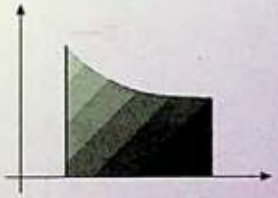
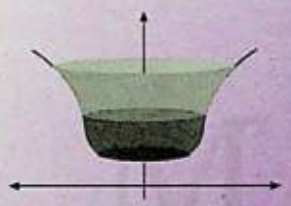
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

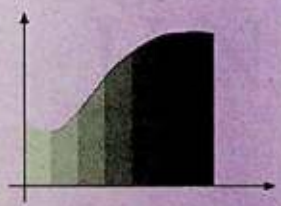
Marmara Üniversitesi Yayın No: 695
Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu Yayın No: 4

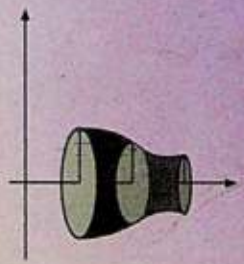
UYGULAMALI İNTEGRAL

Yrd.Doç.Dr. Mehmet TEKTAŞ









$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Eylül, 2000
İSTANBUL

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO : 695
TEKNİK BİLİMLER MESLEK YÜKSEKOKULU YAYIN NO : 4

UYGULAMALI İNTEGRAL

Yrd.Doç.Dr. Mehmet TEKTAŞ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

İstanbul, 2000

ISBN : 975-400-252-5

Marmara Üniversitesi
Döner Sermaye İşletmesi
Teknik Eğitim Fakültesi
Matbaa Biriminde Basılmıştır

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖNSÖZ

Bu kitabı yazmaktaki amacım, şimdiye kadar yayımlanmış onlarca integral ders notları ve kitapları arasına bir yenisini katmaktan ziyade, bu alandaki bir boşluğu doldurucu bir niteliğe sahip olmasıdır.

Ülkemizde integral hakkındaki mevcut yayımların belli bir seviyeden sonra anlaşılır olması, yayımlanan eserlerin pratikten öteye teoriye ve karmaşık bir yapıya sahip olması, öğrencilerin doğal olarak lise mezunu kabul edilmesi gibi nedenlerden dolayı, bu eserlerin öğrenciler tarafından algılanmasında çeşitli sorunlara yol açmaktadır.

Gerek bu saydığım nedenler ve gerekse okulumuzun öğrenci çoğunluğunun meslek lisesi mezunu olmaları, benim çözümlü örnekleri fazla, anlaşılır ve uygulamaya yönelik böyle bir kitabı yazmamda etkili olmuştur.

Bunun yanısıra, hocalarımın bana, lisans, yüksek lisans ve doktora seviyesinde karşılıksız verdiği emeğin boşa gitmediğini göstermek ve vefa borcumu bir nebze olsun ödeyebilmek için bu eseri ülkemizin yarınları olan gençliğimize ithaf ediyorum.

Rahmetli Babam Mustafa TEKTAŞ, Rahmetli Ağabeyim Adnan TEKTAŞ ve Alzheimer Hastası Olan Annem Şevkiye TEKTAŞ'a İthafen...

Yrd.Doç.Dr. Mehmet TEKTAŞ

Eylül, 2000
İSTANBUL

İÇİNDEKİLER

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1. BÖLÜM

I. GİRİŞ — Sayfa No

1.1. İntegralin Tanımı ve Tarihçesi — 1

1.2. $I=\int(ax+b)^n dx$ $(a\neq 0)$ $(a,b\in IR)$ $(n\in Q)$ şeklindeki İntegraller — 5

