22500	22,5
200000	20	40000	100000	50000	15	7500		
				50000	18	9000	23500	23,5
250000	20	50000	100000	50000	15	7500		
				50000	18	9000		
				50000	20	10000	23500	23,5
300000	20	60000	100000	50000	15	7500		
				50000	18	9000		
				50000	20	10000		
				50000	22	11000	22500	22,5

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

TABLO II

Toplam Kapital	Brüt Kâr %	Tutar	Öz Kapital	Yabancı Kapital	Yabancı Kapital Faiz %	Tutar	İşletme Safi Kârı	Öz Rantabilitesi	İkame Edilen Öz Kapital	İkame Edilen Öz Kapital Faizi %	Tutar	Toplam Kapital Rantabilitesi
100000	20	20000	100000	—	—	—	20000	20,—	—	—	—	20,—
100000	20	20000	90000	10000	15	1500	18500	20,56	10000	21	2100	20,60
100000	20	20000	80000	10000	15	1500						
				10000	18	1800	16700	20,88	20000	21	4200	20,90
100000	20	20000	70000	10000	15	1500						
				10000	18	1800						
				10000	20	2000	14700	21,—	30000	21	6300	21,—
100000	20	20000	60000	10000	15	1500						
				10000	18	1800						
				10000	20	2000						
				10000	21	2100	12600	21,—	40000	21	8400	20,—
100000	20	20000	50000	10000	15	1500						
				10000	18	1800						
				10000	20	2000						
				10000	21	2100						
				10000	22	2200	10400	20,80	50000	21	10500	20,90
100000	20	20000	40000	10000	15	1500						
				10000	18	1800						
				10000	20	2000						
				10000	21	2100						
				10000	22	2200						
				10000	23	2300	8100	20,25	60000	21	12600	20,70

İŞLETME ENSTİTÜSÜ MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Öz ve yabancı kapital ilişkileri bölümünde belirtildiği gibi yabancı kapital kısa ve uzun süreli olabilmektedir.

Bugün uzun süreli borçlar denince, esas ipotekli borçlar ve istikrazlar (tahvilât, obligasyonlar) akla gelmektedir. Bu iki yolun her biri, kapitali pek uzun bir süre için işletmeye temin etmiş olur.

İstikrazların itfa imkânları büyük ölçüde elastik olduğu için, hem devlet ve belediye, hem de özel işletmelerde tahvilat önemli bir finansman kaynağı olmaktadır.

İstikrazların kullanılmasından bir takım hesaplar doğmaktadır. İtfa taksidi, anuiteler, faiz, fiat ve rantabilite gibi unsurların doğru bir şekilde ifade edilebilmesi için, adı geçen hesaplar hakkında esaslı bilgi edinilmesi gerekmektedir.

İstikraz Kavramı :

İstikraz bir borçtur. Fakat her borç istikraz olmadığından istikraz adı yalnız aşağıdaki vasıfları haiz borçlara tahsis edilmiştir.

a — Alınan borcun miktarının büyük olması;

b — Borcun süresinin kesin bir biçimde tesbit edilmesi ve sürenin 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50 yıl gibi olması;

c — Faiz oranı genellikle sabit olmalı;

d — İtfa şekli belirli, önceden tesbit edilen plana istinaden itfa olunması;

e — Borç miktarının belirli kısımlara bölünmüş bulunması;

f — Borcun ayrı ayrı kimselere tahvilât satmakla belirmesi ve tahvili satın alanların bunları borsada bir meta gibi satabilmeleri gerekmektedir.

Türk Ticaret Kanununun 420 - 433 üncü maddeleri tahvilâtlar hakkında bir takım hükümler vazetmiştir.

Madde 420 : Anonim şirketlerin ödünç para bulmak için itibarı kıymetleri eşit ve ibareleri aynı olmak üzere çıkardıkları borç senetlerine (tahvil) denir.

Madde 421 : Çıkarılan tahvillerin bedelleri tamamen alınmadıkça ikramiyeli veya ikramiyesiz yenileri çıkarılamaz.

Madde 422 : Anonim şirketlerin çıkaracakları tahviller esas sermayenin ödenen ve tasdik olunmuş son bilânçoya göre mevcudiyeti anlaşılan miktarını aşamaz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Madde 423 : Esas mukavele, tahviller çıkarılmasına müsait bulunsa bile, bu hususta umumî heyet tarafından karar verilmesi lâzımdır. Bu kararın muteber olması için 388 inci maddenin ikinci fıkrasındaki müzakere nisabının ve son fıkrasındaki ekseriyetin vücudu şarttır. Umumî heyetçe verilen karar, tescil ve ilân edilmedikçe infaz edilemez.

Madde 424 : Tahviller, halk tarafından satınalınmaları taahhüt olunmak suretiyle çıkarıldığı taktirde; umumî heyetin yukarıdaki madde gereğine vereceği karar, aşağıdaki maddede yazılı izahnameye bağlanarak 299 uncu madde zikrolunan merasimin yapılması için vazifeli mahkemeye verilir.

Madde 425 : Tahvil çıkarmak için halka müracaat etmek isteyen idare meclisi, aşağıdaki cihetleri ihtiva eden bir izahname neşrine mecburdur:

1 — Şirketin unvanı, mevzuu, merkez ve müddetini;
2 — Esas sermayenin miktarını;
3 — Esas mukavele tarihini ve bunda değişiklikler yapılmışsa bunların da tarihiyle ilân edildikleri tarihleri;
4 — Şirketçe tasdik edilmiş son bilânçoya göre şirketin durumunu;
5 — Çıkarılmış ve çıkarılacak tahvillerin itibarî kıymetlerinin tutarını ve bu kıymetlerin şirkete ödeme suretini ve her tahvilin itibarî kıymetiyle verilecek faizinin miktarını, nama yazılı veya hamiline ait olduğunu ve tahvillerin itfa suretini ve zamanını;
6 — Tahvil çıkarılmasına dair umumî heyet kararının tescil ve ilân tarihini;
7 — Şirketin menkul veya gayrimenkulleri, evvelce çıkarılan tahvillerden veya diğer bir sebepten dolayı rehnedilmiş veyahut teminat gösterilmemişse bu cihetleri.

Bu izahnamenin tahvillerin tedavül mevkiine çıkarılmasından en az onbeş gün önce neşir ve ilân edilmesi lâzımdır.

Madde 426 : Tahvillerin satın alınması taahhüdü yukarıdaki maddede anılan izahnameyi ihtiva eden ve iki nüshadan ibaret varaka üzerinde yazılıp imzalanmak suretiyle yapılır.

Madde 427 : Tahvillere izahnamede zikri gereken hususlardan başka tahvillerin ana sermaye ve faizlerinin ödeme şartları ve varsa itfa planı yazılmak lâzımdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tahvillerin şirket namına imza etmeye selâhiyetli olanlardan en az ikisi tarafından imza edilmiş olması şarttır. İmza, damga ve mühür şeklinde olabileceği gibi matbu dahi olabilir.

Madde 428 : Tahvil çıkarıldığı takdirde şirketçe nama yazılı tahvillerin kaydına mahsus bir defter tutulur.

Madde 429 : İdare meclisi veya murakıplar, tahvil sahiplerini umumî heyet halinde icabında toplantıya dâvet edebilirler. Tedavülde bulunan tahvillerin bedelleri tutarının beşte birine sahip olanların talebi halinde de umumî heyeti toplantıya davete mecburdurlar. Tahvil sahiplerinin toplantıya daveti ve toplanma talebinde bulunanların ihtiyaç halinde mahkemeden izin alma selâhiyetleri şirket umumî heyetinin toplantıya daveti hakkındaki hükümlere tâbidir.

Madde 430 : Tahvil sahiplerinin umumî heyeti aşağıdaki hususlar hakkında müzakere yapıp karar vermek selâhiyetine haizdir:

1 — Tahvil sahiplerine ait hususî teminatın azaltılması veya kaldırılması;
2 — Faiz vâdelerinden bir veya bir kaçının uzatılması, faiz miktarının indirilmesi veya ödeme şartlarının değiştirilmesi;
3 — İtfa müddetinin uzatılması ve itfa şartlarının değiştirilmesi;
4 — Tahvil sahiplerinin alacaklarına mukabil hisse senedi almalarının kabul edilmesi;
5 — Yukarıdaki hususların icrasına ve gayrimenkul teminatının azaltılmasına veya kaldırılmasına dair muamelelerde tahvil sahiplerini temsil etmek üzere bir veya müteaddit temsilci tâyini.

Madde 431 : Yukarıdaki maddenin 1, 2, 3 ve 4 sayılı bentlerinde yazılı hususlara ait kararların bütün tahvil sahipleri hakkında muteber olması için tedavülde bulunan tahvillerin üçte ikisini temsil eden tahvil sahiplerinin reyi şarttır.

5 inci bentte bahsolunan temsilcinin tâyini için, mevkûr tahvillerin yarısını temsil eden tahvil sahiplerinin reyi kâfidir.

Madde 432 : Tahvil sahipleri umumî heyetinin toplantısından önce, idare meclisi tedavülde bulunan tahvillerin bir cetvelini yaparak tahvil sahiplerinin görebilecekleri bir yere asar.

Madde 433 : Bu kısımda yazılı hükümlere aykırı harekette bulunan idare meclisi azaları, ilgililere karşı 336 ve sonraki maddeler hükümlerince mesuldürler.

İstikraz Hesapları İle İlgili Esas Unsurlar :

Nominal değer = Borcun tutarı.

$$\text{Gerçek değer} = \frac{\text{Nominal değer} \times \% \text{ olarak fiat}}{100}$$

Örneğin :

Bir istikrazın nominal değeri 100.000 TL. ve borsadaki fiatı da % 95 olursa, bu fiata uygun gerçek değer 95.000 TL. dır. Bunu da şöyle hesaplayabiliriz:

$$\frac{100.000 \times 95}{100} = 95.000 \text{ TL.}$$

Hesaplanan fiat = Hesaplama ile elde edilen fiat (% olarak)
Gerçek fiat = Borsadaki fiat (% olarak)
İhraç fiatı = İstikrazın ihracında ilk sahibin ödeyeceği tutar.
Ödeme fiatı = İstikraz için ödeme yapıldığı andaki cari olan fiat.
Başabaş fiat = İtibari kıymete eşit olan fiat (% olarak, örneğin % 100)
Gerçek faiz = İstikrazın veya tahvilatın rantabilitesi yönünden hesap edilen faiz (rantabilite oranı)
Nominal faiz = İstikraz akdedildiği zaman tesbit edilen faiz haddi. (Bu faiz daima alacaklıya karşı kullanılır.)
Anuite = Yıllık itfa miktarı + yıllık faiz tutarı.
Acio = Hakiki kıymet itibari kıymetten daha fazla olursa aradaki fark acio'yu teşkil eder. Bazen acio ihraç ve ödeme fiatı arasındaki fark da olabilir.
Genellikle ödeme fiatı ihraç fiatından fazla olur.

İstikrazın Türleri :

1 — İstikraz çıkaran kuruluşa göre :

a) Devlet istikrazları,
b) İl istikrazları,
c) Belediye istikrazları,
d) Özel şirketlerin istikrazları (tahvilât, obligasyon).

Bugünkü iktisadî hayatta hemen hemen bütün bu tahvillere Borsada rastlanmaktadır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2 — İstikrazın ödenip ödenmeyeceğine göre;

a) Ödenen istikrazlar,

b) Hiç ödenmeyen istikrazlar.

Normal olarak her istikrazın süresi sona erdiğinde ödenmesi gerekmektedir.

Bununla beraber bazı ülkelerde (Fransa'da) devlet bazen hiç ödenmemek üzere de istikraz çıkarmaktadır. Bu gibi istikrazlarda tahvil sahibine devamlı olarak yalnız faiz ödenir. Bu tip istikrazlar daimi rantlardan farksızdır.

Ödenen istikrazlarda bir çok itfa usulleri vardır.

3 — İstikrazların faizi olup olmadığına göre:

a) Faizli istikrazlar,

b) Faizsiz istikrazlar.

İstikrazlar genellikle faizlidir. Aynı zamanda faiz haddi daima sabittir. Yani piyasadaki faiz haddi değişse de tahvilatın faizi sabit kalır.

Piyasadaki faiz haddinin değişmesi yalnız tahvilâtın borsa fiatı üzerine tesir eder. Piyasadaki faiz haddi yükselince tahvilât fiatı düşer. Aksi halde tahvilât fiatları yükselir.

Bazı hallerde faizsiz istikrazlara da tesadüf edilir. Bunlara örnek olarak ikramiyeli istikrazlar gösterilebilir. Gerçekte adı geçen istikrazlarda faiz ödeneceğine, alacaklılara piyango ile bir takım ikramiyeler dağıtılır.

4 — Modern iktisat sahasında özel tahvilât tiplerine göre :

Günümüzde, istikrazların bir takım yeni türleride çıkmıştır. Özellikle Amerika'da çeşitli özel tahvilât türleri bulunmaktadır.

Bunların belli başlıları şunlardır :

a) Kâr tahvilâtı : Bu da esas itibariyle iki türlüdür.

1) Faiz ödenmesi kârın mevcut olup olmadığına bağlıdır.

2) Kâr olsun olmasın faizler ödenir ve imkân olduğu taktirde kâra belirli bir oranda iştirak söz konusu olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Değiştirilebilir tahvilât (Convertible bonds).

Bu tür tahvilât belirli bir süreden sonra, tahvilâtın hamili arzu ederse, aksiyonla değiştirilir.

c) Para birimleri bakımından yapılan mukaveleler.

Bu mukaveleler para değerinin inmesi riskine karşı kabul edilmektedir.

Bunlarda esas belirli miktar altının ödenmesidir. Enflasyon zamanlarında bu tür tahvilât mukaveleleri çok önemlidir. Daha sonraları bu mukavelelerin akdi için bilhassa altın esasına bağlı kalınmamış ve diğer mal, örneğin hububat esas kabul edilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İTFA HESABI

EŞİT TAKSİTLERLE ÖDEMEK SURETİYLE İTFA
(Taksit yoluyla itfa)

(Devlet, özel sektör veya diğer resmi müessese istikrazı, tahvil, ipotek ve ikraz borçları) türünden borçlar, eğer bir kezde toplam tutar üzerinden değil de, taksitle ödenirlerse (itfa edilirlerse), bir itfa borcu söz konusu olur. Bu itfa borcu için, itfa işlemini ve her yıla ait artık borçların, devamlı faizlerini açıkça gösteren itfa plânları hazırlamak gerekmektedir.

En basit bir itfa şekli, itfanın eşit ve yıllık taksitlere bölünmesi halidir.

Bu şekilde itfa edilebilen bir borç, kısaca **TAKSİT BORCU** veya **TAKSİT İSTİKRAZI** olarak adlandırılır.

Kural olarak, itfa tutarları yıl sonunda ve belli bir zaman bölümünün sonunda, yani ek olarak ödenir. Buradaki faizler de ayrıca ektir. Bu nedenle, esas olarak aşağıda ek faizleri ve itfayı ele alıyoruz. Periyodik zaman birimi olarak ta yıl ele alınır.

Diğer olağan durumlar kendi çerçevelerinde dikkate alınırlar.

Birinci yılın başındaki ilk esas borç «K_o» ile gösterilirse ve itfa süresi «n» yılı tutuyorsa (n aynı zamanda taksitlerin adedine eşittir), o halde eşit itfa taksitlerinin miktarı (T) şu bölme işlemiyle hesaplanır :

$$T = \frac{K_o}{n}$$

Örneğin :

200.000 TL. ilk bir kapital; taksitlerinin biri 50.000 TL. olmak üzere, 4 yılda itfa edilir. İtfa pay'ı borcun % 25'i olmaktadır. İtfa edilmeyen diğer artık kapital ise, yıllık (veya 6 şar aylık) olmak üzere faizlendirilir.

Yıllık itfa taksitleri ve faiz tutarının toplamına, Anuite denir veya «yıllık kapasite A» olarak adlandırılır. Anuite deyiminden genellikle diğer periyodları için «yıl» olarak yararlanılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 1

1.000.000 TL. ik bir istikraz, % 4'le faizlendirilerek ve 5 yıllık bir süre içinde eşit tutarlardaki taksitlerle itfa edilecektir.

Buna göre itfa plânı nasıl bir şekil alır?

Yıllar	Devre başlarındaki Borç TL.	Yıllık Faiz tutarları	İtfa taksitleri TL.	Anuite TL.	Devre sonlarındaki Borç
1	1.000.000	40.000	200.000	240.000	800.000
2	800.000	32.000	200.000	232.000	600.000
3	600.000	24.000	200.000	224.000	400.000
4	400.000	16.000	200.000	216.000	200.000
5	200.000	8.000	200.000	208.000	—
	—	120.000	1.000.000	1.120.000	—

Devre sonlarındaki borçlar aritmetik olarak azalan bir sıra takip ederler. 200.000 TL. lik itfa taksidi, bu sıraların arasındaki farktır. Aynı zamanda da faizler itfa taksitlerinin faizleri kadar azalmaktadır.

Eşit itfa taksitleriyle ödenen bir istikraz, buna göre aritmetik olarak azalan yıl yüklemi olarak ta adlandırılır.

Örnek : 2

100.000 TL. lik bir borç (ipotek) % 5 ile faizlendirilir ve 4.000 TL. tutarında yıllık taksitlerle itfa edilirse, itfa süresi de 25 yıl olarak tespit edilmiş olur.

a) Buna göre 17 inci yıldaki faiz ne olacaktır?

Artık kapital K_{16}, 16 yıldan sonra

$K_o - 16\ T = 100.000 - (16 \times 4000) = 36.000$ TL. olur.

17 inci yıldaki faiz ise,

Z = faiz tutarı :

$Z_{17} = K_{16} . i = 36.000 \times 0.05 = 1.800$ TL. olur.

Diğer bir çözüm şekli ise;
Faiz düşüşü.
$400 \times 0{,}05 = 200$
$Z_{17} = 5000 - 16 \times 200 = 1.800$ TL. olur.

b) 25 yılın sonunda bütün faiz tutarları ne kadardır?

Aritmetik faiz dizisi toplanır;

$g_1 = 5000$; $g_{25} = 5000 - 24 \times 200 = 200$

$$S_{25} = \frac{n}{2}(g_1 + g_{25}) = \frac{25}{2}(5000 + 200) = 65.000 \text{ TL. olur.}$$

Herhangi bir zaman birimi (m) içindeki artık kapital, genellikle,

$$K_m = K_0 - m \,.\, T \quad \text{dir.}$$

Faizler, genel itfa süresi içinde alınır. Şayet faizleri itfanın başlangıcına teşmil edersek, her yıl aritmetik olarak azalan faizleri şu formülle hesaplayabiliriz.

$$R_0 = va_n + \frac{d}{i}(a_n - nv^n)$$

Bütün faiz ödemelerinin değeri Z_0 olsun; o halde

$d = -Ti$ olduğu için

$$Z_0 = Z_1 a_n - T(a_n \,.\, nv^n)$$
$$= Z_1 a_n - Ta_n + nTv^n$$
$$= K_0 ia_n - Ta_n + K_0 v^n$$
$$= K_0 (ia_n + v^n) - Ta_n$$

$$ia_n + v^n = i\,\frac{1-v^n}{i} + v^n = 1$$

$$Z_0 = K_0 - Ta_n$$

Örnek 2 ye uyguladığımızda;

$Z_0 = 100.000 - 4000 \,.\, IV^5_{25} = 100.000 - (4000 \times 14.09394)$
$= 43.624{,}24$ TL. elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Genellikle itfa hesapları için geçerli olan şudur :

Anuitelerin nakti kıymeti, bütün itfa taksitleri ve faiz ödemeleri nakti kıymetlerinin toplamına eşittir.

Taksit itfasında $K_0 = Z_0 + Ta_n$

EŞİT ANUİTELERLE İTFA

Eşit itfa taksitlerini içeren istikrazın itfa ve faizleri dolayısıyla düzenli oluşan senelik yükleme için yeni bir itfa şekli aramak gerekmektedir. Bu şekilde itfa edilen borçlar Anuite borçları veya Anuite istikrazı diye adlandırırız. Faizler itfa işleminin sonucu olarak azaldıklarından, itfa oranları da tasarruf edilen faizden, daha doğrusu önceki itfa taksitlerinin faizleri oranında yükselecektir.

Örneğin; 4. cü itfa taksidinin faizi, 3. ncü itfa taksidinin faizinden büyüktür.

İtfa taksitleri, devamlı olarak faizleriyle büyüdüğünden, bileşik faizin kapital formülündeki gibi, geometrik bir dizi meydana getirirler.

Burada birinci taksidi $= T_1$

ve $q = 1 + \frac{1}{100}$ olsun.

K = Kapital, Z = Faizler, İtfa Taksidi = T olarak gösterdiğimizde şöyle bir tablo elde ederiz:

Yıllar	Başlangıç Kapitali	Faiz tasarrufu	Faizler	İtfa Taksitleri	Geometrik dizi
1	K_0		Z_1	T_1	$= T_1$
2	$K_1 = K_0 - T_1$	$T_1 i$	$Z_2 = Z_1 - T_1 i$	$T_2 = T_1 + T_1 i = T_1(1+i)$	$= T_1 q^1$
3	$K_2 = K_1 - T_2$	$T_2 i$	$Z_3 = Z_2 - T_2 i$	$T_3 = T_2 + T_2 i = T_2(1+i)$	$= T_1 q^2$
4	$K_3 = K_2 - T_3$	$T_3 i$	$Z_4 = Z_3 - T_3 i$	$T_4 = T_3 + T_3 i = T_3(1+i)$	$= T_1 q^3$

Faiz tasarrufu bir önceki itfa taksidinden hesaplanır. Burada faizler düşüp, itfa taksitleri yükseliyorsa, toplam değişmez.

$$A = Z_1 + T_1 = Z_2 + T_2 = \dots$$

Genel olarak, her hangi bir yılın (m) sonundaki itfa taksidinin tutarı :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(1) $$T_m = T_{m-1}\, q = T_1\, q^{m-1} \qquad m = 1, 2, 3$$

$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_m = T_1 + T_1 . q + T_1 . q^2 + \ldots +$

$T_1 . q^{m-1} = T_1 . S_m$

$$S_{m-1} = \frac{q^{m-1} - 1}{1},$$

$q^{m-1} = 1 + S_{m-1} . i$

buradan,

$T_m = T_1 . q^{m-1} = T_1 + T_1 . S_{m-1} . i =$

$[T_1 + (T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{m-1})\, i]$ sonucu elde edilir.

Bunun açıklanmasını yapalım :

İtfa, her yıl içindeki ilk itfadan ve ödenmiş bütün itfaların taksidine kadar biriktirilmiş faizlerden meydana gelir.

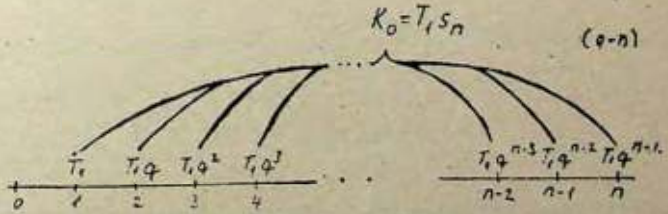
Bu nedenle, biriktirilmiş (tasarruf edilmiş) faizleri havi itfa söz konusu olur (faiz büyümesi).

Bütün itfa taksitlerinin n toplamı (n = itfa süresi) şöyle bir formülle hesap edilebilir.

$T_1 + T_1 q + T_1 q^2 + \ldots + T_1 q^{n-1} = T_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = T_2\, S_n$

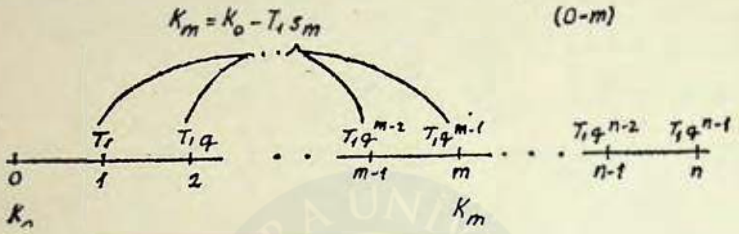
İtfa taksitleri, itfa edilen başlangıç kapitali (K_o) ile uyuşması gerektiğinden burada bilhassa kullanılan itfa kaideleri teşekkül eder.

a) Toplam borç K_o = itfa borçlarının toplamına eşittir.



MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Artık borç K_m toplam borca eşittir ve şimdiye dek olan itfa taksitlerinin (m) toplamı kadar azalır.



Bu nedenle,

İtfa formülleri şöyle düzenlenmiştir:

(2)

$$K_0 = T_1 S_n = T_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

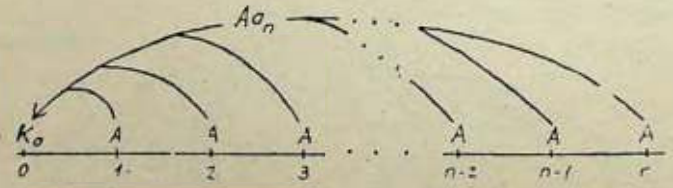
$$K_m = K_0 - T_1 S_m = K_0 - T_1 \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

$m = n$ konursa, $K_n = 0$ olur.

Anuite her yıl eşit büyüklükte olduğu için, bunu eşit kalan rant diye de kabul edebiliriz.

Bütün anuitelerin toplamı borçlunun karşıt yüklemini meydana getirir, ve (aynı süreler dikkate alındığında) alacaklının yüklemine, toplam kapitale uymak zorunluluğundadır.

$K_0 = A a_n$ (Süre 0 olduğuna göre)

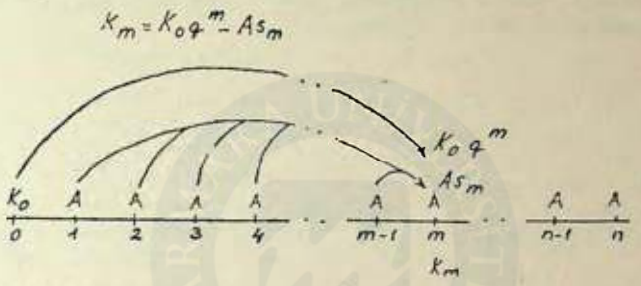


Böylece, genel olarak geçerli ve burada bilhassa kullanılan anuite kaideleri elde ederiz :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Toplam borç K_0, bütün Anuitelerin nakti değerine eşittir.

Artık borç (K_m), toplam borcun süre değerine eşittir ve şimdiye dek itfa edilmiş anuitelerin süre değerleri kadar azalır. (Her iki süre değeri (m) ye göre teşmil edilmiştir.)



ANUİTE FORMÜLÜ :

$$(3)\quad K_0 = Aa_n = \frac{A}{q^n}\,\frac{q^n-1}{q-1};\quad K_m = K_0q^m - AS_m = K_0q^m - A\frac{q^m-1}{q-1}$$

$m = n$ olursa $K_n = 0$, $K_0q^n = AS_n$ olur.

$K_0 = Aa^n$ denklemi aynı zamanda —Euler— Amortisman veya itfa denklemi ve formülü olarak ta adlandırılır, ve her şeyden önce Anuiteyi hesaplamaya yarar.

$$(4)\quad A = \frac{K_0}{a_n} = K_0 \cdot V_n^p$$

Tabloda gösterilen $\left(V_n^p = \frac{1}{a_n}\right)$ değeri bu yüzden Anuite faktörü olarak adlandırılır.

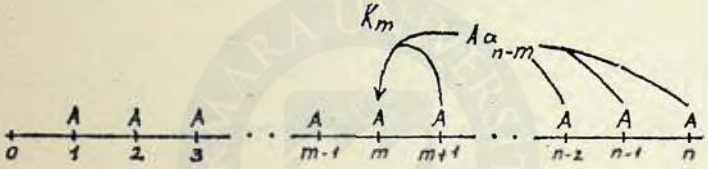
$K_0 = Aa_n = T_1 S_n = T_1 a_n q^n$ olduğundan,

$$(5)\quad A = T_1 q^n$$ meydana gelir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Son yılda (n) itfa taksiti, $T_1 q^{n-1}$ değerini alır. Gelecek yıllarda teorik olarak başlangıç kapitali $K_n = 0$ dır, ve faizler yok olur ve net bir hesap itfa taksiti $T_1 q^n$, Anuiteye eşit olmak zorunluğundadır.

Artık kapital (K_m) için diğer bir kaide türetilir. Borçlunun yüklemi hemen tedarik edilecek bir anuiteye dayanır. Artık borç (K_m) n - m, Anuitelerin tahsil edilecek nakti değerine eşittir.



$$(6) \quad \boxed{K_m = A a_{n-m}}$$

$m = 0$ için, $K_0 = A S_n$ olur.

Böylece itfa için eşit miktarlar halinde kalan anuite sayesinde genel fakat basit olmayan bir formül sistemi yaratılmış olur.

m = İtfa taksidinin nakti değeri,

$$(7) \quad \boxed{(T_m \cdot v^m = T_1 q^{m-1} \cdot v^m = T_1 v)}$$

Yani, bütün itfa taksitleri aynı $T_1 v$, her anuite nakdi değerlerinin toplamına, (K_0) olarak yazarsak,

$$(8) \quad \boxed{K_0 = Av + Av^2 + Av^3 + \ldots + Av^{n-1} + Av^n}$$

Böylece, her Anuite taksiti ters bir şekilde şöyle elde edilmiş olur:

$T_1 = Av^n$, $T_2 = Av^{n-1} \ldots T_{n-1} = Av^2$, $T_n = Av$;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

genel olarak :

$$T_m = An^{n-m+1}$$

Bu formülün ispatı ise;

$T_1 = Av^n$ böylece $T_m = T_1 q^{m-1} = Av^n . v^{1-m} = Av^{n-m+1}$ olur.

İtfa taksitlerinin geometrik yönden genişlemesi sonucu, itfa başlangıçta itfa süresinin sonuna göre çok daha yavaş ilerlemektedir.

Bu nedenle, borcun yarısının itfası, yarım itfa süresinden çok daha uzun devam eder. Aynı itfa süresindeki faiz fiatı yükseltilirse Anuite büyürken itfa taksitleri önce küçülür, fakat belli bir yıldan sonra gene büyür. Buna karşılık artık borç devamlı olarak daha büyüktür.

Örneğin :3 $K_0 = 100.000$ $n = 10$
$p = \%\ 4 - \%\ 6$

Yıl (m)	T_m			K_m		
	p = 4		p = 6	p = 4	—	92413
1	8329	>	7587	91671	<	84371
2	8662	>	8042	83009	<	75847
3	9009	>	8524	74000	<	66811
4	9369	>	9036	64631	<	57233
5	9744	>	9578	54887	<	47080
6	10134	<	10153	44753	<	36318
7	10539	<	10762	34214	<	12818
8	10960	<	11408	23254	<	24910
9	11399	<	12092	11855	<	—
10	11855	<	12818			24910
Toplam	100000		100000			
11	12329		13587			

Faiz fiatı, Anuite değişmeden, yükseltilirse, itfa süresi büyür, itfa taksitleri küçülür.

Yukarıdaki örnekte, % 4 ten % 6 bir yükselmede, itfa süresi

$$n = 11.466 \qquad T_1 = 6329;\ K_1 = 93671$$

vermektedir. Artık borçlar, geçikmeli itfa dolayısıyle devamlı olarak büyüktür.

Yüksek bir faiz fiatındaki itfa taksiti (T_1) değişmeden bırakılmak istenirse, büyük bir anuite dolayısıyla daha süratli itfa meydan gelir.

(Faiz değişim) esnasındaki faiz fiatının asgariye indirilmesiyle eşit anuitenin aksine itfa hızlanır ve ilk değişim yılındaki eşit itfa taksitleri buna karşılık geçikmeli olur.

Örnek : 3

1.000.000 TL. lık bir istikraz eşit anuitelerle % 4 le faizlenecek ve 5 yıl içinde de itfa edilecektirc.

Buna göre itfa planı nasıl olur?

Önce, Anuitenin tesbiti gerekmektedir.

$$A = K_0 \frac{K_0}{a_n} = 1.000.000 \,.\, V^5_5 = 1.000.000 \times 0{,}22463$$

$$= 224630$$

İlk itfa taksidi — Faiz çıkarılması ile;

$$T_1 = A - K_0 i = 224630 - 40.000 = 184.630$$

Sonra artık borç, faizler ve itfa taksitleri elde edilir.

2 nci yıl için $K_1 = 1\,000.000 - 184630 = 815370$

$Z_2 = 815370 \,.\, 0{,}04 = 32614.80$

$T_2 = 224630 - 32614.80 = 192015.20$ v.s.

Yıl	Başlangıçtaki artık borç	Faiz % 4	İtfa Taksitleri	Anuiteler
1	1000000	40000	184630	224630
2	815370	32614,80	192015,20	224630
3	623354,80	24934,19	199695,81	224630
4	423658,99	16946,36	207683,64	224630
5	215975,35	8639,01	215975,35	224614,36
		123134,36	1000000,—	1123134,36

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Varsayılan itfa T_4 anuiteye eşittir. 5 yıldaki değişiklik yuvarlak bir hesaba dayanmaktadır. Anuite tam olarak 224.627.11 TL. dir. İtfalar bir geometrik dizi teşkil ederler.

$184630 \times 1{,}04 = 192015{,}20$; $192015{,}20 \times 1{,}04 = 199695{,}81$ v.s.

Bundan başka örneğin; $T_4 = T_1 q^3 = 184630 \times 1{,}04^3 = 184630 \times 1{,}12486 = 207683{,}64$ TL. dir.

Artık kapital K_3 şekilde meydana gelir :

$K_3 = K_0 - T_1 S_3 = 1000000 - 184630 \times 3{,}1216 = 423658{,}99$;

$K_3 = Aa_2 = 224630 \times 1{,}88609 = 423672{,}40$

$K_3 = K_0 q^3 - AS_3 = 1000000 \times 1{,}12486 - 224630 \times 3{,}1216 = 423655$ TL. dir.

Faizler ise şöyle hesaplanır :

$Z_3 = A - T_3 = T_1 q^5 - T_1 q^2 = T_1 (q^5 - q^2) = 184630 \times 0{,}13505 = 24934{,}28$

Örnek : 4

1.000.000 TL. lık bir istikraz % 4,5 luk bir faiz fiatı üzerinden 50 yıl süre ile eşit anuitelerle itfa edilecektir.

a) — Anuite, b) — 34 yıl sonraki artık kapital, c) — 28 yıldaki itfa taksidi, d) — 40 ıncı yıldaki faizin, hesaplanması.

a) $A = K_0 \times V^{4{,}5}{}_{50} = 1000000 \times 0{,}5060 = 50600$;

$T_1 = 50600 - 45000 = 5600$.

b) $K_{34} = K_0 - T_1 S_{34} = 1000000 - 5600 \times 77{,}03026 = 568630{,}54$;

$K_{34} = Aa_{16} = 50600 \times 11{,}23402 = 568441{,}41$;

$K_{34} = K_0 q^{34} - AS_{34} = 1000000 \times 4{,}46636 - 50600 \times 77{,}03026 = 568628{,}84$

c) $T_{28} = T_1 q^{27} = 5600 \times 3{,}28201 = 18379{,}26$;

$T_{28} = Av^{23} = 50600 \times 0{,}36335 = 18385{,}51$

d) $Z_{40} = A - T_{40} = 50600 - 5600 \times 5{,}56590 = 19430{,}96$;

$Z_{40} = T_1 (q^{50} - q^{39}) = 5600 \times 3{,}46674 = 19413{,}74$ eder.

YEDEK İTFASI VASITASIYLA BİR KEZLİK GERİ ÖDEME

(İhtiyat İtfası)

Eğer bir borç bir kezde ve sürenin sonunda ödenirse bu durumda bir itfa borcu meydana gelmez.

Süre gelen her yılın sonunda aynı faizle belli bir (T) tutar eklemek suretiyle bir itfa ihtiyatı teşkil edilir. Burada artık borç da faizlendirilecektir.

Böylece, Anuite, eşit faizlerden ve itfa ilâvesinden teşekkül eder ve yıllık yüklem meydana gelir.

$$(9) \qquad A = K_o i + T$$

T faktöründen teşkil edilen itfa ihtiyatı, bileşik faizle birlikte TS_n rant nihayi değeri kadar büyür. Eğer bu tutar, bir defalık geri ödemeye hizmet edecekse, o halde,

$K_o = TS_n$ olmalıdır.

Buradan;

$$A = K_o i + T = TS_n i + T = T(1 + iS_n) = T\left(1 + \frac{q^n - 1}{i} i\right) = Tq^n;$$

$$A = K_o i + T = K_o i + \frac{K_o}{S_n} = K_o\left(i + \frac{1}{S_n}\right) = K_o \frac{1}{a_n} \text{ olur.}$$

Bu da, Anuitenin anuite borçları kurallarına göre tesbit edildiğini, ve itfa ilâvesinin (T) birinci itfa taksitine (T_1) eşit olması demektir.

İtfa ihtiyatının toplanması borçlu tarafından ifa edilebilir. Borçlu, vadesi gelmiş toplam tutarı, n yıl sonra toplam borcun bir kezde ödenmesi için kullanılır.

İhtiyat itfasının toplanması aynı zamanda amir tarafından, itfa ilavesinin (T) her yılın sonunda kendisine ihtiyat gayesi ile ödenmesi suretiyle de olabilir. Son kesin ödeme süresinin sonunda itfa ihtiyaçlarında öngörüldüğü için, bu durumda da toplam borç için, borçlu her iki imkânda da aynı yıllık yüklemi ifa etmek zorunluğundadır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Anuitelerin itfası, itfa ilavesinin önceden toplanmayıp, bilhassa sürelerinde borcun ödenmesiyle meydana gelmektedir.

Geri kalan artık borçlar böylece devamlı olarak düşer, ve yine buna uygun olarak faizler azalır ve faizleri tasarruf edilen tutarlar, itfanın güçlenmesi için kullanılır. Şimdiye kadar borç faizi olarak görülmekte olan tutarlar, böylece ilâve itfa tutarları karakterini alırlar. İtfa taksitleri bu şekilde yıldan yıla faizleriyle beraber çoğalırlar.

$$T_0 = T\,,\ T_2 = T_q\,,\ T_3 = Tq^2 \quad \text{v.s.}$$

Anuite itfası, taksit itfasına karşılık, belli kıymet tutarı + tasarruf edilmiş faizler (faiz büyümesi) şeklindeki itfa olarak adlandırılır. Bir itfa ihtiyatının toplanması suretiyle bir defalık ödeme kısaca "ihtiyat itfası" olarak da işaret edilebilir. İhtiyat ve anuite itfaları müşterektir, borçlu eşit kalan yıllık kapasiteleri yapmak zorundadır.

Bunlar ya düşen faizlerden ve yükselen itfa taksitlerinden, veya eşit kalan faizlerden ve itfa ilâvelerinden, itfa gayesiyle meydana gelirler.

ARTIKLI YUVARLAK ANUİTE VASITASIYLA İTFA

(Yüzde Anuitesi)

İtfa süresi için yuvarlak bir yıl sayısı konursa, $A = \frac{K_0}{a_n}$ hesabıyla devamlı bir Anuite eğrisi elde edilir. Yıllık kapasite için, bu kez ters olarak kati bir tutar istenince, bölünmüş itfa süresi beklenebilir. Bu durumda, yuvarlak anuiteler ve o zaman yıllık kapasite başlangıcının kapitalin yüzdesi olarak anuiteyle yapılırsa yüzde anuitesinden bahsedilir. Yalnız itfayı ifade eden yüzdelik itfa payı (+) olarak gösterilir.

Örneğin :

$K_0 = 100.000$ TL. $p = \%\ 4{,}5$ ve $A = 6500$ olduğu taktirde, itfa % 2 tutar ve Anuite başlangıç kapitali,

$$(p + t) = \%\ 6{,}5 \quad \text{olur.}$$

Böylece % 4,5 bir faizden ve % 2 faiz ilavesinden bahsedilir. İtfa ilâvesi yalnız birinci yıl için geçerlidir. Bilahare itfa taksitleri tasarruf edilmiş faizler kadar artarlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İtfa süresi, bileşik bir sayı meydana getirdiği için bütün anuitelerin tam yıl süresi içinde yapılması gerekir. Bunun için ya artık ödemesi olarak son anuiteden sonraki yıla bağlanan veya bütün anuitelerin birinci yıl alınmasıyla 1 yıllık ön yüklem şeklinde denge ödemesi meydana gelir. Artık ödeme ve itfa her zaman bütün anuitelerden daha küçüktür.

Örnek : 5

1.000.000 TL. lık bir istikraz % 3 faizlendirilip ve yıllık % 10 bir faiz ilâvesi ile itfa edilecektir.

a) Anuitenin büyüklüğü nedir? İtfa süresi ne kadardır?

b) En son yıldaki artık ödeme ne kadardır?

c) Bir yılın sonundaki itfa ne kadardır?

d) Her iki halde itfa planı nasıl olmalıdır?

a) $A = K_0 \times 0{,}13 = 130000$

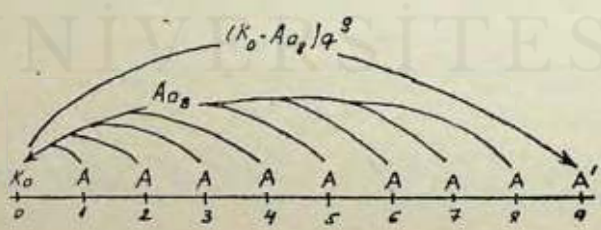
$K_0 = A a_{\overline{n}|}$; $1000000 = 130000\ a_{\overline{n}|}$;

$a_{\overline{n}|} = 7{,}69231$; veya

$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = 0{,}13$; $n = 8$ ve 9 arasında bulunur.

Yani 8 tam anuite itfa edilmektedir.

b)



9 uncu yıldaki A', artık ödeme, yukarıda gösterildiği gibi

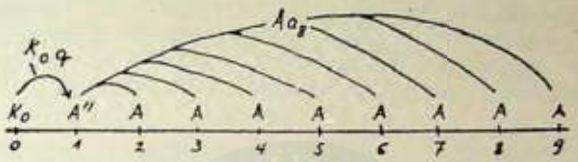
$A' = (K_0 - A a_{\overline{8}|})\, q^9$

$= (1000000 - 130000 \times 7{,}01969)\ 1{,}30477$

$= 114089{,}39.$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aynı sonuç, K_0 ve 8 anuite dizisinin 9 a göre dikkate alınmasıyla da elde edilir.



$$A' = K_0 q^9 - As'_8 =$$

$$= 1000000 \times 1{,}30477 - 130000 \times 9{,}15911$$

$$= 114085{,}70$$

Bu ikinci tertipleme, birinciden çıkartılabilir.

$$A' = (K_0 - Aa_8)\, q^9$$

$$= K_0 q^9 - Aa_8 q^9$$

bunun için de

$$a_8 q^9 = a_8 q^8 q = S_8 q = S'_8$$

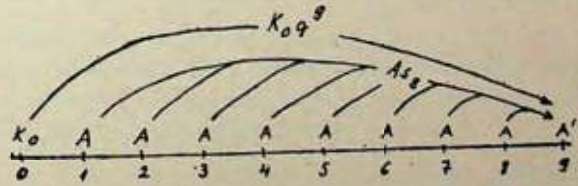
$$= K_0 q^9 - As'_8$$

Liniar interpolasyon sonucu

$$n = 8{,}8776 \qquad y = 0{,}8776$$

$$A' = yA = 0{,}8776 \times 130000 = 114088 \quad \text{elde edilir.}$$

c)



$$A'' = K_0 q - Aa_8$$

$$= 1000000 \times 1{,}03 - 130000 \times 7{,}01969$$

$$= 117440{,}02$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yıl	Başlangıç Kapitali	% 3 Faiz	İtfa Taksitleri % 10	Anuite
1	1000000	30000	100000	130000
2	900000	27000	103000	130000
3	797000	23910	106090	130000
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
8	233753,78	7012,61	122987,39	130000
9	110766,39	3322,99	110766,40	114089,39
		154089,39	1000000,—	1154089,39
1	1000000	30000	87440,02	117440,02
2	912559,98	27376,80	102623,20	130000
3	809936,78	24298,10	105701,90	130000
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
8	248751,06	7462,53	122537,47	130000
9	126213,59	3786,41	126213,59	130000
		157440,02	1000000,—	1157440,02

Belli bir itfa süresinde (n) borcun K_0 dan K_m kadar itfa edilmesi gerektiğinde artıklı itfa söz konusu olur. Dalgalı borç diye adlandırılan K_m itfa hesabından ayrılır ve yalnız faizlendirilir. Yani, yalnız $K_0 - K_m$ borç farkları itfa edilir ve itfa kapitalinin anuitesi olarak

$$A_m = \frac{K_0 - K_m}{a_n} \quad \text{elde edilir.}$$

Buna göre itfa planında her artık borç dalgalı borca göre (K_m) ve faizler de $K_m \cdot i$ faizlerine göre büyürler. Toplam Anuite buna göre;

$$A = \frac{K_0 - K_m}{a_n} \quad \text{elde edilir.}$$

Buna göre itfa planında her artık borç dalgalı borca göre (K_m) ve faizler de $K_m \cdot i$ faizlerine göre büyürler. Toplam Anuite buna göre :

$$A = \frac{K_0 - K_m}{a_n} + K_m \cdot i \quad \text{olur.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bir işletmenin tesislerini, bileşik faiz yönünden kullanılan ve süresi sayesinde tesisler için yapılmış itfa borçları olarak incelersek, o zaman bir yılın faizleri ve amortismanları Anuite olarak gözükürler. (Yıllık Masraflar) Eşit miktarda kalan amortisman (başlangıçtaki tedarik kıymeti) taksit itfasına karşılıktır. Burada faizler ve yıllık yüklem küçülür, geometrik olarak düşer (kaydi amortisman). Hiç bir itfa şekliyle bağdaşamaz. Yıllık yüklem fazlasiyle düşer ve degrasyonun azlığından, taksit itfasındaki anuite yavaşlar.

Faizlerde ve amortismanda eşit yıllık yüklemlere erişilmek istenirse, anuite itfasına eşit olan bir amortisman şekli seçilmelidir. İlk yılın amortismanı ilk itfa olarak konulur. Diğer amortismanlar tasarruf edilmiş faizler kadar devamlı yükselirler. Bu metod bileşik faiz veya amortisman faiz metodu olarak adlandırılır.

Artan amortisman yerine, ihtiyat itfasına uygun olarak kati tutarlara haiz bileşik faizli itfa ihtiyatları (amortisman ihtiyatları) teşkil edilir.

Bunlara ihtiyat hesabı veya amortisman fonu denir.

ANUİTE İTFASINDA MASRAFLARIN VE ÇİFTLİ FAİZ FİATININ HESAPLANMASI

Borçlunun, itfa taksitlerinden ve faizlerden başka, tıpkı faizler gibi artık borç üzerinde yüzde olarak hesaplanan diğer bir çok masrafları, (idari masraflar, provisyonlar ve vergiler) ödemesi gerekmektedir.

Şayet bu ödemeler eşit kalan Anuiteye uygulanırsa, o zaman faiz fiatının % kadar yükseltilmesine karşılık edecektir.

Böylece itfa planı, faiz fiatının % (p +) kullanılması suretiyle düzenlenecektir.

Masraflar anuitelerle beraber itfa edilecekse, % kadar artık borca yıllık ilâve yapılacaktır. Toplam yıllık ödeme işlemleri, (masraflar da dahil) düşen bir sayı dizisi meydana getirecektir.

Bu son durumda, itfa süresince ödenmesi gereken bütün masraflar ekseri peşinen ödenen ve bunların nakit kıymeti hemen istikrazın toplamından çıkarılmasıyla yapılır.

Her itfa taksidinin parasal değeri $T_1 . v$ eşittir. Yani bütün itfa aksitlerinin parasal değeri $T_n = n\ T_1 v$ olur. Bütün anuiteler K_0 borcuna

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

eşit olduğundan Z_s nakti değeri bütün faiz ödemelerin farkını meydana getirir. ($Z_o = K_o - nT_1 v$). Bu nedenle, itfaların parasal değeri (geri ödemeler) net mülkiyetin parasal değeri olarak da adlandırılır.

Masraflar artık borcun % si kadar tutar, veya yıllık faizin $\frac{\pi}{p}$ katı kadardır, zira her hangi bir yılda (m) aşağıdaki bağlantı meydana gelir.

Yıllık faiz ödemesi (m yılında) $Z_m = K_{m-1} \frac{p}{100}$, olur yani

$$K_{m-1} = \frac{100\ Z_m}{p}$$

Yıllık provizyon ödemesi (m yılında)

$$P_m = K_{m-1} \frac{p}{100} \quad \text{(Burada } K_{m-1} \text{ yerine konursa)}$$

$$= \frac{100\ Z_m}{p} \times \frac{\pi}{100}$$

$$= \frac{\pi}{p} z_m$$

Bütün prozisyon ödemelerinin nakit kıymeti P_o için geçerli Formül :

$$(10) \quad \boxed{P_o = \frac{\pi}{p} Z_o = \frac{\pi}{p} (K_o - n\ T_1 v)}$$

Örnek : 6

2.000.000 T. Liralık istikraz % 4,5 la faizlendirilerek ve 20 yılda eşit anuitelerle itfa edilecektir.

a) Artık borca göre hesaplanmış provizyonu 1/2 olan anuite ne kadardır? Onuncu yılın sonundaki artık borç itfa taksitleri, faiz ve provizyonları ne kadardır?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Anuitenin yanında peşinen ödenen ek provizyon ne kadardır?

$A = K_0 : a_{20}$

$= 2.000.000 \times 0{,}08024 = 160480;$

$T_1 = 60480 ; T_{10} = T_1 q^9 = 60480 \times 1{,}55133 = 93824{,}44;$

Faizler ve provizyonlarla beraber $160480 - 93824{,}44 = 66655{,}56$ yaparlar. 9 : 1 oranında $Z_{10} = 59990$ ve provizyon

$$P_{10} = 6665{,}56 \text{ her ikisi de}$$

$$K_9 = \frac{100 \times 66655{,}56}{5} = 1.333.111{,}20$$

$K_{10} = K_9 - T_{10} = 1333111{,}20 - 93824{,}44 = 1239286{,}76$ veya direk olarak,

$K_{10} = Aa_{10} = 160480 \times 7{,}72173 = 1239183{,}23$

b) $A = 2.000.000 \times 0{,}07688 = 153760$ burada provizyon yoktur.

$T_1 = 63760 ; Z_1 = 90000 ; P_1 = 10000$; toplam yıllık kapasite

$= 163760$ ikinci yılda $K_1 = 1936240 ; Z_2 = 87130{,}80 ;$

$P_2 = 9681{,}20 \quad T_2 = 66629{,}20$

Toplam yıllık kapasite $= 153760 + 9681{,}20 = 163441{,}20$ bu devamlı olarak azalmaktadır.

Provizyon peşinatında,

$Z_0 = 2000000 - 20 \times 63760 \times 0{,}95694 = 779710{,}11;$ $\quad P_0 = \frac{0{,}5}{4{,}5} \times$

$779710{,}11 = 86634{,}46$ elde edilir, ilave provizyondur.

İtfa ilavelerinden (T) meydana gelen ihtiyatın aynı faiz fiyatıyla (p) borcun kendisi gibi faizlendiğini görmüştük, fakat borçlu tarafından ödenen itfa ekleri, alacaklı tarafından (veya borçlunun kendisi tarafından da) daha düşük bir faiz fiyatıyla (p') yatırılırsa bir çift faiz fiyatı meydana gelir.

Örneğin :

Tasarruf saydıkları sabit değerleri, (arâzi ve arsaları) itfa ilâvelerinin hemen tasarruf hesabına yatırılması koşuluyla kendi aralarında birbirlerine kiralarlar. Bu da yine kural olarak daha düşük faiz ödemek olur

Şayet borçlu, yalnız Anuite; $A = K_0 i + T = K_0 : a_n$ öderse, K_0 nihayi kıymetine göre bütün ödemelerin (T) toplanması imkânsızdır. Zira % p' lik bir faizde yalnız $Ts'_n < K_0$ itfa ihtiyatı mevcuttur. Fakat ilâveler hemen bir itfa için kullanılacaksa, o halde alacaklı iade ödemeler için % p elde ederken artık borcun yalnız % p' ini alacaktır.

Bu nedenle bütün borç kapitali (K_0) için, büyük yıllık faizlere (% p) ye erişmek istenirse, o zaman daha yüksek bir itfa ilâvesinin ζ konulması gerektir.

Eğer p' ile hesaplanan değerler i, s'_n ve a'_n ile gösterilirse $K_0 = \zeta s_0$

ve $\frac{1}{s'_n} = \frac{1}{a'_n} - i'$: dendolayı yeni bir Anuite meydana gelir.

(11)

$$\mu = K_0 i + \zeta = K_0 i + \frac{K_0}{s'n} = K_0 \left(\frac{1}{s'n} + i \right)$$

$$= \frac{K_0}{a'n} + K_0 (i - i') > A = \frac{K_0}{n_n}$$

Kısaca açıklaması % p' için elde edilen Anuite $K_0 : a'_n$ den çok düşüktür ve (K_0) nun % ($-p'$) lük faiz farkı kadar yükseltilmelidir. Çift faiz fiyatı yerine aynı zamanda bir konform faiz fiyatı da ($p'' > p > p'$) konabilir. Birim olarak artık borç ve ihtiyat yani bütün borç faizlendirilir bu da şu denklemden elde edilir. $\mu = K_0 : a''_n$

Anuite istikrazında da bir çift faiz fiatı alacaklının itfa taksitlerini % p' faizle tekrar yatırılmasıyla, fakat gerçekte yalnız borç artığı için değil bilhassa bütün itfa süresi esnasında toplam kapital için % p elde etmek istenmesiyle meydana gelir. Özellikle bir faiz ödenmesi gerektir, yani Anuite ve faiz arasındaki fark kısmen borçlu tarafından itfa için kullanılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu nedenle Anuite birimi faiz fiyatından daha yüksektir ve faiz ödemesini içine alır.

K_0 a göre çözümlenmesi

(12)
$$K_0 = \frac{\mu}{1 + \frac{1}{s'n}} = \frac{\mu\, a'n}{1 + (i - i')\, a'n} \quad \text{veya}$$

$$\mu\, a'n = K_0 + K_0 (i - i')\, a'n$$

Yani, Anuite o şekilde ölçülmelidir ki, onun % p' faizindeki nakti kıymeti $\mu a'n$ yalnız K_0 değil özellikle eşit bir faizde; nakti değerini $K_0 (i - i')\, a'n$ yıllık faizdekinin de $K_0 (i - i')$ değerini de hesaplamak eğer yıllık faiz söz konusu olursa, alacaklıya ödenen tutar, itfa taksitleri (ζ_m) olarak meydana çıkar ve ödenmesi gereken faizler için zaman birimleri söz konusu olur.

$\mu - K_0 i = \zeta_1 + \zeta_1 (i - i')\, a'_{n-1}$ — Birinci yılın sonu $(n-1)$ faiz farkları gelecekte yok olurlar.

$\mu - K_1 i = \zeta_2 + \zeta_2 (i - i')\, a'_{n-2}$ — İkinci yılın sonu $(n-2)$ faiz farkları gelecekte yok olurlar.

$\mu - K_2 i = \zeta_3 + \zeta_3 (i - i')\, a'_{n-3}$ — 3 cü yılın sonu $(n-m)$ faiz farkları gelecekte yok olurlar.

Genel olarak,

$\mu - K_{m-1}\, i = \zeta_m + \zeta_m (i - i')\, a'_{n-m}$ — m yıl sonu $(n-m)$ faiz farkları gelecekte yok olurlar.

(13)
$$\zeta_m = \frac{\mu - K_{m-1}\, i}{1 + (i - i')\, a'_{n-m}}$$

Bütün Anuitelerin (n) çift faiz fiatlı (n, p') nakti kıymetleri (K_0) olarak hesaplanırken buna göre artık borç K_m, $(n-m)$ Anuitelerin henüz ödenmiyen değerlerini içerir.

(14) $$K_m = \frac{\mu}{i + \frac{1}{s'_{n-m}}} = \frac{\mu\, a'n-m}{1 + (i-i')\, a'_{n-m}}$$

Belli bir itfa taksiti (ζm) elde etmek için, ilk kez K_{m-1} tesbit edilir ve bulunan ζm formülüne konur. İtfa taksitleri artık basit bir geometrik dizi meydana getirmezler, aksine karışık ilişkiler gösterirler, i' = i için kullanılan bütün formüller artık geçerli değildir.

Eşit kalan Anuitelerdeki (A) K_0 ve K'_0 istikrazı, birbirlerine o şekilde bağlı ise, istikraz (K_0) ilk yıllardaki (m) % p ile faizlendirilir ve itfa edilir. K'_0 yalnız % p'_0 faizlendirilir, fakat itfa edilmez, ilerdeki yıllarda (m') K'_0 istikrazı faizlendirilir ve itfa edilirse, yine aynı zamanda bir çiftli faiz fiatı meydana gelir.

İlk yıllarda (m) Anuite; $A = K_0 : a_m + a'_0\, i'$ bağlantısına göre ve daha sonraki yıllarda (m') $A = K'_0 : a'm = K'_0 i'' + K''_0 : s''m''$ bağlantısına göre elde edilir. Her iki kıymette A için eşitse, böylece;

(15) $$K_0 : a_m = K'_0 : S'_m{}' = T'_1 \quad \text{veya} \quad K_0\, s'_m = K'_0\, a_m$$

meydana gelir.

Yani K_0, K'_0, m ve m' değerinden yalnız üçü bağımsızdır, dördüncü değer sonra hesap edilebilir. Dikkat edilmesi gereken nokta, faiz fiatlarının her istikraz için birim olarak geçerli olmaları gerekir.

Örnek : 7

1000000 TL. lık bir istikrazda borçlu alacaklıya % 5 faiz ödeyecektir. Alacaklı ise itfa ilâveleri için yeni itfa taksitleri için % 4 faiz elde etmek ister. Şayet alacaklının bütün bir 10 yıl esnasında genel kapital için % 5 faiz istenmesi halinde, itfa işlemi nasıl olacaktır?

a) Önce belli olan birime göre % 5 lik faiz $A = K_0$ olur.

$a_{10} = 1000000 \times 0{,}12950;$

$T_1 = 12950 - 5000 = 7950$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İtfa bir defaya mahsus olmak üzere yıllık itfa ilâvesinin ihtiyatı üzerinden (7950) % 5 le veya yükselen itfa taksitlerinin $T_m = T_1 q^{m-1}$ (m = 1 den 10 a kadar) ödenmesi şeklinde olur.

b) Çift faiz fiyatıyla $\mu = K_0 : a_{\overline{m}|} + K_0 (i-i') = 100000 \times 0{,}12329 + 100000 \times 0{,}01 = 13329 : \mu$ böylece

$K_0 : a'_{\overline{10}|} = 12329$ dan büyüktür.
Ve $A = 12950$ $\mu = K_0 : a''_{\overline{10}|}$ dan, yani $13329 = 100000 : a''_{\overline{10}|}$ veya $1 : a''_{\overline{10}|} = 0{,}13329$ yedek olarak birim faiz fiatını meydana getirir.
$p'' = 5{,}597 > \%\ 5$

c) İtfa ilâvesi $\zeta = K_0 : s'_{\overline{10}|} = K_0 \left(\frac{1}{a'_{\overline{10}|}} - i'\right) = 100000 \cdot 0{,}08329 = 8329$

veya basit olarak $\mu - K_0 i = 13329 - 5000 = 8329$ her yıl, % 5 = 5000 tam faiz ve 8329, itfa ilâvesi elde edilir. 10 yıl sonra $8329 \times s'_{\overline{10}|} = 100000$ toplam borcun faizi % 4 olur.

d) Hamiline yıllık itfa payı (ζ_m) ödenirse : $\mu - K_0 i = 13329 - 5000 = 8329 = \zeta_1 + \zeta_1 (i-i')\ a_9 = \zeta_1 + \zeta_1 \times 0{,}01 \times 7{,}43533$:

$\zeta_1 = 7752{,}60 - K_1 i = 13329 - 4612{,}40 = 8716{,}60 = \zeta_2 + \zeta_2 (i-i')\ a'_8 = \zeta_2 + \zeta_2 \times 0{,}01 \times 6{,}73274$;
$\zeta_2 = 8164{,}50$ Örneğin 5 yıl sonra borç artığı

$$K_5 = \mu : \left(i + \frac{1}{s_5}\right) = \ : \left(i + \frac{1}{a'_5} - i'\right) = 13329 : 0{,}23463$$

$$= 56810 :$$

buna uygun olarak $K_6 = 13329 : 0{,}28549 = 46689$;
fark $\zeta_6 = K_5 - K_6 = 56810 - 46689 = 10121$ veya direk olarak

$$\zeta_6 = \frac{\mu - K_5 i}{1 + (i-i')\ a'_4} = (13329 - 56810 \times 0{,}05) : (1 + 0{,}01 \times 3{,}62990) = 10121$$

Örnek : 8

300000 T. Liralık bir istikraz 22 yıl eşit kalan anuitelerle o şekilde itfa edilecek ki, üçte biri ilk 10 yılda geri kalanı bunu takip eden diğer yıllarda ödenmiş olsun.

Tercih borcu % 3 1/2, ana borç % 5 faizli olacak.

$A = K_0 : a_{10} + K'_0 i' = 100000 \times 0{,}12024 + 200000 \times 0{,}05 = 2204$;

$\zeta_1 = 12024 - 350 = 8524$ Ayrıca $A = K'_0 : a'_m$, yani;
$= 200000 : a'_m$.

$1 : a'_m = 0{,}11012$; m' 12 ve 13 yıllar arasındadır. Tam anuite 12 yılda ödenir, en son yılın sonunda şu ilâve (R) olur: $R = (K'_0 - Aa'_{12}) q'_{12} = (200000 - 22024 \times 8{,}86325) \times 1{,}79586 = 8612{,}60$; $T'_1 = 22024 - 10000 = 12024$

Örnek : 9

Daha önceki örnekteki aynı istikraz 20 yıl içinde itfa edilirse, Ana-borcun itfası ne zaman başlar?

$K_0 s'_{m'} = K'_0 a_m$, yani $s'_{20} = 2a$; tablolardan denemek suretiyle, (m) in 8 ve 9 arasında bulunduğu sonucu çıkar. Zira $s'_{11} < 2$
Liniar interpolasyonlar, $s'_{12} - 2a_8 = 2{,}16921$ ve $s'_{11} - 2a_9 = -1{,}00859$:

8		2.16921		8		2,16921
9	—	1,00859		8 + x		0
1	:	3,17780		x	:	2,16921

$x = 0{,}6826$; $m = 8{,}6826$ ve $m' = 11{,}3174$ elde edilir. Yani 9 ncu yılda tercihli borcun artık ödemesi ve ana borcun ön yüklemi yapılır. Anuite : $A = K_0 : a'_m + K'_0 i' = 100000 \times 0{,}13590 + 10000 = 23590$ veya $A = K'_0 : a'_{10} = 200000 \times 0{,}11795 = 23590$ 9 ncu yılın sonunda, ana borç için faizler 100000, $18590 \times 0{,}6826 = 9276{,}53$ tercih borcun artık ödemesi ve $13590 \times 0{,}3174 = 4313{,}47$ ana borcunun itfası.

İTFA EDİLMESİ GEREKLİ SERİLERİN TESPİTİ (SERİ İSTİKRAZI)

Kısmi borç tahvillerinde hesapla meydana getirilen itfa planına göre tam kati bir itfa mümkün değildir. Zira ödenmiş bulunan seriler parçalar tutarını ihtiva ederler. Eşit kalan istikrazlarda ise böyle pek fazla zorluk yoksa da bunlar başlangıçta serilerin geri ödenme durumlarına göre ayarlanırlar. Buna karşılık Anuiteleri eşit olan istikrazlarda ise itfa edilmeyen artığın hesaplanması gereklidir. Burada itfa ihtiyatları ve bunların gelecek yıl kpasitesine göre olan faizleri hesaplanır. Bu demektir ki, itfa taksitleri yüksek tutarlar halinde itfalı seriler toplamına kadar ve ihtiyatların faizleri

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

sonra gelen faize kadar büyürler, çünkü azaltılmış itfa dolayısıyla, artık kapitale uygun oranda azalır.

Anuite artık tam olarak, eşit kalmaz aksine hesap değeri kadar düşer. Anuite, ilk yıldaki artık ve faiz ilâvesi kadar büyür, gelecek yıla taşınan artık kadar azalır.

İtfa taksitlerinin bu nedenle yuvarlak rakamlara çıkarılması gayeye uygun değildir, çünkü bazı durumda itfa serilerin toplamı, bütün toplam serilere uymaz. En son itfa taksitindeki (ödeme) ise önemli anuite farkları doğurur. Yukarıda adı geçen metotlardaki sapma, aşağıya veya yukarıya azami faizleri ile birlikte bir seridir. (Bir seri birimidir.)

Her itfa taksitlerndeki artığın hesaplanması yerine, artık borç, bir serinin katlarını yukarıya doğru tama çıkarmak suretiyle de yapılır.

Örnek : 10

Örnek 1 deki itfa planı, şayet istikraz 500 T. Liralık parçalara ayrıldığı taktirde, nasıl olacaktır?

Cevap : Toplam olarak 1.000.000 TL. = 2000 taahhüdü vardır. Bunlardan 400 adedi = 200000 T. Liralık itfa edilecektir.

"İtfa taksiti" sütunu yanında bütün 5 yıl için adedi 400 lük diğer bir «parça adedi» sütunu meydana gelecektir.

Örnek : 11

2 nolu örnekteki itfa planı, eğer, istikraz adedi 500 T. Liralık istikrazlara ayrılırsa, nasıl bir şekil alır?

Hesabı İtfa taksiti	Adet	Gerçek İtfa taksiti	Artık	Bunların faizi	Hesabi faiz	Gerçek faiz
184630	369	184500	130	5,20	40000	40000
192015,20	384	192000	145,20	5,81	32614,80	32620
199695,81	399	199500	341,01	13,64	24934,19	24940
207683,64	416	208000	24,65	0,90	16946,36	16960
215975,35	432	216000	—	—	8639,01	8640
1000000,—	2000	1000000		25,64	123134,36	123160

Yukarıdaki tablo şunu gösterir :
184630 — 184500 = 130;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

192015,20 + 130 − 192000 = 145,20;

199695,81 + 145,20 − 199500 = 341,01 v.s.

32614,80 + 5,20 = 32620 ; 24934,19 + 5,81 = 24940 v.s.

Toplam 123134,36 + 25,64 = 123160.

Şayet itfa edilen adetler her yıl için belli ise, o zaman kesin hesaplamaya göre şu nihayi itfa planı meydana gelir.

Yıl	Adet	Başlangıç kapitali	% 4 faiz	İtfa taksiti	Anuite
1	369	1000000	40000	184500	224500
2	384	815500	32620	192000	224620
3	399	623500	24940	199500	224440
4	416	424000	16960	208000	224960
5	132	216000	8640	216000	224640
	2000		123160	1000000	1123160

Anuiteler; 224630 − 130 = 224500;

224630 + 130 + 5,20 − 145,20 = 224620;

224630 + 145,20 + 5,81 − 341,01 = 224440 v.s. teorik olarak asgari inhiraf 500+20=520 olur, bu da hakikatte 330 TL. itfa taksitlerinin tama çıkarılması 4 ncü yılda yalnızca 415 adette, yani toplam olarak 1999 itfa edilen adet. 433 adedinin itfası suretiyle son yıldaki ödeme, 225160 − 224630 = 530 veya tam olarak 225160−224627,11=532,89 yani 520 den daha fazla Anuite inhirafı verir. Buna karşılık borç artıklarının üste doğru çıkarılması az sapmaları içeren itfa parçalarını meydana getirir.

İtfa planını adetlere göre yapmak için itfa taksitlerinin geometrik dizisine dayanan itfa şemasından yararlanılır. Anuite A ile başlanır, birinci yılın Z_1 faizi düşülür ve ilk itfa taksiti T_1 elde edilir. Sonra (% p) faizin hesaplanması suretiyle (bu q ile çarpma demektir) bütün itfa tutarları meydana çıkar. Bu hesap bir yıl için daha genişletilirse tekrar $A=T_1 q^2$ Anuitesine geri dönülür. Bu nedenle hesabın bir kez daha kontrolu sağlanmış olur.

Örnek : 12

Örnek 3 ve 11 için itfa şeması yapılacaktır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$-A$	$= 224630,—$		
$-Z_1$	$= 40000,—$		
T_1	$= 184630,—$	369 adet	130,— artık
$+4\ \%$	$= 7385,20$		
T_2	$= 192015,20$	384 »	145,20 »
$+4\%$	$= 7680,61$		
T_3	$= 199695,81$	399 »	341,01 »
$+4\%$	$= 7987,83$		
T_4	$= 207683,64$	416 »	24,65 »
$+4\%$	$= 8307,35$		
T_5	$= 215990,99$	432 »	15,64 »
$+4\%$	$= 8639,64$		
A	$= 224630,63$	2000 Adet	

Değer tutarları yerine, itfa şemasına hemen tahvil birimleri de (adetleri) konabilir. Kapital olarak, bütün itfası gerekli adetler konur ki, böylece Anuite adetler halinde ifade edilmiş olur.

Örnek : 13

12 nci örnek için adetleri havi itfa şeması yapılacaktır. 1.000.000 T. Liralık tahvil beheri 500 TL. 2000 adete ayrılmıştır. Böylece Anuite $2000 : a_5 = 2000 \times 0,22463 = 449,26$ adettir.

Birinci yılki faizler = 2000 nin yüzde dördü = 80 adettir.

A	$= 449,26$		
$-Z_1$	$= 80,—$		
T_1	$= 369,26$	369 Adet	0,26 Artık
$+4\ \%$	$= 14,77$		
T	$= 384,03$	384 »	0,29 »
$+4\ \%$	$= 15,36$		
T_3	$= 399,39$	399 »	0,68 »
$+4\ \%$	$= 15,98$		
T_4	$= 415,37$	416 »	0,05 »
$+4\ \%$	$= 16,61$		
T_5	$= 431,98$	432 »	0,03 »
$+4\ \%$	$= 17,28$		
A	$= 449,26$	2000 Adet	

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu istikraz çeşitli nominal değerdeki adetlere ayrılırsa (eşit olmayan parçalara ayrılmış istikraz), itfa önce her adet için ayrı ayrı hesaplanır. Böylece yıllık itfa edilecek adetler, başangıçtaki bölme oranına uygun olur.

Eşit nominal değerler ki adetler (tahvil adetleri) başlangıçta, tahvilin kendisi gibi işleme tabi tutulurlar. Gerekli hesapların tama yükseltilmesiyle bazı hallerde birbirinden sapma gösteren anuiteler meydana gelir. Bunları eşitlemek için, en düşük adet birimine dayanan genel bir itfa planı aracılığıyla bir denkleşme sağlanır.

Fakat burada artık borçlardan da gidilebilir, birinci tahvilin yukarı doğru yükseltilmesiyle meydana gelen itfa artıkları, 2 nci tahvilin artık borcundan çıkarılır ve sonra da tama yükseltilir.

Geri kalan ikinci tahvilin itfa artığı üçüncü tahvilin artık borcuna devredilir v.s. Burada en yüksekten en düşük adet birimine gidilecek olunursa, anuitenin azami sapması gene ilâve faizleriyle beraber en düşük nominal değere eşit olur.

Örnek : 14

1.000.000 T. Liralık tahvil şu adetlere ayrılacaktır.

Bölüm	A :	100 adet	beher	2000 TL.	=	200000,— TL.
»	B :	500 »	»	1000 »	=	500000,— »
»	C :	400 »	»	500 »	=	200000,— »
»	D :	500 »	»	200 »	=	100000,— »
		1500 adet				1000000,— TL.

% 4 faizlendirilecek ve eşit kalan Anuite de 5 yıl içinde itfa edilecektir.

Önce her nominal değer için itfa edilecek parçaların bulunması gerek:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

A : Anuite = 100 × 0,22463 = 22,46 Adet

A	= 22,46		
$-Z_1$	= 4,—		
T_1	= 18,46	18 Adet	0,46 Artık
+4 %	= 0,74		
T_2	= 19,20	19 »	0,66 »
+4 %	= 0,77		
T_3	= 19,97	20 »	0,63 »
+4 %	= 0,80		
T_4	= 20,77	21 »	0,40 »
+4 %	= 0,83		
+4 %	= 0,86		
T_5	= 21,60	22 »	
A	= 22,46	100 Adet	

Bölüm : (B ve D) her iki halde Anuite = 500 × 0,22463 = 112,32 adettir.

A	= 112,32		
$-Z_1$	= 20,—		
T_1	= 92,32	92 Adet	0,32 Artık
+4 %	= 3,69		
T_2	= 96,01	96 »	0,33 »
+4 %	= 3,84		
T_3	= 99,85	100 »	0,18 »
+4 %	= 3,99		
T_4	= 103,84	104 »	0,02 »
+4 %	= 4,16		
T_5	= 108,—	108 »	0,02 »
+4 %	= 4,32		
A	= 112,32	500 Adet	

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bölüm C) Anuite = 400 × 0,22463 = 89,85 Adet

A	= 89,85		
$-Z_1$	= 16,—		
T_1	= 73,85	73 Adet	0,85 Artık
+4 %	= 2,95		
T_2	= 76,80	77 »	0,65 »
+4 %	= 3,07		
T_3	= 79,87	80 »	0,52 »
+4 %	= 3,19		
T_4	= 83,06	83 »	0,58 »
+4 %	= 3,32		
T_5	= 86,38	87 »	
+4 %	= 3,46		
A	= 89,84	400 Adet	

Doğruluğu sağlamak için, bütün tahvil beheri 200 TL. olan 5000 adete ayrılır.

Anuite = 5000 × 0,22463 = 1123,15 Adet.

A	= 1123,15		
$-Z_1$	= 200,—		
T_1	= 923,15	923 Adet	0,15 Artık
+4 %	= 36,92		
T_2	= 960,07	960 »	0,22 »
+4 %	= 38,40		
T_3	= 998,47	998 »	0,69 »
+4 %	= 39,94		
T_4	= 1038,41	1039 »	0,10 »
+4 %	= 41,54		
T_5	= 1079,95	1080 »	0,05 »
+4 %	= 43,20		
A	= 1123,15	5000 Adet	

Böylece her itfanın toplam itfa ile karşılaştırılması suretiyle her yılın denkliği elde edilir ve sapmalar tahvil kısmı içinde hesaplanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Geçici Adetler	İtfa taksitleri	Hesaplanan gerekli adetler	Nihayi adetler	İtfa taksitleri
1 nci yıl				
A 18 e 2000	36000		18 e 2000	36000
B 92 e 1000	92000	5 yıldan + 1 e 100	93 e 1000	93000
C 73 e 500	36500	5 yıldan + 1 e 500	74 e 500	37000
D 92 e 200	18400	2 yıldan + 1 e 200	93 e 200	18600
	182900			184600
Toplam 923 e	184600			
200 eksik	1700			
2 nci yıl				
A 19 e 2000	38000		19 e 2000	38000
B 96 e 1000	96000		96 e 1000	96000
C 77 e 500	38500	4 yıldan + 1 e 500	78 e 500	39000
D 96 e 200	19200	1 yıldan − 1 e 200	95 e 200	19000
	191700			192000
Toplam 960 e	192000			
200 eksik	300			
3 ncü yıl				
A 20 e 2000	40000		20 e 2000	40000
B 100 e 1000	100000		100 e 1000	100000
C 80 e 500	40000		80 e 500	40000
D 100 e 200	20000	5 yıldan − 2 e 200	98 e 200	19600
	200000			
Toplam 998 e	199600			
200 fazla	400			
4 ncü yıl				
A 21 e 2000	42000		21 e 1000	42000
B 104 e 1000	104000		104 e 1000	104000
C 83 e 500	41500	2 yıldan − 1 e 500	82 e 500	41000
D 104 e 200	20800		104 e 200	20800
	208300			207800
Toplam 1039 e	207800			
200 fazla	500			

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Geçici Adetler	İtfa taksitleri	Hesaplanan gerekli adetler	Nihayi adetler	İtfa taksitleri
5 nci yıl				
A 22 e 2000	44000		22 e 2000	44000
B 108 e 1000	108000	1 yıldan : - 1 e 1000	107 e 1000	107000
C 87 e 500	43500	1 yıldan : - 1 e 500	86 e 500	43000
D 108 e 200	21600	3 yıldan + 2 e 200	110 e 200	22000
	217100			216000
Toplam 1080 e	216000			
200 fazla	1100			

Yıllık toplam itfanın denkleştirilmesi suretiyle nihai toplam itfa planı meydana gelir.

Yıl	A	B	C	D	İtfa Taksiti	Başlangıç kapitali	Faizler	Anulte
1	18	93	74	93	184600	1000000	40000	224600
2	19	96	78	95	192000	815400	32616	224616
3	20	100	80	98	199600	623400	24936	224536
4	21	104	82	104	207800	423800	16952	224752
5	22	107	86	110	216000	216000	8640	224640
	100	500	400	500	1000000	3078600	123144	1123144

Borç artıkları üzerinden hareket edilirse, önce 5 yıllık başlangıç kapitali için şu tutarlar elde edilir :

A = 2000 TL.	B = 1000 TL.	C = 500 TL.	D = 200 TL.
100 = 200000	500 = 500000	400 = 200000	500 = 100000
81,54 = 163080	407,68 = 407680	326,15 = 163075	407,68 = 81536
62,34 = 124680	311,67 = 311670	249,35 = 124675	311,67 = 62334
42,37 = 84740	211,82 = 211820	169,48 = 84740	211,82 = 42364
21,60 = 43200	107,98 = 107980	86,42 = 43210	107,98 = 21569

İtfa artıklarının TL. olarak hesaplanması veya yukarıya doğru yükseltilmesi suretiyle bu borç artıkları (adet olarak hesaplanmış) elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

A	B	C	D
100	500	400	500
82	407	326	407
63	312	248	311
43	212	169	211
22	108	85	108

Fark teşkili şu nihayi toplam itfa planını meydana getirir.