1.3. Kuvvet Fonksiyonunun İntegrali — 7

1.4. $I=\int e^{(ax+b)}dx$ şeklindeki İntegraller (a,b ∈ IR) — 7

1.5. İntegrasyon Sabiti (Eğri Aileleri) — 8

1.5.1. Elektrik Devre Uygulamaları — 9

1.5.2. Fiziksel Uygulamalar — 13

Alıştırmalar — 16

2. BÖLÜM

2. BELİRLİ İNTEGRAL

2.1. Riemann Darboux Alt ve Üst Toplamları ve Bir Fonksiyonun Belirli İntegrali — 17

2.2. Belirli integralin Özelliklerine Dair Teoremler — 19

2.3. Bir Eğri Altındaki Yaklaşık Alan — 21

2.3.1.Orta Nokta Metodu — 23

2.4. Bir Eğri Altındaki Kesin Alan — 24

2.5. Bir Toplamın Limiti Olarak İntegral — 27

2.6. Analiz Hesabının Temel Teoremi — 32

Alıştırmalar — 34

3. BÖLÜM

3. İNTEGRAL TEKNİKLERİ

3.1. Değişken Dönüşümü — 35

Alıştırmalar — 37

3.2. Kısmi İntegrasyon — 38

Kısmi İntegrasyon İle İlgili Problemler — 44

3.3. Rasyonel Fonksiyonların İntegrali — 47

3.3.1. I.Tip Basit Kesirler 48
3.3.2. II. Tip Basit Kesirler 49
Rasyonel Kesirlere Ait Cevaplı Alıştırmalar 57
Rasyonel Kesirlere Ait Cevapsız Alıştırmalar 59
3.4. Trigonometrik İntegraller 61
3. 4.1. $I_1=\int R(\sin x).\cos x.dx$ şeklindeki integraller 61
3.4.2. $I_2=\int R(\cos x).\sin x.dx$ şeklindeki integraller 61
3.4.3. $I_3=\int R(\tan x).dx$ şeklindeki integraller 62
3.4.4. $I_4=\int \sin ax.\sin bx.dx$ $(a,b\in IR)$ şeklindeki integraller 63
3.4.5. $I_5=\int \cos ax.\cos bx.dx$ $(a,b\in IR)$ şeklindeki integraller 64
3.4.6. $I_6=\int \sin ax.\cos bx.dx$ $(a,b\in IR)$ şeklindeki integraller 65
3.4.7. $I_7=\int \sin^m x dx=\int (\sin x)^m dx$ şeklindeki integraller 66
3.4.8. $I_8=\int (\cos)^m dx=\int \cos^m x.dx$ şeklindeki İntegraller 67
3.4.9. $I_9=\int \tan \alpha x.dx$, $\alpha\in IR$ şeklindeki integraller 68
3.4.10. $I_{10}=\int \sin^n x.\cos^m x dx$ şeklindeki integraller 69
3.4.11. $I_{11}=\int f(\sin x,\cos x)dx$ şeklindeki integraller 72
Trigonometrik İntegrallere Ait Alıştırmalar 81
3.5. Trigonometrik Yerine Koyma Metodu 85
3.5.1. $I=\int f(x,(a^2-x^2)^p)dx$ şeklindeki integraller 85
3.5.2. $I=\int f(x,(a^2+x^2)^p)dx$ şeklindeki integraller 86
3.5.3. $I=\int f(x,(x^2-a^2)^p)dx$ şeklindeki integraller 87
Alıştırmalar 91
3.6. Cebirsel Fonksiyonların İntegrali 92
Alıştırmalar 98

4. BÖLÜM

4. BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI
4.1 Bir Eğri Altında Kalan Alan Hesabı 101
4.1.1. y = f(x) eğrisi, x – ekseni, x = a ve x = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı 101
4.1.2. x = g(y) eğrisi, y – ekseni, y = a ve y = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı 103
4.2. İki Eğri Arasında Kalan Alan Hesabı 105

4.2.1. $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ eğrileri ile $x=a$, $x=b$ doğruları arasında kalan alan 105
4.2.2. $x_1=g(y)$, $x_2=h(y)$ eğrileri ile $y=a$, $y=b$ doğruları arasında kalan alan 107
4.3. Dönel Cisimlerin Hacminin Bulunması 110
4.3.1. Disk Metodu 110
4.3.2 Shell (Kabuk) Metodu 111
4.3.3 İki Eğri Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının Bir Eksen Etrafında Döndürülmesiyle Oluşan Dönel Cismin Hacmi 115
4.3.3. 1 $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ eğrileri ile $x=a$, $x=b$ Doğruları Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının x-ekseni Etrafında Dönmesiyle Oluşan Dönel Cismin Hacmi 115
4.3.3.2. $x_1=g(y)$, $x_2=h(y)$ eğrileri ile $y=a$, $y=b$ Doğruları Arasında Kalan Sınırlı Alanın y-ekseni Etrafında Dönmesiyle Oluşan Dönel Cisim Hacmi 115
4.4. Yay Uzunluğu 117
Alıştırmalar 120
4.5. Dönel Yüzeyin Yanal Alanı 121
Alıştırmalar 124
4.6 Bir Fonksiyonun Ortalama Ve Etkin (Efektif) Değerleri 125
4.6.1. Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri 125
4.6.2. Bir Fonksiyonun Etkin Değeri 126
Alıştırmalar 127
4. Bölümle ilgili çözümlü problemler 128
Alan, Hacim ,Dönel Yüzeyin Yanal Alanı İle İlgili Çözümsüz Alıştırmalar 133