Yıl	A	B	C	D	İtfa Taksitleri	Başlangıç kapitali	Faizler	Anuite
1	18	93	74	93	184600	1000000	40000	224600
2	19	96	78	95	192000	815400	32616	224616
3	20	100	79	101	199700	623400	24936	224636
4	21	103	84	103	207600	423700	16948	224548
5	22	108	85	108	216100	216100	8644	224744
	100	500	400	500	1000000	3078600	123144	1123144

Yukarıdaki itfa planına karşılık yalnız sapmaların kayması meydana gelmiştir. Her iki halde azami limit 208 e erişmiştir. İlk plandaki azami inhriaf 122 ikinci planda 224630 karşılık 114 olur.

İtfa serbest piyasa satın alınmadan başka, kural olarak kura çekilmesi suretiyle olduğu için, tedavülde bulunan tahvillerin her nominal değerdeki parçaları arasından itfa planına uygun bir miktar kadar kura çekilmesi gerekmektedir.

Kura işleminin basitleştirilmesi için, adetler çeşitli veya aynı nominal değerleri taşıyan serilere ayrılır.

Bir serinin bütün parçaları aynı anda geri ödenir. Bu durumda itfa planı parçalara göre değil de, serilere göre yapılır.

Tama yükseltme bir serinin çok katı alınmak suretiyle, yani anuite sapmasının azamisinin en düşük seri tutarının (faizleriyle beraber) eşit olmasıyla olur.

Örneğin :

Bir istikraz beheri 1000 TL. lık 10 Adet
Bir istikraz beheri 2000 TL. lık 5 Adet
Bir istikraz beheri 10000 TL. 1 Adet

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

haiz yüz seriyi ihtiva ediyorsa, itfa planı 40000 TL. lık serilere göre yapılmalıdır. % 5 faizdeki Anuitenin inhirafı 42000 TL. sına erişir.

Serilerin itfasındaki kolaylık 1800 adet yerine 100 serinin kuraya tabi tutulmasıyla olur.

İTFA SÜRESİNİN TESBİTİ

İtfa süresinin çıkartılması aynı zamanda bu itfa taksitlerinin adedini de gösterir. Sabit kalan itfa taksitlerini içeren istikraz için çok basittir. Zira,

$$K_0 = nT \quad \text{ve} \quad n = K_0 : T$$

Sabit yıl kapasiteli istikrazlar için itfa denklemi kurası şu formülden;

$$K_0 = T_1 s_n = T_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ den devamla}$$

$$q^n = \frac{T_1 + K_0 (q-1)}{T_1} = \frac{A}{T_1}, \text{ Zira}$$

$$K_0 = (q-1) = K_0 i = Z_1 \; ; \; T_1 + Z_1 = A$$

$$K_0 = A a_n = \frac{A}{q^n} \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ den } q^n = \frac{A}{A - k_0 (q-1)} = \frac{A}{T_1},$$

Zira $K_0 = (q-1) Z_1$; $A - Z_1 = T_1$

$$A = T_1 q^n \text{ den gene } q^n = \frac{A}{T_1} \text{ veya } n = \frac{\log A - \log T_1}{\log q}$$

İtfa süresi tablodan q^n, a_n veya s_n faktörünün yardımlarıyla elde edilir. Tama yükseltilen anuite vasıtasıyla itfadaki kolaylık ilk yıldaki itfa taksidinin (% t) ve anuitenin (n+t) istikrazın : (K_0) olmasıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16 a)

$$T_1 = K_0 \frac{t}{100}\ ;\ A = K_0 \frac{p+t}{100}\ ;$$

$$q^n = \frac{A}{T_1} = \frac{p+t}{t}\ ;\ \frac{1}{a_n} = \frac{A}{K_0} = \frac{p+t}{100}$$

Borç kısımları için itfa süresinin belirlenmesinde amaca uygun olarak borçların bölümünden hareket edilir.

$$\sigma = \frac{T_1 s_m}{K_0}\ ;\ n > m > 0$$

T_1 de yerine koyarsak $K_0 \frac{1}{s_n}$ böylece

$$\sigma = \frac{q^m - 1}{q^n - 1} = \frac{i(m)}{i(n)}$$ elde edilir.

Burada borç kesrinin α itfa süresi elde edilir.

(16 b)

$$m = \frac{\log\left[1 + \sigma\left(q^n - 1\right)\right]}{\log q} = \frac{\log\left(1 + i(n)\,\sigma\right)}{\log(1+i)}$$

İtfanın, kısmı ve toplamı itfa periodlarına ait konform faiz kuralları ..ıa oranla önde gittiğini gösterir.

Örnek : 15

1.000.000 TL. lık bir istikraz % 4 le faizlendirilip, eşit 200000 TL. lık bir anuite vasıtasıyla itfa edilecektir. İtfa ne kadar süre ile devam eder?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$A = T_1 q^n$; $200000 = 160000\ q^n$;
$q^n = 1{,}25$ $K_0 = Aa_n$; $1000000 = 200000 \times a_n$;
$a_n = 5$ $K_0 = T_1 s_n$; $1000000 = 160000\ s_n$;
$s_n = 6{,}25$

her üç halde de tablodan (n) nin 5 ve 6 yıl arasında olduğu görülür. s_n nin kullanılmasında,

$s_n = 1 + III^4_{n-1} = 6{,}25$; $III^4_{n-1} = 5{,}25$ böylece, $n-1$
4 ile 5 yıl arasında olduğuna göre dikkat gerekir. Tam kesin değer, kademeli hesaplamakla veya interpolasyonla olur; $n = 5{,}69$

$T_1 = 160000$ kapitalin $t = \%\ 16$ olduğu dikkate alınır. Bu nedenle (16 a) ya göre:

$$q^n = \frac{4 + 16}{16} = 1{,}25$$

Örnek : 16

Bir istikraz % 5 le faizlenecek ve % 3 lü faiz ilâvesiyle itfa edilecektir. Burada süre ne kadardır?

$$p = 5 \quad t = 3, \quad q^n = \frac{5 + 3}{3} = 2{,}67 \quad n = 20 \text{ ve } 21 \text{ yıl}$$

arasında olur, kesin olarak $n = 20{,}103$ dür.

Yüzdelik anulte metodundaki itfa süresinin istikrazın tutarıyla bağıntısız olduğuna dikkat edilmelidir.

Örneğin :

$K_0 = 10000$ konursa böylece $A = 800$ ve $K_0 = Aa_n$;
$10000 = 800\ a_n$; $a_n = 12{,}5$ olur.

Örnek : 17

100000 TL. lık bir istikraz % 4,5 faizlendirilecek ve % 6 ile itfa edilecektir. Bu nasıl olacak ve itfa ne kadar sürecektir?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) İhtiyat itfasında borçlu yılda 4500 TL. lık faiz ve 6000 TL. lık itfa ilâvesi ödeyecektir.

İtfa süresi $K_o = Ts_n$ aracılığıyla verilmiştir. Yani;
$100000 = 6000$ veya $s_n = 16,6667$; $n = 12$ ve 13yıl arasındadır.

$K_o = Ts_{12}\, q + R$ yerine konur ve 13 yılın sonunda ; $R = K_o - Ts_{12}\, q$

$= K_o - T \times III^{4,5}_{12} = 100000 - 6000 \times 16,15991 = 3040,54$ elde edilir.

Sonuçda borçlu, $4500 + 3040,54 = 7540,54$ öder.

b) Anuite itfasında birbirine uygun yüklemler meydana gelir.
$K_o = Aa_n$ yani $100000 = 10500 \times a_n = a = 9,52381$; $n = 12,71814$ kesintiye uğrayan süre; $y = 0,71814$; bu yüzden artık ödeme $10500 \times 0,71814 = 8540,47$ (Onüçüncü yılın sonunda) olur.

FAİZ FİATININ SAPTANMASI

Faiz fiatı (p) ve faiz faktörünün q çıkarılmasında bazı zorluklarla karşılaşılır.

İtfa ve Anuite denklemleri yüksek dereceli denklemlere yönelir.

Örneğin :

$$K_o = Aa_n = \frac{A}{q^n}\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

formülünün

$$K_o\, q^{n+1} - (K_o + A)\, q^n + A = 0$$

Pratik çözüm yolu, bu yüzden interpolasyonla olur.

Örnek : 18

120000 TL. lık bir istikraz 20 yıl süreyle 10000 TL. lık eşit anuitelerle faizlendirilecek ve itfa edilecektir. Faiz fiatı ne kadardır?

$K_o = Aa_n$; $a_{20} = 120000 : 10000 = 12$; $p = \%\ 5,45$

Bu formülün hesaplanması trigonometrik denkleme yönelir.

$$12 \times q^{21} - 13 \times q^{20} + 1 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü : q = 1,0545 dir. Örneğin : 135903,30 TL. lık bir istikraz aynı şartlar altında faizlendirilip ve itfa edildiği takdirde,

$a_n = 13,95033$ ve $p = \%\ 4$ tam olarak hesaplanacaktır.

PEYLİ İTFA

İstikrazların arasında yalnız borç miktarı değil bundan başka pey veya Acio ödenir: Bu da itfa taksitinin yüzdesi ile hesaplanır % α tutarında pey akçesi, her itfada 100 TL.lık yerine (100 + α) TL. geri ödenecek demektir.

Eşit itfa taksitlerinin itfa planı peyli itfaya göre değişmez, yalnız bir pey sütunu eklenir ve anuite peyle beraber büyür. Faizler ve yıllık yüklemler azalan aritmetik dizi karekteristiğini gösterirler ve net itfa taksitlerinin fazleri kadar küçülürler.

Örnek : 19

Birinci örnektekine % 12 ödenecektir. İtfa taksidi şimdiye kadar olduğu gibi 200000 TL. olarak kalır, yıllık pey

200.000 × 0,12 = 24000 TL. dır.

Bu duruma göre aşağıdaki itfa planı meydana gelir:

Yıl	Başlangıç Kapitali	Faiz % 4	Net itfa taksidi % 20	Pey % 12	Geri Ödeme % 22,4	Anuite
1	1000000	40000	200000	24000	224000	264000
2	800000	32000	200000	24000	224000	256000
3	600000	24000	200000	24000	224000	248000
4	400000	16000	200000	24000	224000	240000
5	200000	8000	200000	24000	224000	232000
		120000	1000000	120000	1120000	1240000

Azalan Anuitenin farkı : 200000 × 0,04 = 8000 TL. dır.

Yıllık kapasitelerindeki faizleri ve net itfa taksitleri eşit olan istikrazlarda ilâve olarak bir pey ödenir ve böylece devamlı çıkan anuite elde edilir. Zira kati yüzdeli yıllık pey tutarları yükselen net itfa taksitlerinden hesap edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu durumda eski itfa tablosu (peysiz) olarak geçerlidir; Yalnız bir ek pey sütunu konur ve Anuitelerle uygun oranla büyürler. Bu ana kadar geliştirilen formüller böylece yine geçerli olurlar.

Örnek : 20

Örnek 3 de gösterilen probleme, faizlerin toplam tutarı ile net itfa taksitleri yılda eşit kalacak şekilde, % 12 bir ilâve pey ödenecektir. Burada itfa tablosu değişmez, bir (pey sütunu) eklenir.

Yıl	Başlangıç Kapitali	Faiz % 4	Net itfa taksiti	Pey % 12	Geri ödeme	Anuite
1	1000000	40000	184630	22155,60	206785,60	246785,60
2	815370	32614,80	192015,20	23041,82	215057,02	247671,82
3	623354,80	24934,19	199695,81	23963,50	223659,31	248593,50
4	423658,99	16946,36	207683,64	24922,04	232605,68	249552,04
5	215975,35	8639,01	215975,35	25917,04	241892,39	250531,10
		123134,36	1000000,—	120000,—	1120000,—	1243134,36

Küpürlere ayrılmış kapitaller (tahviller) için bu düşünceler geçerlidir. Beheri 500 TL. lık küpürler şu itfa tablosunu meydana getirir:

Yıl	Küpür sayısı	Başlangıç kapitali	Faiz % 4	Net itfa	Pey % 12	Geri Ödeme	Anuite
1	369	1000000	40000	184500	22140	206640	246640
2	384	815500	32620	192000	23040	215040	247860
3	399	623500	24940	199500	23940	223440	248380
4	416	424000	16960	208000	24960	232960	249920
5	432	216000	8640	216000	25920	241920	250560
	2000		123160	1000000	120000	1120000	1243160

Şimdiye kadar itfa tabloları önce peysiz olarak yapıldığından ve pey hesapları ek olarak meydana çıkarken, toplam yıllık kapasitelerin eşit olması (yani faiz toplamlarının, itfa taksitlerinin ve peyin) talebi karşısında ise hesap kuralları değişirler.

Bu durumda pey'e götürülmüş eşit kalan anuite vasıtasıyla bir itfa meydana gelir.

Burada rant hesaplarını kullanmak için yardımcı veya yedek değerler bulmak gereklidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Şayet rant anuite olarak pey ihtiva ediyorsa, mevcut kapitali (K_o) değil, aksine bunu, toplam pey kadar çoğaltılmış şekliyle, nakit değerinin karşısına koymak geerkir.

Bu yüzden yedek kapital olarak : Bu değeri gösteririz.

$$(17) \qquad K_o^* = K_o\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) > K_o$$

Bu fazlalaştırılmış kapital itfaya tabi olursa, böylece itfa taksitleri ve anuite aynı zamanda da eski pey'i ihtiva ederler. Yedek kapitalin konmasiyle bunu eski mevcut p ile (faiz fiatiyle) faizlendirilmesi mümkün değildir.

Çünkü pey'de kapital olarak faizlendirilmiş olurdu.

Bundan dolayı K_o formülünde kullanılabilinen % p li K_o^* faizi gibi eşit faizler veren bir yedek basit faiz (p^*) tespit etmek gerekir.

Böylece şu formül elde edilir:

$$(18) \qquad K_o \frac{p}{100} = K_o^* \frac{p^*}{100} = K_o\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)\frac{p^*}{100} \; ; \; p^* = \frac{p}{1 + \frac{\alpha}{100}} < p$$

Örneğin; $\alpha = \%\ 8$ için, $1 + \frac{\alpha}{100} = 1{,}08$

kapital 1,08 ile çarpılıp ve faiz fiatı (p), 1,08 e bölünmelidir.

Bu şartlar altında, eşit kalan anuiteler sayesinde itfa için geliştiriten kaide ve formüller aynı zamanda pey'i içeren itfa içinde geçerlidir. Yalnız buradaki K_o ve p değerlerinin yerine K_o^* ve p^* yardımcı değerler konur ve T^* den itfa taksiti + pey anlaşılır.

Net itfa buradan yedek faktörün bölünmesi suretiyle elde edilir.

$$1 + \frac{\alpha}{100}, \quad T = T^* : \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 21

1.000.000 TL. lık bir istikraz % 3,5 faizlendirilecek ve % 12 lik bir peyle 5 yıl esnasında itfa edilecektir ki anuite faizleri itfa taksitleri ve pey eşit kalsın.

$$\alpha = 12 \; ; \; 1 + \frac{\alpha}{100} = 1{,}12; \; K_0^* = 1000000 \times 1{,}12 = 1120000 \; ; \; p = 3{,}5 \; ;$$

$$p^* = \frac{3{,}5}{1{,}12} = \%\ 3\ 1/8$$ Bundan sonra $A^* = K_0^* : a_n^* = K_0^* \times V_5^{3\ 1/8} =$ 1120000 × 0,21913 = 245425,60 sonraki kademeli hesaplama tam olarak:

$$1120000 \; \frac{1{,}03125^5 \times 0{,}03125}{1{,}03125^5 - 1} = 245430{,}63$$

İtfa tablosu şöyle olur (A^* için tam değer alınır) :

A^*	= 245430,63			
$-Z_1$	= 35000,—	yani 1000000 in % 3,5 veya 1120000 in % 3 1/8		
T_1^*	= 210430,63	(: 1,12 = 187900)	188 Adet	—100 Artık
+ % 3 1/8	= 6575,96			
T_2^*	= 217006,59	(: 1,12 = 193800)	194 "	—300 "
+ % 3 1/8	= 6781,46			
T_3^*	= 223788,05	(: 1,12 = 199800)	200 "	—500 "
+ % 3 1/8	= 6993,38			
T_4^*	= 230781,43	(: 1,12 = 206000)	206 "	—500 "
+ % 3 1/8	= 7211,92			
T_5^*	= 237993,35	(: 1,12 = 212500)	212 "	
		1000000	1000 Adet	1000,—
+ % 3 1/8	= 7437,29			
A^*	= 245430,64			

T^* itfa taksitleri % 12 pey'i ihtiva eder. Net itfa taksitleri T (1,12) nin bölümüyle (yüzde olarak % 12) elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Adedi 1000 TL. lık ayrımlarda itfa edilecek adetler yine bölme ile elde edilir. Doğrudan doğruya küpürler halinde de hesap edilebilir.

$K_o^* = 1000$ Adet % 12 si ve ilâve pey, yani küpürlere mutlaka pey'de ilâve edilir.

$A^* = 1000 \times 0{,}21913 = 219{,}13$ Adet

A^*	$= 219{,}13$		
$-Z_1$	$= 31{,}25$	yani 1000 in % 3 1/8	
T_1^*	$= 187{,}88$	188 Adet	—0,12 Artık
$+$ % 3 1/8	$= 5{,}87$		
T_2^*	$= 193{,}75$	194 »	—0,37 »
$+$ % 3 1/8	$= 6{,}06$		
T_3^*	$= 199{,}81$	200 »	—0,56 »
$+$ % 3 1/8	$= 6.24$		
T_4^*	$= 206{,}05$	206 »	—0,51 »
$+$ % 3 1/8	$= 6{,}44$		
T_5^*	$= 212{,}49$	212 »	—0,02 »
$+$ % 3 1/8	$= 6{,}64$		
A^*	$= 219{,}13$	1000 Adet	

Buna göre şu nihai itfa tablosu meydana gelir.

Yıl	Başlangıç kapitali	Faiz % 3 1/8	Küpür adedi	Net itfa	Pey % 12	Geri ödeme	Anuite
1	1000000	35000	188	188000	22560	210560	245560
2	812000	28420	194	194000	23280	217280	245700
3	618000	21630	200	200000	24000	224000	245630
4	418000	14630	206	206000	24720	230720	245350
5	212000	7420	212	212000	25440	237440	244860
		107100	1000	1000000	120000	1120000	1227100

Örnek : 22

Beheri 1000 TL. lık küpürlere ayrılmış 500000 TL. lık bir istikraz % 5 faizle ve eşit kalan anuiteler ve ayrıca % 10 pey'le 40 yıl süreyle itfa edilecekse;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) 30 yıldaki itfa ne kadardır?

b) 20 yıl sonraki artık borç ne kadardır?

c) 25 yılındaki faizler ne kadardır?

$\alpha = 10$ yedek faktör $= 1{,}10$; $K_0^* = 550000$, $p^* = 5 : 1{,}10 = 4\ 6/11 = \%\ 4{,}545$ $A^* = 550000 \times V_{40}^{4\ 6/11} = 550000 \times 0{,}054695 = 30082{,}25$, yani 30082,25 : 1100 = 27,35 adet veya doğrudan doğruya $500 \times 0{,}054695 = 27{,}35$; $Z^1 = 2500$; $T^{1*} = 5082{,}25$ pey dahil $T_1 = T_1^* : 1{,}1 = 4620{,}25$ net itfa taksiti, yani 4,62 adet.

a) $T^*_{30} = T_1^* q^{29} = 5082{,}25 = I_{29}^{4\ 6/11} = 5082{,}25 \times 3{,}63193 = 18458$ ve pey dahil; 18458 : 1,1 = 16780 net itfa taksiti veya $4{,}62 \times 3{,}63193 = 16{,}78$

b) $K_{20}^* = A^* a^*_{20} = 30082{,}25 \times 12{,}958824 = 389835$ pey dahil net kapital artığı : $K_0 = 389{,}835 : 1{,}1 = 354{,}395$

c) Önce K^*_{24} artık kapital hesaplanmalıdır. $K^*_{24} = A^* a^*_{16} = 30082{,}25 \times 11{,}19836 = 336876$ ve pey dahil; 336876 : 1,1 = 306251 ; $Z_{25} = 306251 \times 0{,}05 = 15312{,}55$ veya $336876 \times 0{,}04\ 6/11 = 15312{,}55$

Örnek : 23

100000 TL. lık bir borç % 4 le faizlendirilecek ve 10000 TL. lık eşit kalan anuitelerle % 5 pey dahil itfa edilecektir?

$K_0^* = 105000$; $p^* = 4 : 1{,}05 = \%\ 3{,}81$;

$A^* = K_0^* : IV_n^{3{,}81} = 105000 : 10000 = 10{,}5$;

n = % 3,5 ve % 4 için ve dolayısıyla % 3,81 için 13 ve 14 yılları arasındadır.

İnterpolasyon işlemi gereklidir. $IV_{13}^{3{,}81}$, $IV_{14}^{3{,}81}$ ve arada bulunur. $13 < n < 14$ için ilk yılların 13 tam anuitesi alınırsa 14 ncü yılın sonundaki artık ödeme :

$(K_0^* - A^* a^*_{13}) \times q^{*14} = (105000 - 10000 \times IV_{13}^{3{,}81})$

$I_{14}^{3{,}81} = (105000 - 10000 \times 10{,}10614)\ 1{,}68874 = 6651{,}25$ TL. olur.

Örnek : 24

300000 TL. lık bir istikraz (borcu) 10 yıl süreyle ve 40000 TL. lık + (% 4 pey) bir anuiteyle itfa edilecektir. Hangi faiz fiatıyle bu mümkündür?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$K_o^x = 312000$; $K_o^* = A^* a^*_{10}$; $312000 = 40000 \times a^x_{10}$;

$a^*_{10} = IV^{p*}_{10} = 7,8$; $p^* = \%\ 4,5$ ile $\%\ 5$ arasındadır.

$p^* = 4,795$; $p = 4,7959 \times 1,04 = \%\ 4,99$

Pey'in ödenmesi diğer anlamda kapitalin yüksek faiz olarak değerlendirilebilir. Mevcut faizler devamlı surette ödenir pey şeklindeki faiz ilâvesi, borcun itfası şeklinde ortaya çıkar. Pey'li havi aynı Anuite ($A^* = K_o^* : a_n^*$) eşit sureli itfalarla, peysiz itfalar ve yüksek $p^+ > p$ faizler için kullanabiliriz. Burada $A^* = A^+ = K_o : a_n^+$ konur. Şimdiye kadar olan Anuite A^* pey dahil yeni Anuite ise A^+ peysizdir.

(19)
$$a_n^+ = \frac{K_o}{A^*} = \frac{K_o \times a_n^*}{K_o^*} = \frac{a_n^*}{1 + \frac{\alpha}{100}}$$

formülünden pp^+ çıkartılabilir. Borçlunun, peyli veya daha yüksek bir faizle itfa etmesi, kendisi için çok önemli değildir.

Zira o her iki durumda da aynı yıllık yüklemleri yapmak zorunluğundadır. Bu kez ters yoldan pey'i (α) tespit etmek için, eşit anuitedeki (şimdiye kadar A^+ peysiz yeni anuite A^* peyli α ye eşittir) ve daha düşük faizlendirilmesini p^+ teşkil eder, değerini, 19 nolu formüle göre değiştirmek gerekir.

$$K_o^* = A^* a_n^* = A^* \frac{1 - v^{*n}}{i^*} \text{ ve } K_o^* i^* = A^* (1 - v^{*n}) = K_o i \text{ eder.}$$

veya

(20)
$$V^{*n} = 1 - \frac{K_o}{A^*} i$$

elde edilir. 19 nolu formüle göre, 20 deki $\frac{K_o}{K^*}$ için $= a_n^+$ dersek

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(21) $\boxed{V^{*n} = 1 - ia_n^+ \text{ dir.}}$

Burada ilk defa p^* ve dolayısıyla da α bulunur. Ters olarak 19 ve 21 yerine p^+ hesaplanır, eğer p ve p^* verilmiş ise :

Örnek : 25

22 nolu örnekte gösterilen istikraz, peysiz, eşit kalan bir anuite aracılığı ile yüksek faiz itfa edilecektir.

$p = \%\ 5$; $p^* = \%\ 4{,}545$; $p^+ > \%\ 5$ aranmaktadır.

$x = 30082$ pey dahil : $\alpha = 10$; $1 + \frac{\alpha}{100} = 1{,}1$; $\frac{1}{a^*_{40}} = 0{,}05470$

0,05470 (19) a göre 1 : $a_n^* = (1 + \frac{\alpha}{100}) : a_n^* = 1{,}1 \times 0{,}05470 = 0{,}06017$

veya 1 : $a_n^+ = A^x : K_o = 0{,}06017$; p^+ % 5 ile % 5,5 arasındadır.

Yine 21 nolu formülden $a_n^+ = (1 - V^{xn}) : i$; bunun için ilk kez v^{*40} hesaplanması gerekir. Lineer interporlasyonla $p^+ = 5{,}2339$; yani % 10 luk bir pey, % 0,2339 luk bir ilâve faize karşılık gelecektir. Peysiz yeni Anuite $A^+ = 30082$ olarak kalır. Yeni itfa taksiti $T_1^+ = 30082 - 26169{,}5 = 3912{,}5$ zira 500000 in % 5,2339 u = 26169,5 olur. Şimdiye kadar olan itfa $T_1 = 4620$ ve pey dahil yani daha yüksektir.

Aynı zamanda yeni itfa taksiti $T^+_{30} = T^+_1\ p^{+29} = 3912{,}5 \times 40055 = 17217$ Şimdiye kadar $T^+_{30} = 16780$ (pey dahil) yani daha düşüktür.

Peyli itfalarda (yani daha küçük faiz fiatında) ilk itfa taksitleri önce büyük ve belli bir yıldan sonra peysiz itfadaki gibi küçülür. (Yani daha az bir faiz fiatıyla faizlenir.) Buna karşılık ilk durumdaki toplam itfa edilen kapital her zaman büyüktür ve bu nedenle artık borç devamlı küçüktür.

Örnek : 26

22 ci problemdeki pey ne kadar seçilmeli ki, alacaklı $p^+ = \%\ 6$ lık gerçek bir faiz olabilsin?

Anuite o şekilde bulunmalı ki: $A^* = K_o : a^+_{40} = 500000 \times 0{,}06646 = 33230$ olan bu değer $(p^+ > 5{,}2339)$ dan daha büyük olsun. Bu peysiz Anuite, 19 nolu formüle göre peyli bir anuiteye çevrilmelidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Formüllerde α ve i^* değerleri meydana geldiğinden 21 nolu formülü de değiştirmek gerekir, ve

$v^{*40} = 1 - ia_n^+ = 1 - 0{,}05 \times 15{,}04630 = 0{,}24769$;

$p^* = 3{,}5551$; $1 + \frac{}{} = p$: $p^* = 5 : 5551 = 1{,}406$; $\alpha = \%\ 40{,}6$ elde edilir.

TAM YIL ÜZERİNDEN YAPILMAYAN İTFA; SÜREKLİ ANUİTELER :

Şimdiye kadar olan düşünce biçimlerinde ilk şart faiz ve itfa sürülerinin birbirleriyle tam uygunluk halinde olmaları gerekmekte idi: Bu nedenle, tam yıl üzerinden yapılan süreler de bu formüller için geçerlidir. Örneğin, 6 aylık faiz ödenmesi ve itfa halinde, itfa tablosu da 6 aylık olarak, yani yıl olarak ifade edilen (n) süre sayısının iki katı olarak tabloya geçirmekle ifade edilir. Yalnız burada dikkat edilecek nokta 6 aylık bir faiz fiatının dikkate alınmasıdır. Buna rağmen, faiz ve itfa sürelerinin birbirlerine uyması halinde, matematik yolla bir faiz ve itfa süresi yaklaşması yapılmalıdır. Burada bahsedilen, faiz fiatının küçük bir zaman birimine değiştirilmesidir.

Zira itfa sürelerinin faiz sürelerinden daha az olduğu durumlarda pratikte, anlam kazanmadığı açıktır.

En fazla ifade şekli 6 aylık olanıdır. Burada itfa tablosu, genellikle yıllık faiz ödenmesi tahtında iki katı sömestir faiz fiatı olarak, yani relatif faiz fiatı olarak yapılır. Tabii ki, konform yıllık faiz fiatı esas alınmalıdır.

Örnek : 27

400000 TL. lık bir istikraz, 15 yıl süreyle % 3 lük yarım yıllık (sömestir) faiz fiatıyla faizlendirilecek ve eşit kalan anuiteler 6 ayda itfa edilecek $A = K_n : a_{30} = 400000 \times 0{,}05102 = 20408$, yani yılda 40816 TL. getirecek.

$T_1 = 20408 - 12000 = 8408$; $T_2 = 8408 \times 1{,}02 = 8660{,}24$, yani ilk yılda 23747,76 TL. lık faizin ödenmesi gerekecektir.

($Z_1 = 12000$; $Z_2 = 11747{,}76 = 391592$ nin % 3) ve 17068,24 TL. itfa edilecek bu durumda toplam 40816 TL. itfa edilmelidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İtfa yablosu şu şekli alır.

Yıl	Başlangıçtaki artık borç	% 3 faiz	İtfa taksitleri	Anuite
1/2				20408
	400000	12000	8408	1. Yıl
1	391592	11747,76	8660,24	20408
1 1/2	382931,76	11487,95	8920,05	20408
				2. Yıl v.s.
2	374011,71	11220,35	9187,65	20408

İhtiyat itfasında 6 aylık 12000 T. Liralık faiz ve 8408 TL. itfa ilâvesi olarak = 2,102 ödemek gerekir.

Örnek : 28

27 deki aynı istikraz % 6 p.a 6 aylık süreyle faizlendirilip ve tam yıl üzerinden itfa edilecektir.

Burada çeşitli çözüm imkânları vardır.

a) Faiz % 3 le 6 aylık yapıldığı halde itfa tablosu yıllık faizin % 6 olması dolayısıyla tabloya konulacaktır.

$A = K_0 : a_n = 400000 \times 0{,}10296 = 41184$ yıllık ;

$T_1 = 41184 - 24000 = 17184$ yıllık.

Yıl	Başlangıçtaki artık borç	% 6 faiz	İtfa taksitleri	Anuite
1	400000	24000	17184	41184
2	382816	22968,96	18215,04	41184
3	364600,96	21876,06	19307,94	41184 v.s.

Faizler 6 aylık üzerinden ödenir; ve itfa taksitleri ise tam yıl üzerinden itfa edilir. Halbuki faiz bu yüzden $q' = 1{,}03^2 = 1{,}0609$, nedeniyle yılda $p' = \%\ 6{,}09$ olur.

İtfa oranı % 6 ile faizli olduğundan, uygulamada çift faiz fiatı var demektir. Bu en açık olarak ihtiyat itfalarında görülür. Bu durumda 6 yıllık 12000 TL. lık faiz ödenmelidir. Yani yılda % 6.09 ve her yılın

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

sonunda 17184 TL. lık itfa ilâvesinin = % 2,296 kadar ödenmelidir. Sonunda 17184 TL. lık itfa ilâvesinin = % 2,296 kadar ödenmelidir. Bu da % 6 lık bir faizle toplam 400000 TL. lık bir ihtiyat itfasına eşittir. $17184 \times s_{15} = K_0$, artık borçlar böylece % 0,09 kadar fazla faizlendirirler. Gerçekte bir fazla faiz ödemesi vardır.

Birinci yıl 360 TL. ikinci yıl 344,53 TL. üçüncü yıl 228,14 TL. v.s. ki bunlar itfa tablosunda gösterilmezler. Bu yüzden itfa taksitleri, tam % 6,09 luk tasarruf edilen faiz kadar büyümezler; gerçekte anuiteler fazla faizler kadar büyüktür ve düşen bir dizi gösterirler. İhtiyat itfasında alacaklı bütün bir borç için % 6,09 alır, kendisinin itfa ilâvesine de % 6 faiz elde etmesi gerekir.

b) Diğer alacaklı bütün bu borç ve tam geçerli süre içinde % 6,09 bir faizi garantiye almak istediğinde, iki katlı faiz fiatı hesaplanmalıdır.

11 nolu formülde faiz fiatını yerine koyalım.

$i = 0{,}0609$ ve $i' = 0{,}06$, böylece anuite

$\mu = K_0 : a'_{15} + K_0 (i - i') = 400000 \times 0{,}10296 + 400000 \times 0{,}0099 = 41544$; yani anuite faiz farkı kadar büyük olmalıdır. İhtiyat itfasında gerçekten bu durum vardır; 12000 TL. 6 aylık faizi yılda 24360 TL. eder. Böylece itfa ilâvesi $\zeta = \mu - K_0 i = 17184$ değişmeden kalır.

Anuite itfasında, faiz ödemesini de ihtiva eden bir başka itfa tablosu meydana gelir. İtfa taksitleri ζ_m (13) formüle göre

$$\mu - K_0 i = 41544 - 24360 = 17184 = \zeta_1 1 + 0{,}0009 \times a'_{14}) = \zeta_1 \times 1{,}00836$$

$$\zeta_1 = 17042 \quad \mu - K_1 i = 41544 - 23322{,}14 = 18221{,}86 = (1 + 0{,}0009 \times a'_{13})$$

$$= \zeta_1 \times 1{,}00797 \; ; \; \zeta_2 = 18078$$

$$\mu - K_0 i = 41544 - 22221{,}19 = 19322{,}81 = \zeta_2 (1 + 0{,}0009 \times a'_{12}) =$$

$$\zeta_3 \times 1{,}00755 \; ; \; \zeta_1 = 19178 \text{ v.s.}$$

Yıl	Başlangıçtaki artık borç	Faiz % 0,69	İtfa taksiti	Faiz ödemesi	Anuite
1	400000	24360	17042	142	41544
2	382959	23322,14	18078	143,86	41544
3	364880	22221,19	19178	144,81	41544 v.s.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Faiz ödemelerine göre kalan anuite artığı (geri ödeme olarak adlandırılır) kısmi itfaya hizmet eder. Diğer meblâğ itfa edilen tutarların % 9 faiz fiatı farkları için bir faiz ödemesidir. İtfa taksitleri bu plana göre önce daha düşüktürler, fakat sonra önceki tablodakini de geçerler. Son yılda $\mu - K_{14}\, i = \zeta_{15}\ (1 + 0{,}0009 \times a'_{\overline{0}}) = \zeta_{15}$, yani en son itfa taksiti, bütün toplam anuite artığına eşittir. Fakat artıklar, önceki plandaki itfa taksitlerinden daha kuvvetli büyüdükleri için (her ikisi de ilk yılda 17184 ile başlar), itfa ikinci tabloda büyümek zorundadır. Bu nedenle faiz ödemesi başlangıçta büyür, fakat sonraları sıfıra kadar küçülür.

c) Eğer; toplam borç üzerinden % 6,09 faizle 41184 TL. lık bir anuiteye erişmek istenirse, (görünüşte aynı seviyede kalırsa da gerçekte $41184 + 360 = 41544$ le başlıyarak küçülür), o zaman bu pratik olarak mümkün değildir. (11) formülde yerine koyarsak,

$i = 0{,}0609$, $\mu = 41184$, $\zeta = 41184 - 24360 = 16824$ o zaman,

$K_0 = \zeta s'_{\overline{n}}$ veya $s'_{\overline{15}} = 23{,}7755$ buradan $p' = 6{,}276$ $p = \%\ 6{,}09$ çıkar. İtfa ilâvesi ζ, % 6,276 olarak yatırılmalı ve anuite itfasında faiz artığı negatif olur, yani alacaklı % 6,09 elde edebilmek için, borçluya ayrıca dışardan ödemede bulunurdu. Bu teorik olarak hesaplanabilirse de, pratikte anlamsız olur.

d) Diğer bir imkânda faiz sürelerini itfa sürelerine konform olarak uydurmaktır.

Bu da bir birimle % 6,09 yıllık itfa ve faizlendirmekle olur.

İtfa taksitleri böylece tam tasarruf edilen itfalar kadar büyürler. $A = K_0 : a_{\overline{n}} = 400000 \times 0{,}10357 = 41428$ olur.

Bu anuite ilk tabloya karşılık olarak eşittir ve görünen 41184 anuiteden daha büyüktür.

Yıllık faizler sonradan iki altı aylık faiz tutarlarına 6 aylık % 3 ödemek suretiyle bölünebilirler.

Buna göre aşağıdaki üçüncü bir itfa tablosu meydana gelir.

Yıl	Başlangıçtaki artık borç	6 aylık %.3 faiz	Faiz % 6,09	İtfa taksiti	Anuite
1	364824,56	12000	24360	17068	41428
2	382932	11487,96	23320,56	18107,44	41428
3	364824,56	10944,74	22217,82	19210,82	41428 v.s.

Örneğin : 3 üncü yıldaki 364824,56 nin % 3 = 10944,74
10944,74 × 0,03 = 328,34 ; 2 × 10944,74 + 328,34 = 22217,83 = 364824,56 nin % 6,09 a ; 17068 × 10609^2 = 19210,18 ihtiyat itfasında, itfa ilâvesi olarak 17068 TL. ödenir, bu % 6,09 yani 6 ayda % 3 ile yatırılmak, bundan başka 6 aylık 12000 TL. faiz getirecektir.

DEĞİŞEN ANUİTELER; İKRAMİYELİ İSTİKRAZ

Anuitelerin tesbiti istenildiği gibi yapılabilir. Bütün anu telerin parasal değeri borç kapitale eşit olursa burada anuiteler faizleri (gösterilmeden) kapsarlar. Fakat; örneğin kısmî borç amortismanlarında faizler ayrıca hesap edilmek istenirse, o zaman artık olarak bir itfa ilâvesi meydana gelir. Bu da ya ihtiyat olarak faizlendirilir veya itfa taksitinin ilâve tasarruf edilmiş faizi olarak geri ödemede kullanılır.

Örnek : 29

120000 TL. lık bir borç 5 yıl içinde şu anuitelerle itfa edilecektir. 18000 TL. lık, 20000 TL. 30000 TL. ve 35000 TL. ve % 6 lık bir bileşik faizle son anuite ne kadardır?

Faizler yıllık ve ekstra ödendiği takdirde itfa tablosu nasıl bir şekil alır,

120000 = 18000 v + 20000 v^2 ÷ 30000 v^3 + 35000 v^4 + × v^5 ;
x = 43234 Buna göre itfa planı,

Yıl	Başlangıçtaki borç artığı	% 6 Faiz	İtfa taksiti	Anuite
1	120000	7200	10800	18000
2	109200	6552	13448	20000
3	95752	5745,12	24254,88	30000
4	71497,12	4289,83	30710,17	35000
5	40786,05	2447,22	40786,95	43234,17

İtfa taksitleri, öndeki itfa taksitlerinin faizleri anuite miktarı kadar büyürler. Örneğin; 4 cü yılda : 24254,88 × 1,06 + 5000 = 30710,17 ikramiyeli istikrazlarda (piyango veya kura istikrazları) anuitenin içinde bulunan yıllık pey tutarları, nominal değer oranına göre bir adet üzerinden hesaplanmazlar, kura çekme ile (piyango) ikramiyesi olarak çekilişe tabi tutulurlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İtfa edilecek serilerin çekimini ihtiva eden seri itfa piyangolarının yanında kâr veya ikramiye çekilişlerini de ayırdetmek gerekir. İkramiye rastlamıyan adetler (küpürler) en az nominal değeri üzerinden itfa edilir. Kâr isabet eden çekilişler nominal değeri üzerinden, ikramiye ilâvesi ile birlikte ödenirler. Faizlendirme, büyük ikramiye fonu elde etmek için, ekseri çok düşük tutulur.

BORSA HESAPLARI (KUR HESAPLARI)

Borsa ve efektif faizler hakkında genel bilgiler: 10 yıl sonra % 4 ödenecek 10.000 TL. lık parasal borç talebi bileşik faizinde hesaba katılmasıyla 14,802,40 TL. ye yükselir. Eğer, bu tutar üç yıl sonra çekilecek veya terk edilecek olursa, o zaman değeri buradaki faiz fiatına bağlıdır. % 4 luk bir iskonto 11248,60 TL. yı verir. İstekli olan % 5 bir faiz isterse, o halde talep için 10519,80 TL. ödeyecektir. Yedi yıl süreyle faizler % 5 ten 14802,40 TL. olurlar. Eğer istekli buna karşılık % 3 lük bir faizden memnunsa, hatta 12,035,70 TL. ödemeye bile hazırdır, zira bu 7 yılda % 5 ten 14802,10 TL. ya baliğ olacaktır. Yüksek faiz düşük bir değerlendirmeye veya aksine gider. Aynı düşünce tarzı, büyük sayıda ve ilerideki çeşitli kapital yüklemlerinde de değerlendirilmelidir. Genel olarak K büyüklüğündeki bir kapital talebi, (n) anuiteler aracılığıyla, A_1 den A_n e kadar % p ile fazilendirilip itfa edilecekse, o zaman kapital bütün anuitelerin parasal toplamına eşittir. % p ile faizlendirilecek

$$(22) \quad K = A_1 \partial + A_2 \partial^2 + \ldots\ldots\ldots + A_n \partial^n$$

Bu istekteki bir kişi % p faiz elde etmek istediğinde onun değeri R yı anuite faizinin çıkarılmasıyla (% p yi) elde eder.

$$(23) \quad R = A_1 b + A_2 b + \ldots\ldots\ldots + A_n b^n$$

K kapitalin nominal veya itibari değeri p; nominal faiz olarak, R kapitalin (Reel kapitalin) gerçek veya efektif değeri olarak ve p efektif veya reel faiz olarak adlandırılır.

K ve p nominal değerleri ilk borç anlaşmasında kararlaştırılmış olup değiştirilemezler. Gerçek (reel) R ve p değerleri kapital değerlendirilmesi ve gerçek faiz miktarına ait düşüncelere etki eder, ve oranına göre ayarlanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bir reel kapital, nominal kapital yüzde oranına genişletilirse, bu oranı (tedavül değeri) veya borsa değeri (C) = rayiç diye adlandırılır.

$$(24) \qquad c = \frac{R}{K}$$

Buna göre, rayiç 100 nominal değerin gerçek kapital değeridir. (Burada gerçek faiz genişletilir).

Yukarıda gösterilen örnekte K = 11248,60 (% 4 le) olur. 10519,80 ve 12035,70 lik her iki reel kapitalin tedavül borsa değeri % 93,5 tur. (% 5 e genişletilmiş) ve 107 dir (% 3 e genişletilmiş) Nominal kapital için rayiç değeri % 100 dür. 22'den 24'e kadar olan eşitliklerden genel olarak p> p daima R < K ve C < % 100 dür, veya tersidir.

Gerçek faiz nominalden küçük, eşit veya daha büyük olduğu zaman borsa fiatı da buna göre yüksek, daha yüksek veya 100'ün altında da olur. O da düşen (p) faktörü ile büyür ve yükselen (p) ile de küçülür. Efektif p), nominal faiz (p) eşit olduğu zaman, borsa fiatları başa baştır denir. Eğer, borç itibari değeri üzerinden ödenirse, o halde borsa fiatı % 100 e eşittir. Peyli ödemelerde ise % 100 ün üstündedir.

Borsa fiatı, formül 24'e göre, bir borcun vadesi sırasında her zaman için çıkartılabilir. Bu da borçlunun gelecekteki yüklemelerine bağlıdır. Kapital olarak; açık bulunan anuiteler aracılığıyla tesbit edilebilen reel ve nominal artık borçları koymak gerekir. Bu suretle «Borsa rayiç ifadesinin» genel açıklamasına gelinir. Belli bir zamandaki kapital borcunun, borsa değeri daha ifa edilmemiş bütün yüklemlerin (faiz ve geri ödemeler) reel zaman veya nakit değerlerine eşittir. (Reel faizli p), bu yüklemelerin nominal zaman veya parasal değerlerine uygun olarak yüzdelikle hesaplanır.

Rayiç efektif veya reel faizlendirme arasında bir ilişki mevcuttur. Her efektif faiz için (p) belli bir borsa değeri (C) vardır veya tersi her tekil halde, 24 nolu denklem, hem borsa değerinin ve hem de reel faizin çıkarılmasına yardım eder.

p ve C değerlerinden birisi, değerin bulunabilmesi için, mutlaka verilmelidir. Borsa fiatları, özellikle piyasada işlem gören tahvil ve istikrazlarda çok önemli rol oynar. Böylece borsa (rayiçleri kurları) ticarî hayattaki alış ve satış fiatlarını ifade ederler.

Emisyonda tesbit edilmiş (p) nominal faizlendirme, istikrazların nominal veya itibar değerlerini içine alır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Borsa hesaplarının başında emisyon rayiçi (C_o) gelir. İstikraz taahhüdünde bulunan bir kimse, onun tam itibari değeri karşılığını ödemek ihtiyacında değildir. Ona bir emisyon primi verilir ki, buna da nominal faiz matrah yüzdesini gösterdiğinden hakiki faiz daha yüksek olur.

Emisyon rayiçinin değiştirilmesi, efektif faiz miktarının hassas bir şekilde ayarlanmasına müsaade eder. Bunsuz bozuk ve rahat olmayan bir nominal faiz matrah yüzdesine erişilirdi.

Bir istikrazın geçerlik süresi sırasında borsa fiatları (diğer tesirlerden başka) alıcı ve satıcıların faiz tasarruflarına göre değer kazanır. Yani, piyasaya göre, efektif faiz uzun süreli kapitallerin ortak faiz yüzdelerine yaklaştıkları zaman, borsa değerleri değişir.

Emisyon değeri C_o nasıl seçilmeli ki % p lik nominal faiz yüzdesinde reel bir faiz (% p) elde edilebilsin. Böylece rayiçleri verilmiş borsalardaki rantabilite hesaplarının çıkarılması için matematik dökümanlar kazanılmış olur.

Hesabın daha kolay yapılabilmesi için 100 TL. lık bir nominal kapital ele alınır ve direkt olarak reel kapital de C_o ihtiva eder.

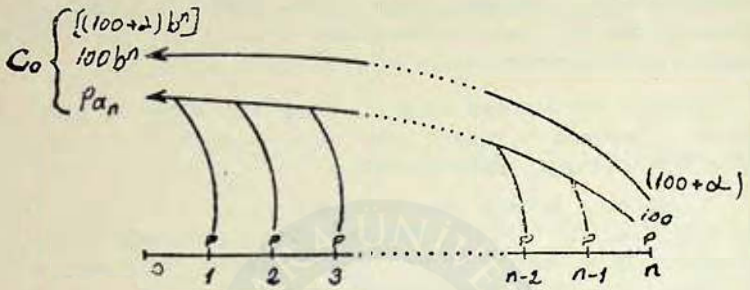
$$(25) \quad C_o = 100 \frac{R_o}{K_o} \; ; \; K_o = 100 \rightarrow C_o = R_o$$

BİR DEFADA GERİ ÖDENEN BORCUN (FAİZ BORCU) VE DEVAMLI RANTIN BORSA DEĞERLERİ

Eğer bir borç (K_o) (n) yıl süresince % p den faizlendirip ve süre sonunda itibari değeri üzerinden ödenirse (faiz borcu), bu durumda anuiteler, ancak en son yıl sonundaki $K_o = 100$ (n den), faiz ödemeleri p ve geri ödeme 100 kabul edilmek şartıyla meydana gelir. Onu nakti kıymeti, reel faiz p olarak çıkarılırsa, Emisyon değerini verir.

$$(26) \quad C_o = p\, a_n + 100\, b^n = 100\,(i\, a_n + b^n)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



$$b^n = \text{II}\, n^7 \qquad a_n = \text{IV}\, n^8$$

Eğer peyli geri ödeme % α şeklinde olursa,

$$(27)\quad C_0 = p\, a_n + (100 + \alpha)\, b^n = 100\,(i\, a_n + b^n) + \alpha\, b^n$$

Faiz istikrazlarına örneğin; faizli hazine bonoları da dahildir. Geri ödeme sürelerin belirsiz bir tarihe temdidi veya tayini evvelce mümkün ve belli olmamışsa (örneğin rehinli tahvil) süre sonsuz olarak kabul edilir.

$n \to \infty$ a_n tabiri 100 : p ve $b^n = 0$ 27 ci formülden devamlı borç devamlı rant

$$(28)\quad C_0 \to C_\infty = 100\,\frac{p}{p}$$ meydana gelir.

Bu formül aynı zamanda diğer borç nevilerinin aşağı yukarı borsa rayiçlerini tahmin etmeye de hizmet eder. Faiz istikrazları ve hazine bonolarıyla alâkalı borsa rayiçlerinin okunması ve interpolasyonu için özel cetvellerden (VI) yararlanılır.

Örnek : 30

% 4 1/2 faizli ve 20 yıl itibari değeri üzerinden geri ödenecek bir istikrazın Emisyon (borsa) rayiçi ne kadar olmalı ki, hakiki faiz % 5 olsun.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

26 ya göre : $C_o = 4{,}5\ a_{\overline{20}} + 100\ b^{20} = 93{,}77$ dir.

Nakti kıymet % 4 1/2 ye göre hesaplanırsa $C_o = 100$ olur, yani "kurs pai" % 100 dür. Yüksek reel faiz (% 5 için) emisyon rayiçinin % 100 den % 93,77 ye düşmüş olur. 28 nolu formüle göre tahmini bir hesap

$$100\ \frac{4{,}5}{5} = \%\ 90 \quad \text{verir.}$$

Örnek : 31

Örnek 30 daki aynı istikrazın emisyon rayici, geri ödeme % 4 bir peyle yapıldığı takdride ne kadardır?

Formül 27 e göre $C_o = 4{,}5\ a_{\overline{20}} + 104\ b^{20} = 95{,}28$ Burada C_o, örnek 30 dakinden daha büyük olduğu için peyin içindedir. % 4 lük bir pey'i, p=p=% 4 1/2 reel faiz koyacak olursak, o zaman $C_o = 101{,}66$ elde edilir, yani borsa rayiçi % 100 ün üstündedir.

% 5 lik reel faiz bu, yüzden kısmen pey'in içindedir. % 4 1/2 lik nominal faiz ve yine % 4 lük pey, % 100 lük bir emisyon rayiçinde, % 4 1/2 efektif faizlendirmeyi verir.

$C_o = 4{,}5\ a_{\overline{20}} + 104\ b^{20} = 100$ denkleminden devamlı denemeler suretiyle $p = 4{,}625$ elde edilir. Lineer interpolasyon sayesinde p faktörü tam kati olarak çıkartılır.

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & & 95{,}28 & & 5 & & 95{,}28 \\ 4{,}5 & & 101{,}66 & & 5-x & & 100 \\ \hline 0{,}5 & : & -6{,}38 & = & x & : & -4{,}72 \end{array}$$

$$x = 0{,}37$$

$$p = 4{,}63 \quad (4{,}625 \text{ yerine})$$

Reel ve nominal faiz yüzdesi arasındaki % 5 lik fark böylece, emisyon rayiçinin % 100 den % 92,25 e düşmesiyle % 0,37 olur. % 0,13 lük fark, emisyon rayiçinin % 101,66 dan % 100 e inmesine yani % 4 lük geri ödeme peyine istinad eder. Borsa rayiçi 101,66 ile emisyon rayiçi 95,28 arasındaki fark % 6,38 tutar. Bu fark, önceki örnekteki 100 — 93,77=6,23 borsa rayiçi farklarından ve peyin nominal ve reel değerleri arasındaki farktan teşekkül eder. $4\ (II_{\overline{20}}^{4{,}5} - II_{\overline{20}}^{5}) = 0{,}15$ pey ödenmesiyle borsa ilâvesi $4 \cdot II_{\overline{20}}^{5} = 1{,}51$ yapar, yani 93,77 + 1,51 = 95,28

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 32

5 yıl süreli, % 4 nominal ve % 5 reel faizli olan bir hazine bonosunun emisyon rayiçini tespit ediniz.

VI nolu tabloya göre C_o = % 95,67

Örnek : 33

8 yıl süreli, % 4 nominal ve % 4 1/2 reel faizli bir hazine bonosunun Emisyon rayiçini tesbit ediniz.

VI nolu tablodan bir interpolasyonla;

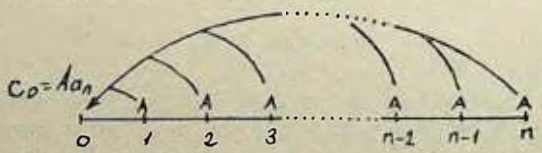
4 ·	100	4	100	x = 3,23
5	93,54	4,5	100−x	C_o = % 96,77
1 :	6,46	= 0,5 :	x	

ANUİTE BORCUNUN BORSA RAYİÇİ

K_o = 100 anite borcunda yıllık 23 nolu formüldeki bütün yüklemler Anuiteye (A) eşittir.

Böylece emisyon rayiçi,

(29) $$C_o = Aa_n = 100\frac{a_n}{a_n} = 100 \times V_n^p \times IV_n^p$$



$a_n = \overline{IV}\, n^8$

Anuite istikrazlarına ait borsa rayiçlerinin tespiti için de özel tablolar kullanılır. (VIII)

Formül 3 deki anuite kapital 1 e götürülürse ve $\frac{A}{K_o} = a$, konursa, böylece a kapital 1'in nominal anuitesi olarak da gösterilir. Formül 23 e göre bu kapitalin efektif anutesi $\frac{A}{R_o} = a$, ya tekabül eder. Efektif anuite, efektif faiz ve süreleri arasında nominal anuite faiz yüzdesi ve süreleri arasındaki gibi aynı ilişkiler mevcuttur.

22 e göre $a = \frac{A}{K_o} = \frac{1}{a_n} = V_n^p$

23 e göre $a = \frac{A}{R_o} = \frac{1}{a_n} = V_n^p$

Örnek : 34

50 yıl süreli ve % 5 faizli bir anuite borcu, hakiki faiz % 6 verecektir. Emisyon rayiçi ne kadar olmalıdır?

29 a göre $C_o = 100 \times 0{,}05478 \times 15{,}76186 = 86{,}34$

VIII nolu tablodan doğrudan doğruya $C_o = 86{,}34$ elde edilir.

Örnek : 35

Reel faizi % 5 1/2 olan aynı borcun (örnek 34) emisyon rayici ne kadardır? VIII nolu tablodan,

2, üstü interpolasyonla :

% 4 117,67 $d_1 = -16{,}67$ $c_1 = \frac{5{,}5-4}{1} = 1{,}5$

% 5 100 $d_2 = 4{,}01$

% 6 86,34 $d'_1 = -13{,}66$ $c_2 = 1{,}5\ \frac{5{,}5-5}{2} = 0{,}375$

$C_o = 117{,}67 - 1{,}5 \times 17{,}67 + 0{,}375 \times 4{,}01 = 92{,}67$

Lineer interpolasyon ise tam kesin olarak $C_o = 93{,}18$ verir.

Örnek : 36

Bir belediye % 3 1/2 lik bir istikraz olarak, 40 yılda eşit anuitelerle itfa etmek ister.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bir heyet istikrazı % 3 3/4 reel faizle almaya hazırdır. Hangi borsa rayiçi ile bu olabilir?

$$C_0 = 100 \times V_{40}^{3\ 1/2} \times IV_{40}^{3\ 4/3} = \%\ 96{,}35$$

TAMA ÇIKARILMIŞ ARTIKLI ANUALİTELERDE BORSA RAYİÇİ

Anuite A veya itfa ilâvesi T yuvarlak bir değer verilirse ve bu yüzden süre $n = m + \gamma$, karışık bir sayıdır, o zaman formül 29 geçerlidir.

$$C = Aa \qquad = 100 \frac{m + \gamma}{m + \gamma} \ ; \ n = + \gamma$$

Emisyon rayiçi, m ve m+1 arasında interpolasyonla, bulunur. Yani önce a_n için veya doğrudan doğruya C_0 için. Buna karşılık (m + 1) lik yılın sonundaki artık borç (R) verilmişse, o zaman,

$$(30) \qquad C_0 = 100 \frac{Aa_m + Rb^{m+1}}{K_0} \quad \text{olur.}$$

(30) formülde A ve R i başlangıçtaki borcun yüzdesi şeklinde ifade ederek ($K_0 = 100$), daha basitleştirilmiş formül elde etmiş oluruz :

$$(31) \qquad C_0 = Aa_m + Rb^{m+1}$$

(31) nolu formülde = R = $A\gamma$ koyarsak, yine 29 nolu formül elde edilir.

$$\begin{aligned} C_0 &= Aa_m + A\gamma b^{m+1} \\ &= A(a_m + \gamma b^{m+1}) \\ &= Aam + \gamma \\ &= Aa_n \ ; \ n = m + \gamma \end{aligned}$$

Örnek : 37

6000000 TL. lık istikraz % 3 1/2 faizlendirilip ve bunun yanında ayrıca % 1 faiz ilâvesiyle itfa edilecektir. Efektif faiz % 3 3/4 olması için, istikraz hangi rayiçle ihraç edilmelidir?

$K_0 = 100$; $A = \%\ 4\ 1/2 = 4{,}5$;

süre : $K_0 = Aa_n$ yani $100 = 4{,}5\ a_n$; $V_n^{3\ 1/2} = 0{,}045$; $n = 43{,}73$
29 nolu formülde (a_n) interpolasyon yapmak gerekir :

$p = 3\ 1/2$ $IV_n^{3\ 1/2} = 100 : 4{,}5 = 22{,}22222$

$p = 4$	43	20,37079	43	20,37079	$x =$	0,12998
	44	20,54884	43,73	20,37079 + x	$IV_n^4 =$	20,50077
	:	0,17805 =	0,73 :	x		
$p = 3\ 3/4$	3 1/2	22,22222	3 1/2	22,22222 − x	$x =$	0,86073
	4	20,50077	3 3/4	22,22222 − x	$IV_n^{3\ 3/4} =$	21,36149
	1/2 :	1,72145 =	1/4 :	x		

Böylece $C_0 = 4{,}5 \times 21{,}36149 = \%\ 96{,}13$

veya borsa rayiçleri arasındaki interpolasyonla :

43 yıl $C'_0 = 4{,}5 \times 21{,}21674 = 9548$ Tablolara bakmalıdır.
44 yıl $C''_0 = 4{,}5 \times 21{,}41581 = 96{,}37$

43	95,48	43	95,48	$x = 0{,}65$
44	96,37	43,73	95,48 + x	$C_0 = \%\ 96{,}13$
1 :	0,98 =	0,73 :	x	

44 yılın sonundaki artık ödeme (R) bulunacaksa o zaman,
$R = (K_0 - Aa_{43})\ q^{44} = 3{,}26$ sonra 31 nolu formüle göre $K_0 = 100$ yani $C_0 = 4{,}5\ a_{43} + 3{,}26\ b^{44} = \%\ 96{,}13$

Örnek : 38

% 4 faizli ve bundan başka % 2 faiz ilâvesiyle itfa edilecek bir istikraz, % 5 bir hakiki faiz matrah yüzdesiyle ihraç edilecektir. Süre $100 = 6\ a_n$, yani $V_n^4 = 0{,}06$, 28 ve 29 yıllar arasındadır, yani 28 yıla çok yakın VIII nolu tabloya göre interpolasyonla :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

25	90,22	25	90,22	$x = 0,79$
30	88,90	28	90,22−x	$C_o = 89,43$ (daha kati 89,41)

5 : 1,32 = 3 : x

BİR TAKSİT BORCUNUN BORSA RAYİCİ

Bir borç taksidinde $K_o = 100$ yıllık yüklemler eşit kalan itfa taksitlerinden $T = 100 : n$ ve küçülen faizlerden meydana gelirler. Bütün itfa taksitlerinin parasal değeri, $= \frac{100}{n} a_o$ e eşittir. Matematik olarak düşünülen faizler için ilk rant $r = K_o i = 100 \frac{p}{100} = p$ dir, Fark ise

$$d = -T_1 = -\frac{100}{n} \times \frac{p}{100} = -\frac{p}{n} \text{ dir.}$$

Böylece bütün faiz ödemelerinin (n) reel nakti kıymeti olarak,

$$B_o = pa_n - \frac{p}{n} \times \frac{100}{p} (a_n - nb^n)$$

$$p - \frac{p}{n}, p - \frac{2p}{n}, \ldots\ldots, \frac{2p}{n}, \frac{p}{n}$$

her bölümdeki $(\frac{p}{n})$, paranteze alınacak olursa, şu sıra meydana gelir.

$$\frac{p}{n} n, \frac{p}{n} (n-1), \frac{p}{n} (n-2, \ldots\ldots \frac{p}{n} \times 2, \frac{p}{n} \times 1$$

sonra bütün faiz ödemelerinin reel parasal değeri.

$$B_o = \frac{p}{n} nb + \frac{p}{n} (n-1) b^2 + \frac{p}{n} (n-2) b^3 + \ldots + \frac{p}{n} 2b^{n-1}$$

$$+ \frac{p}{n} b^n$$

$$= \frac{p}{n} [nb + (n-1) b^2 + (n-2) b^3 + \ldots + 2b^{n-1} + b^n]$$

$r = n$

$d = -1$ koyarsak

$$\frac{n-a_n}{i} = \frac{100 (n-a_n)}{p} ;$$

basit olarak,

$$B_0 = \frac{p}{n} \times \frac{100}{p} (n-a_n) = \frac{100}{n} \times \frac{n-a_n}{p} p$$

itfa taksitleri ve faiz ödemelerine ait parasal değerlerin beraber incelenmesiyle emisyon rayiç elde edilir.

(32) $$C_0 = \frac{100}{n} (a_n + \frac{n-a_n}{p} p) = 100 [\frac{a_n}{n} + \frac{p}{p} (1 - \frac{a_n}{n})]$$

Örnek : 39

48000 TL. Liralık bir borca yıllık % 4 1/2 faiz ödenmekte ve 6000 TL. geri verilmektedir. Hamil gerçek faiz % 5 elde etmek istediği taktirde, borçlu kaç TL. ödemelidir?

a) Geri ödemek, 6000 T. Liranın ödemelerin 8 misli rantını teşkil ederler; bunların reel parasal değer 6000 a_8 dir.

Faizler düşer 8 bölümlü aritmetik diziyi teşkil ederler.

İlk bölüm 21600 TL. = (48000 nin % 4 1/2) ve fark −270 (6000 in % 4,5 En son bölüm (1 e) göre halen 270 dir. Formül 25 göre bütün faiz ödemelerinin reel parasal değeri :

$$2160b + 1890b^2 + 1620b^3 + \ldots\ldots + 540b^7 + 270b^8.$$

veya 270 parantez dışına alınır.

$$2160a_8 - \frac{270}{0,05} (a_8 - 8b^8)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$270\,(8b + 7b^2 + 6b^3 + \ldots\ldots + 2b^7 + b^8)$ veya

$\frac{8-a_8}{0{,}05} \times 270$ basit formül elde edilir.

Reel kapital toplam olarak =

$$R_0 = 6000\ a_8 + 2160\ a_8 - \frac{270}{0{,}05}\ (a_8 - 8b^8) = 47077{,}95$$

veya,

$$R_0 = 6000\ a_8 + \frac{270}{0{,}05}\ (8 - a_8) = 47077{,}93 \text{ olur.}$$

Bu tutarı borçlu alacaktır. Buna göre emisyon rayiçi 100 R : 48000 = % 989,08 dir.

b) Formül 32 nin doğrudan doğruya kullanılmasıyla :

$$C_0 = \frac{100}{8}\ (a_8 + \frac{8-a_8}{5} \times 4{,}5) = \%\ 98{,}08$$

PEYLİ BİR İTFA BORCUNUN BORSA RAYİCİ

Bir peyli itfa borcu geri ödendiği zaman, faiz ve itfa taksiterine ayrıca, pey tutarları ilâve olur ki, bunların parasal değerinin de ayrıca hesaplanması gerekir. Pey'li eşit kalan yıllık yüklemlerin içinde bulunan anuite borcu için; yedek kapital K_0^* yedek faiz fiatı p^* hesaplanır.

Anuite $A^* = K_0^* : a_n^*$ olduğu için reel kapital için

$$R = A^*\ a_n = \frac{K_0^*}{a_n^*}$$

ve emisyon rayiçi olarak,

(33) $$C_0 = \frac{K_0^*}{K_0} \cdot \frac{a_n}{a_n^*} \times 100 = (100 + \alpha)\ \frac{a_n}{a_n^*}\ ;\ p^* = \frac{p}{1 + \frac{\alpha}{100}}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Formülünü verir. Bir taksit borcunda eşit kalan itfa taksitleri, aynı zamanda eşit kalır, peylerin katı kadar büyürler, 32 nolu formül yerine,

$$(34) \quad C_0 = \frac{100}{n}\left[a_n\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) + \frac{n - a_n}{p}\,p\right]$$

elde edilir. Burada a_n değerine $1 + \frac{\alpha}{100}$ pey faktörünün ilâve edilmesi gerekmektedir.

Peyli faiz borcunda borsa rayiçinin başa baş olması halinde, pey ödemesinin eşit olmayıp % 100 daha büyük olduğu açıklanmıştı.

Örnek : 40

Bir istikraz % 4 faizli 20 yıl içinde eşit anuitelerle ve ayrıca % 3 peyli itfa edilecektir. Hakiki faizin % 5 olması için, istikrazın hangi rayiçle ihracı mümkündür.

$p = 4$; $p = 5$; $\alpha = 3$ $p^* = 3{,}883$; $K_0 = 100$; $K_0^* = 103$;

$A^* = 103 \times V_{20}^{3{,}883} = 7{,}50149$ $C_0 = A^* \, IV_{20}^{5} = 93{,}49$

$\mathbf{p = 3{,}883}$ için $C_0 = 100 + \alpha = 183$

$\mathbf{p = 4}$ için $C_0 = 101{,}95 > \%\ 100$

Örnek : 41

Örnek 39 daki taksit borcunun emisyon rayiçini ne kadar seçmeli ki, bundan başka % 2 pey'de ayrıca ödenmiş olsun? Geri ödemeler 6120 ye bunların reel nakti değerleri ise $6120 \times a_8$ yükselir.

Faiz ödemeleri ve bunların reel nakti değerleri değişmez. Böylece reel kapital $R_0 = (6120 - 5400)a_8 + 8 \times 5400 = 47853{,}51$ olur. Rayiç $47854 : 480 = \%\ 99{,}70$ dir. Veya 34 nolu formüle göre,

$$C_0 = \frac{100}{8}\left(1{,}02\, a_8 + \frac{8 - a_8}{5} \times 4{,}5\right) = 99{,}70$$ Burada da $\mathbf{p' = \%\ 4\ 1/2}$

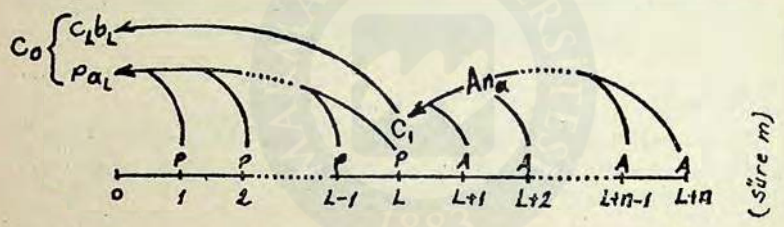
için rayiç $C_0 = 101{,}6 > \%\ 100$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

GECİKMELİ İTFADA BORSA RAYİCİ

Şimdiye kadar itfanın ilk faiz ödemesiyle başladığı kabul edilmişti. Bu yüzden rayiçler ilk geri ödemede, evvelki bir yılın bölümlerine teşmil edilirler. Bir çok istikrazlarda itfa, bir kaç yıldan sonra başlarken, buraya kadar olan borçlarda yalnız faizlendirilir.

İtfa bu şekilde (1) yılı tecir edilirse, emisyon rayiçi C_0, ilk faiz ödemesinin önündeki (1 + 1) zaman birimine teşmil edilir. Bütün hallerde, şimdiye kadar (29 ile 34) arasında bulunan formüllerden çıkartılan C_1 rayiçine dönülür:



Bu işlem bir faiz borcu olarak ele alınır ki L yıl süreyle faizli olup bilâhare C_1 rayiçi üzerinden bir defada geri ödenir. 26 nolu formüle göre,

(35) $$C_0 = pa_{\overline{L}} + C_1 b^1$$

Örnek : 42

Bir istikraz, % 4 le faizlendirilip 10 yıl sonra başlayarak eşit anuitelerle 20 yılda itfa edilecektir. Emisyon rayiçi, efektif faiz % 4 1/2 olduğu zaman, ne kadar olmalıdır? Önce C_{10} tesbit etmek gerekir.

Anuite $A = 100\, V_{20}^4 = 7{,}358$

$C_{10} = Aa_{\overline{20}} = 95{,}71$ sonra 35 e göre,

$C_0 = 4\, a_{\overline{10}} + 95{,}71\, b^{10} =$ % 93,28 olur.

Örnek : 43

Örnek (42) deki istikraz, % 10 luk bir peyle geri ödenecektir. Emisyon hangi rayiç üzerinden yapılacaktır?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$p^x = 3,636$; $K_o^x = 110$; $A^x = 100 \times V_{20}^{3,636} = 7,835$

$C_{10} = A^x \, IV_{20}^{4\,1/2} = 101,92\ C_{10}$ böylece % 100 üstünde ve $100 + \alpha =$ % 100 ün altındadır. Bu durumda (35) e göre $C_o = 4a_{10} + 101,92b^{10}$

$= \%\ 97,28$ olur.

Örnek : 44

Bir istikraz % 4 le faizlendirilip 10 yıl sonra başlayarak % 5 lik eşit taksitlerle itfa edilecektir. % 5 bir reel faizle hangi rayiçle ihraç edilmelidir?

32 ye göre,

$$C_o = \frac{100}{20}\left(IV_{20}^5 + \frac{20 - IV_{20}^5}{5}\ 4\right) = 992,46$$

35 e göre,

$$C_o = 4a_{10} + 92,46\ b^{10} = \%\ 87,66$$

Örnek : 45

Aynı istikraz (örnek 44) % 10 oranında bir peyle ihraç edilecektir.

34 e göre $C_{10} = \frac{100}{20}\left(1,10\ IV_{20}^5 + \frac{20 - IV_{20}^5}{5}\ 4\right) = 98,69$

35 e göre $C_o = 4a_{10} + 98,69\ b^{10} = \%\ 91,48$ olur.

BORÇ SÜRESİNİN HERHANGİ BİR ZAMAN BÖLÜMÜNDEKİ BORÇ RAYİCİ

Şimdiye kadar yapılmış olan hesaplar emisyon rayiçine yani süre başlangıcındaki rayiçe göre yapılmıştı. Buna rağmen bu hesaplar borç süresi esnasında bütün rayiçler içinde geçerlidirler. (24) nolu formülde başlangıç kapitalinin eski borç artığı yerine konması ve borçlunun itfa edilecek yıl yüklemlerinin de hesaplanmasıyla mümkündür.

(m) yılı sonundaki süre bitiminde rayiç :

$$(3) \qquad C_m = 100 \frac{R_m}{K_m}$$

Örnek : 46

Bir para sahibi, % 4 faizli ve 10 yıl sonunda geri ödenecek 300000 T. Liralık bir istikraz seçer. 2 yıl sonra kapitalini alacaktır, % 4 3/8 efektif faiz istediğinde, hangi tutar üzerinden borç tahvilini satacaktır? Faiz yönünden : 300000 × 0,04 = 12000 lik faiz daha mevcuddur ki, bunların reel parasal değeri 12000 a_7 tutar.

Geri ödemenin parasal değeri 300000 b^7 toplam olarak

$R_3 = 12000\ a_7 + 300000\ b^7 = 293373{,}48$; veya direkt rayiç kuru olarak $C_3 = 4\ a_7 + 100\ b^7 = \%\ 97{,}79$. (Bunun için (26) ya bak.)

Örnek : 47

% 4 1/2 faizli ve 30 yıl içinde itfalı bir anuite istikrazı % 5 efektif faiz getirmektedir, 20 yılın sonundaki rayiç ne kadardır? 29 a göre, daha 10 yıl açık olduğundan;

$$C_{20} = 100 \times V^4{}_{10}{}^{1/2} \times IV^5{}_{10} = 100 \times 0{,}12638 \times 7{,}72173 = \%\ 97{,}59$$

Örnek : 48

Örnek 39 daki borcun 3 cü geri ödemeden sonraki rayiçi ne kadardır? Daha 5 yıllık bir yüklem ifa edilecektir. Böylece,

$$R_3 = 6000\ a_5 + \frac{270}{0{,}05}\ (5 - a_5) = 29598 \qquad K_3 = 30000\ ;\ C_3 = 98{,}66$$

veya 32 nolu formüle göre doğrudan doğruya rayiç,

$$C_3 = \frac{100}{5}\ (a_5 + \frac{5 - a_5}{5} \times 4{,}5) = \%\ 98{,}66$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 49

Örnek 40 daki istikrazın 15 yıl sonraki rayiçi hesaplanacaktır:

$$R_{15} = A^x a_5 \; ; \; A^x = K^x_{15} \; : \; a^x_5 \; ; \; R_{15} = K^x_{15} \frac{a_5}{a^x_5} \; ; \; C_{15} = (100 + \alpha) \frac{a_5}{a^x_5}$$

Aynı sonuç (33) nolu formülden doğrudan doğruya çıkartılır. $C_{15} = 103 \times V_5^{3,883}\, IV_5^5 =$ % 99,84 olur.

eşit kalan efektif faizde (p) borç itfası süresince emisyon rayiçinin devamlı olarak ödeme rayicine yaklaştığı görülür, yani % 100 başa baş rayiç, peyli % (100 + α) yıl içinde yaklaşık olarak basit faizle hesaplanır.

(γ) bir yıl kesri ise, o zaman reel kapital R den $R(1 + \frac{p}{100})^{\gamma}$ ye büyür ve bu sırada nominal değer K değişmeden kalır. C, rayiçi, γ sene kesrine göre örneğin $= \gamma = 1/2, 1/6, 1/12$ ise;

(37) $\boxed{C' = C\,(1 + \frac{p}{100}\,\gamma)}$ yerine yaklaşık olarak

$C' = C\,(1 + \frac{p}{100})$ bulunur. Bu da C önceki yılın tam rayicini ifade eder. Buna rağmen dış ülkelerdeki bazı borsalarda kesin faizli bono v.s. adet olduğu gibi, net rayiçler yani adet faizine eşdeğer rayiçler tesbit edilmişlerse, o zaman bir daha sonraki faiz küpürünün gelecek faizlerini (pγ) ayrıca hesaplamak gerekir.

Net rayiç C°, adet faizlerinin (pγ) çıkarılmasıyla elde edilir.

(38) $\boxed{C^\circ = C' - p\gamma = C(C\frac{p}{100} - p)\,\gamma \text{ ve } C' = {}^\circ + p\gamma}$

yılın sonunda $\gamma = 1$ için rayiç $C + p$ olur. Süresi gelen faiz kupürünün ayrılmasıyla bir rayiç düşmesi meydana gelir. Yani C' rayiçi C° meblağı üzerinde yıllık faiz (p) kadar azalır.

Net rayiçlerin tespitinde, bunlar, gelecek yıllara geçerken sürekli olarak birbirleriyle kaynaşırlar. Çekilişe tabi tutulan itfa istikrazlarında, her istikraz adedi çekiliş dolayısıyla iki gruba ayrılırlar.

Çekilen adetlerin rayiçi birden bire ödeme tutarına fırlar yani gerçek ikramiye kârı ve zararı meydana gelir. Fakat bütün istikrazın rayiç değeri, tam ödemeden önce değişmeden kaldığından, diğer parçalar muhasebe yönünden çekilişten önceki rayiçleri verir. (38) nolu formüle göre, formül değerleri ise, çekilişten sonraki rayiçleri gösterir. İkramiye ve ödeme süreleri birbirlerine uyamadıkları taktirde, rayiçler, gelecek ikramiye çekilişinde rayiç fırlaması olurken formül (36) ya göre daima gelecek ödemeden önceki bir yılın içinde bulunurlar. Buraya kadar (38) nolu formül geçerlidir. Çekilişten sonra, gelecek yılın başlangıcında rayiç geri iskonto edilmelidir. Örneğin, çekiliş 1. Ekim ve ödeme 31. Aralık ise, rayiçler (36) ya göre her zaman 1. Ocak'a getirilirler. Rayiç fırlaması 1. Ekim de olur. 1. Haziran'dan gelerek 1. Ekim'e kadar olan zaman için yani çekilişten önce, (38) nolu formül geçerlidir. 1. Ocak'tan itibaren geriye doğru 1. Ekim'e kadar olan zaman için, yani çekilişten sonrası için, iskonto yapılmalıdır.

Örnek : 50

% 4 faizli bir anuite istikrazı 50 yıl içinde itibarî değeri üzerinden itfa edilecektir. Emisyon rayiçi ve her gelecek 5 yılın % 5 efektif faizi tespit edilecektir. (29) ve (36) veya tablo VIII'e göre aşağıda gösterilen rayiçler bulunur.

$C_0 = 84{,}98$	$C_{15} = 87{,}73$	$C_{30} = 91{,}70$	$C_{45} = 97{,}25$
$C_5 = 85{,}78$	$C_{20} = 88{,}90$	$C_{35} = 93{,}36$	$C_{50} = 100{,}00$
$C_{10} = 86{,}69$	$C_{25} = 90{,}22$	$C_{40} = 95{,}20$	

Rayiçler, $C_0 = 84{,}98$ emisyon rayicinden ödeme rayicine $C_{50} = 100$ e kadar çıkarlar.