5. BÖLÜM

5. HAS OLMAYAN İNTEGRALLER 135
5.1. Sonsuz Limitler İçin Has Olmayan İntegraller 136
5.2. Süreksiz İntegrand 137
Alıştırmalar 140

6. BÖLÜM

6. SAYISAL İNTEGRAL 141
6.1. Ortalama Ordinat Metodu 142
6.2. Yamuk Metodu 146
6.3. Dikdörtgen Metodu 148
6.4. Parabolik Alan Formülü

6.5. Simpson Metodu 150
Alıştırmalar 152
Kaynaklar 153
Ekler 154-200
Ek.1. Çözümlü Örnekler 154
Ek.2. Rasyonel Kesirleri İçeren İntegral Örnekleri 157
Ek.3. Trigonometrik Fonksiyonları İçeren veya Gerektiren İntegral Örnekleri 161
Ek.4. İntegrale Ait Tanım ve Formüller 167
Ek.5. Çeşitli Formüller 171

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İNTEGRAL

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. İntegralin Tanımı ve Tarihçesi

İntegral kavramı diferansiyel ve antitürev kavramlarını içerir. Burada, antitürev integral (veya bir fonksiyonun ilkeli) anlamındadır. Türevin birkaç yüzyıllık geçmişi olmasına rağmen integral kavramının geçmişinin insanoğlunun alan hesabına getirdiği açıklamalar kadar eski olduğu bilinmektedir.

İntegral kavramını bir fonksiyonun integrali anlamında şu şekilde verebiliriz.

F(x) + c fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada, **c** keyfi bir sabittir. Bu fonksiyonun **x'e** göre türevi;

$$\frac{d}{dx}[F(x)+c]=F'(x)+0=F'(x)$$

ve buradan;

d[F(x)+c]=F'(x)dx olarak elde edilir. Buna göre;

F(x)+c fonksiyonunun diferansiyeli F'(x).dx iken

F' (x).dx fonksiyonunun integrali F(x)+c demektir

$$f(x)=F'(x)$$

alalım. Bu durumda, **y=f(x) fonksiyonunun belirsiz integrali;**

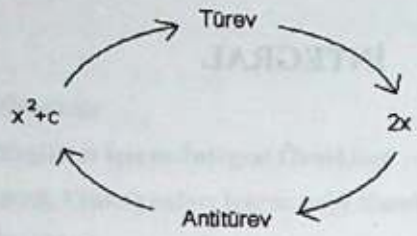
$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

(c=sabit) şeklinde tanımlanır. Burada kullanılan $\int$ işareti integral işareti olup Sum(Toplam) kelimesinin baş harfi olan S harfinin uzatılmış halidir. **c** keyfi sabiti ise integrasyon sabiti olup fonksiyon hakkındaki bilgiler mevcut iken belirlenir. **dx diferansiyeli** integral içinde olmak zorundadır ve **x'e göre integral alınacağını ifade eder.**

$$\int f(x)dx=F(x)+c \quad veya \quad d[F(x)+c]=f(x)dx$$

ilişkisi her zaman geçerlidir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Burada antitürev belirsiz integral olarak da bilinir ve iki isimden birisi kullanılır. İntegral veya antitürev bulma işlemine **integrasyon**, integrali alınacak fonksiyona ise **integrand** denir.

Bu açıklamaların ışığı altında bilinen fonksiyonların integralleri ile ileride ayrıca inceleyeceğimiz özel tipteki integraller aşağıda verilmiştir.

1) $\int dx = x + c$

2) $\int du = u + c \qquad u = u(x)$

3) $\int \alpha . f(x)dx = \alpha \int f(x)dx = \alpha[F(x) + c] \qquad (\alpha = sbt)$

4) $\int \left| f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + ----- + f_n(x) \right| dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + -----$

5) $\int x^n . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

6) $\int \frac{dx}{x} = Ln|x| + c \qquad (x \neq 0)$

7) $\int e^x dx = e^x + c$

8) $\int a^x dx = \frac{1}{Lna} . a^x + c \qquad (a \neq 0, a > 0)$

9) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

10) $\int \cos x dx = +\sin x + c$

11) $\int \tan x dx = -Ln|\cos x| + c$

12) $\int \cot anx dx = Ln|\sin x| + c$

13) $\int \sec x dx = Ln|\sec x + \tan x| + c$

14) $\int \cos ecxdx = Ln\left|\cos ecx - \cot anx\right| + c$

15) $\int \sec^2 xdx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + c$

16) $\int \cos ec^2 xdx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1+\cot an^2 x)dx = -\cot anx + c$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + c$