Örnek : 51

10 yıl içinde % 4 lük başabaş bir rayiçle geri ödenecek bir hazine bonosu için, her yıl başında % 5 efektif faiz tesbit edilecektir. (26) ve (36) ya göre veya VI nolu tablodan aşağıda gösterilen rayiçler bulunur.

$C_0 = 92{,}28$	$C_3 = 94{,}21$	$C_6 = 96{,}45$	$C_9 = 99{,}05$
$C_1 = 92{,}89$	$C_4 = 94{,}92$	$C_7 = 97{,}28$	$C_{10} = 100{,}00$
$C_2 = 93{,}54$	$C_5 = 95{,}67$	$C_8 = 98{,}14$	

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Burada da $C_0 = 92,28$ Emisyon rayiç kurları, $C_{10} = 100$ ödeme rayiçine kadar yükselmektedir.

Örnek : 52

% 4 faizli, 20 yıl için itfalı bir Anuite istikrazı % 5 efektifle faizlendirilir. Piyango 1. Ekimde, faiz ve ödemeler ise 1. Ocakta yapılacaktır. 11 ci yılın sonundaki emisyon rayiçi ile, 1. Nisan, 1 Haziran, 1. Ekim ve 1. Aralık tarihlerinde rayiçler ne kadardır?

11 ci itfa yılının Ocak ayındaki rayiç C_{10} (36) nolu formüle göre

$100 \dfrac{a_{10}}{a_{10}}$ veya VIII nolu tabloya göre $= 95,20$

1. Nisan için $\gamma = 1/4$ konur ve (37) ye göre $C' = 95,20\ (1 + 0,05 \times 1/4) = 96,39$ elde edilir.

Net rayiç (39) a göre $C^\circ = 96,39 - 4 \times 1/4 = 95,39$;

$\gamma = 1/2$; $C' = 95,20\ (1 + 0,05 \times 1/2) = 97,58$;

$C^\circ = 97,58 - 4 \times 1/2 = 95,58$

çekilişten önceki rayiç için $\gamma = 3/4$; $C' = 95,20\ (1+0,05 \times 3/4) = 98,77$; $C^\circ = 98,77 - 4 \times 3/4 = 95,7$ Çekilişten sonra 12 ci itfa yılının 1. Ocak tarihindeki rayiç; $C_1 = 100 \dfrac{a_9}{a_9} = 95,60$; $\gamma = 1/4$; $C' = 95,60\ (1-0,5 \times 1/4) = 94,41$; $C^\circ = 94,41 + 4 \times 1/4 = 95,41$; yani çekiliş suretiyle net rayiç % 0,36 kadar azalmaktadır.

Bir aralık için yani çekilişten sonra ; $\gamma = 1/12$;

$C_1 = 95,60\ (1-0,05 \times 1/12) = 95,20$;

$C^\circ = 95,20 + 4 \times 1/12 = 95,53$; $\gamma = 1$ için yıl son olarak hesaplarsak, o zaman,

$C' = 95,20 \times 1,05 = 99,96$; $C^\circ = 99,96 - 4 = 95,96$; Gerçek rayiç $C_1 = 95,60$ dır ve burada da çekiliş sonucu % 0,36 düşüktür.

RAYİÇLER VE ORTA SÜRE

Uygulamada oldukça güç bir kısım rayiç formüllerini itfa istikrazlarında kullanmaktan kaçınmak ve bunların yerine faiz istikrazlarında daha basit formüller kullanmak için, rayiç hesaplarında orta süreli istikrazlardan yararlanılır.

Orta süre : İstikrazın yarı itfasına kadar olan zaman eşit olmadığı gibi, her adet gerçek süresinin orta değerine eşit değildir. O kesin olmayan, yani belli bir istikrazın ödenmesi için beklenilen zamanı az çok vermez, o da ekseriya kesin bir değeri göstermediği için, hiç bir zaman ödeme tarihini belirtmez. «Orta süre» matematiksel olarak geçerlilik süresi diye de belirtir, çoğu kez aşağıdaki «fiksiyona» dayanan matematiksel değerdir. Tam itfa istikrazı (her adedin değişik süreleri ile olan hakiki itfa yerine) orta sürenin bitiminden sonra bir faiz istikrazı gibi, bir kez de geri ödenseydi, o zaman eşit efektif faizde verilen itfa istikrazı ve alınan faiz istikrazı gene eşit emisyon rayiçi olurdu. Buna dayanarak orta süre itfa istikrazları ve bununla birlikte faiz istikrazları için rayiç formüllerinin eşitlenmesiyle elde edilir. Örneğin; Taksit istikrazı için (26) ve (32) den orta süre μ şu denklemle elde edilir;

$$pa_{\mu} + 100\, b^{\mu} = \frac{100}{n}\left(a_{n} + \frac{n-a_n}{p}\, p\right)$$ μ y ya göre çözümü

$$a_{\mu} = \frac{1-b^{\mu}}{p} \times 100$$ konularak.

(39)

$$q = \frac{n}{a_n} \quad \text{veya} \quad \mu = \frac{\log n - \log a_n}{\log q}$$

Anuite istikrazı için orta süre (26) (29) nolu formüllerden şu denklem elde edilir.

$$pa\,\lambda + 100\, b^{\lambda} = 100\, \frac{a_n}{a_n}$$ λ göre çözümü $a\,\lambda = \frac{1-b^{\lambda}}{p} \times 100$

(40) $$q_{\lambda} = q_n\, \frac{(q^n-q^n)(q-1)}{(q-q)(q^n-1)} = \frac{a_n p - a_n p}{a_n (p-p)}$$ veya

$$\lambda = \frac{\log pay - \log payda}{\log q}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Orta sürenin pratik anlamında, buna bağlı olmadan, peyli veya peysiz ödeni ödenmiyeceği, faizin yıllık veya 6 aylık yapılıp yapılmıyacağı ve gecikmeli itfanın olacağı veya olmıyacağı noktalarında durulmaz.

μ ve λ daima (39) ve (40) formüllerden elde edilir ve faiz istikraz rayiç formülünde yerine konur.

Pey'e genişletilmiş anuite istikrazlar için bu yaklaşık olarak geçerlidir. Kesin olarak (40) kı p, $p^x = p : (1 + \frac{a}{100})$ ile değiştirmek gerekir. Böylece, sapmalı bir ortak süre elde edilir. Gecikmeli itfada, itfa süresine göre hesaplanan ortak süre, itfasız faiz süresi kadar büyür. (μ) faktörünün, (p) nominal faiz yüzdesiyle bir bağıntısı olmadığına özellikle dikkat etmek gerekir.

Örnek : 53

Bir taksit borcu % 4 1/2 ile faizlendirilip, başabaş bir rayiçle ve % 2 lik bir peyle 8 yıl içinde geri ödenecektir. Efektif faiz % 5 olduğunda emisyon rayiçi ne kadar olur?

a) Başabaş rayiçle ödeme :

$$q^{\mu} = \frac{n}{a_{\overline{n}}} \text{ yani, } 1{,}05^{\mu} = 8 \times 0{,}15472 \; ; \; \mu = 4{,}372$$

sonra (26) ya göre $C_0 = 4{,}5 \; a_{\underline{\mu}} + 100 \, b^{\mu} = 98{,}08$

b) % 102 den ödeme; $\mu = 4{,}372$ önceki gibi, sonra (27) göre;

$C_0 = 4{,}5 \; a_{\underline{\mu}} + 102 \, b^{\mu} = 99{,}70$

Örnek : 54

Bir istikraz % 4 le faizlendirilip ve on yıl sonra % 5 lik taksitlerle itfa edilecektir. % 5 reel faizde hangi rayiçle ihraç edilmelidir?

$$q^{\mu 1} \; 20 : a_{\overline{20}} \text{ yani } 1{,}05^{\mu 1} = 20 \times 0{,}08024 \; ; \; \mu^1 = 9{,}694 \; ; \; \mu = 10 + 9{,}694 = 19{,}699$$

a) Başa baş rayiçle ödeme :

$$C_0 = 4a_{\underline{\mu}} + 1000 \, b^{\mu} = 87{,}66$$

b) % 110 la ödeme $C_0 = 4\,a_{\overline{\mu}|} + 110\,b^{\mu} = 91{,}48$

Örnek : 55

Bir istikraz % 4 le faizlendirilip, 10 yıl sonunda eşit taksitlerle başa baş rayiçle ve % 10 pey ilâvesiyle, diğer 20 yılda itfa edilecektir. Gerçek % 4 1/2 faizle, emisyon rayiçi ne kadardır?

(40) a göre,

$$q^{\lambda^1} = \frac{2{,}41171 \times 0{,}005 \times 1{,}19112}{0{,}22059 \times 0{,}04} \text{ veya}$$

$$q^{\lambda^1} = \frac{13{,}59033 \times 0{,}5}{13{,}00794 \times 4{,}5 - 13{,}59033 \times 4}$$

$= 1{,}6278$; $\lambda^1 = 11{,}067$; $\lambda = \lambda^1 + 10 = 21{,}067$

a) % 100 ödeme ; $C_0 = 4a\lambda + 100\,b\lambda = 93{,}28$

b) % 110'la ödeme ; $C_0 = 4a\lambda + 110\,a\lambda = 97{,}27$

orta süre λ ve rayiçler, genişletilmiş peyde yaklaşık olarak doğrudur.

RAYİÇLER VE FAİZ FARKLARI

Daha önce rayici bütün yıl yüklemlerin, gerçek faiz yüzdesine genişletilmiş reel parasal değeri olarak ele almıştık. ($C_0 = \frac{R_0}{K_0}$) Aynı zamanda bunu efektif ve nominal faiz farklarından doğan faiz farklarına da bağlıya biliriz.

Artık borçların nominal faizi,

$$K_0 = \frac{p}{100}\,,\ K_1\,\frac{p}{100}\,,\ K_2\,\frac{p}{100}\,,\ \ldots\ K_{n-1}\,\frac{p}{100}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yerine onların hakiki faizleri,

$$K_0 \frac{p}{100}, K_1 \frac{p}{100}, K_2 \frac{p}{100}, \ldots K_{n-1} \frac{p}{100}$$

elde edilmelidir. Böylece her yılın sonunda aşağıdaki faiz farkları meydana gelir :

$$K_0 \frac{p-p}{100}, K_1 \frac{p-p}{100}, K_2 \frac{p-p}{100}, \ldots K_{n-1} \frac{p-p}{100}$$

Reel kapital R_0 ; elde etmek için, bu faiz farklarının nakti değeri D, istikraz borçlu ve alıcısına o şekilde yüklettilmelidir ki, nominal kapital K_0 tenzil edilsin :

(41)

$$R_0 = K_0 - D;$$

$$D = \frac{p-p}{100} b (K_0 + K_1 b + K_2 b^2 + \ldots + K_{n-1} b^{n-1}) = \frac{p-p}{100} b G$$

(p) p olduğu hallerde, reel nakti değeri D kurdisacio olarak tenzil edilen faiz farkları meydana gelir. $\rho > p$ olduğunda, reel nakti değere kuracio (pey) olarak ilâve edilir. G bütün artık borçların reel nakti değerin ifade eder. Burada dikkat edilmesi gerekli husus, faizlerin her yıl sonunda ödeneceği, böylece (41) deki artık borçların G nakti değerinin bir yıl daha iskontoya tabi tutulması gereğidir. (Bu nedenle b faktörü) genel olarak emisyon rayiçidir.

(42)

$$C_0 = 100 \frac{R_0}{K_0} = 100 - \frac{\rho-p}{K_0} b (K_0 + K_1 b + \ldots + K_{n-1} b^{n-1})$$

$$= 100 - \frac{\rho-p}{K_0} b G$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ρ değerinin p daha büyük veya daha küçük olması halinde C_0, 100 ün altında veya üstündedir. (42) ye göre şimdiye kadar gördüğümüz rayiç formülleri rantabilite hesapları için daha kolay olan başka bir şekle sokulabilir.

Hazine bonoları için; $K_0 = K_1 = K_2 = K_{n-1}$ Bu nedenle (42) e göre;

(43) $$C_0 = 100 - (\rho - p)\, n_n$$

(44) Buna uygun olarak taksit istikrazı için :

$$C_0 = 100 - (\rho - p)\,\frac{n - a_n}{np}\,100$$

Örnek : 56

Örnek 30 daki hazine bonosu için (43) e göre;

$C_0 = 100 - (5 - 4{,}5)\, a_{20} = 93{,}77$ kuracio $D = \%\ 6{,}23$

Örnek : 57

Bir pey ödemesinde ($\alpha = \%\ 4$) (örnek 31) reel nakti değer b^n (43) e ilâve edilmesi icabetmektedir.

Örnek : 58

$C_0 = 93{,}77 + 4\, b^{20} = 95{,}28$

Örnek (39) daki taksit borcu için (44) e göre : $C_0 = 100 - 0{,}5\dfrac{8 - a_8}{8 \times 5}$ $100 = 98{,}08$ kurdisacio $D = \%\ 1{,}92$

Örnek : 59

Bir pey ödemesinde ($\alpha = \%\ 2$) (örnek 44) nolu formülde; $\dfrac{\alpha}{n}\, a_n$ reel nakti değeri ilâve etmek gerekir ve $C_0 = 98{,}08 + \dfrac{2}{8}\, a_8 = 99{,}70$ elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İtfa tablosu ve artık borçlar değiştirilmeden bırakılırsa, ve faiz yüzdesi, p, p_1, ile değiştirilirse, o zaman (442) deki değerler K_o ve p değişmez ve G e ait C_1 rayiçi için şu orantı geçerlidir $(100 - C_o) : (100 - C_1) = (p-p) : (p_1-p)$

Bunun yazıyla açıklaması : İki istikraz yalnız faiz yüzdelerine göre farklı iseler rayiç farkları aynen faiz farkları gibi birbirleriyle orantılı olurlar. Bu usulle her istikraz için rayiçi tespit etmek mümkündür. İstikrazın konversasyonu sonucu itfa tablosu değiştirmeden faiz yüzdesini sonra aşağıya düşürmek gerekir. 36 nolu formüle göre, şimdiye kadar olan hükümler, istikraz süresinin belli bir periodundaki rayiçler için de geçerli olurlar (42) den (44) e kadar olan formüller bunlar için de kullanılabilir, yalnız (n) yerine, sürenin henüz çizilmemiş artığını yani daha ifa edilmemiş yüklemleri koymak şartiyla.

FAİZLERİN İTFALARIN VE MASRAFLARIN RAYİÇ DEĞERİ

Mevcut artık borcun % π tutarındaki özel masrafları borçlu tarafından karşılanırsa, o zaman buna tesiri bir (rayiç yükselmesi) şeklinde olur. Şayet masraflar Anuite içinde nazarı itibare alınmışsa, faiz yüzdesinin p den, % (p+π) ye yükselmesi gibi tesir gösterir. Buna karşılık masraflar yıllık yüklemler yanında ödenirse, o zaman rayiç yükselmesi artık borçların ve faizlerin rayiç değerlerinden elde edilir.

(45)

$$G = K_o + K_1 b + K_2 b^2 + \ldots\ldots + K_{n-1} b^{n-1} = \frac{100-C_o}{(p'-p)\,b} K_o$$

ve borç artığı ise,

(46)

$$100 \frac{G}{K_o} = \frac{100-C_o}{(p-p)\,b} 100$$

Buradan, bütün faiz sonuçlarının (indife hakkının borsa rayici) borsa rayici C_2, $\frac{p}{100}$ b ;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(47a) $$C_2 = 100 \frac{G}{K_0} \times \frac{p}{100} b = \frac{100 - C_0}{p - p} p$$

daha önce de açıklandığı üzere, K kapital faizlerinin, K i yıl sonunda (m) süreleri geleceği için, bütün faiz yüklemlerinin genellikle reel nakti değerleri;

$$K_0 ib + K_1 ib^2 + K_2 ib^3 + \ldots + K_{n-1} ib^n = Gib,$$

formülüne eşittir, yani bütün faizlerin rayiç değeri, bütün artık borçların 1 yıl faizlendirilmiş rayiçi ile faiz faktörünün (i) çarpılmasıyla elde edilir.

Masraflar artık borcun % π ye kadar ve faiz ödemelerinin $\frac{\pi}{p}$ misli ise, bunun rayici (46) ve (47 a) ya göre,

(48) $$C_g = \frac{100 - C_0}{p - p} \pi$$ olur.

Bütün ödemelerin veya itfaların borsa rayiçi C_t (47a) nolu formülden çıkarma metodu ile elde edilir.

(47b)
$$C_t = C_0 - C_z = C_0 - \frac{100 - C_0}{p - p} \quad p = \frac{C_0 p - 100\, p}{p - p}$$

$$= 100 \frac{C_0 - 100 \frac{p}{p}}{100 - 100 \frac{p}{p}} = 100 \frac{C_0 - C\infty}{100 - C\infty}$$

Bu formülün içinde C ∞, devamlı = sürekli borcun rayicine tekabül etmektedir.

İtfaların borsa rayiçli Ct, nakti değer formülünün geometrik devam eden rantları için kullanılmasıyla da doğrudan doğruya hesap edilebilir. Bütün iratların reel nakti değeri

$$\zeta_0 = T_1 b + T_1 q b^2 + T_1 q^2 b^3 + \ldots + T_1 q^{n-1} b^n$$

$$= T_1 \frac{1-b^n q^n}{q-g} = \frac{K_0}{s_n} - \frac{q^n(v^n-b^n)}{q-q}$$

$$= \frac{K_0}{a_n} \frac{v^n-b^n}{i-i}$$

$$= \frac{K_0}{a_n} \frac{v^n-b^n}{p-p} 100 \quad \text{olur.}$$

Buna göre bütün itfa taksitlerinin nakti değeri : C

(47 b')

$$C_t = \frac{\zeta_0}{K_0} \times 100 = \frac{100}{a_n} \frac{v^n-b^n}{i-i} = \frac{100}{a_n} \frac{v^n-b^n}{p-p} 100$$

Buradan tekrar çıkarma metodu ile faizler rayici elde edilir.

$$C_z = C_0 - C_t = 100 \frac{a_n}{a_n} - \frac{100}{a_n} \frac{v^n-b^n}{i-i} = \frac{100}{a_n} \left(a_n - \frac{v^n-b^n}{i-i}\right);$$

burada, $a_n = \frac{1-v^n}{i}$ ve $1-v^n = ia_n$ ve $1-b^n = ia_n$ nedeniyle,

$v^n-b^n = ia_n - ia_n$, farkı meydana gelir ki böylece,

$$a_n - \frac{v^n-b^n}{i-i} = \frac{ia_n - ia_n - ia_n + ia_n}{i-i} = \frac{a_n-a_n}{1-i} i = \frac{a_n-a_n}{p-p} \quad p \text{ olur.}$$

Bununla

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(47\,a')\quad C_z = \frac{100}{a_n}\left(a_n - \frac{v^n - b^n}{p-p} \times 100\right) = \frac{100}{a_n} - \frac{a_n - a_n}{p-p}\,p$$

elde edilir.

Rayiç değer formülleri (93) konvertibel istikrazlardaki faizlerin kısaltılması veya faizlerin, ödemeler veya rayiç içindeki vergi ve masraf rayiçlerinin indiriminde kullanılır. Bütün formüller yalnız Emisyon rayici C_0 için değil, aynı zamanda buna benzer her rayiç (C_m) içinde geçerlidir.

Ödeme % α lık bir peyle yapılmışsa, o zaman (47) ve (48) nolu formülde 100 yerine $\rightarrow (100 + \alpha)$ ve p yerine $p^x = p : \left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)$ konulmalıdır.

Buna rağmen faiz yüklemleri değişmediğinden, faiz borçları, taksit borçları ve peyli Anuite borçları için hiç bir fark yoktur. Buna karşılık pey'e teşmil edilmiş Anuite borçlarında, C_z değişir zira, faiz ödemeleri pey vasıtasıyle tesir altındadır.

İlâve anuite borçlarının rayiçini tesbit etmek için, önce peysiz rayiçler ele alınır, C_z tespit edilir, $C - C^x$ fark teşekkülüyle itfa taksitinin rayiç değeri ve buradan peyin rayiç değeri elde edilir.

Örnek : 60

Bir istikraz % 4 1/2 faizle ve 20 yıl içinde eşit Anuitelerle itfa edilecektir. % 5 1/2 efektif faizde bir emisyon rayiçi :

a) Masraflar ödenmediğinde,

b) % 1/2 lik bir provizyon (artık borç üzerinden) Anuiteye dahil edildiğinde,

c) Bu provizyon anuiteye ilâve edildiğinde,

d) Emisyonda, % 1/2 ödeme prozivyonu indirildiğinde ne kadar olur?

Emisyon rayiçi öyle tespit edilmeli ki, her durumda borçlu % 5 1/2 efektif faizle yükümlü olsun.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) $K_0=100$; $A = 100 \times V^{4\,1/2}{}_{20} = 7{,}688$; $C_0 = A\,IV^{5\,1/2}{}_{20} = \%\ 91{,}87$ istikraz rayiçi altında ihraç edilmelidir.

b) $p + \pi = \%\ 5$; $A = 100 \times V^{5}{}_{20} = 8{,}024$; provizyon bir faiz ilâvesi olarak Anuitenin içinde mevcuttur. $C_0 = 8{,}024 \times 11{,}95038 = \%95{,}89$; $95{,}89 - 91{,}87 = \%\ 4{,}02$ lik rayiç yükselmesi, provizyonun rayiç değerini gösterir.

c) (48) göre $C_z = \dfrac{100-91{,}87}{5{,}5-4{,}5}\ 0{,}5 = 4{,}07$; yani

$C_0 = 91{,}87+4{,}07 = \%\ 95{,}94$ ek provizyonun rayiç değeri b'dekinden büyüktür.

d) Ödeme provizyonu (6) nolu örneğe göre; toplam 86634,46 TL. lık tutar, yani 2000000 TL. lık bir istikrazda ortalama % 4,33 tür. Bu yüzden $C_0=91{,}87+4{,}33=\%\ 96{,}20$

Örnek : 61

60 nolu örnekdeki istikrazı bir konsersiyum hangi rayiçle almalıdır ki % 5 1/2 efektif faiz elde edilsin ve a) faizler % 10 a ve b) % 6 ödemelerin masrafı olacağını hesap edilebilir.

İlk kez masraflar olmadan rayiçi tespit etmek gerekir. Bu da % 91,87 dir.

a) (47 a) ya göre faizlerin rayiçi,

$$C_z = \frac{100-91{,}87}{5{,}5-4{,}5} \times 4{,}5 = 36{,}59 \text{ masrafların kur rayiçi}$$

Böylece $36{,}59\ \dfrac{10}{100} = \%\ 3{,}66$ olur. Bunu ilk rayiçten çıkarmalı ki konsorsiyum için emisyon rayiçi $C_0=91{,}87 - 3{,}66 = \%\ 88{,}21$ olsun. Borçlunun yüklemi birinci halden daha da azdır.

b) Ödemelerin kur rayiçi; şu farkı meydana getirir:
$91{,}87 - 36{,}59 = 55{,}28$ masrafların kur rayiçi böylece
$55{,}29\ \dfrac{6}{100} = \%\ 3{,}32$ olur ve $C_0=91{,}87-3{,}32 = \%\ 88{,}55$ elde edilir.

Borçlunun yüklemi bu defa birinci durumdan daha da azdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

TAM YIL ÜZERİNDEN YAPILMIYAN FAİZ VE İTFALARDA RAYİÇ

Hem faiz ve hem de itfa tam yıl üzerinden yapılmamışsa, bu durum için bütün rayiç formülleri geçerlidir, ancak nominal ve reel faizde yüzdesi yıl periyoduna (kesrine) teşmil edilir ve süre keza period (kesir) olarak ifade edilir. Buna karşılık faiz ve itfa süreleri birbirlerine uymuyorsa o halde bir yaklaşma yapmak gerekir. Pratikte en çok karşılaşılan durum, itfanın yıllık ve faizlerin 6 aylık olarak yapıldığıdır. Bunun için, iki 6 aylık faiz ödemeleri 1 yıla çevirmek ve bunu rayiç formüllerinde yerine koymak gerekir.

En basit bir kabulle, $K_0=100$ de, nominal faizler 6 aylık $\frac{p}{2}$ tutar ve nominal yıl faizine (p) altı aylık için, $\frac{p}{2}$ efektif faiz ilâve olur. Hakiki yıl faizi olarak toplam,

(49) Nisbi relatif

$$p'=p+\frac{p}{2}\times\frac{p}{100}\times\frac{1}{2}=p+p\,\frac{i}{4}$$

(50) Konform

$$p'=\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\,(1+\frac{p}{100})^{1/2}=\frac{p}{2}\,(1+q^{1/2})$$

elde edilir.

Yaklaşık olarak basit faizlerin ve tam bileşik faizlerin hesaplanması duruma göre, faiz ve taksit istikrazlarında ve ayrıca gecikmeli itfada 26, 27, 32, 34 ve 35 nolu formüllerdeki p yerine p'i koymak gerekir. Aynı şey 42 den 44 e kadar olan formüllerde de yapılır. Faiz borçları, basit ara faizlerde peyli olsun veya olmasın $p\frac{p}{400}\,a_n$ ve taksit borçlarında $\frac{p}{4}\,\frac{n-a_n}{n}$ kadar bir rayiç yükselmesi meydana getirir.

Anulte istikrazlarında 29 ve 33 nolu formüller için zahmetli değişiklikler ve karışık deyimler meydana gelir. Daha kolay olsun diye (40) daki orta süreden yararlanılır. Ve bu 6 aylık faiz istikrazları formülünde ye-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

rine konur. Bu da basit ara faizlerde $p \frac{p}{400}$ a.v kadar bir rayiç yükselmesi verir.

İtfa planında ve rayiç hesaplarında yıllık periodlar esas alınırsa, faizler altı yıllık faiz yüzdesi üzerinden 6 ayda ödenirler. Tam yıl faizi üzerinden çıkarılan rayiçler, altı aylık rayiç yükselmesi kadar büyürler. Bütün yılların faiz ödemelerinin rayiç değeri C_z (47) nolu formüle göre yılda $p\frac{i}{4}$ ve (50) nolu formüle göre $\frac{p}{2}(q^{1/2}-1)$ faiz daha ilâve olacağı için, 6 aylık faizi için şu rayiç yükselmesi meydana gelir.

(51 a) nisbi $\left| \frac{i}{4} C_z = \frac{p}{400} C_z \right|$

(51 b) konform $\left| \frac{1}{2}(q^{1/2}-1) C_z \right|$

(51 a) ya göre Anuite borçları için rayiç yükselmesi elde edilir. Önceki formülden (47 a')

$$\frac{i}{4} C_z = \frac{i}{4} \frac{100}{a_n} \left(a_n - \frac{v^n - b^n}{i-i}\right)$$

Buna göre 6 aylık faiz :

(52)

$$\left| C_0^{(1/2)} = C_0^{(1)} + \frac{i}{4} C_z = 100 \frac{a_n}{a_n} \left[1 + \frac{i}{4}\left(1 - \frac{1}{a_n} - \frac{v^n - b^n}{i-i}\right)\right] \right|$$

28 nolu formüle göre, $C_0 = 100 \frac{p}{p} = C_z$ olduğu için, 6 aylık faizde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\frac{p}{400} \times 100 \times \frac{p}{p} = \frac{p}{4}$ lük bir rayiç yükselmesi elde edilir. Her geri ödenecek istikraz için böylece rayiç ilâvesi $\frac{p}{4}$ ün altındadır.

Ödeme % α lık bir peyle yapılırsa, faiz ve taksit borçları için rayiç ilâvesi, aynen peysiz ödemelerdeki gibi olur. Buna karşılık, uygulamadaki anuite borçlarında çok az farklar vardır.

Faiz ödemeleri ve bununla borsa rayiçi Cz, peyin anuite ilâvesiyle tesir altında kalır. Eşit anuitelerin yanısıra, pey (faiz ve itfa taksitlerinden) ilâveten ödenirse, gene rayiç ilâvesi arasında hiç bir fark olmaz.

Örnek : 62

Bir anuite istikrazı % 4 p, altı aylık faizle ve 20 yılda (altışar aylık) geri ödenecektir. % 6 reel fizikdeki emisyon rayiçi ne kadardır?

Hakiki nominal faiz her devre için % 2 olduğundan, kaide olarak bu devre için efektif faiz % 3 olarak hesap edilir. Süre böylece 40 (altı aylık) yarım yıllıktır. Bununla, (29) a göre $C_0 = 100\ V^2_{40} \times IV^3_{40} =$ % 84,51. Hakiki faizi yıl taksitleri olarak kabul edersek, önce bunu bir konform altı aylık taksite çevirmek gerekir. Böylece % 3 yerine % 29,56 (bu devre için) hesaplamak gerekir.

Örnek : 63

Örnek 30 daki emisyon rayiçi, altı aylık faiz üzerinden hesap edilecektir (faiz istikraz). (49) a göre $= p' = 4,5 + 4,5 \times 0,0125 = 4,55625$; (26) ya göre $C_0 = 4,55625 \times 12,46221 + 100 \times 0,37689 =$ % 94,47 veya (47 a) ya göre, $C_z = \frac{100 - 93,77}{5 - 4,5} \times 4,5 = 56,07$ ve (51 a) ya göre rayiç ilâvesi bulunur. $\frac{5}{400} \times 56,07 = 0,70$ ve $C_0 = 93,77 + 0,70 = 47$ elde edilir. Veyahut (43) e göre $C_0 = 100 - (5 - 4,55625) \times 12,26221 = 94,47$ bulunur.

Örnek : 64

Örnek 31 deki Emisyon rayiçi altı aylık faiz için hesap edilecektir. (Peyli faiz istikrazı)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$P' = 4{,}55625$; (27) ye göre $C_o = 95{,}98$; peyin $\alpha = \%\ 4$ olması dolayısıyla $p' = 4{,}327$ ve $C_x = \frac{104-95{,}28}{5-4{,}327} \times 4{,}327 = 56{,}07$; rayiç yüklemi (62 deki gibi) 0,70 ; $C_o = 95{,}28 + 0{,}07 = 95{,}98$ veya (27) ye göre $C_o = 94{,}47 + 1{,}51 = 95{,}98$ rayiç yüklemesi peyli veya peysiz $p\frac{p}{400}a_x = 0{,}70$ dir.

Örnek : 65

Örnek 39 daki Emisyon rayiçi altı aylık faiz için hesap edilecektir. (taksit borcu) $P' = 4{,}55625$ (32) ye göre $C_o = \frac{100}{8}(a_8 + \frac{8-a_8}{5} \times 4{,}55625)$

$= \%\ 98{,}30$ veya (47 a) ya göre

$$C_x = \frac{100-98{,}08}{5-4{,}5} \times 4{,}5 = 17{,}24$$; (51 a) ya göre rayiç yükselmesi,

$$= \frac{5 \times 17{,}25}{400} = 0{,}22 \quad \text{ve} \quad C_o = 98{,}08 + 0{,}22 = 98{,}30$$

(44) nolu formülün kullanılmasıyla $C_o = 100 - (5 - 4.55625)\frac{8-a_x}{8 \times 5} \times 100$

$= 100 - 1{,}70 = 98{,}30$ olur.

Örnek : 66

Örnek 41 deki emisyon rayici altı aylık faiz için hesaplanacaktır. (peyli taksit borcu) $\alpha = \%\ 2$ $p' = 4{,}55625$, (34) e göre $C_o = 99{,}92$ peyden dolayı $p = \%\ 4{,}412$; $C_x = \frac{102 - 99{,}70}{5 - 4{,}412} \times 4{,}412 = 17{,}25$; rayiç ilâvesi

$\frac{5 \times 17{,}25}{400} = 0{,}22$; $C_o = 99{,}702 + 0{,}22 = 99{,}92$ (44) nolu formülün kullanılması ile $C_o = 98{,}30 + 1{,}62 = \%\ 99{,}92$ (59) nolu örneğe kıyasla peyli veya peysiz rayiç yükselmesi,

$\frac{p}{4}\frac{8-a_8}{8} = 0{,}22$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 67

Örnek 55 teki Emisyon rayiçini altı aylık faiz için hesaplayın (peyli ve peysiz Anuite istikrazı) $p = 4$ $p = 4\,1/2$; $\lambda = 21{,}067$ $p' = 4 + 4 \times \frac{4{,}5}{400} = 4{,}045$

a) Peysiz (26) ya göre $C_o = 4{,}045\ a_{\lambda} + 100\ b = \%\ 93{,}88$ rayiç yükselmesi $p\frac{p}{400}\ a\lambda = 0{,}045 + 13{,}43016 = 0{,}60$; olur. Yani $C_o = 93{,}28 + 0{,}60 = 93{,}88$ (47 a) ya göre $C_z = \frac{100-93{,}88}{4{,}5-4}\ 4 = 53.76$ ve (51 a) ya göre rayiç ilâvesi; $\frac{4{,}5 \times 53{,}76}{400} = 0{,}60$ eskisi gibi (43) e göre $C_o = 100 - (4{,}5-4{,}45) \times 13{,}43016 = \%\ 93{,}89$

b) Peyli : $\alpha = 10$, $p^x = \%\ 3{,}636$ (27) ye göre yaklaşık olarak, $C_o = 979{,}84$; peyden dolayı $C_z = \frac{110-97{,}24}{4{,}5-3{,}636}\ 3{,}636 = 53.70$ ve rayiç yükselmesi $\frac{4{,}5 \times 53{,}70}{400} = 0{,}60$ yani $C_o = 979{,}24 + 0{,}60 = 979.84$ ve (43) e göre $C_o = 93{,}89 + \alpha\ b\ \lambda = \%\ 97{,}85$

λ nin kullanılmasıyla meydana gelen pek az sapma burada çeşitli tam iblâğdan olmayıp gerçek bir farka dayanmaktadır.

Örnek : 68

Çeşitli istikraz nevileri için :

$n = 50$ yıl
$p = \%\ 5$ nominal faiz
$p = \%\ 6$ reel faiz, olmak üzere tam yıl ve yarım yıl faizli peysiz ve peyli (α % 4 $p^x = \%\ 4{,}080$).

Emisyon rayiçleri tespit edilecektir, ilk kez yıllık faizlerin reyiçleri sonra faiz ödemelerinin rayiç değeri C_z ve 6 aylık faiz ilâveleri bulunur. Şu elde edilir :

İstikraz nevi (ana formülleri) parantez içinde gösterilmiştir.	Yıllık faiz için rayiç	Rayiç değeri (47) C_s	Rayiç ilâvesi (51) göre	6 aylık faiz için rayiç
Faiz istikrazı (26)	84,24	78,80	1,18	85,42
Faiz istikrazı peyli (27)	84,46	78,80	1,18	85,64
Taksit istikrazı (32)	88,59	57,05	0,86	89,45
Taksit istikrazı peyli (34)	89,85	57,05	0,86	90,71
Anuite istikrazı (29)	86,34	68,30	1,024	87,364
Anuite istikrazı pey'e teşmil edilmiş (33)	87,16	67,92	1,018	88,178
Anuite pey ilâvesi	87,06	68,30	1,024	88,084
Sürekli istikraz (28)	83,33	83,33	1,25	84,58

Pey ilâvesi bir Anuite istikrazının rayiçini tesbit etmek için, önce peysiz itfa taksitinin rayiç değeri hesaplanır:

86,34 − 68,30 = 18,04; Buradan pey'in rayiç değeri = 18.04 × 0,104=0,72; İstikraz rayiçi ilâve ile: 86,34 + 0,72 = 87,06 ; 6 aylık faiz için: 87.06 + 1,024 = 88,084.

6 aylık faiz için rayiç ilâveleri çok kez uygulamada bileşik faizler nazarı dikkate alınarak tablolardan (Tablo VII) hesaplanır.
(57 b) ye göre :

(53) $\varepsilon = \frac{1}{2}(q^{1/2} - 1)$; $q = 1 + \frac{p}{100}$ formüünü koyarsak (47 a) dan

dolayı genel faiz ilâvesi :

(54)

$$\varepsilon C_s = \frac{100 - C_0}{p - p}\, p\varepsilon = 100 - C_0 \left(\frac{p}{p - p} = 100 - C_0\right) h \; ; \; h = \frac{p\varepsilon}{p - p}$$

ve peyli geri ödemede,

(55) $$\varepsilon C_s = (100 + \alpha - C_0)\, \frac{p^* \varepsilon}{p - p^*} = (100 + a - C_0)\, h^* \; ;$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$h^* = \frac{p^* s}{p - p^*} \; ; \; p^* \frac{p}{1 + \frac{\alpha}{100}}$$

(54) ve (55) nolu formüller yalnız $p = p$; $C_0 = 100$ ve $p = p^*$ $C_0 = 100 + \alpha$ olduğu hallerde işlemez. (50) ye göre, genel rayiç formülünde p yerine $p(1 + \varepsilon)$ konursa $p' = p(1 + \varepsilon)$ olur. Bu usulle daima sonuca ulaşılır.

Tablolardan (VI ve VIII) yıllık faizler için rayiç çıkartır. ε ve h değerlerine bakılır. (Tablo VII) ve (54) ve (55) formüllere göre 6 aylık faiz için rayiç ilâvesi hesaplanır. Buna göre, faiz borçları için rayiç ilâvesi $p \varepsilon a_n$, taksit borçları için de $\frac{100}{n} - \frac{n - a_n}{p}$ $p \varepsilon$ peyli veya peysiz elde edilir. Basit ara faizler için $\varepsilon = \frac{p}{400}$ konulmalıdır.

Anuite istikrazlarında, rayiç ilâvesi ($p \varepsilon a \lambda$) olur.

Örnek : 69

Örnek 68 de 6 aylık faizler için rayiç ilâveleri, birikmiş ara faizler vasıtasıyla tablodan bulunacaktır.

$p = 5$; $p = 6$; $\times = 4$; $p^* = 4{,}808$

VII nolu tabloya göre $\varepsilon = 0{,}01478$ (örnek 68 deki $\frac{p}{400} = 0{,}15$ yerine);

$h = 0{,}07391$; $h^x = \frac{4{,}808 \times \varepsilon}{6 - 4{,}808} = 0{,}05961$ sonra;

a) Faiz istikrazı için : $(100 - 84{,}24) \times 0{,}07391 = 1{,}16$
b) Peyli olarak yine aynı rayiç yükselmesi ve $(104 - 84{,}46) \times 0{,}05961 = 1{,}16$ (54) e göre
c) Taksit ilâvesi için : $(100 - 88{,}59 \times 0{,}07391 = 0{,}84$
d) Peyde yine aynı rayiç yükselmesi $(104 - 89{,}85) \times 0{,}05961 = 0{,}84$
e) Anuite istikrazı için : $(100 - 86{,}34) \times 0{,}07391 = 1{,}01$
f) İlâveli peyde gene aynı faiz ilâvesi elde edilir :
$(104 - 87{,}06) \times 0{,}05961 = 1{,}01$
g) Teşmil edilmiş peyde inhiraflı bir faiz ilâvesi
$(104 - 87{,}16) \times 0{,}5961 = 1{,}00$
h) Sürekli istikraz için $(100 - 83{,}33) \times 0{,}07391 = 1{,}23$

Her durumda «rayiç ilâvesi» 6 aylık bileşik fâizler dolayısıyla örnek (68) dekinden daha düşüktür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

RANTABİLİTE HESAPLARI HAKKINDA FAİZ VE RANTABİLİTE HAKKINDA GENEL BİLGİ

Şimdiye kadar rayiçler, bilhassa emisyon rayiçi, alacaklının (istikraz ihraç eden) artık borçlarının nominal faizi için p ve icabında % a peyin alınması suretiyle ödemede veya itfada hakiki reel (efektif faiz için) % p elde etmek istediği ve icap ettiği istikrazlarda kullanılmaktaydı.