18) $\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\cos x + c$

19) $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arc\tan x + c$

20) $\int \frac{-dx}{1+x^2} = Arc\cot anx + c$

21) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} Ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

22) $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = Ln\left|x \pm \sqrt{x^2-1}\right| + c$

23) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = Ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = Arc\sin\frac{x}{a} + c \qquad (a \neq 0)$

25) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} Arc\tan\frac{x}{a} + c \qquad (a \neq 0)$

26) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

27) $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = Ln\left|x \pm \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

28) $\int \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = Ln\left|x \pm \sqrt{x^2-a^2}\right| + c$

u=u(x) olmak üzere;

29) $\int e^u du = e^u + c$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

30) $\int a^u du = \frac{1}{Lna}.a^u + c \qquad (a \neq 0, a > 0)$

31) $\int u^n .du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$

32) $\int \frac{du}{u} = Ln|u| + c \qquad (u \neq 0)$

33) $\int \sin u du = -\cos u + c$

34) $\int \cos u du = -\sin u + c$

35) $\int \tan u du = -Ln|\cos u| + c$

36) $\int \cot anu du = Ln|\sin u| + c$

37) $\int \sec u.du = Ln|\sec u + \tan u| + c$

38) $\int \cos ecu du = Ln|\cos ecu - \cot anu| + c$

39) $\int \sec^2 u du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + c$

40) $\int \cos ec^2 u du = \int \frac{du}{\sin^2 u} = \int (1 + \cot an^2 u) du = -\cot anu + c$

41) $\int e^{\alpha u} .\cos \beta u du = \frac{e^{\alpha u}}{x^2 + \beta^2}.(\alpha Cos\beta u + \beta .Sin\beta u) + c \qquad (\alpha, \beta \in IR)$

42) $\int \frac{du}{\alpha^2 + \beta^2 .u^2} = \frac{1}{\alpha\beta}.Arc\tan\frac{\beta u}{\alpha} + c \quad (\alpha, \beta \in IR)$

43) $\int \frac{du}{u.(u^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}.Ln\left|\frac{u^2}{\alpha^2 + u^2}\right| + c \quad (\alpha \neq 0)$

44) $\int \frac{du}{u.(u^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{\alpha}.Ln\left|\frac{u}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + u^2}}\right| + c \quad (\alpha \neq 0)$

Şimdi de;

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

eşitliğini gösterelim.

$u=f(x)+c$ alınırsa

$$u'=\frac{du}{dx}=f'(x)\Rightarrow du=f'(x)dx \text{ olur.}$$

Bu son ifadenin her iki tarafının integrali aşağıdaki gibi alınır;

$$\int du=\int f'(x)dx$$

ve (1) nolu formülden yararlanılırsa;

$$u=\int f'(x)dx=f(x)+c$$

olur.Böylece;

$$\int f'(x)dx=f(x)+c$$

elde edilir.

1.2. $I=\int(ax+b)^n dx$ $(a\neq 0)$ $(a,b\in IR)$ $(n\in Q)$ **şeklindeki İntegraller**

Bu tip integrallerde integral teknikleri konusunda ele alınacak olan değişken dönüşümü tekniği kullanılarak integral kolayca görülebilen bir integral formuna indirgenir

Buna göre;

$ax+b=u \Rightarrow a.dx=du$ ve buradan $dx=\frac{du}{a}$ olur.

Bu değerleri I integralinde yerine yazarsak;

$$I=\int u^n.\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int u^n du=\frac{1}{a}.\frac{u^{n+1}}{n+1}+c(n\neq -1)$$

olarak elde edilir. Bu son ifadede u'nun değeri yerine konursa;

$$\int(ax+b)^n dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c(n\neq -1)$$

olarak elde edilir. n= -1 için yukarıdaki dönüşüm tekrar uygulanarak;

$$I=\int(ax+b)^{-1}dx=\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}.\int\frac{du}{u}=\frac{1}{a}.Ln|u|+c$$

ve u=ax+b değeri yerine konursa;

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}.Ln|ax+b| + c$$

olarak bulunur. Bu iki sonucu bir arada yazacak olursak;

$$I = \int (ax+b)^n dx = \begin{cases} \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c(n \neq -1) \\ \frac{1}{a}.Ln|ax+b| + c(n=-1) \end{cases}$$

genel sonucu elde ederiz.

Örnek.1.1: $\int \sqrt[3]{2x-5}dx = ?$

Çözüm.1.1:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5=u \\ 2dx=du \\ dx=\frac{du}{2} \end{array}\right\} \int \sqrt[3]{2x-5}dx = \int \sqrt[3]{u}.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{1/3}.du = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}u^{4/3} + c = \frac{3}{8}(2x-5)^{4/3} + c$$

Örnek.1.2: $\int \frac{3dx}{4-2x} = ?$

Çözüm.1.2:

$$\left.\begin{array}{l} 4-2x=u \\ -2.dx=du \\ dx=-\frac{du}{2} \end{array}\right\} \int \frac{3dx}{4-2x} = 3\int \frac{dx}{4-2x} = 3\int \frac{\frac{-du}{2}}{u} = -\frac{3}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{3}{2}.Ln|u| + c$$

$$= -\frac{3}{2}.Ln|4-2x| + c$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1-3-Kuvvet Fonksiyonunun İntegrali :

u=u(x) olsun.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=(n+1).\frac{u^n}{(n+1)}.\frac{du}{dx}=u^n.\frac{du}{dx}$$

veya

$$d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=u^n.du$$

olur. Bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

$$\int d\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)=\int u^n.du$$

ve böylece;

$$\int u^n.du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c(n\neq -1)$$

ifadesi kuvvet fonksiyonunun integrali için genel formülü verir. Benzer şekilde n=-1 için;

$$\int\frac{du}{u}=Ln|u|+c$$ olduğu açıktır.

1.4. $I=\int e^{(ax+b)}dx$ **şeklindeki İntegraller: (a,b ∈ IR)**

ax+b=u diyelim. Buna göre; **a.dx=du** ve buradan **dx=du/a** olur. Bu değerler I integralinde yerine yazılacak olursa;

$$I=\int e^u.\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int e^u.du=\frac{1}{a}.e^u+c$$

ve böylece u=ax+b değeri tekrar yerine yazılarak I integrali;

$$I=\int e^{(ax+b)}dx=\frac{1}{a}.e^{(ax+b)}+c$$

olarak elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek.1.3: $\int e^{\frac{3x}{2}} dx = ?$

Çözüm.1.3:

$\left.\frac{3x}{2}\right\} = u$ dersek

$\frac{3}{2}dx = du$ olur.Buradan; $\int e^{\frac{3x}{2}} dx = \int e^u . \frac{2}{3} du = \frac{2}{3}\int e^u du = \frac{2}{3}e^u + c = \frac{2}{3}e^{\frac{3x}{2}} + c$

$dx = \frac{2}{3}du$ elde edilir.

Örnek.1.4: $\int e^{5-4x} dx = ?$

Çözüm.1.4:

$$\left.\begin{array}{l} 5-4x = u \\ -4dx = du \\ dx = -\frac{du}{4} \end{array}\right\} \quad \int e^{5-4x} = \int e^u . \frac{du}{-4} = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4}e^u + c = -\frac{1}{4}e^{5-4x} + c$$

1.5. İntegrasyon Sabiti: (Eğri Aileleri)

c integrasyon sabiti keyfi bir sabit olup problemin tipine göre farklı anlamlar taşır. Bu nedenle c integral sabitinin geometrik, fiziksel, elektrik v.b. uygulamaları için ne anlama geldiğini örneklerle açıklayalım.

Örnek.1.5: Herhangi bir P(x,y) noktasındaki eğimi 2x olan eğri ailesinin denklemini bulunuz?

Çözüm.1.5:

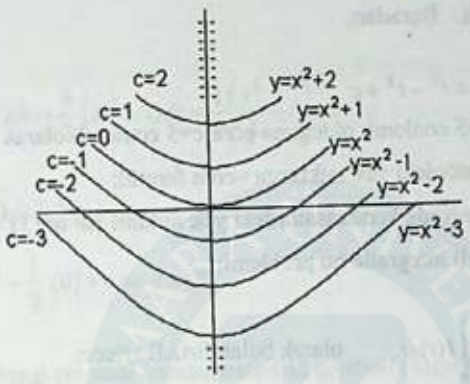
$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x.dx$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int dy = \int 2x dx = x^2 + c$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olur. Buna göre;$y=x^2+c$ istenilen eğri ailesinin(Parabol Demeti) denklemi olup c sabitinin herbir değeri için özel bir eğri verir. (Şekil-1)



(Şekil-1) ($y=x^2+c$ eğri ailesi)

Elektrik devre uygulamaları ve fiziksel uygulamalara geçmeden önce türev bahsinde ele aldığımız temel fizik ve elektrik kanunlarının integral formlarını bulalım ve herbir temel formül için örnek verelim.