Böylece, genel olarak borçlunun hakiki faiz yüklemi gösterilmiş olup, borçlu veya alacaklı veya her ikisi tarafından karşılanacak masraflar nazarı itibare alınmaktadır.

Bir istikrazın rayiçi, gene bilhassa emisyon rayiçinde, tersine saptanırsa edilirse, buna ait efektif faiz hesaplanabilir. Bu bir istikrazın rantabilitesi, tam deyimle genel veya ortak rantabilite olarak isimlendirilir; Zira burada bütünüyle tam istikrazı emisyon rayicine ve diğer başka bir tarihteki rayiçe göre olan ve tam ödemeye kadar yani itfa süresinin sonuna kadar elinde tutan, daha doğrusu bunu önce açıklamayan istikraz çıkartanın rantabilitesi söz konusudur.

Bir istikrazın bu genel rantabilitesini piyasadan satın alınan ve elde tutan ve sonra satılan istikraz adetlerinin rantabilitesinden bu suretle ayırt etmek gerekir. Tekil rantabilite hesapları sonra gösterilecektir.

Efektif faiz konusu, finans matematiğinin en önemli problemlerinden birini içine alır. Tam tespit edilmiş faiz ve ödeme şartlarını kapsayan uzun süreli kapitallerin net faizlerini yansıtır ve böylece çeşitli kapitallerin rantabilite karşılaştırmasına imkân verir.

Efektif ve reel yüzdesi p, hakikatte borcun rayiç değerine yani reel kapitale teşmil edilmiş bir faiz yüzdesidir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, toplam borç meblâğının değil de, eski mevcud efektif borç artığının efektif faiz yüzdesi üzerinden faiz işlemine tabi tutulacağıdır.

Ödenmiş bulunan borç kısımlarının reel faizi onun kendi değerine bağlıdır. Eski mevcut efektif borç artıklarının efektif faizi, aynen tam itfadaki nominal artık borçların nominal faizlerinde olduğu gibi, sürenin sonunda yapılır.

Örnek : 70

Bir istikraz % 4 le faizli olup 5 yıl sonra başa baş bir rayiçle geri ödenecektir. % 6 reel faizde, emisyon rayiçi % 1,75 tutmaktadır. Nominal 100 TL. için efektif hesabı nasıl yapılmalıdır?

Reel kapital, % 91,57 emisyon rayicinde		91,57 TL.
91,57 nin % 6 efektif faizi	+	5,50 TL.
		97,07 TL.
100 TL. % 4 nominal faiz ödemesi	—	4,— TL.
1. yılın sonundaki reel borç artığı		93,07 TL.
93,07 nin % 6 sı	+	5,58 TL.
		98,65 TL.
100 TL. % 4	—	4,— TL.
		94,65 TL.
94,65 TL. nin % 6	+	5,68 TL.
		100,33 TL.
100 TL. % 4 ü	—	4,— TL.
		96,33 TL.
96,33 TL. % 6	+	5,78 TL.
		102,11 TL.
100 TL. % 4	—	4,— TL.
4 üncü yılın sonundaki reel borç artığı		98,11 TL.
989,11 % 6 efektif faizi	+	5,89 TL.
		104,— TL.
100 TL. nın ve ödemenin % 4 oranında nominal faizi		104,— TL.
5. yılın sonunda hesap kapanır		—,— TL.

Örnek : 71

Bir istikraz (Anuite borcu) % 4 le faizlendirilecek ve 3 yıl içinde başa baş rayiçle itfa edilecektir. % 6 oranındaki reel faizde rayiçi 94,62 dir. Anuite 22,463 tür. Nominal 100 TL. nın efektif hesabı nasıl olmalıdır?

Reel kapital, % 94,62 emisyon rayiçi ile		94,62 TL.
94,62 nin % 6 efektif faizi	+	5,68 TL.
		100,30 TL.

% 4 nominal faiz + itfa taksiti = Anuite	—	22,46 TL.
1. yıl sonundaki reel borç artığı		77,84 TL.
77,84 ün % 6	+	4,67 TL.
		82,51 TL.
Anuite	—	22,46 TL.
		60,05 TL.
60,05 in % 6 sı	+	3,60 TL.
		63,65 TL.
Anuite	—	22,46 TL.
		41,19 TL.
41,19 un % 6 sı	+	2,47 TL.
		43,66 TL.
Anuitenin tama iblâğı	—	22,47 TL.
4. yıl sonundaki reel borç artığı		21,19 TL.
21,19 un % 6 efektif faizi	+	1,27 TL.
		22,46 TL.
% 4 nominal faiz + itfa taksiti = Anuite	—	22,46 TL.
5. yılın sonunda hesap kapanır		—,— TL

İSTİKRAZLARDA ORTALAMA GENEL RANTABİLİTENİN HESAPLANMASI

Verilmiş bulunan emisyon rayiçinden C_0, bir borcun (istikrazın) reel rantabilitesi (p) yi bulmak için rayiç formüllerinden gidilir. Onun p'ye göre çözülüşü her şeye rağmen o kadar karışık yüksek dereceli denklemler meydana getirir ki, uygulamada, birbirlerine yakın rayiçlerin veya tablo değerlerinin interpolasyonu suretiyle çözümlenmesi gerekmektedir.

Faiz farklarından dolayı rayiç formülleri bir kaç deneme yapılarak yaklaşık olarak kullanılır. Bu işin hesap tekniği daha iyi olarak bir örnekle gösterilebilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 72

% 4 faizli ve on yıl sonra geri ödenecek olan bir faiz istikrazı % 95 verilir.

a) Ödeme başa baş rayiçle yapıldığında,

b) Pey % 5 olduğunda, efektif faiz ne kadardır?

a) (26) ya göre $95 = 4\ a_{10} + 100\ b^{10}$, p ye göre çözülmelidir. Bunun yerine, ilk kez (28) e göre tahmin yapılır. Ve $100\ p : C_0 = 400 : 95 = 4{,}2$ elde edilir % 4,2 için rayiç tespit edilir ve $4 \times 8{,}03163 + 100 \times 0{,}66291 = 98{,}42$; elde edilir. Yani $p > 4{,}2$. % 4,5 için

$4 \times 7{,}91272 + 100 \times 0{,}64393 = 96{,}04$; yani $p > 4{,}5$ % 4.7 ye karşılık $4 \times 7{,}83632 + 100 \times 0{,}63192 = 94{,}54$; elde edilir. Yani $p < 4.7$ rayiçler arasındaki linier interpolasyonla $p =$ % 4,64 bulunur.

(43) e göre genel olarak;

(56) $$p = p + \frac{100 - C_0}{a_n} = p + (100 - C_0)\, V^p{}_n$$

Bu formülün anlamı şudur : Nominal değeri 100 olan bir istikrazın satımında, rayiç farkı olarak $(100 - C_0)$ tasarruf edilir. Bu da rant'a ait bir faiz (p) ilâvesi olarak değiştirilir $(100 - C_0)\ V^p{}_n$

Bunun içerisindeki a_n değerinde henüz belirsiz faiz yüzdesi p bulunmaktadır. Tam kati değerini bulabilmek için formül 56 ya konularak, ilk önce yaklaşık bir değerden yararlanılır.

4,5 için, $4 + 5 \times 0{,}12638 = 4.63$ bulunur. 4.63 için tam olarak $4 + 5 \times 0{,}12719 =$ % 4,64 bulunur. VI nolu tabloya istinaden doğrudan doğruya lineer interpolasyon yapılabilirse $p = 4{,}65$ elde edilir.

% 3 108,54 $\qquad C_1 = \frac{4{,}6 - 3}{1} = 1{,}6 \quad C_2 = 1{,}6\ \frac{4{,}6 - 4}{2} = 4{,}8$

$-8{,}53$

% 4 100 $+0{,}81$ $= 0{,}48$ % 4,6 için rayiç

$-7{,}72$ $\qquad 108{,}53 - 1{,}6 \times 8{,}53 + 0{,}48 \times 0{,}81$

% 5 92,28 $= 95{,}27$

4,6	95,27	4,6	95,27	X = 0,04
−5	−92,28	−4,6 + X	−95	p = % 4,64
0,4 :	2,99 =	X :	0,27	

b) (29) a göre

$95 = 4a_{10} + 105\, b^{10}$ % 5 için denemek suretiyle
$4 \times 7{,}72173 + 105 \times 0{,}613919 = 95{,}35$; yani $p >$ % 5 den
% 5,1 için $4 \times 7{,}6849 + 105 \times 0{,}60821 = 94{,}60$; yani $p <$ % 5.1

Lineer interpolasyon : $p =$ % 5,05 i verir.
Pey'de (44) nolu formüle, αb^n nakti değer ilâve edilmelidir ve böylece genel olarak;

$$(57) \qquad p = p + \frac{100 - C_0 + \alpha b^n}{a_n}$$

elde edilir.

% 5 konulduğunda $p = 4 + (180 - 95 + 5 \times 0{,}61391) \times 0{,}12950 =$ % 5,05

Örnek : 73

% 4 faizli ve 10 yıl içinde geri ödenecek bir taksit istikrazı, % 95 le ihraç edilecektir.

a) Ödeme başa baş rayiçle ve

b) % 5 bir peyle, olduğu taktirde efektif faiz ne kadar olur?

a) (32) ye göre : $95 = 10\,(a_{10} + \frac{10 - a_n}{p} \times 4)$ denemek suretiyle

% 5 için 95,44 ve % 5,2 için rayiç = 94,57 olur. Linier interpolasyonla $p =$ % 5,101 elde edilir.
(44) e göre, genel olarak

$$(58) \qquad p = p + (100 - C_0 \frac{100\,(n - a_n)}{np}$$

% 5 olarak denemek suretiyle $4 + \frac{5 \times 10 \times 5}{100 \times 2{,}27827} = 5{,}097$; % 5,1 Tam kati olarak :

$$4 + \frac{5 \times 10}{100 \times 2{,}31509} = 5{,}101 \text{ elde edilir.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) (34) e göre; $95 = 10\ (a_{10} \times 1{,}05 + \frac{10-a_{10}}{p} \times 4)$ % 5,5 ve % 6 için 97,05 ve 94,88 rayiçleri elde edilir Lineer inetrpolasyon p = % 5,97 yi verir.

Pey'de (44) nolu formüle parasal değer $\frac{\alpha}{n} a_n$ ilâve etmek gerekir ve böylece genel olarak :

(59) $$p = p + \frac{100 - C_o + \frac{\alpha}{n} a_n \, np}{100\ (n - a_n)}$$

Denemek suretiyle % 6 için

$$4 + \frac{100-95 + 0{,}5 \times 7{,}36009}{100\ (10 - 7{,}36009)} \times 10 \times 6 = \% \ 5{,}97$$

Örnek : 74

% 4 faizle ve 10 yıl içerisinde itfa edilecek bir anuite istikrazı, % 95 le verilecektir.

a) Ödeme başa baş rayiçle

b) Teşmil edilmiş % 5 peyle

c) % 5 ilâve peyle olduğunda, efektif faiz ne kadar olur?

a) (29) a göre genel olarak,

(60) $$a_n = \frac{C_o}{A} = \frac{C_o \, a_n}{100}$$

yani $a_{10} = 0{,}95 \times 8{,}11090 = 7{,}70536$ Lineer interpolasyonla p = % 5,4 olur.

b) (33) e göre genel olarak

(61) $$a_n = \frac{C_o}{A^x} = \frac{C_o \, a^x_n}{100 + a}$$ yani

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$p^* = \%\ 3{,}81\ ;\ a_{10} = \dfrac{95 \times 8{,}18907}{105} = 7{,}40916\ ;\ p = \%\ 5{,}86$ olur.

c) İlâveli pey'de, peysiz rayiç (29) a göre, çıkartılmalıdır.

Buradan (47) ye göre faizlerin rayici,

$$C_z = \frac{100\,(a_n - a_n)}{a_n\,(p-p)}\ p$$

ve itfa taksitlerinin rayiç değer farkı olarak $(100\ \dfrac{a_n}{a_n} - C_z)$ meydana gelir, çünkü pey'in rayiç ilâvesi $(100 \times \dfrac{a_n}{a_n} - C_z)\ \dfrac{\alpha}{100} = \dfrac{(a_n p - p)\,\alpha}{a_n\,(p-p)}$ ilâve pey'i havi rayiç böylece,

(62) $$C_0 = 100\ \frac{a_n}{a_n} + \frac{(a_n p - a_n p)\,\alpha}{a_n\,(p-p)}$$

Buna göre ödevimizin çözümü: $95 = 100\ \dfrac{a_{10}}{a_{10}} + \dfrac{a_{10}\,p - 4\,a_{10}}{a_{10}\,(p-p)} \times 5$

% 6 için 94,31 ve % 5,5 için 96,63 rayiç meydana gelir.

İnterpolasyon bize $p = \%\ 5{,}85$ verir. Efektif faiz böylece genişletilmiş peyden birden biraz daha düşüktür.

Buna uygun olarak eşit efektif faizde rayiç az çok daha düşüktür. (62) nolu formülden örneğimiz için 68 : $p = 5$; $p = 6$ $\alpha = 4$

$$C_0 = \frac{1576.186}{18.25593} + \frac{6 \times 15.76186 - 5 \times 18.25593}{18.25593 \times 1} \times 4 = \%\ 87.86$$

elde edilir.

Örnek : 75

Bir istikraz % 3 1/2 ile faizlendirilip ve ayrıca % 1 faiz büyümesiyle itfa edilecektir. (Artıklı Anuite borcu) ihraç rayiçi % 95 olduğuna göre efektif faiz ne kadardır? (31) ve (60) a göre :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$n = 43{,}73$ için nakti değer faktörü $a_n = 0{,}95 \times 22.22222 = 20.00001$
p için 43 ile 44 yıllar arasında interpolasyon yapılır.
$a_{43} = 0{,}95 \times 22.06269 = 20.95956$ için % 3.83 ve
$a_{44} = 21{,}16865$ faiz yüzdesi için % 3,76 elde edilir.

Lineer interpolasyon, $p = \%\ 3{,}78$ (31) e göre $95 = 4.5_{43} + 3.26\ b^{44}$ % 3.5 ve % 4 için 100 ve 92.25 rayiçleri elde edilir. Tam kati bir sonuç daha önceleri yapılan yakın rayiçler interpolasyonla (örneğin % 3.7 ve 3.8) olabilir.

Örnek : 76

Bir istikraz % 4 faizlendirilip ve 10 yıldan sonra eşit anuitelerle daha 20 yıl itfa edilecektir. (Gecikmeli itfa) emisyon % 95 olduğundan efektif faiz ne kadardır?

(35) e göre $C_o = pa_1 + 100\ \frac{a_n}{a_n}\ b^1$ yani $1 = 10$ $n = 20$ için

$$95 = 4a_{10} + 100\ \frac{a_{20}}{a_{30}}\ b^{10}$$

% 4 ve % 4,5 için rayiçler 100 ve 93,28 bulunur.
Lineer interpolasyonda $p = \%\ 4{,}4$ bulunur.

Örnek : 77

% 4 1/2 faizli ve 30 yıl içinde itfa edilebilen bir Anuite istikrazına 20 yılın sonunda % 95 rayiçle talip bulunacaktır. Sürenin artığı için efektif faiz ne kadar olmalıdır?

(36) ya göre ortalama rantabilite belli zaman periodlarındaki borçlanma süresinin rayiçleri sayesinde artık sürenin formüllerinden çıkar. Bu nedenle bizim örnekte,

$$C_{20} = 100\ \frac{a_{10}}{a_{10}} = 95 \text{ buradan } a_{10} = 7{,}51708 \text{ ve } p = \%\ 5{,}6$$

meydana gelir.

Örnek : 78

Örnek 76 daki efektif faiz orta sürenin λ yardımıyla hesap edilecektir. $\lambda = 21{,}067$; $95 = 4a + 100\ b$, Bu suretle 4 ve 4 1/2 için 100 ve 93.28 rayiçleri ve bununla $p = \%\ 4{,}4$ elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 79

% 5 faizli ve 50 yıl içinde itfa edilebilen peysiz Anuite istikrazı % 90 la verilecektir. Yıllık ve 6 aylık faiz ödemelerinde efektif faiz ne kadardır?

a) Yıllık faiz ödemesi;

$a_{50} = 0{,}90 \times 18{,}25593 = 16.43034$; $p = \%\ 5.71$ veyahut % 5 1/2 ve % 6 için rayiçler, 92.75 ve 86.34 olarak hesaplanır. İnterpolasyonla $p = \%\ 5{,}72$ elde edilir.

b) 6 aylık faiz ödemesi; (53) e göre rayiç; $C_o + (100 - C_o)\ h$ suretiyle verilmiştir. Tablo VII. % 6 için $\varepsilon = 0{,}01478$; ve $h = 0.07391$ ve rayiç $86{,}34 + (100 - 86{,}34)\ 0.07391 = 87.35$ yardımcı değerleri bulunur. VII nolu tabloda % 5 1/2 için interpolasyon ve $\varepsilon = 0{,}01357$; $h = \dfrac{5 \times \varepsilon}{0{,}5}$ $= 0{,}1357$ bulunur; rayiç buna göre $92.75 + (100 - 92{,}75)\ 0.1357 = 93.75$ olur. Lineer interpolasyonla $p = \%\ 5.79$ a çıkar yüksek efektif faizlendirme, 6 aylık ara faizlere istinad etmektedir.

SÜREKLİ FAİZSİZ İSTİKRAZLAR GECİKMELİ FAİZLENDİRME

Sürekli istikrazlar pratik olarak borçlu tarafından ödenmesi belli olmayan dolayısıyla muntazam bir itfanın öngörülemeyeceği istikrazlar demektir. Buna karşılık borçlunun ise duruma göre geri satmak suretiyle tesirli olacağı itfa hakkı saklıdır. Bu nedenle, hesap yapılırken süre için $n \to \infty$ konur.

Sürekli istikrazlarda, efektif faizlendirme hesabı en basitinden düşünülür. (28) e göre şu sonuç çıkar.

$$(63) \qquad p = \frac{100\ p}{C\ \infty}$$

Bu işle pek meşgul olmayanlar bu formülü çok kez diğer istikraz çeşitlerinde kıymet süresinin hakiki faizlerini kabaca tahmin etmek için kullanırlar. İşe yarar bir tahmin (yaklaşma) yalnız çok uzun süreli istikrazlara yarayabilir. Bu bize peysiz Anuite istikrazı ile yapılan bir karşılaştırmayı göstermektedir. Faiz nominal $p=4$ ve efektif $p = \%\ 5$ olsun.

Süre	5	10	15	40	45	50	$n \to \infty$
Rayiç C_o	97.25	95,20	93,36	86.69	85.78	84.98	80
p (28) göre	4,1	4,2	4.3	4.6	4.7	4.7	5

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek (72) için % 4.2 tahminle % 4.64 hakiki bir faiz yüzdesi meydana gelir. (63) nolu formül, yalnızca kısa süreli kapitaller için, rayiç iyi bir işletmeyle (idareyle) sabit tutulduğu zaman kullanılır. Bundan başka, rayiçin altında bulunan kıymetli kâğıt için de kullanılabilir, çünkü o asgari erişilen alt limitin rantabilitesini verir.

(63) nolu formül (faiz istikrazı) için, ödeme rayiçinin C_n, emisyon C_0 veya ihraç rayiçine eşit olduğu hallerde bilhassa kullanılır.
$C_n = 100 + \alpha\, C_0$ (27) nolu formülü koyarsak o zaman;

$C_0 = pa_n + C_0 b^n$; $C_0(1-b^n) = pa_n$ zira $1 - b^n \frac{p}{100}\, a_n$ olduğu için

$C_0 = \frac{p}{100}\, p$ veya $p = \frac{100\, p}{C_0}$ sonucu çıkar.

Faizsiz hazine bonolarında faizlendirmede ve vergilendirmede genel olarak nominal faizlerin devamlı ödemeleri olmaz. Onlar belli bir kapital meblâğına; ödeme meblâğına istinad ederler ve senetler gibi iskonto yoluyla rayiç altı bir değerle iskonto edilirler.

Hakiki faiz, ödeme ve emisyon rayici arasındadır. Ters yoldan $C_0 = 100 + \alpha$ üzerinden ödenebilir. Bundan böyle «Faizsiz» tabiri yanıltabilir. Hakikatte iskonto çıkarılmasıyla hamiline faizler ödenir veya peyli ödeme hesabına geçirilir. Genellikle rayiçlerin daha düşük efektif faizler bu formüle göre,

(64) $\boxed{C_0 = C_n\, b^n}$

faizlendirilmesi suretiyle p tablo II ye göre interpolasyonla elde edilir. ($C_0 : C_n = II_n^p$) gecikmeli faizlerde de aynı şey 64 nolu formül, önce şimdiye kadar iletilmiş metotlara göre faiz başlangıcındaki rayiç tesbit edilmek ve bu bilâhare faizsiz yıllar üzerinden iskonto yapılmak suretiyle kullanılır.

«Faizsiz» olma karakterini süresi bitmiş faizlerin itfa sonunda ödenmesi gerekli olan diğer istikrazlar da taşır.

Bu istikrazlar, 30 yıl süreyle ve eşit taksitlerle, gerekli borç (% 12 1/2 nominal değeri üzerinden) 5 katı üzerinden itfa edilendir. Geri ödeme devlet tarafından % 4 1/2 ve idare tarafından % 5 faiz verilirdi.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İSTİKRAZLARDA RANTABİLİTE KARŞILAŞTIRMASI (PARİTE RAYİÇİ)

Farklı istikraz şartlarını karşılaştırmak için, parite rayiçinden yararlanılır. İki istikrazın rayiçine, eğer aynı efektif faize tekabül ediyorsa «parite» denir. Şayet iki istikraz için $C^{(1)}$ ve $C^{(2)}$ rayiç teklifleri mevcutsa 2 nci istikrazın $C^{(1)}$ e ait parite rayiçi tespit edilir ve bu $C^{(2)}$ ile karşılaştırılır. $C^{(2)}$ daha yüksek olduğu taktirde 2 nci istikrazın efektif faizi daha düşük ve borçlu için daha müsait, alacaklı için tam tersi olur.

Eşit süreli (n) anuite istikrazları için parite rayiçleri arasında basit bağlantılar vardır. Birinci istikraz için $C_0^{(1)} = (100 + \alpha_1) \dfrac{a_n}{a^{\alpha}{}_n^{(1)}}$ ve ikinci rayiç için $C^{(2)} = (100 + \alpha^2) \dfrac{a_n}{a^{\alpha}{}_n^{(2)}}$ olduğunda, efektif faiz yüzdesiyle bağlantılı olmayan, orantı denkleminin bölünmesi suretiyle aşağıdaki denklem;

$$(65) \qquad C^{(1)} : C_0^{(2)} = (100 + \alpha_1)\, a^{\alpha}{}_n^{(2)} : (100 + \alpha_2)\, a^{\alpha}{}_n^{(1)}$$

olur ve peysiz istikrazlar içinde, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

$$(66) \qquad C_0^{(1)} : C_0^{(2)} = a_n^{(2)} : a_n^{(1)}$$

denklemi elde edilir. Yani, parite rayiçleri kendilerine ait nakti kıymet faktörleriyle ters orantılıdır. Sürekli istikrazlar için, bilhassa (63) nolu formülden,

$$(67) \qquad C_0^{(1)} : C_0^{(2)} = p_1 : p_2$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yani parite rayiçleri nominal faiz yüzdesi gibi orantılıdırlar. Genel olarak ($n_1 = n_2$) olduğu hallerde rayiç formülünden $C_o^{(1)}$ için kendisine ait olan p tespit edilmeli ve $C_o^{(2)}$ için rayiç formülünde yerine konulmalıdır. (p) faktörünün çıkarılması trigometrik bir denklem meydana getirir. (p) nin kati olarak hesaplanmasına VI ve VII arası tablolardaki birbirlerine yakın değerlerden parite rayiçi interpolasyon edilerek yapılabilir.

Örnek : 80

Bir faiz istikrazı için parite rayiçleri bulunacaktır.

a) Peyli $p_1 = \%\ 4'$ $\alpha^1 = \%\ 10$ $n^1 = 5$

$C_o^{(1)} = \%\ 99{,}05$; $p_2 = \%\ 5$; $\alpha_2 = \%\ 2$; $n_2 = 10$ $C_o^{(2)}$ bulunacaktır. Birinci istikrazın rayiç denklemi : $99{,}05 = 4a_5 + 110\ b^5$; bu da bize tam olarak $p = \%\ 6$ verir. Buradan, $C_o^{(2)} = 5a_{10} = \%\ 93{;}76$ verir.

b) Peysiz olarak VII nolu tablodan yararlanarak $P_1 = 4$; $n_1 = 5$ ve $C_o^{(1)} = \%\ 95{,}67$ olduğundan $p = \%\ 5$ okunur. $p_2 = \%\ 5$ için parite rayiçinin bir (n_2) için $C_o^{(2)} = \%\ 100$ olur.

c) Eşit süreler için; VI nolu tabloya göre $p = \%\ 6$ için, şu parite rayiçleri elde edilir.

Süreler	5	6	7	8	9	10
Rayiç $p_1=4$ için	91,57	90,17	88,84	87,58	86,40	85,28
Parite rayiçi $p_2=5$ için	95,79	95,08	94,42	93,79	93,20	92,64

Örnek : 81

Bir taksit istikrazı için, parite rayiçleri tespit edilecektir. İstikraz şartları örnek 80 deki gibi olacaktır. Yalnız $C_o^{(1)} = \%\ 103{,}17$ olacaktır.

$$p = \%\ 6 \quad \text{zira} \quad C_o^{(1)} = \frac{100}{5}\ (4{,}21236 \times 1{,}10 + \frac{5-4{,}21236}{6} \times 4) = 103{,}17$$

olur. Buradan;

$$C_o^{(2)} = \frac{100}{10}\ (7{,}36009 \times 1{,}02 + \frac{10-7{,}36009}{6} \times 5) = \%\ 97{,}07$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 82

30 yıl süreli yüzde dörtlü bir anuite istikrazı, % 102 rayiç buluyor Aynı süre içinde ve % 3 1/2 lik bir istikraz için rayiç nedir?

(56) ya göre $C_0^{(2)} = 102 \dfrac{17,29203}{18,39205} = \%\ 95,90$

Örnek : 83

İkinci istikraz 20 yıl süreli olduğu zaman, ödev 82 nin parite rayiçi ne kadardır? İlk önce p yi (ilk istikraz için) şu formülden bulmak gerekir. (66) nolu formüle göre $= 100 \dfrac{a_{\overline{20}}}{17,29203}$ veya $a_{\overline{20}} = 17,63787$ Lineer interpolasyonla $p = \%\ 3,84$ bulunur. Bu değeri, ikinci istikraz için rayiç denklemine koymak gerekir.

$$C_0^{(2)} = 100 \frac{13,78939}{14,21240} = \%\ 97,02$$

elde edilir, veya tahmin edilen 3 1/2 ve % 4 arasındaki faiz yüzdelerinin parite rayiçi interpolasyonla yapılır. Birinci istikraz ($p_1 = \%\ 4$ ve % 3 1/2 için) $100 \times \dfrac{18,39205}{17,29203} = \%\ 106,36$ efektif rayiç ve % 4 için 100 parite rayiçi elde edilir. Gene aynen bunun gibi ikinci istikraz ($p_2 = \%\ 3$ 1/2) için ve % 3 1/2 için yüzde yüz efektif parite rayiçi ve % 4 için de $100 \times \dfrac{13,59033}{14,21240} = \%\ 95,63$ efektif rayiç bulunur. Bu dört rayiç arasında interpolasyon yapmak gerekir. Birinci istikraz için verilmiş bulunan rayiç $C_0^{(1)} = 102$; 106,36 ile 100 arasında ve ikinci rayiç için aranan parite $C_0^{(2)}$; 100 ile 95,63 arasında durur.

106,36	100,00	106,36	100,00
100,00	95,63	102,00	100,00 − x
6,36	: 4,37 =	4,36	: x

$x = 2,90$; $C_0^{(2)} = 97,01$ elde edilir. Bu değer 97,02 den daha tamdır. (Doğrudur.)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 84

% 4 nominal faiz yüzdeli anuite istikrazı $n_1 = 25$ süre ve % 5 le ihraç edilecek. Aynı zamanda bir başka anuite istikrazı % 5 nominal faiz yüzdesiyle $n_2 = 35$ le ve % 110 la teklif edilmektedir. Taahhütte bulunan için hangi istikraz daha müsaittir? VIII nolu tabloya göre;

$C_0^{(1)} = 95$; | 100 ile 90,22
$C_0^{(2)} = 110$; | 113,39 ile 100 arasında durur.

Her iki halde efektif faiz % 4 - 5 arasındadır. İnterpolasyon suretiyle ikinci istikrazın parite rayiçi elde edilir.

100,00	113,99	100	113,99
90,22	100,00	95	113,99 — x
9,78 :	13,90 =	5 :	x

$x = 7,15$ parite rayiçi 106,84 dür. Gerçek rayiç daha yüksektir. Böylece ikinci istikraz taahhütte bulunan için uygun değildir.

Örnek : 85

Örnek 82 de % 10 oranında teşmil edilmiş bir pey; her iki istikraz için kabul edilecektir. Böylece parite rayiçi ne kadar olur? İlkönce (65) e göre $p^x_1 = 3,182$ ve $p^x_2 = 3,636$ hesaplanmalıdır ve $C_0^{(2)} = 102 \frac{18,09284}{19,16059}$ = % 96,29 elde edilir.

HER İSTİKRAZ ADEDİ ÖZEL RANTABİLİTESİNİN BULUNMASI : BİR KAPİTALİN RANTABİLİTESİ

Şimdiye kadar bir istikrazın genel rantabilitesi işlendi. Yani hamilin bütün istikraz için hedef tuttuğu gelirler mevzubahistir.

Burada, tek bir istikraz adedinin özel rantabilitesini yani kıymetli kâğıdın meydana getirdiği sermayenin (tek rantabilite) geliriyle, (efektif faiz) ayırt etmek gerekir. Burada kati ödeme terminlerine havi faiz istikrazları için, her iki gelir arasında hiç bir farkın olmadığı görülür. Bütün istikraz adetleri bu durumda, eşit tutarlarla geri ödenirler.

Buna karşılık itfa istikrazlarında tek rantabilite, eski mevcut ödeme tarihine, yani her istikraz adedinin süresine, bağlıdır. Bütün itfa istikrazının genel rantabilitesi, istikraz adedlerinin çeşitli tek gelirlerinden mey-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dana gelen bir ortalama yaratır ve ağırlık merkezi de, itfa edilmiş parça-ların süre ve adetlerinden meydana gelir. Bu yüzden, her adet hamilinin orta veya ortalama rantabilitesi (efektif faiz) olarak da adlandırılır.

Buna uygun olarak, emisyon rayiçi her adedin kısmi rayicinden meydana gelen bir ortalama olur ve eski itfa edilmiş adetlerin sayılarıyla ölçülür.

Özel rantabiliteyi bulmak için, bütün tek adetleri yani aynı süreyle itfa edilmiş bütün adetlerin hepsi, bir faiz istikrazı olarak kabul edilir. (26) ve (27) nolu formüllere göre (p) tespit edilir. Burada ödeme tarihi ve süre (n) belirsizdir. Bu yüzden gelirler (p), sonradan yani ödemede hesaplanır, veya tahmini kura çekimi ve geri satın alma termini kabul edilerek tahminen elde edilir.

C_0 rayici, rayiç değerinin altında ise, en erken geri ödeme tarihi üst limiti gösterir ve en son mümkün olan geri ödeme tarihi de hakiki gelirin alt sınırını gösterir.

Rayicin üstünde olan rayiçlerde ise bu limit tam tersinedir. Ortalama rantabilite her iki limit arasındadır ve aynı zamanda efektif faizin mümkün değerini de ifade eder. Yani ne kadar erken olursa o kadar büyük olan istikraz adedlerine sahip olur.

Özel rantabilitenin alt sınırı (limit) asgari efektif faizlendirme olarak ta gösterilir. Bu, piyasada geri ödeme yanında kura suretiyle elden temin edilen istikrazlarda çok önemli rol oynar. Bu borçlu tarafından, istikrazın günlük rayici; ödeme tarihindeki rayiçten düşük olduğu hallerde tercih edilir. Bundan sonra, geri ödemenin hamil için gayri müsait olduğu durum, en son sürenin asgari geliri olarak kabul edilir. Bu düşünce en son geri ödeme tarihi belli olduğu zaman, geçerlidir.

Faiz istikrazlarına ait rayiç formülleri, bir gerekli kapitalin geliri tespit edilmek istendiğinde, bilhassa kullanılır. Ana konu, değerli kâğıtların geçici olarak alınması ve tekrar geri satılmasıdır.

Satın alma rayici (C_0) ile ve satma rayici (C_n) ile ve (n) yıl da sahip olma süresi olarak gösterilirse, genel olarak (26) nolu formüle göre,

$$(68) \quad \boxed{C_{00} = pa_n + C_n b^n} \qquad \text{olur.}$$

Bu formül, sahip olma süresinin tam yıl olmaması halinde de kolayca çevrilebilir. Kabul edilen bütün hizmetlerin (faizler ve satın alma) nakti değeri, kıymetli kâğıtların satın alınma fiatlarına eşittir. Geri ödeme tarihi belli değilse, o zaman (63) nolu sürekli istikrazlar formülünden

gelirin alt ve üst sınırını tespit etmek için yararlanılır. $C_n = C_o$ hali için bu formül bilhassa geçerlidir. Yani iyi hesap edilmiş rayiçlerle hesap edilebilen kısa süreli kapitaler için. Bundan başka gereki tahmin imkânı da ayrıca verir.

Pratik kaide geri ödeme ve emisyon veya talep rayici arasındaki farkları, ya eşit veya süre içinde faizli iradlar olarak (n' = ortalama süre) böler.

(69) $$p = \frac{100\,p}{C_o} + \frac{C_n - C_o}{n} \quad \text{ve} \quad p = \frac{100\,p}{C_o} + \frac{C_n - C_o}{S_n}$$

Formül bize yaklaşık sonuçlar verir. Zira hakiki itfa olayı nazarı itibare alınmamıştır. İkinci formül buna rağmen oldukça daha kati olup, pratikte genellikle kâfi gelmektedir.

Örnek : 86

% 4 1/2 faizli ve 3 yıl içinde başa baş rayiçle itfa edilecek bir taksit istikrazı % 5 le efektif faizlendirilecektir. Emisyon rayicini ortalama olarak tek istikraz adedleri özel rayiçlerinden nasıl bulunur? İstikraz adedleri, çeşitli ödeme tarihlerine havi 3 grup teşkil ederler. Her gr. aynı efektif faizi gösteriyorsa o zaman farklı adet rayiçleri meydana gelir.

$C_o^{(1)} = 4{,}5\ a_1 + 100\ b = 104{,}5\ b = 99{,}524;$

$C_o^{(2)} = 4{,}5\ a_2 + 100\ b^2 = 99{,}070;$

$C_o^{(3)} = 4{,}5\ a_3 + 100\ b^3 = 98{,}639$ elde edilir.

Ortalama $C_o = (99{,}524 + 99{,}070 + 98{,}639) : 3 = 99{,}08$

Bu üç grup için 99,08 lik yerine konursa orta efektif faiz elde edilir. p % 5 ortalaması olarak böylece $99{,}08 = 104{,}5\ b$; $b = 0{,}94813$: $p_1 =$ % 5,47 bulunur.

Bundan başka $99{,}08 = 4{,}5\ a_2 + 100\ b^2$ Lineer interpolasyonu $p_2 =$ % 5 sonucunu verir. En sonunda $99{,}08 = 4{,}5\ a_3 + 100\ b^3$ interpolasyonla $p_3 =$ % 4,84 elde edilir.

Tek grupların süreleri nazarı itibare alınmışsa şu ortalama elde edilir. $(1 \times 5{,}47 + 2 \times 5 + 3 \times 4{,}84) : 6 =$ % 5 dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 87

Örnek 66 daki istikrazın efektif faizi için yaklaşık ve limit değerler bulunacaktır.

Formül (63) sürekli kabul edilen istikrazın en alt sınırını verir.

$$\frac{100 \times 4,5}{99,08} = \%\ 4,542$$

69 nolu formül $4,542 + \frac{100 - 99,08}{3} = \%\ 4,849$ luk orta bir değere

$n' = 2$ için $4,542 + \frac{100-99,08}{2,045} = \%\ 4,991$ değerini verir ki bu değer de istenildiği kadar yeterlidir. Tek aded hamilinin asgari efektif faizi, en son olabilecek ödemenin tasarruf edilmesiyle yani 3 yıl sonrası için, $p_3 = \%\ 4,84$ elde edilir. Azami faiz, önceden konuya tabi tutulan adedlerde uygun olacak $p_1 = \%\ 5,47$ olur. Borçlunun toplam olarak meydana getirdiği ortalama rantabilite % 5 olur.

Örnek : 88

Örnek 86 ve 87 deki aynı istikrazın emisyon rayiçi % 102 (rayiç üstü) olduğundan, efektif faiz bulunacaktır.

Yaklaşık olarak : $\frac{100 \times 4,5}{102} = \%\ 4,41$ en üst sınır. İlk kaide de (69) nolu formülü $4,41 + \frac{100 - 102}{3} = \%\ 3,74$ lük bir ortalama değerini verir. Burada, kısa süre sonucu oldukça büyüktür.

Buna karşılık $n' = 2$ için; $4,41 + \frac{100 - 102}{2,045} = \%\ 3,44$ değeri daha katidir. Asgari efektif faiz : $102 = 104,5\ b$ ile $p_1 = \%\ 2,45$ çıkar.

Azami efektif faiz : $102 = 4,5\ a_3 + 100\ b^3$ ile $p_3 = \%\ 3,78$
Hakiki ortalama rantabilite :

$$102 = \frac{100}{3}\ (a_3 + \frac{3 - a_3}{p} \times 4,5) \text{ ile } p = \%\ 3,44$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek : 89

Yüzde dörtlü bir kıymetli kâğıt % 97 ve % 105 le alındığında ve satış gene aynı rayiçle hesaplandığında ne kadar efektif faiz alınabilir?
Bu durum için sürekli istikraz formülü tam kati değeri verir.

$$p = \frac{400}{97} = \%\ 4{,}12 \text{ ve } \frac{400}{105} = \%\ 3{,}81$$

Burada alış ve satış masrafları, rayicin içinde alınmıştır.