1.5. 1: Elektrik Devre Uygulamaları

a) Yük: Türev bölümünde gördüğümüz gibi bir iletkenden geçen akım birim zamanda değişen yük miktarına eşittir. Yani, I amper cinsinden akımı, t saniye cinsinden zamanı ve q coulomb cinsinden yük miktarını göstermek üzere;

$$I = \frac{dq}{dt}$$

idi. Şimdi, bu ifadeden q yük miktarını I akımına bağlı olarak bulalım. Bunun için dq değişken yük miktarını yalnız bırakıp elde edilen ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

$$dq = I.dt \Rightarrow \int dq = \int I.dt$$

ve sonuç olarak da I=I(t) olmak üzere;

$$q = \int I(t).dt$$

ifadesi bir iletkenden herhangi bir zaman aralığında geçen yük miktarını veren formüldür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek.1.6: Bir kondansatörden geçen akım $I(t)=3t^2-2t$ ile veriliyor. Kondansatörde bulunan başlangıç yük miktarı 5 coulomb ise t=3 sn iken kondansatörde biriken yük miktarını bulunuz?

Çözüm.1.6:

$q = \int I(t)dt$ idi. Buradan;

$$q = \int (3t^2 - 2t)dt = t^3 - t^2 + c$$

olarak bulunur. t=0 için q=5 coulomb olduğuna göre c=5 coulomb olarak bulunur. Buna göre, herhangi bir anda kondansatördeki yük miktarını veren formül;

$q(t) = t^3-t^2+5$ olur. t=3 saniyede kondansatördeki yük miktarı ise $q=(3)^3-(3)^2+5=23$ coulomb olarak bulunur. İleride belirli integralle bu problemi;

$\int_0^3 I(t)dt$ olarak bulabiliriz.Böylece;

$$q = \int_0^3 (3t^2 - 2t)dt \Rightarrow q = \left(t^3 - t^2\right|_0^3$$

ve $q = 3^3-3^2 = 18$ coulomb olarak bulunur. Burada, q_0=5 coulomb başlangıç yüküde ilave edilirse, t=3sn iken kondansatörde biriken yük q=18c+5c=23c olarak bulunur.

b) Bir Kondansatördeki Gerilim miktarı:

Bir kondansatördeki akım **I=C.(dV/dt)** idi. Yani, birim zamanda değişen gerilim miktarı ile kondansatör sabitinin çarpımına eşittir. Burada, C farad cinsinden, t saniye cinsinden ve V volt cinsindendir. Buna göre, **I=C.(dV/dt)** formülünden bir kondansatördeki gerilim miktarı

$$I = C.\frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = \frac{1}{C}.I.dt$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int dV = \frac{1}{C}\int I(t)dt \Rightarrow V = \frac{1}{C}\int I(t)dt$$

ifadesi herhangi bir anda kondansatördeki akımı veren formüldür.

Örnek.1.7: 2F'lık bir kondansatör 20V başlangıç gerilimine ve zamana göre $I(t)=t^2-1$ akımına sahiptir. t=2 saniyede kondansatördeki gerilim miktarını bulunuz?

Çözüm.1.7:

I.Yol:

$$V=\frac{1}{C}\int I(t)dt=\frac{1}{2}\int(t^2-1)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+c$$

olur. t=0 için V=20 olduğuna göre;

$$20=\frac{1}{6}(0)^3-\frac{1}{2}.(0)+c\Rightarrow c=20$$

olur. Böylece, herhangi bir anda kondansatördeki gerilimi veren formül;

$$V(t)=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t+20$$

bulunur. Sonuçta t=2 sn için;

$$V=\frac{1}{6}(2)^3-\frac{1}{2}2+20=\frac{61}{3}Volt$$

olarak bulunur.

II. Yol: Belirli integral yardımıyla;

$$V=\frac{1}{2}\int_0^2(t^2-1)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\Big|_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-2\right)\right)=\frac{1}{3}volt$$

olur ve V_0=20V başlangıç gerilimi ilave edilerek istenen gerilim ; V=20+1/3=61/3 bulunur.

c) Bir Bobindeki Akım: Bir bobindeki gerilim ; t saniye cinsinden zamanı, I amper cinsinden akımı, L henry cinsinden bobin sayısını göstermek üzere;

$V=L.\frac{dI}{dt}$ idi.Buna göre; $dI=.\frac{1}{L}V.dt$ olur.

Burada, I akımını elde etmek için, bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\int dI = \frac{1}{L}\int V.dt$ olur ve böylece; $I(t) = \frac{1}{L}.\int V(t).dt$

ifadesi herhangi bir t anındaki bobindeki akımı veren formüldür.

Örnek.1.8: 10 Henry'lik bir bobindeki gerilim $V = \sqrt{4t+1}$ volt olarak veriliyor. Buna göre başlangıç akımı 7,5 Amper olmak üzere t=2 saniyede bobindeki akımı bulunuz?

Çözüm.1.8:

I.Yol:

$I = \frac{1}{L}\int V(t)dt$ idi. Bu ifadede verilenler yerine yazılacak olursa;

$$I = \frac{1}{10}\int \sqrt{4t+1}dt = \frac{1}{10}\int (4t+1)^{1/2}dt$$

ve buradan;

$$I = \frac{1}{10}.\frac{1}{4}.\frac{2}{3}.(4t+1)^{3/2} + c = \frac{1}{60}(4t+1)^{3/2} + c$$

olur. t=0 için I_0=7,5 A olduğuna göre;

$$7{,}5 = \frac{1}{60}(4.0+1)^{3/2} + c \Rightarrow c = \frac{449}{60}$$

bulunur. Böylece, herhangi bir t anındaki bobindeki akım;

$$I = \frac{1}{60}(4t+1)^{3/2} + \frac{449}{60}$$

formülü ile bulunabilir. t=2 sn için bobindeki akım ise;

$$I = \frac{1}{60}(4.2+1)^{3/2} + \frac{449}{60} = \frac{119}{15}\,Amper$$

olarak bulunur.

II. Yol: Belirli integralle;

$$I = \frac{1}{10}\int_0^2 \sqrt{4t+1}dt = \frac{1}{60}(4t+1)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{13}{30}$$ Amper bulunur.

I_0=7,5 A değeri ilave edilerek istenen akım;

$$I = \frac{13}{30} + 7{,}5 = \frac{119}{15} Amper$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak, bu temel kanunları bir tablo halinde özetleyelim. (Tablo-1)

(Tablo . 1) Temel Elektrik Formülleri

	Tanımlama	Türev Formu	Integral Formu
1-	q(yük)	$I = \frac{dq}{dt}$	$q = \int I(t)dt$
2-	V(Gerilim)	$I = C \cdot \frac{dv}{dt}$	$V = \frac{1}{C}\int I(t)dt$
3-	I(Akım)	$V = L \cdot \frac{dI}{dt}$	$I = \frac{1}{L}\int V(t)dt$

1.5.2: Fiziksel Uygulamalar :

a) Yol: **s=f(t)** fonksiyonunu gözönüne aldığımızda türev konusunda ele alınan kinematiğin temel konularında hatırlanacağı gibi bir nesnenin hızı;

$V = \frac{ds}{dt}$ idi.

Burada, **V**, nesnenin hızını, **s**, metre cinsinden yolu, **t** ise saniye cinsinden zamanı gösterir. Burada belirli bir zaman aralığında nesnenin aldığı yolu (s) bulmak istediğimizde ; **ds=V.dt** ve her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\int ds = \int V(t)dt \Rightarrow s = \int V(t).dt$$

olarak bulunur.

b) Hız:

V=f(t) fonksiyonuna sahip olduğumuzda bir nesnenin herhangi bir andaki ivmesi kinematiğin temel diferansiyel kanunundan;

$\partial = \frac{dV}{dt}$ idi.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Burada,**V** nesnenin hızını, **t** saniye cinsinden zamanı göstermektedir. Buna göre, bu son ifadeden **dV** ifadesini çekersek; $dV = \partial\, dt$ olarak elde edilir. Böylece;

$V = \int \partial . dt$ olarak elde edilir.

Böylece;

$$V = \int \partial . dt$$

ifadesi nesnenin herhangi bir andaki hızını veren formüldür.

Kinematiğin bu temel kanunlarını bir tablo halinde türev ve integral formlarını aşağıdaki gibi verelim. (Tablo –2)

Tablo – 2 - Kinematiğin temel kanunları

	Tanımlama	Türev Formu	İntegral Formu
1 -	Yol(S)	$V = \frac{ds}{dt}$	$S = \int V(t)dt$
2 -	Hız(V)	$a = \frac{dv}{dt}$	$V = \int a\, dt$

Örnek.1.9 : Bir nesnenin hızı V(t)=2t+5 ile veriliyor. Buna göre, nesnenin 4 saniyede aldığı yolu bulunuz?