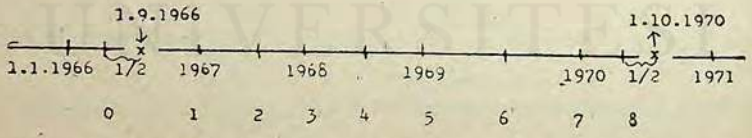
Örnek : 90

% 4 lük bir kıymetli kâğıt % 98 ve masrafsız olarak, süresi gelen faizin ayrılmasından sonra alınır, ve 4 yıl sonra birbirini takip etmeyen faizsiz % 102 ile masrafsız satılır. Bu durumda hakiki faiz ne kadardır?
(68) e göre: $98 = 4_4 + 102\ b^4$; % 4 1/2 lik bir reel faiz yüzdesi, % 99,88 ile rayiç gösterir. Buna uygun olarak % 5 ve % 5 1/2 için 98,10 ve 96,36 rayiçleri elde edilir; p, % 5 ile % 5 1/2 arasındadır. Lineer interpolasyonla şu elde edilir : p = % 5,03.

Örnek : 91

Altı aylık olarak 1 Ocak ve 1 Temmuz tarihlerinde % 7 1/2 faiz getiren bir kıymetli kâğıt, 1 Eylül 1986 tarihinde % 98 bir rayiçle ve aded faizler de dahil olmak üzere satın alınır. Sahibi 6 ayda % 3 faiz elde etmek isterse, 1 Ekim 1970 yılında hangi rayiçle satacaktır?

x p = % 2 1/2 ; p = % 3 n = 8 1/6 altı aylık küpürleri 8 kezde 2,50 TL. olarak ödenir.

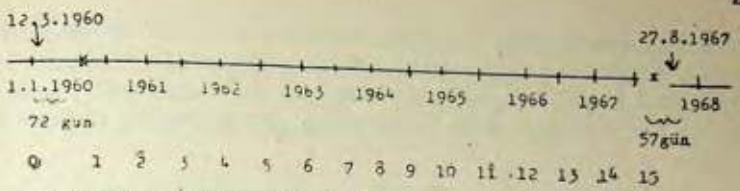


$C_0 = 2{,}5\ a_8 \times 1{,}03\ 1/2 + C_n \times b^{8\ 1/6} = 98$; C_n = % 102;2 satın alana 1 Temmuzdan 1 Ekim 1970 e kadar olan adet faizleri aynı olarak çıkartılırsa rayiçler; 102,2 − 2,5 × 1/2 = % 100,95 kadar azalır.

Örnek : 92

% 6 ile altı aylık faizlendirilen bir kıymetli kâğıt, 12 Mart 1960 tarihinde % 93 rayiçle ve aded faizleri ile birlikte satın alınır ve 27 Ağustos 1967 tarihinde % 110 la aded faizleri hariç geri verilirse, hakiki faiz ne kadardır?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



1 Ocak'tan 12 Mart 1960 a kadar = 72 gün, 1 Temmuz'dan 27 Ağustos'a kadar = 57 gün, 12 Mart 1960 dan 27 Ağustos'a kadar 7 yıl 165 gün; faiz küpürleri 15 kez 3 TL. üzerinden ödenir, aded faizleri satın almada % 6 tutar 72 gün için faiz % 1,2; bu yüzden satın alma fiatı : $C_o = 93 + 1,2 = 94,2$; aded faizlerin satın alınmasında 57 gün için = 0,95; ödeme $C_o = 110 + 0,95 =$ % 110.95; bundan başka 72 gün = 72/180 = 2/5 altı ay, yani 165 gün = 165/180 = 11/12 altı ay; sonradan efektif faiz p şu rayiç denkleminden elde edilir: $94,2 = 3a_{15} \times q^{2/5} + 110,95 \times b^{14\,11/12}$ p = % 4 için % 95,7 ve % 4 1/2 için de, % 93,3 satın alma rayiçi elde edilir.

Bu rayiçler arasında interpolasyon sonucu, p = % 4,14 altı ay ve % 8,45 tam yıl bu arada yıllık faiz % 6,09 olur. Kaide formülü (69) =

$$\frac{100 \times 3}{94,2} + \frac{110,95 - 94,2}{14^{11/12}} = \%\ 4,3 \text{ verir.}$$

KISMİ ÖDEME KREDİLERİ RANTABİLİTESİNİN TESPİTİ — SÜRE — FAİZLER

Kısmi ödemeye ait işlerin çok konuşulan problemleriyle ilgili olarak, kredi verenin toplam olarak elde etmek isteği hakiki gelirlerin şüphesi daima mevcuttur. Kredi alan, reklâm gayesine dayanan şeklinden ve yıllık olarak yükleneceği zorunluklarından dolayı doğru bir yorum yapmak durumunda değildir. Kaide, çok kez kredi tekliflerindeki, kredi masrafları, örneğin aylık % 1 relativ (veya konform) yıllık miktar 12 ve (% 12,68) olarak görülür. Böyle bir yüklem piyasada cari bir yol olarak kabul edilir. Böyle bir müşahade kredi alanın genel yüklemini taksit ödemelerine ve nihayet artık borca teşmil edilmiş kredi masrafıyla sınırlandırılmış olarak kabul edilse de; doğru olabilirdi. Buna rağmen uygulamada da ender hallerdendir.

Kaide olarak, satın alma fiatından çıkartılan ödeme olan kredi meblâğı yanında ayrıca birde kredi işleme masrafı hesaplanır. Her taksitte bundan başka, kredi faizleri idare ve diğer masraflardan riziko priminden meydana gelen masraflarda tahsil edilir. Bu kredi masrafları kredi süresi içindeki artık borçlarda yüzdelik olarak eşit kalamaz, bi-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

lâkis bütün taksit süreleri için geriye dönülür ve ilk kredi veya artık satın alma meblâğı üzerinden hesaplanır. Kredi alanın hakiki yüklemi veya ters olarak kredi verenin hakiki geliri, bu esasa dayanarak, nominal olarak 1 yıl üzerinden % 1 le kararlaştırılan aylık masrafdan 12 oldukça büyüktür.

Kısmi ödeme, örneğin aşağıdaki gösterilen şartlarla meydana gelmişse :

Satış fiatı	1150,— TL.
Ödeme	250,— TL.
Artık satın alma meblâğı	900,— TL.
Aylık taksit	50,— TL.
Kredi süresi	18,— Ay
Kredi masrafları her ay	% 1 artık satın alma meblâğı üzerinden =
	9,— TL.

1. taksitin süresi = satın almadan 1 ay sonra o zaman alıcı, adedi = 9,— TL. olan 18 ödeme yapmak zorunluğundadır. Aşağıda gösterilen kısmî ödeme planı genel bir görüş sağlamaktadır.

KISMI ÖDEME PLANI

Ay	Kısmi ödeme taksitleri	Faizler kredi masrafları	Ay başındaki borç artığı	Artık borç faizleri
1	50,—	9,—	900,—	9,—
2	50,—	9,—	850,—	8,50
3	50,—	9,—	800,—	8,—
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
12	50,—	9,—	350,—	3,50
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
18	50,—	9,—	50,—	0,50
	900,—	162,—	8550,—	85,50

Satın alan değişmeyen 59,— TL. aylık ödemeler yerine artık borç faizlerini havi taksitleri yani değişen ödemeleri; 59,—; 58,50; 58,—;... 50,50 TL. ki ifa etseydi o zaman hakiki faiz yalnız aylık olarak $\frac{85{,}5 \times 100}{8550}$ = % 1 ve yıllık olarak % 12 (relatif) olabilirdi. 85,50 TL. değil de, 162.— TL. ödemek gereğinde kalırdı. Bu yüzden hakiki efektif faiz $\frac{162 \times 100}{8550}$ = % 1,8947 aylık ve % 22,737 (relatif) yıllık olur. Aynı sonuç ortalama artık borcun (ortalama kredi miktarı) $\frac{900 + 50}{2} = 475$ in esas alınmasıyla elde edilir. $\frac{9 \times 100}{475} =$ % 1,8947

Yıla teşmil edilmiş (relatif veya ortalama) efektif faizler (p) genel orantı, şu şekilde elde edilir. Artık satınalma meblâğı (S_o) ile ve kısmi ödeme taksitleri (r) ile gösterilirse, buna göre genel ortalama borç artığı $\frac{S_o + r}{2}$ olur. Aylık efektif faiz $\frac{p}{m}$ ile ve aylık nominal faiz buna uygun olarak $\frac{p}{m}$ ile gösterilirse, bunun içine de genel yıllık kesir için $m = 12$ konulmaktadır.

Yıllık fektif faiz böylece orta artık borcun, yıllık nominal faiz üzerinden ifade edilmiş yüzdesidir.

$$p = \frac{S_o \times \frac{p}{100} \times 100}{\frac{S_o + r}{2}} = \frac{S_o \times p \times 2}{S_o\left(1 + \frac{r}{S_o}\right)}$$

Artık satın alma tutarı genel olarak (n) taksitlerinden oluşur. Böylece $S_o = r \times n$ buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(70 a) $$p = \frac{2_p}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2_{pn}}{n+1}$$

elde edilir. Bundan önceki $m = 12$, $n = 18$ ve $\frac{p}{m} = 1$ ve $p = 12$ olarak verilmiştir. (70 a) formülünün kullanılmasıyla:

$p = 2 \times 12 \frac{18}{19}$ % 22,737 Aynı örnekte, 18 aylık taksit yerine adedi 150 TL. olan 27 TL. kredi masrafıyla 6 çeyrek yıl taksiti ($m = 4$; $\frac{p}{m} = 3$ ve $p = 12$) ödenirse;

$$p = 2 \times 12 \times \frac{6}{7} = \% \ 20{,}571 \text{ elde edilir.}$$

Buna karşılık kredi masraflarıyla ($m = 24$; $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$ ve $p=12$) beraber 36 yarım ay taksitleri ilâve edilirse, o zaman $p = 2 \times 12 \times \frac{38}{37}$ = % 23,351 olur. (n) için yükselen değerlerle, p değerine ulaşır. $n \to \infty$ için $\frac{1}{n}$ (70 a) ya göre limit değeri (0) olacağından,

(70 b) $$p = 2p \ ; \ n \to \infty$$ olur.

% 1 lik bir aylık kredi masrafında, azami efektif faiz $2 \times 12 =$ % 24 olur. Aşağıdaki tablolarda - (70 a) ve (70 b) deki gibi - kredi masrafı artık satın alma tutarının yüzdesi olarak hesaplanır ve eşit olarak bütün kısmi ödeme taksitleriyle itfa edilir. Aynı zamanda ödenmesi gerekli başvuru masrafları dikkate alınmamıştır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

AYLIK TAKSİT ÖDEMESİNDEKİ (m = 12) YILLIK EFEKTİF FAİZ

Taksit sayısı n	Aylık kredi masrafları (p/m) artık satın alma meblâğının % si olarak		
	1	0,75	0,5
1	12	9	6
3	18	13,5	9
6	20,57	15,43	10,29
9	21,6	16,2	10,8
12	22,15	16,62	1108
18	22,74	17,05	11,37
24	23,04	17,28	11,52
∞	24	18	12

ÇEYREK YILLIK TAKSİT ÖDEMESİNDE (m = 4) YILLIK EFEKTİF FAİZ

Taksit sayısı (n)	Çeyrek yıllık kredi masrafları ($\frac{p}{m}$) artık satın alma meblâğının % si olarak		
	3	2,25	1,5
1	12	9	6
2	16	12	8
3	18	13,5	9
4	19,2	14,4	9,6
6	20,57	15,43	10,29
8	21,33	16	10,67
∞	24	18	12

Şayet bir başvuru masrafı (P_o) hesaba dahil edilecek olursa, o zaman bu masraf genel olarak artık satın alma meblâğının (S_o) yüzdesi olarak (n) ifade edilir. $P_o = \frac{n}{100} S_o$ hesabın basite iblâğı dikkate alınmazsa, ki P_o kredi süresinin başında ödenmelidir, o zaman $\frac{1}{m}$ yıl için şu efektif faiz elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buradan :

$$\frac{p}{m} = \frac{\left(\frac{S_o \times p \times n}{100 \times m} + P_o\right) 100}{n \frac{S_o + r}{2}}$$ ve 1 yıl için :

$$p = \frac{\left(\frac{S_o \times p \times n}{100 \times m} + P_o\right) 100 \times m}{n \frac{S_o + r}{2}} = \frac{\left(\frac{S \times p \times n}{100 \times m} + P_o\right) 200 \times m}{n (S_o + r)}$$

$p_o = \frac{\pi}{100} S_o$ ve $S_o = r \times n$ olduğu için, buradan

(71) $$p = \frac{2 (pn + \pi m)}{n + 1} ; \pi = \frac{100 P_o}{S_o}$$

elde edilir.

İlk örneğe ilâve olarak 5 TL. kredi müracaat masrafı kabul edersek, (71) nolu formüle göre yıllık efektif faiz % 23,438 e yükselir. (% 22,737 lik müracaat masrafı hariç) $p_o = 0$ ve $= 0$ için (71) nolu formül (70 a) nolu formüle giden (71) nolu formül (m) e bağlıdır. «70 a» nolu formül ise (m) e bağlı değildir. Tam kati olarak hesaplamanın daha sağlam yolu, p nin tespit yolu için kısmi ödeme olarak artık satın alma meblâğın $S_o = \frac{p}{100 m}$ kredi masraflarını ve birkez verilen başvuru masraflarını P_o olarak kabul etmek gerekiyor. Şu formül elde edilir :

(72) $$S_o = P_o + \left(r + S_o \frac{p'}{100 m}\right) a_n ; a_n = IV^{p'}_n$$

Burada (n) taksit tarihlerini ifade eden, $m > 1$ için p' tam yıl olmayan konform p nin kendisine ait faizlerini gösterir.

$$S_0 = 090,\ \frac{p}{m} = 1,\ m = 12,\ n = 18 \text{ ve } p_0 = 0$$

değerinden gidilecek olursa (72) nolu formüle göre, önce IV^p, 18 = 15,2542373 ve nakti rant değerleri faktörü için bu tabloyla interpolasyonla $p' = \%\ 1{,}805$ ve $p = \%\ 23{,}945$ ilâve olarak başvuru masraflarınca örneğin 5 TL. teşmil edersek o zaman da (72) nolu formüle göre $p' = \%\ 1{,}868$ ve $p = \%\ 24{,}869$ (70 a) ve (71) nolu formüller uygulamada kaide olarak yeterli sonuçlar vermişlerdir. (72) nolu formüller kullanılması pratik durumlar için, bilhassa taksit tutumu başvuru masrafları tutarından önemli derecede inhiraf etmediği zaman tavsiye edilir.

Kısmi ödeme pratiğinde ve diğer küçük kredi mevzularındaki pratikte, kredi alanın masraflarını küçük tutması ve bu yüzden mümkün her türlü rasyonel çalışmayı gerçekleştirmesi için, kredi verenler arasında bir mücadele yapılması aranmaz. Krediler eşit zaman uzaklıkları içinde ve eşit taksitlerle itfa edildikleri için, faizleri toplam halinde ve bütün süresi için önceden çeyrek ve yarım yıllık eski metotlarla uğraşma gereği kalmadan, meydana çıkarmak hesap yönünden kolaydır.

Bu yüzden, yukarıda adı geçen, aylık olarak yükselen fiks kredi masrafları yanında, süre faizi denilen bir kavram bulunur. Bu da aynen kredi masrafları gibi, genel kredi tutarına başlangıçta genişletildi. Fakat kredi işi için ön görülen efektif faize (p) dayanır. Her zaman direkt olarak bilinmeyen hakikî yıllık masraflar yerine örneğin aylık masrafları içeren bir kredi teklifinde direkt olarak burada yıllık efektif faiz teklifi yer alır; süre faizi, yakın, kredi verenin bu işle ilgili dahili çalışmasına hizmet eder.

Süre faizi, eski mevcut artık borçların relatif aylık faizlerinin yıllık efektif faiz esası üzerinden çıkartılır. (Faiz teklifi, her 1/m yılı, n periyodu her 1/n düşen artık borçları için şu faiz meblâğı elde edilir:

$$\frac{S_0}{100}\frac{p}{m} + \frac{\frac{n-1}{n}S_0}{100}\frac{p}{m} + \ldots + \frac{\frac{1}{n}S_0}{100}\frac{p}{m} =$$

$$= \frac{S_0}{100}\frac{p}{m}\left(\frac{n}{n} + \frac{n-1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \frac{S_0}{100}\frac{p}{m}\frac{n+1}{2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Faiz meblâğı (toplam) başlangıç borcuna (S_0) göre teşmil edilen bir faiz yüzdesi dolayısıyle doğrudan doğruya kazanılabilir, yani süre faiz yüzdesi,

P_1. Buna göre;

$$S_0 \frac{p_1}{100} = \frac{S_0}{100} \frac{p}{m} \frac{n+1}{2}$$

ve süre faiz yüzdesi,

(73 a)

$$P_1 = \frac{p}{m} \frac{n+1}{2}$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$ $n = 1, 2, 3; \ldots$

Süre faizi p_1 (7 ∞) formülünden de çıkartılabilir, önce p göre,

$$p = \frac{p}{n} \frac{n+1}{2}$$ çözülür.

ve bu ifade $\frac{n}{m}$ ile çarpılır.

$$p \frac{n}{m} = \frac{p}{m} \frac{n+1}{2}$$

Buradan yine süre faizi elde edilir.

(73 b) $$\boxed{P_1 = p \frac{n}{m}}$$ $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ $m = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Süre faiz yüzdesinin kullanılması suretiyle yıllık efektif faiz genel olarak,

(74) $$\boxed{p = \frac{2p_1 m}{n+1}}$$ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukarıda gösterilen örneklere dayanarak $m = 12$, $n = 18$ ve $p = 22{,}737$ için (73 a) nolu formüle göre süre faiz yüzdesi elde edilir.

$$p_1 = \frac{22{,}737}{12} \quad \frac{18+1}{2} = 18$$

ve (73 b) ve göre, $p_1 = 12 \quad \frac{18}{12} = 18$

Süre değişmedikçe, süre faiz yüzdesi, şayet aynı zamanda $\frac{n}{m}$ sabit tutulursa, sabit kalır. Örneğin 18 aylık taksit yerine ($m = 12$, $n = 18$) yalnız 6 çeyrek yıllık taksit itfa edilirse ($m = 4$, $n = 6$) o zaman yukarıda gösterildiği gibi efektif faiz $p = 20{,}571$ olarak değişir, süre faizi bunun esası içerisinde (73 a) ya göre,

$$p_1 = \frac{20{,}571}{4} \quad \frac{6+11}{2} = 18 \quad \text{(73 b) ye göre.}$$

$$p_1 = 12 \quad \frac{6}{4} = 18$$

Halen gerekli bir kaç kondisyon aşağıya tablo halinde çıkartılmıştır. Bunlar, süre - faiz yüzdesine ait aylık ve çeyrek yıllık itfaları göstermektedir:

Süre Faiz ($m = 12$; ay taksiti)

n/p	6	7	8	9	10	11	12
6	1,75	2,04	2,33	2,63	2,92	3,21	3,5
9	2,50	2,92	3,33	3,75	4,17	4,58	5,0
12	3,25	3,79	4,33	4,88	5,42	5,96	6,5
18	4,75	5,54	6,33	7,13	7,92	8,71	9,5
24	6,25	7,29	8,33	9,38	10,42	11,46	12,5

Süre faiz ($m = 4$; çeyrek yıl)

n/p	6	7	8	9	10	11	12
4	3,75	4,38	5,00	5,63	6,25	6,88	7,50
6	5,25	6,13	7,00	7,88	8,75	9,63	10,50
8	6,75	7,88	9,00	10,13	11,25	12,38	13,50
10	8,25	9,63	11,00	12,38	13,75	15,13	16,50
12	9,75	11,38	13,00	14,63	15,25	17,88	19,50

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Faiz hesaplarında relatif yıl altında faizler $(\frac{p}{m})$ dolayısıyla, önceden seçilmiş olan efektif yıllık faiz yüzdesi tam olarak tutulamadığı için de olsa, relatif ve konform faizler arasında, pratik yönden kaldırılması mümkün olmıyan inhiraflar, basitleştirilmiş kredi işlemleri tam olmayarak kabul edilirler.

Her itfa taksitinin birbirleri arasında gerekli tecelli için, süre faiz yüzdesinin yardımıyla elde edilen faiz meblâğları, faiz birimlerine bölünürse ki, bunların yardımıyla tecil edilmiş taksitlerin gecikme faizleri kolayca hesap edilebilir.

Buradaki faiz birimi, son eşit taksite karşılık olan faiz tutarıdır.

$$\frac{S_o}{100}\ \frac{1}{n}\ \frac{p}{m} = \frac{r}{100}\ \frac{p}{m}$$

Genel olarak, her süre faiz meblâğında $\frac{n}{2}(n+1)$, bu faiz birimi mevcuttur. Zira;

$$\frac{S_o}{100}\ p_1 : \frac{r}{100}\ \frac{p}{m} = \frac{S_o}{r}\ p_1\ \frac{m}{p}$$

S_o : r için taksit adedi ne ve p_1 için (73 a) ya göre $\frac{p}{m}\ \frac{n+1}{2}$ yerine konulacak olursa, faiz birimleri için şu adet elde edilir :

$$\frac{n}{2}(n+1)$$

Faiz birimlerinin sayısı, itfa taksitlerinin sayısına bağlıdır. Bu da, 1. derecedeki Trigonal sayıların sayesinde açıkça gösterilir.

İtfa taksitleri :

					6	7
				5	.	.
			4	.	.	..
		3	.	..	...	...
	2	.	..	...	....	....
1	.	..	...	....	.....	.....
.	..	...	....	.....	.....	.....
1	3	6	10	15	21	28

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Faiz birimleri Örneğin 900 TL. lık bir küçük kredi, 10 yıllık bir efektif faizle her 150 TL. lık 6 çeyrek yıllık taksitle itfa edilirse, o halde (73 a) ya göre süre - faizlendirme :

$$P_1 = \frac{10}{4}\,\frac{6+1}{2} = 8{,}75$$

Bütün sürenin faiz meblâğı buna göre 78,75 TL. yapar. Faiz birimi 78,75 : 21 = 3,75 e baliğ olur.

Taksit tescili halinde, 78,75 lik genel faizler aşağıdaki gibi kademelendirilir :

$$\begin{aligned} 6 \,.\, 3.75 &= 22{,}50 \\ 5 \,.\, 3{,}75 &= 18{,}75 \\ 4 \,.\, 3{,}75 &= 15{,}00 \\ 3 \,.\, 3.75 &= 11{,}25 \\ 2 \,.\, 3{,}75 &= 7{,}50 \\ 1 \,.\, 3{,}75 &= 3{,}75 \\ \hline 21 \,.\, 3{,}75 &= 78{,}75 \end{aligned}$$

Ödenmesi gereken (süresi gelen) 3 cü faizin tecil masrafı buna göre çeyrek yılda 15 TL. tutarı pratik olarak küçük kredi işlemindeki diğer durumlar için, uygun yüzde değerleri tablo halinde yapılır.

Yukarıdaki örneğe göre faiz birimi,

$$P_1 : 21 = \frac{35}{4} : 21 = \frac{5}{12} = 0{,}41667$$

tablodaki mevcutlar (0,41667 × 9 = 3,75)

Örnek : 93

Bir kısmi ödeme, aşağıdaki şu şartlarla meydana gelmektedir.

Peşin satın alma fiatı 100 TL. ilk ödeme % 20, kredi masrafı artık satın alma meblâğının % 1,6 sı her taksitte ödenebilir. Taksit sayısı 8; kredi süresi 16 ay, yıllık efektif faiz ne kadardır?

$\frac{p}{m} = 1{,}6$ $m = 6$ ve $n = 8$ olduğu için (70 a) formülüne göre

$$p = \frac{2 \times 9{,}6 \times 8}{8+1} = \%\ 17{,}067$$

Örnek : 94

Bir önceki örnekte 5 TL. lık bir başvuru masrafı dikkate alınacak olursa, yıllık efektif faiz ne kadar olur?

(71) e göre $\pi = \frac{500}{80} = 6{,}25$ ve bundan sonra

$$p = \frac{2\,(9{,}6 \times 8 + 6{,}25 \times 6)}{8 + 1} = \%\ 25{,}4$$

Örnek : 95

Bir kısmı ödeme kredisinde artık satın alma meblâğı 600 TL. çeyrek yıl taksiti 100 TL. ve her taksit kredi masrafı 18 TL. tutar.

a) Yıllık efektif faiz ne kadardır?

b) Efektif % 3 çeyrek yıl faizinin sağlanabilmesi için, artık alış meblâğının hangi eşit yüzdesiyle kredi masrafı her taksit için hesaplanmalıdır?

a) (70 a) formülünde yerine konur : $\frac{p}{m} = 3,$

$m = 4$, $n = 6$. Bundan sonra $p = \frac{2 \times 12 \times 6}{6 + 1} = \%\ 20{,}571$

tam kati olarak (72) nolu formülden $600 = 118 \times IV^{p'}$;

$IV^{p'}{}_6 = 5{,}08475$; $p'' = \%\ 4{,}9449$ ve $p = \%\ 21{,}29$

b) (72) ye göre $600 = (\frac{600}{6} + \frac{600\,p}{100\,m})\ IV^3{}_6$ ve $\frac{p}{m} = 100$

$(V^3{}_6 - \frac{1}{6}) = \%\ 1{,}793$

Örnek : 96

A Bankası 2400 TL. lık küçük krediyi aşağıdaki şartlarla teklif etmektedir. 12 eşit 2 aylık taksitlerle itfa, 2 yıllık süre için genel faiz yüklemi 200 TL. dır. Kredi alan aynı 2400 TL. küçük krediyi B Bankasından da alabilir. Şartlar aynen A bankasındaki gibi, fakat yıllık efektif faiz % 7,5 istenmekte ise :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) Hangi kredi teklifi, kredi alan için müsaittir?

b) Kredi alanın 6 ncı itfa taksitinden 2 aylık gecikmeli kalırsa, hangi tecil meblâğını bankaya ödemek zorunluğunda kalır?

a) (74) nolu formüle göre A bankasının efektif faizi :

$$p_1 = \frac{2 \times \frac{200}{24} \times 6}{12 + 1} = 7{,}69 \; ; \; p_1 = \frac{200}{24} = 8\,\frac{1}{3}$$

B Bankasının teklifi daha uygundur. Zira (73 a) ya göre,

$$p_1 = \frac{7{,}5}{6}\,\frac{12+1}{2} = 8\,\frac{1}{2}$$ ve 195 TL. lık genel faiz tutarına baliğ olmaktadır.

b) Bankalar $\frac{12}{2}(12 + 1) = 79$ faiz biriminde 12 taksit vermişler ve ilk taksit için 12, ikinci için 11 ....., altıncı için 7 faiz birimi. Bunlar her iki bankada $\frac{7}{78}\,p_1$ ve A Bankasında,

$$A\,\frac{7}{78} \cdot \frac{25}{3} = 0{,}748$$ veya 17,95 TL. lık ve B Bankasında

$$B\,\frac{7}{78} \cdot \frac{65}{8} = 0{,}729$$ veya 17,50 TL. olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

YARARLANILAN ESERLER

Akbora Saim : Malî Matematik, İstanbul, 1967.

Akbora Rıza : Ticaret Matematiği, İstanbul, 1968.

Alev Naci Genel Matematik, İstanbul, 1968.

Gülçer F. Kâmil : Sigorta Muameleleri Matematiği ve Prensipleri, İstanbul, 1950.

Gülçer F. Kâmil : Ticaret Muameleleri Matematiği ve Prensipleri, İstanbul, 1945.

Gölbaş Ahmet : Finans Matematiği, İstanbul, 1969.

Isaac Alfred : Ticarî Hesap ve Malî Cebir, Cilt I, İstanbul, 1950.

Isaac Alfred . Ticarî Hesap ve Malî Cebir, Cilt II, İstanbul, 1944.

Kalveram Wilhelm : Wirtschaftsrechnen Wiesbaden, 1968.

Kömürcüyan Kirkor : Ticarî ve Malî Hesap, İstanbul, 1933.

Kosiol Erich Finans Mathematik, Wiesbaden, 1966.

Koz İhsan : Logaritma, İstanbul, 1969

Loewy. A. : Mathematik des Geld - und Zahlungs - verkers, Berlin, 1929.

Moore H. Justin : Handbook of Financial Mathematics, New York, 1947.

Nicolas Marcel : Finans Mathematik, Berlin, 1967.

O. Donnel John : İşletme Finansmanı, Ankara, 1965.

Özgür Feridun : Ticarî Hesap ve Mali Cebir, İstanbul, 1958.

Rahman John : Praktikum der Finanz Mathematik, Hamburg, 1957.

Somer Faik : Malî Riyaziye, İstanbul, 1941.

Somer Faik : Malî Cebir (İkinci Kitap), İstanbul, 1946.

Stelsan - Hugh : Mathematics of Finance, New York, 1963.

Şendil İsmail : Malî Matematik, İzmir, 1966.

Tanın Turan : Cebir Dersleri, İstanbul, 1969.

Tuncatay Kemâl : Malî Matematik, Eskişehir, 1960.

Vormbaum Herbert : Finanzierung der Betriebe, Wiesbaden, 1964.

Yücel Fethi : Logaritm, İstanbul, 1969.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablo I. Bileşik faizler devre sonu $I_n^p = q^n = (1+i)^n = \left(1+\frac{p}{100}\right)$ **faktörü:**

n	2%	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	7%	8%	n
1	1,02	1,03	1,035	1,04	1,045	1,05	1,055	1,06	1,07	1,08	1
2	1,0404	1,0609	1,07123	1,0816	1,09203	1,1025	1,11303	1,1236	1,1449	1,1664	2
3	1,06121	1,09273	1,10872	1,12486	1,14117	1,15763	1,17424	1,19102	1,22504	1,25971	3
4	1,08243	1,12551	1,14752	1,16986	1,19252	1,21551	1,23882	1,26248	1,31080	1,36049	4
5	1,10408	1,15927	1,18769	1,21665	1,24618	1,27628	1,30696	1,33823	1,40255	1,46933	5
6	1,12616	1,19405	1,22926	1,26532	1,30226	1,34010	1,37884	1,41852	1,50073	1,58687	6
7	1,14869	1,22987	1,27228	1,31593	1,36086	1,40710	1,45468	1,50363	1,60578	1,71382	7
8	1,17166	1,26677	1,31681	1,36857	1,42210	1,47746	1,53469	1,59385	1,71819	1,85093	8
9	1,19509	1,30477	1,36290	1,42331	1,48610	1,55133	1,61909	1,68948	1,83846	1,99900	9
10	1,21899	1,34392	1,41060	1,48024	1,55297	1,62889	1,70814	1,79085	1,96715	2,15893	10
11	1,24337	1,38423	1,45997	1,53945	1,62285	1,71034	1,80209	1,89830	2,10485	2,33164	11
12	1,26824	1,42576	1,51107	1,60103	1,69588	1,79586	1,90121	2,01220	2,25219	2,51817	12
13	1,29361	1,46853	1,56396	1,66507	1,77220	1,88565	2,00577	2,13293	2,40985	2,71962	13
14	1,31948	1,51259	1,61869	1,73168	1,85194	1,97993	2,11609	2,26090	2,57853	2,93719	14
15	1,34587	1,55797	1,67535	1,80094	1,93528	2,07893	2,23248	2,39656	2,75903	3,17217	15
16	1,37279	1,60471	1,73399	1,87298	2,02237	2,18287	2,35526	2,54035	2,95216	3,42594	16
17	1,40024	1,65285	1,79468	1,94790	2,11338	2,29202	2,48480	2,69277	3,15882	3,70002	17
18	1,42825	1,70243	1,85749	2,02582	2,20848	2,40662	2,62147	2,85434	3,37993	3,99602	18
19	1,45681	1,75351	1,92250	2,10685	2,30786	2,52695	2,76565	3,02560	3,61653	4,31570	19
20	1,48595	1,80611	1,98979	2,19112	2,41171	2,65330	2,91776	3,20714	3,86968	4,66096	20
21	1,51567	1,86029	2,05943	2,27877	2,52024	2,78596	3,07823	3,39956	4,14056	5,03383	21
22	1,54598	1,91610	2,13151	2,36992	2,63365	2,92526	3,24754	3,60354	4,43040	5,43654	22
23	1,57690	1,97359	2,20611	2,46472	2,75217	3,07152	3,42615	3,81976	4,74053	5,87146	23
24	1,60844	2,03279	2,28333	2,56330	2,87601	3,22510	3,61459	4,04893	5,07237	6,34118	24
25	1,64061	2,09378	2,36324	2,66584	3,00543	3,38635	3,81339	4,29187	5,42743	6,84848	25
26	1,67342	2,15659	2,44596	2,77247	3,14068	3,55567	4,02313	4,54938	5,80735	7,39635	26
27	1,70689	2,22129	2,53157	2,88337	3,28201	3,73346	4,24440	4,82235	6,21387	7,98806	27
28	1,74102	2,28793	2,62017	2,99870	3,42970	3,92013	4,47784	5,11169	6,64884	8,62711	28
29	1,77584	2,35657	2,71183	3,11865	3,58404	4,11614	4,72412	5,41839	7,11426	9,31727	29
30	1,81136	2,42726	2,80679	3,24340	3,74532	4,32194	4,98395	5,74349	7,61226	10,06266	30
31	1,84759	2,50008	2,90503	3,37313	3,91388	4,53804	5,25807	6,08810	8,14511	10,86767	31
32	1,88454	2,57508	3,00671	3,50806	4,09093	4,76494	5,54726	6,45339	8,71527	11,73708	32
33	1,92223	2,65234	3,11194	3,64838	4,27403	5,00319	5,85239	6,84059	9,32534	12,67605	33
34	1,96068	2,73191	3,22086	3,79432	4,46636	5,25335	6,17424	7,25103	9,97811	13,69013	34
35	1,99989	2,81386	3,33359	3,94609	4,66755	5,51602	6,51383	7,68609	10,67658	14,78534	35
36	2,03989	2,89828	3,45027	4,10393	4,87738	5,79182	6,87209	8,14725	11,42394	15,96817	36
37	2,08069	2,98523	3,57103	4,26809	5,09686	6,08141	7,25005	8,63609	12,22362	17,24563	37
38	2,12230	3,07478	3,69601	4,43881	5,32622	6,38548	7,64880	9,15425	13,07927	18,62528	38
39	2,16474	3,16703	3,82537	4,61637	5,56590	6,70475	8,06949	9,70351	13,99482	20,11530	39
40	2,20804	3,26204	3,95926	4,80102	5,81386	7,03999	8,51333	10,28572	14,97446	21,72452	40
41	2,25220	3,35990	4,09783	4,99306	6,07810	7,39199	8,98154	10,90286	16,02267	23,46248	41
42	2,29724	3,46070	4,24126	5,19278	6,35162	7,76159	9,47553	11,55703	17,14426	25,33948	42
43	2,34319	3,56452	4,38970	5,40050	6,63744	8,14967	9,99668	12,25045	18,34435	27,36664	43
44	2,39005	3,67145	4,54334	5,61652	6,93612	8,55716	10,54650	12,98548	19,62846	29,55597	44
45	2,43785	3,78160	4,70236	5,84118	7,24825	8,98501	11,12658	13,76461	21,00245	31,92045	45
46	2,48661	3,89504	4,86694	6,07482	7,57442	9,43426	11,73851	14,59049	22,47262	34,47409	46
47	2,53634	4,01190	5,03728	6,31782	7,91527	9,90597	12,38413	15,46592	24,04571	37,23201	47
48	2,58707	4,13225	5,21359	6,57053	8,27146	10,40127	13,06526	16,39387	25,72891	40,21057	48
49	2,63881	4,25622	5,39606	6,83335	8,64367	10,92133	13,78385	17,37750	27,52993	43,42742	49
50	2,69159	4,38391	5,58493	7,10668	9,03264	11,46740	14,54196	18,42015	29,45703	46,90161	50
n	2%	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	7%	8%	n

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablo II. Peşin değer faktörü: $II_n^p = v^n = \frac{1}{q^n}$

n	2%	3%	3.5%	4%	4.5%	5%	5.5%	6%	7%	8%	n
1	0,98039	0,97087	0,96618	0,96154	0,95694	0,95238	0,94787	0,94340	0,93458	0,92593	1
2	0,96117	0,94260	0,93351	0,92456	0,91573	0,90703	0,89845	0,89000	0,87344	0,85734	2
3	0,94232	0,91514	0,90194	0,88900	0,87630	0,86384	0,85161	0,83962	0,81630	0,79383	3
4	0,92385	0,88849	0,87144	0,85480	0,83856	0,82270	0,80722	0,79209	0,76290	0,73503	4
5	0,90573	0,86261	0,84197	0,82193	0,80245	0,78353	0,76513	0,74726	0,71299	0,68058	5
6	0,88797	0,83748	0,81350	0,79031	0,76790	0,74622	0,72525	0,70496	0,66634	0,63017	6
7	0,87056	0,81309	0,78599	0,75992	0,73483	0,71068	0,68744	0,66506	0,62275	0,58349	7
8	0,85349	0,78941	0,75941	0,73069	0,70319	0,67684	0,65160	0,62741	0,58201	0,54027	8
9	0,83676	0,76642	0,73373	0,70259	0,67290	0,64461	0,61763	0,59190	0,54393	0,50025	9
10	0,82035	0,74409	0,70892	0,67556	0,64393	0,61391	0,58543	0,55839	0,50835	0,46319	10
11	0,80426	0,72242	0,68495	0,64958	0,61620	0,58468	0,55491	0,52679	0,47509	0,42888	11
12	0,78849	0,70138	0,66178	0,62460	0,58966	0,55684	0,52598	0,49697	0,44401	0,39711	12
13	0,77303	0,68095	0,63940	0,60057	0,56427	0,53032	0,49856	0,46884	0,41496	0,36770	13
14	0,75788	0,66112	0,61778	0,57748	0,53997	0,50507	0,47257	0,44230	0,38782	0,34046	14
15	0,74301	0,64186	0,59689	0,55526	0,51672	0,48102	0,44793	0,41727	0,36245	0,31524	15
16	0,72845	0,62317	0,57671	0,53391	0,49447	0,45811	0,42458	0,39365	0,33873	0,29189	16
17	0,71416	0,60502	0,55720	0,51337	0,47318	0,43630	0,40245	0,37136	0,31657	0,27027	17
18	0,70016	0,58739	0,53836	0,49363	0,45280	0,41552	0,38147	0,35034	0,29586	0,25025	18
19	0,68643	0,57029	0,52016	0,47464	0,43330	0,39573	0,36158	0,33051	0,27651	0,23171	19
20	0,67297	0,55368	0,50257	0,45639	0,41464	0,37689	0,34273	0,31180	0,25842	0,21455	20
21	0,65978	0,53755	0,48557	0,43883	0,39679	0,35894	0,32486	0,29416	0,24151	0,19866	21
22	0,64684	0,52189	0,46915	0,42196	0,37970	0,34185	0,30793	0,27751	0,22571	0,18394	22
23	0,63416	0,50669	0,45329	0,40573	0,36335	0,32557	0,29187	0,26180	0,21095	0,17032	23
24	0,62172	0,49193	0,43796	0,39012	0,34770	0,31007	0,27666	0,24698	0,19715	0,15770	24
25	0,60953	0,47761	0,42315	0,37512	0,33273	0,29530	0,26223	0,23300	0,18425	0,14602	25
26	0,59758	0,46369	0,40884	0,36069	0,31840	0,28124	0,24856	0,21981	0,17220	0,13520	26
27	0,58586	0,45019	0,39501	0,34682	0,30469	0,26785	0,23560	0,20737	0,16093	0,12519	27
28	0,57437	0,43708	0,38165	0,33348	0,29157	0,25509	0,22332	0,19563	0,15040	0,11591	28
29	0,56311	0,42435	0,36875	0,32065	0,27902	0,24295	0,21168	0,18456	0,14056	0,10733	29
30	0,55207	0,41199	0,35628	0,30832	0,26700	0,23138	0,20064	0,17411	0,13137	0,09938	30
31	0,54125	0,39999	0,34423	0,29646	0,25550	0,22036	0,19018	0,16425	0,12277	0,09202	31
32	0,53063	0,38834	0,33259	0,28506	0,24450	0,20987	0,18027	0,15496	0,11474	0,08520	32
33	0,52023	0,37703	0,32134	0,27409	0,23397	0,19987	0,17087	0,14619	0,10723	0,07889	33
34	0,51003	0,36604	0,31048	0,26355	0,22390	0,19035	0,16196	0,13791	0,10022	0,07305	34
35	0,50003	0,35538	0,29998	0,25342	0,21425	0,18129	0,15352	0,13011	0,09366	0,06763	35
36	0,49022	0,34503	0,28983	0,24367	0,20503	0,17266	0,14552	0,12274	0,08754	0,06262	36
37	0,48061	0,33498	0,28003	0,23430	0,19620	0,16444	0,13793	0,11579	0,08181	0,05799	37
38	0,47119	0,32523	0,27056	0,22529	0,18775	0,15661	0,13074	0,10924	0,07646	0,05369	38
39	0,46196	0,31575	0,26141	0,21662	0,17967	0,14915	0,12392	0,10306	0,07146	0,04971	39
40	0,45289	0,30656	0,25257	0,20829	0,17193	0,14205	0,11746	0,09722	0,06678	0,04603	40
41	0,44001	0,29763	0,24403	0,20028	0,16453	0,13528	0,11134	0,09172	0,06241	0,04262	41
42	0,43530	0,28896	0,23578	0,19257	0,15744	0,12884	0,10554	0,08653	0,05833	0,03946	42
43	0,42677	0,28054	0,22781	0,18517	0,15066	0,12270	0,10003	0,08163	0,05451	0,03654	43
44	0,41840	0,27237	0,22010	0,17805	0,14417	0,11686	0,09482	0,07701	0,05095	0,03383	44
45	0,41020	0,26444	0,21266	0,17120	0,13796	0,11130	0,08988	0,07265	0,04761	0,03133	45
46	0,40215	0,25674	0,20547	0,16461	0,13202	0,10600	0,08519	0,06854	0,04450	0,02901	46
47	0,39427	0,24926	0,19852	0,15828	0,12634	0,10095	0,08075	0,06466	0,04159	0,02686	47
48	0,38654	0,24200	0,19181	0,15219	0,12090	0,09614	0,07654	0,06100	0,03887	0,02487	48
49	0,37896	0,23495	0,18532	0,14634	0,11569	0,09156	0,07255	0,05755	0,03632	0,02303	49
50	0,37153	0,22811	0,17905	0,14071	0,11071	0,08720	0,06877	0,05429	0,03395	0,02132	50
n	2%	3%	3.5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	7%	8%	n

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Table III. Rantların nihâî kıymetlerinin devre başı faktörü:

$$III^{p}_{n} = q + q^{2} + \ldots + q^{n} = q\frac{q^{n}-1}{q-1} = s'_{n} = s_{n}q \qquad s_{n} = 1 + III^{p}_{n-1}$$

n	2%	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	5½%	6%	7%	8%	n
1	1,02	1,03	1,025	1,04	1,045	1,05	1,055	1,06	1,07	1,08	1
2	2,0604	2,090 9	2,106 23	2,121 6	2,137 03	2,152 5	2,168 03	2,183 6	2,214 9	2,246 4	2
3	3,121 61	3,183 63	3,214 94	3,246 46	3,278 19	3,310 13	3,342 27	3,374 62	3,439 34	3,506 11	3
4	4,204 04	4,309 14	4,362 47	4,416 32	4,470 71	4,525 63	4,581 09	4,637 09	4,750 74	4,866 60	4
5	5,308 12	5,468 41	5,550 15	5,632 93	5,716 89	5,801 91	5,888 05	5,975 32	6,153 29	6,335 93	5
6	6,434 28	6,662 46	6,779 41	6,898 29	7,019 15	7,142 01	7,266 94	7,393 84	7,654 02	7,922 80	6
7	7,582 97	7,892 34	8,051 69	8,214 23	8,380 01	8,549 11	8,721 57	8,897 47	9,259 60	9,636 62	7
8	8,754 63	9,159 11	9,368 50	9,582 80	9,802 11	10,026 56	10,256 26	10,491 32	10,977 99	11,487 54	8
9	9,949 72	10,463 88	10,731 39	11,006 11	11,288 21	11,577 89	11,875 35	12,180 79	12,816 45	13,486 54	9
10	11,168 72	11,807 80	12,141 99	12,486 35	12,841 12	13,206 79	13,583 59	13,971 64	14,783 60	15,645 49	10
11	12,412 09	13,192 03	13,601 90	14,025 81	14,464 02	14,917 13	15,345 50	16,869 94	16,888 45	17,977 13	11
12	13,680 33	14,617 79	15,113 03	15,626 84	16,159 91	16,712 94	17,286 49	17,882 14	19,140 84	20,495 30	12
13	14,973 94	16,086 32	16,676 89	17,291 91	17,932 11	18,598 65	19,292 57	20,015 07	21,550 49	23,214 92	13
14	16,293 42	17,598 91	18,295 68	19,023 59	19,784 06	20,578 56	21,404 66	22,275 97	24,129 02	26,152 11	14
15	17,639 29	19,156 88	19,971 03	20,824 53	21,719 34	22,657 49	23,641 14	24,672 53	26,888 05	29,324 28	15
16	19,012 07	20,761 59	21,705 02	22,697 51	23,741 71	24,840 37	25,996 40	27,212 88	29,840 22	32,750 23	16
17	20,412 31	22,414 44	23,499 69	24,645 41	25,855 08	27,132 38	28,491 20	29,905 65	32,999 03	36,450 24	17
18	21,840 56	24,116 57	25,357 18	26,671 23	28,063 56	29,539 00	31,102 67	32,760 99	36,378 96	40,446 26	18
19	23,297 37	25,870 37	27,279 68	28,778 06	30,371 42	32,065 95	33,866 32	35,785 49	39,995 49	44,761 96	19
20	24,783 32	27,678 49	29,269 47	30,969 20	32,783 14	34,719 25	36,786 08	38,992 73	43,865 18	49,422 92	20
21	26,298 98	29,538 78	31,328 00	33,247 97	35,303 38	37,505 21	39,864 31	42,392 29	48,005 74	54,456 76	21
22	27,844 96	31,452 88	33,460 41	35,617 89	37,937 03	40,430 48	43,111 85	45,995 83	52,436 14	59,893 30	22
23	29,421 86	33,426 47	35,666 53	38,082 60	40,689 20	43,502 00	46,538 00	49,815 53	57,178 67	65,764 76	23
24	31,030 30	35,459 26	37,949 56	40,645 91	43,565 21	46,727 10	50,152 59	53,864 51	62,249 04	72,105 94	24
25	32,670 91	37,553 04	40,313 10	43,311 74	46,570 64	50,113 45	53,965 98	58,156 38	67,676 47	78,954 42	25
26	34,344 32	39,709 63	42,758 00	46,084 21	49,711 52	53,669 13	57,989 11	62,705 77	73,483 82	86,350 77	26
27	36,051 21	41,930 92	45,290 63	48,967 58	52,993 33	57,402 58	62,323 51	67,528 11	79,697 69	94,338 83	27
28	37,792 23	44,218 85	47,910 80	51,966 29	56,423 03	61,322 71	66,711 25	72,639 80	86,346 53	102,966 94	28
29	39,568 08	46,575 42	50,622 68	55,084 94	60,007 07	65,433 85	71,435 46	78,058 19	93,460 79	112,283 21	29
30	41,379 44	49,002 68	53,429 47	58,328 34	63,732 39	69,760 79	76,419 43	83,801 66	101,073 04	122,345 57	30
31	43,227 03	51,502 76	56,334 50	61,701 47	67,686 75	74,298 83	81,477 50	89,869 78	109,218 15	133,213 54	31
32	45,111 57	54,077 84	59,341 21	65,209 53	71,756 23	79,063 77	87,224 76	96,343 16	117,933 43	144,950 62	32
33	47,033 80	56,730 18	62,453 15	68,857 91	76,030 24	84,046 93	92,077 12	103,183 76	127,258 76	157,626 67	33
34	48,994 48	59,462 06	65,674 01	72,652 22	80,496 67	89,320 31	99,231 36	110,434 78	137,236 83	171,316 80	34
35	50,994 37	62,275 94	69,007 80	76,598 31	85,163 97	94,836 32	105,765 19	118,129 87	147,918 48	186,102 15	35
36	53,034 25	65,174 22	72,457 87	80,702 25	90,041 34	100,628 14	112,637 27	126,264 12	159,337 +0	202,070 32	36
37	55,114 94	68,158 45	76,028 89	84,970 34	95,138 29	106,709 55	119,887 32	134,904 21	171,581 02	219,315 95	37
38	57,237 24	71,234 23	79,724 91	89,409 15	100,464 47	113,095 02	127,538 13	144,058 46	184,840 29	237,941 22	38
39	59,401 98	74,401 28	83,550 28	94,025 52	106,030 32	119,799 77	135,805 81	153,781 97	198,835 11	258,056 52	39
40	61,610 02	77,663 30	87,509 54	98,826 54	111,846 69	126,839 76	144,114 92	164,047 68	213,809 57	279,781 04	40
41	63,862 22	81,023 39	91,607 37	103,818 60	117,924 79	134,231 75	153,100 46	174,950 54	229,632 24	303,243 52	41
42	66,159 47	84,483 89	95,848 63	109,012 38	124,276 40	141,993 34	162,575 99	186,647 58	246,716 50	328,683 01	42
43	68,502 66	88,048 41	100,238 33	114,412 85	130,913 84	150,143 01	172,672 67	199,086 03	265,189 85	355,949 05	43
44	70,892 71	91,719 86	104,761 67	120,029 39	137,849 97	158,700 16	183,119 17	211,745 51	284,749 31	385,505 02	44
45	73,330 56	95,501 46	109,454 03	125,870 87	145,096 81	167,685 16	194,245 72	225,506 12	305,751 79	417,425 07	45
46	75,817 18	99,396 50	114,350 37	131,945 39	152,672 68	177,119 42	205,954 23	240,036 81	328,214 19	451,900 15	46
47	78,353 52	103,406 40	119,396 28	138,263 21	160,587 90	187,025 39	218,368 37	255,404 53	352,270 00	489,132 16	47
48	80,940 59	107,540 65	124,601 86	144,836 73	168,860 56	197,426 66	231,433 68	271,988 40	377,990 00	529,342 74	48
49	83,579 40	111,798 67	129,967 91	151,667 06	177,503 02	208,346 00	245,317 48	289,355 90	405,828 93	572,770 19	49
50	86,270 99	116,180 77	135,582 84	158,773 77	186,533 66	219,815 40	259,749 44	307,796 08	434,985 96	619,671 77	50
n	2%	2½%	3%	3½%	4%	4½%	5%	5½%	6%	7%	8%	n

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$IV_n^p = v + v^2 + \ldots + v^n = \frac{1 - v^n}{i} = a_n \qquad a'_n = 1 + IV_{n-1}^p$$

n	2%	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	7%	8%	n
1	0,98039	0,97087	0,96618	0,96154	0,95694	0,95238	0,94787	0,94340	0,93458	0,92593	1
2	1,94156	1,91347	1,89969	1,88609	1,87267	1,85941	1,84632	1,83339	1,80802	1,78326	2
3	2,88388	2,82861	2,80164	2,77509	2,74896	2,72325	2,69793	2,67301	2,62432	2,57710	3
4	3,80773	3,71710	3,67308	3,62990	3,58753	3,54595	3,50515	3,46511	3,38721	3,31213	4
5	4,71346	4,57971	4,51505	4,45182	4,38998	4,32948	4,27028	4,21236	4,10020	3,99271	5
6	5,60143	5,41719	5,32855	5,24214	5,15787	5,07569	4,99553	4,91732	4,76654	4,62288	6
7	6,47199	6,23028	6,11454	6,00205	5,89270	5,78637	5,68297	5,58238	5,38929	5,20637	7
8	7,32548	7,01969	6,87396	6,73274	6,59589	6,46321	6,33457	6,20979	5,97130	5,74664	8
9	8,16224	7,78611	7,60769	7,43533	7,26879	7,10782	6,95220	6,80169	6,51523	6,24689	9
10	8,98259	8,53020	8,31661	8,11090	7,91272	7,72173	7,53763	7,36009	7,02358	6,71008	10
11	9,78685	9,25262	9,00155	8,76048	8,52892	8,30641	8,09254	7,88687	7,49867	7,13896	11
12	10,57534	9,95400	9,66333	9,38507	9,11858	8,86325	8,61852	8,38384	7,94269	7,53608	12
13	11,34837	10,63496	10,30274	9,98565	9,68285	9,39357	9,11708	8,85268	8,35765	7,90378	13
14	12,10625	11,29607	10,92052	10,56312	10,22283	9,89864	9,58965	9,29498	8,74547	8,24424	14
15	12,84926	11,93794	11,51741	11,11839	10,73955	10,37966	10,03758	9,71225	9,10791	8,55948	15
16	13,57771	12,56110	12,09412	11,65230	11,23402	10,83777	10,46216	10,10590	9,44665	8,85137	16
17	14,29187	13,16612	12,65132	12,16567	11,70719	11,27407	10,86461	10,47726	9,76322	9,12164	17
18	14,99203	13,75351	13,18968	12,65930	12,15999	11,68959	11,24607	10,82760	10,05909	9,37189	18
19	15,67846	14,32380	13,70984	13,13394	12,59329	12,08532	11,60765	11,15812	10,33560	9,60360	19
20	16,35143	14,87747	14,21240	13,59033	13,00794	12,46221	11,95038	11,46992	10,59401	9,81815	20
21	17,01121	15,41502	14,69797	14,02916	13,40472	12,82115	12,27524	11,76408	10,83553	10,01680	21
22	17,65805	15,93692	15,16712	14,45112	13,78442	13,16300	12,58317	12,04158	11,06124	10,20074	22
23	18,29220	16,44361	15,62041	14,85684	14,14777	13,48857	12,87504	12,30338	11,27219	10,37106	23
24	18,91393	16,93554	16,05837	15,24696	14,49548	13,79864	13,15170	12,55036	11,46933	10,52876	24
25	19,52346	17,41315	16,48151	15,62208	14,82821	14,09394	13,41393	12,78336	11,65358	10,67478	25
26	20,12104	17,87684	16,89035	15,98277	15,14661	14,37519	13,66250	13,00317	11,82578	10,80998	26
27	20,70690	18,32703	17,28536	16,32959	15,45130	14,64303	13,89810	13,21053	11,98671	10,93516	27
28	21,28127	18,76411	17,66702	16,66306	15,74287	14,89813	14,12142	13,40616	12,13711	11,05108	28
29	21,84438	19,18845	18,03577	16,98371	16,02189	15,14107	14,33310	13,59072	12,27767	11,15841	29
30	22,39646	19,60044	18,39205	17,29203	16,28889	15,37245	14,53375	13,76483	12,40904	11,25778	30
31	22,93770	20,00043	18,73628	17,58849	16,54439	15,59281	14,72393	13,92909	12,53181	11,34980	31
32	23,46833	20,38877	19,06887	17,87355	16,78889	15,80268	14,90420	14,08404	12,64656	11,43500	32
33	23,98856	20,75579	19,39021	18,14765	17,02286	16,00255	15,07507	14,23023	12,75379	11,51389	33
34	24,49859	21,13184	19,70068	18,41120	17,24676	16,19290	15,23703	14,36814	12,85401	11,58693	34
35	24,99862	21,48722	20,00066	18,66461	17,46101	16,37419	15,39055	14,49825	12,94767	11,65457	35
36	25,48884	21,83225	20,29049	18,90328	17,66604	16,54685	15,53607	14,62099	13,03521	11,71719	36
37	25,96945	22,16724	20,57053	19,14258	17,86224	16,71129	15,67400	14,73678	13,11702	11,77518	37
38	26,44064	22,49246	20,84109	19,36786	18,04999	16,86789	15,80474	14,84602	13,19347	11,82887	38
39	26,90259	22,80822	21,10250	19,58448	18,22966	17,01704	15,92866	14,94907	13,26493	11,87858	39
40	27,35548	23,11477	21,35507	19,79277	18,40158	17,15909	16,04612	15,04630	13,33171	11,92461	40
41	27,79949	23,41240	21,59910	19,99305	18,56611	17,29437	16,15746	15,13802	13,39412	11,96723	41
42	28,23480	23,70136	21,83488	20,18563	18,72355	17,42321	16,26300	15,22454	13,45245	12,00670	42
43	28,66156	23,98190	22,06269	20,37079	18,87421	17,54591	16,36303	15,30617	13,50696	12,04324	43
44	29,07996	24,25427	22,28279	20,54884	19,01838	17,66277	16,45785	15,38318	13,55791	12,07707	44
45	29,49016	24,51871	22,49545	20,72004	19,15635	17,77407	16,54778	15,45583	13,60552	12,10840	45
46	29,89231	24,77545	22,70092	20,88465	19,28837	17,88007	16,63292	15,52437	13,65002	12,13741	46
47	30,28658	25,02471	22,89944	21,04294	19,41471	17,98102	16,71366	15,58903	13,69161	12,16427	47
48	30,67312	25,26671	23,09124	21,19513	19,53561	18,07716	16,79020	15,65003	13,73047	12,18914	48
49	31,05208	25,50166	23,27656	21,34147	19,65130	18,16872	16,86275	15,70757	13,76680	12,21216	49
50	31,42361	25,72976	23,45562	21,48218	19,76201	18,25593	16,93152	15,76186	13,80075	12,23348	50
n	2%	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	7%	8%	n

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablo V. Anuite faktörleri: $V_n^p = \frac{1}{a_n}$ $\frac{1}{a_n} = V_n^p - i$

n/	2%	3%	3,5 %	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	7%	8%	n/
1	1,02	1,03	1,035	1,04	1,045	1,05	1,055	1,06	1,07	1,08	1
2	0,51505	0,52261	0,52640	0,53020	0,53400	0,53780	0,54162	0,54544	0,55308	0,56077	2
3	0,34675	0,35353	0,35693	0,36035	0,36377	0,36721	0,37065	0,37411	0,38105	0,38803	3
4	0,26262	0,26903	0,27225	0,27549	0,27874	0,28201	0,28529	0,28859	0,29523	0,30192	4
5	0,21216	0,21835	0,22148	0,22463	0,22779	0,23097	0,23418	0,23740	0,24389	0,25046	5
6	0,17853	0,18460	0,18767	0,19076	0,19388	0,19702	0,20018	0,20336	0,20980	0,21632	6
7	0,15451	0,16051	0,16354	0,16661	0,16970	0,17282	0,17496	0,17914	0,18555	0,19207	7
8	0,13651	0,14246	0,14548	0,14853	0,15161	0,15472	0,15786	0,16104	0,16747	0,17401	8
9	0,12252	0,12843	0,13145	0,13449	0,13757	0,14069	0,14384	0,14702	0,15349	0,16008	9
10	0,11133	0,11723	0,12024	0,12329	0,12638	0,12950	0,13267	0,13587	0,14238	0,14903	10
11	0,10218	0,10808	0,11109	0,11415	0,11725	0,12039	0,12357	0,12679	0,13337	0,14008	11
12	0,09456	0,10046	0,10348	0,10655	0,10967	0,11283	0,11603	0,11928	0,12590	0,13270	12
13	0,08812	0,09403	0,09706	0,10014	0,10328	0,10646	0,10968	0,11296	0,11965	0,12652	13
14	0,08260	0,08853	0,09157	0,09467	0,09782	0,10102	0,10428	0,10758	0,11434	0,12130	14
15	0,07783	0,08377	0,08683	0,08994	0,09311	0,09634	0,09963	0,10296	0,10979	0,11683	15
16	0,07365	0,07961	0,08268	0,08582	0,08902	0,09227	0,09558	0,09895	0,10586	0,11298	16
17	0,06997	0,07595	0,07904	0,08220	0,08542	0,08870	0,09204	0,09544	0,10243	0,10963	17
18	0,06670	0,07271	0,07582	0,07899	0,08224	0,08555	0,08892	0,09236	0,09941	0,10670	18
19	0,06378	0,06981	0,07294	0,07614	0,07941	0,08275	0,08615	0,08962	0,09675	0,10413	19
20	0,06116	0,06722	0,07036	0,07368	0,07688	0,08024	0,08368	0,08718	0,09439	0,10185	20
21	0,05878	0,06487	0,06804	0,07128	0,07460	0,07800	0,08145	0,08500	0,09229	0,09983	21
22	0,05663	0,06275	0,06593	0,06929	0,07265	0,07597	0,07947	0,08305	0,09041	0,09803	22
23	0,05467	0,06081	0,06402	0,06731	0,07068	0,07414	0,07767	0,08128	0,08871	0,09642	23
24	0,05287	0,05905	0,06227	0,06559	0,06899	0,07247	0,07604	0,07968	0,08719	0,09498	24
25	0,05122	0,05743	0,06067	0,06401	0,06744	0,07095	0,07455	0,07823	0,08581	0,09368	25
26	0,04970	0,05594	0,05920	0,06257	0,06602	0,06956	0,07319	0,07690	0,08456	0,09251	26
27	0,04829	0,05456	0,05785	0,06124	0,06472	0,06829	0,07195	0,07570	0,08343	0,09145	27
28	0,04699	0,05329	0,05660	0,06010	0,06352	0,06712	0,07081	0,07459	0,08239	0,09049	28
29	0,04578	0,05211	0,05545	0,05888	0,06241	0,06605	0,06977	0,07358	0,08145	0,08962	29
30	0,04465	0,05102	0,05437	0,05783	0,06139	0,06505	0,06881	0,07265	0,08059	0,08883	30
31	0,04360	0,05000	0,05337	0,05686	0,06044	0,06413	0,06792	0,07179	0,07980	0,08811	31
32	0,04261	0,04905	0,05244	0,05595	0,05956	0,06328	0,06710	0,07100	0,07907	0,08745	32
33	0,04169	0,04816	0,05157	0,05510	0,05874	0,06249	0,06633	0,07027	0,07841	0,08685	33
34	0,04082	0,04732	0,05076	0,05431	0,05798	0,06176	0,06563	0,06960	0,07780	0,08630	34
35	0,04000	0,04654	0,05000	0,05358	0,05727	0,06107	0,06497	0,06897	0,07723	0,08580	35
36	0,03923	0,04580	0,04928	0,05289	0,05661	0,06043	0,06437	0,06839	0,07672	0,08534	36
37	0,03851	0,04511	0,04861	0,05224	0,05598	0,05984	0,06380	0,06786	0,07626	0,08492	37
38	0,03782	0,04446	0,04796	0,05163	0,05540	0,05928	0,06327	0,06736	0,07580	0,08454	38
39	0,03717	0,04384	0,04739	0,05106	0,05486	0,05876	0,06278	0,06689	0,07539	0,08419	39
40	0,03656	0,04326	0,04683	0,05052	0,05434	0,05828	0,06232	0,06646	0,07501	0,08386	40
41	0,03597	0,04271	0,04630	0,05002	0,05386	0,05782	0,06188	0,06606	0,07466	0,08356	41
42	0,03542	0,04219	0,04580	0,04954	0,05341	0,05739	0,06149	0,06568	0,07434	0,08329	42
43	0,03489	0,04170	0,04533	0,04909	0,05298	0,05699	0,06111	0,06532	0,07404	0,08303	43
44	0,03439	0,04123	0,04488	0,04866	0,05258	0,05662	0,06076	0,06501	0,07376	0,08280	44
45	0,03391	0,04079	0,04445	0,04826	0,05220	0,05628	0,06043	0,06470	0,07350	0,08259	45
46	0,03346	0,04036	0,04405	0,04788	0,05184	0,05593	0,06012	0,06441	0,07326	0,08239	46
47	0,03302	0,03996	0,04367	0,04752	0,05151	0,05561	0,05983	0,06415	0,07304	0,08221	47
48	0,03260	0,03958	0,04331	0,04718	0,05119	0,05532	0,05956	0,06390	0,07283	0,08204	48
49	0,03220	0,03921	0,04296	0,04686	0,05089	0,05504	0,05930	0,06366	0,07264	0,08189	49
50	0,03182	0,03887	0,04262	0,04655	0,05060	0,05478	0,05906	0,06344	0,07246	0,08176	50
n/	2%	3%	3,5%	4%	4,5%	5%	5,5%	6%	7%	8%	n/

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablo VI. Peyslz faizli istikrazların rayiç kurları: $C_n = p a_{\overline{n}|} + 100 v^n$

Nominal faiz $p = 3\%$				Nominal faiz $p = 4\%$				
p / n	2%	4%	5%	6%	3%	5%	6%	7%	p / n
1	100,98	99,04	98,10	97,17	100,97	99,05	98,11	97,20	1
2	101,94	98,11	96,28	94,50	101,91	98,14	96,33	94,58	2
3	102,88	97,22	94,55	91,98	102,83	97,28	94,65	92,13	3
4	103,81	96,37	92,91	89,60	103,72	96,45	93,07	89,84	4
5	104,71	95,55	91,34	87,36	104,58	95,67	91,57	87,70	5
6	105,60	94,76	89,85	85,25	105,42	94,92	90,17	85,70	6
7	106,47	94,00	88,43	83,25	106,23	94,21	88,84	83,83	7
8	107,33	93,27	87,07	81,37	107,02	93,54	87,58	82,09	8
9	108,16	92,56	85,78	79,59	107,79	92,89	86,40	80,45	9
10	108,98	91,89	84,56	77,92	108,53	92,28	85,28	78,93	10

Nominal faiz $p = 5\%$				Nominal faiz $p = 6\%$				
p / n	4%	6%	7%	8%	5%	7%	8%	9%	p / n
1	100,96	99,06	98,13	97,22	100,95	99,07	98,15	97,25	1
2	101,87	98,17	96,38	94,65	101,86	98,19	96,43	94,72	2
3	102,78	97,33	94,75	92,27	102,72	97,38	94,85	92,41	3
4	103,63	96,53	93,23	90,06	103,55	96,61	93,38	90,28	4
5	104,45	95,79	91,80	88,02	104,33	95,90	92,01	88,33	5
6	105,24	95,08	90,47	86,13	105,08	95,23	90,75	86,54	6
7	106,00	94,42	89,22	84,38	105,79	94,61	89,59	84,90	7
8	106,73	93,79	88,06	82,76	106,46	94,03	88,51	83,40	8
9	107,44	93,20	86,97	81,26	107,11	93,48	87,51	82,01	9
10	108,11	92,64	85,95	79,87	107,72	92,98	86,58	80,75	10

Nominal faiz $p = 7\%$				Nominal faiz $p = 8\%$				
p / n	6%	8%	9%	10%	7%	9%	10%	11%	p / n
1	100,94	99,07	98,17	97,27	100,93	99,08	98,18	97,30	1
2	101,83	98,22	96,48	96,53	101,81	98,24	96,53	94,86	2
3	102,67	97,42	94,94	92,54	102,62	97,47	95,03	92,67	3
4	103,47	96,69	93,52	90,49	103,39	96,76	93,66	90,69	4
5	104,21	96,01	92,22	88,63	104,10	96,11	92,42	88,91	5
6	104,92	95,38	91,03	86,93	104,77	95,51	91,29	87,31	6
7	105,58	94,79	89,93	85,39	105,39	94,97	90,26	85,86	7
8	106,21	94,25	88,93	84,00	105,97	94,47	89,33	84,56	8
9	106,80	93,75	88,01	82,72	106,52	94,00	88,48	83,39	9
10	107,36	93,29	87,16	81,57	107,02	93,58	87,71	82,33	10

Tablo VII. Altı aylık ilâve kurlar:

$$h = \frac{p\varepsilon}{p-p} \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}(q^{1/6} - 1)$$

p	ε	$p = 3\%$	$p = 4\%$	$p = 5\%$	$p = 6\%$	p
3%	0,00745	—	− 0,02978	− 0,01861	− 0,01489	3%
4%	0,00990	+ 0,02971	—	− 0,04951	− 0,02971	4%
5%	0,01235	+ 0,01852	+ 0,04939	—	− 0,07409	5%
6%	0,01478	+ 0,01478	+ 0,02956	+ 0,07391	—	6%
7%	0,01720	+ 0,01290	+ 0,02294	+ 0,04301	+ 0,10322	7%
8%	0,01962	+ 0,01177	+ 0,01962	+ 0,03269	+ 0,05885	8%

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablo VIII. Peysiz Anuite istikrazların rayiç kurları: $\sigma_n = 100\frac{a_n}{n}$

n \ p	Nominal faiz $p = 3\%$				Nominal faiz $p = 4\%$				n \ p
	2%	4%	5%	6%	3%	5%	6%	7%	
5	102,92	97,21	94,54	91,98	102,87	97,25	94,62	92,10	5
10	105,30	95,08	90,52	86,28	105,17	95,20	90,74	86,59	10
15	107,64	93,13	86,95	81,36	107,37	93,36	87,35	81,92	15
20	109,91	91,35	83,77	77,10	109,47	91,70	84,40	77,95	20
25	112,12	89,71	80,94	73,41	111,46	90,22	81,83	74,59	25
30	114,27	88,22	78,43	70,23	113,35	88,90	79,60	71,76	30
35	116,34	86,86	76,20	67,47	115,12	87,73	77,68	69,37	35
40	118,34	85,63	74,23	65,09	116,78	86,69	76,02	67,35	40
45	120,29	84,51	72,49	63,04	118,33	85,78	74,59	65,66	45
50	122,14	83,49	70,95	61,26	119,77	84,98	73,37	64,24	50

n \ p	Nominal faiz $p = 5\%$				Nominal faiz $p = 6\%$				n \ p
	4%	6%	7%	8%	5%	7%	8%	9%	
5	102,83	97,30	94,70	92,22	102,78	97,34	94,79	92,34	5
10	105,04	95,32	90,96	86,90	104,91	95,43	91,17	87,20	10
15	107,12	93,57	87,75	82,46	106,87	93,78	88,13	83,00	15
20	109,05	92,04	85,01	78,78	108,65	92,36	85,60	79,59	20
25	110,64	90,70	82,60	75,74	110,25	91,16	83,51	76,84	25
30	112,49	89,54	80,72	73,23	111,68	90,15	81,79	74,64	30
35	113,99	88,54	79,07	71,18	112,94	89,31	80,39	72,88	35
40	115,35	87,69	77,69	69,49	114,04	88,60	79,25	71,50	40
45	116,57	86,96	76,55	68,12	115,00	88,03	78,34	70,40	45
50	117,67	86,34	75,60	67,01	115,82	87,56	77,61	69,55	50

n \ p	Nominal faiz $p = 7\%$				Nominal faiz $p = 8\%$				n \ p
	6%	8%	9%	10%	7%	9%	10%	11%	
5	102,74	97,38	94,87	92,45	102,69	97,42	94,94	92,57	5
10	104,79	95,54	91,37	87,49	104,67	95,64	91,57	87,77	10
15	106,64	93,98	88,50	83,51	106,41	94,17	88,86	84,01	15
20	108,27	92,68	86,17	80,36	107,90	92,98	86,71	81,11	20
25	109,69	91,60	84,29	77,89	109,17	92,02	85,03	78,89	25
30	110,93	90,72	82,79	75,97	110,23	91,26	83,74	77,22	30
35	111,98	90,01	81,61	74,59	111,10	90,67	82,75	75,98	35
40	112,86	89,45	80,69	73,35	111,80	90,21	82,01	75,06	40
45	113,60	89,00	79,98	72,49	112,36	89,86	81,45	74,39	45
50	114,21	88,64	79,43	71,84	112,81	89,60	81,05	73,91	50

Tablo IX. Yıldan daha küçük konform faizler: $i_m = \left(\sqrt[m]{1+\frac{p}{100}} - 1\right)100$

m \ p	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	p \ m
2	0,99505	1,48892	1,98039	2,46951	2,95630	3,44080	3,92305	2
4	0,49629	0,74171	0,98534	1,22722	1,46739	1,70585	1,94268	4
12	0,16516	0,24663	0,32737	0,40741	0,48676	0,56542	0,64340	12

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ ... 3

LOGARİTMA ... 5 — 22

Tanım ... 5
Logaritma Fonksiyonu ... 7
Logaritma Türleri ... 9
Kologaritma ... 15
Logaritma Özellikleri ... 9
Logaritma Cetvellerinin Kullanılması ... 17
Logaritma İşlemleri ... 21

DİZİLER ... 23 — 38

Aritmetik Dizi ... 23
Geometrik Dizi ... 31

BİRİNCİ BÖLÜM

BİLEŞİK FAİZ ... 39 — 55

Bileşik Faizin Hesabı ... 39
Devre Sonu Kapitalinin Hesaplanması ... 42
Devre Başı Kapitalinin Hesaplanması ... 44
Faiz Fiyatının Hesaplanması ... 45
Devre Adetlerinin Tesbiti ... 48
Devre Başında Hesaplanan Faiz ... 49
Devre Başı Kapitalinin Hesaplanması ... 50
Faiz Fiyatının Hesaplanması ... 51
Devre Adedinin Hesaplanması ... 52
Sürenin Kesirli Olması Hali ... 53

AMORTİSMAN ... 57 — 62

Normal Amortisman ... 57
Azalan Bakiyeler Usulüyle Amortisman ... 57
Devre Adedinin Hesaplanması ... 60
Yüzde Nisbetinin Hesabı ... 60

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ANİ FAİZ ... ...

Ani Faiz Hesap Formülünün Tanzimi 63
Rantabilite Hesaplarında Ani Faiz 66
Basit Şekilde Rantabilite Oranının Hesaplanması 66
Ani Faiz Metoduyla Rantabilite Oranının Hesaplanması 69

RANT HESAPLARI ... ... 71 — 102

Rantların Nevileri 71
Muvakkat Rantlar 71
Devre Sonunda Ödenen Rantlar 71
Rantların Nihai Kıymeti 72
Rant Taksit Tutarının Hesaplanması 74
Rant Taksit Adedinin Hesaplanması 75
Faiz Fiyatının Bulunması 76
Rantların Halihazır Kıymetinin Hesaplanması ... 77
Taksit Tutarının Hesaplanması 81
Taksit Adedinin Hesaplanması 82
Devre Başında Ödenen Rantlar 83
Taksitlerin Hesaplanması 86
Taksit Adedinin Hesaplanması 87
Halihazır Kıymetlerinin Hesaplanması 88
Müeccel Rantlar 92
Ödeme Sonunda Ödenen Müeccel Rantların Halihazır Kıymeti 92
Taksit Tutarının Hesaplanması 94
Taksit Adedinin Hesaplanması 94
Rantın Tescil Edildiği Sürenin Hesaplanması ... 95
Daimî Rantlar 96
Faiz Fiyatının Hesaplanması (Devre Başında) .. 98
Taksit Tutarının Hesaplanması (Devre Başında) 99
Faiz Fiyatının Hesaplanması (Devre Sonunda) 100
Taksit Tutarının Hesaplanması (Devre Sonunda) 101

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İKİNCİ BÖLÜM

İSTİRAZLAR ... ... 103 — 233

Kredi Temini 103
Borç ve Özsermaye Hasılatı 106
Borç Özsermaye İlişkileri 105
İstikraz Kavramı 111
İstikraz Hesapları İle İlgili Esas Unsurlar 114
İstikraz Türleri 114
İtfa Hesabı 117
Eşit Taksitlerle Ödemek Suretiyle İtfa 117
Eşit Anuitelerle İtfa 120
Yedek İtfası Vasıtasıyla Bir Kerelik Geri Ödeme 128
Artıklı Yuvarlak Anuite Vasıtasıyla İtfa 129
Anuite İtfasında Masrafların ve Çiftli Faiz Fiyatının Hesaplanması 133
İtfa Edilmesi Gerekli Serilerin Tesbiti 140
İtfa Sûresinin Tesbiti 150
Faiz Fiyatının Tesbiti 153
Peyli İtfa 154
Tam Yıl Üzerinden Yapılmayan İtfa 162
Değişen Anuiteler — İkramiye İstikrazı 166
Borsa Hesapları — Kâr Hesapları 167
Bir Defada Geri Ödenen Borcun ve Devamlı Rantın Borsa Değerleri 169
Anuite Borcunun Borsa Rayici 172
Tama Çıkarılmış Artıklı Anuitelerde Borsa Rayici 176
Peyli Bir İtfa Borcunun Borsa Rayici 178
Gecikmeli İtfada Borsa Rayici 180
Borç Süresinin Herhangi Bir Zaman Bölümündeki Borsa Rayici 181
Rayiçler ve Orta Süre 185
Rayiçler ve Faiz Farkları 188
Faizlerin, İtfaların ve Masrafların Rayiç Değeri 191
Tam Yıl Üzerinden Yapılmayan Faiz ve İtfalarda Rayiç 196

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Rantabilite Hesapları, Efektif Faiz ve Rantabilite Hakkında Genel Bilgi 203
İstikrazlarda Ortalama Genel Rantabilitenin Hesaplanması 205
Sürekli Faizsiz İstikrazlar — Gecikmeli Faizlendirme 211
İstikrazlarda Rantabilite Karşılaştırması 213
Her İstikraz Adedi Özel Rantabilitesinin Bulunması Bir Kapitalin Rantabilitesi 216
Kısmî Ödeme Kredileri Rantabilitesinin Tespiti-Süre - Faizler 221

YARARLANILAN ESERLER 234

KULLANILACAK TABLOLAR ... ... 235 — 262

İÇİNDEKİLER ... ... 263 — 266

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

Bu kitabın kâğıt ve kapak masrafları Marmara Üniversitesi Öğrenci Harçları Fonundan Karşılandığından Öğrenciye Satış Fiatı 1550 lira olarak tesbit edilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

Fiyatı : 1700 TL.