Çözüm.1.9:

I. Yol:

$V = \frac{ds}{dt}$ idi. Buradan, $s = \int V(t)dt$

olur. Böylece;

$s = \int (2t+5)dt = t^2 + 5t + c$ olarak bulunur. t=0 için s=0 olacağından;

$0 = 0^2 + 5.(0) + c \Rightarrow c = 0$

elde edilir. Böylece, nesnenin herhangi bir zaman aralığında aldığı yol;

$s = t^2 + 5t$ ile hesaplanır ve t=4 sn için $s=4^2+5.4=36$ m olarak bulunur.

II. Yol:

$$s = \int_0^4 (2t+5)dt = \left(t^2 + 5t \right|_0^4 = 36m$$

olarak bulunur.

Örnek.1.10: Bir nesnenin ivmesi $\partial = 3t^2 - 2t$ ile veriliyor. Nesnenin başlangıçtaki hızı 10 m/sn olduğuna göre t=5 sn esnasında nesnenin hızını bulunuz?

Çözüm.1.10:

I. Yol:

$$\partial = \frac{dv}{dt}$$

ivmenin diferansiyel formu idi. Buradan hız kavramı ifadenin integrali alınarak;

$V = \int \partial . dt$ şeklinde bulunmuştu. Buna göre,

$$V = \int (3t^2 - 2t)dt = t^3 - t^2 + c$$

elde edilir. t=0 için V_0=10 m/sn olduğuna göre;

$$10 = (0)^3 - (0)^2 + c \Rightarrow c = 10$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, herhangi bir anda nesnenin hızını veren formül;

$$V = t^3 - t^2 + 10$$

olur. 5 sn için nesnenin hızı;

$V = 5^3 - 5^2 + 10 = 110$ volt olarak bulunur.

II. Yol:

$$V = \int_0^5 (3t^2 - 2t)dt = \left(t^3 - t^2 \right|_0^5 = 100m/sn$$

V_0=10 m/sn olduğuna göre istenen hız V+ V_0=110 m/sn olarak bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ALIŞTIRMALAR

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^4}} = ?$

2. $\int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)^{-1} dx = ?$

3. $\int \frac{dx}{e^{5-2x}} = ?$

4. $y'' = 3x^2 - x + 1$ olan ve $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ noktasındaki eğimi $m = \frac{2}{3}$ olan eğrinin denklemini bulunuz?

5. Herhangi bir P(x,y) noktasındaki eğimi $m = \frac{3x}{2}$ olan eğri ailesinin denklemini bulup, bu ailenin (1,-2) noktasından geçen üyesini belirtiniz?

6. Herhangi bir P(x,y) noktasındaki eğimi $m = \frac{2x}{y}$ olan eğri ailesinin denklemini bulunuz?

7. Bir kondansatördeki akım $I(t) = \sqrt[3]{t-1}$ ile veriliyor. Başlangıçtaki yük miktarı q_0=3 Coulomb ise t=2 saniyede kondansatörde biriken yük miktarını bulunuz?

8. 0,5 F'lik bir kondansatör 10V başlangıç gerilimine ve zamana bağlı $I(t) = e^{-\frac{3t}{2}}$ akımı ile veriliyor. Buna göre, t = 2 saniyede kondansatördeki gerilimi bulunuz?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 2. BELİRLİ İNTEGRAL (Bir Eğrinin Altında Kalan Alan)

2-1. Riemann Darboux Alt ve Üst Toplamları ve Bir Fonksiyonun Belirli İntegrali

f:[a,b]→ IR'ye sınırlı bir fonksiyon olsun. **[a,b]** aralığını;

$a= x_0<x_1<x_2.....<x_{i-1}<x_i .....<x_{n-1}<x_n= b$ olmak üzere **(n+1)** nokta yardımıyla;

$[x_0,x_1], [x_1,x_2], [x_2,x_3],..... ,[x_{i-1},x_i],....., [x_{n-1},x_n]$

şeklinde **n** tane alt aralığa ayıralım. İşte, bu aralıkların kümesine veya daha basit olarak $\{x_0, x_1, x_2,....., x_n\}$ kümesine **[a,b]** aralığının herhangi bir **bölüntüsü** denir ve **P** ile gösterilir.

$i=1,2,3,.....,n$ olmak üzere; $[x_{i-1}, x_i]$ aralığına **[a,b]** aralığının **i.nci** alt aralığı denir ve I_i ile gösterilir. $x_i - x_{i-1}$ sayısına **i.nci** alt aralığın uzunluğu denir ve Δx_i ile gösterilir. Buna göre ; $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ olur. Δx_i sayılarının en büyüğüne **[a,b]** aralığının **P** bölüntüsünün **normu** denir ve $||P||=max\Delta x_i$ $(i=1,2,---,n)$ ile gösterilir. **f** fonksiyonu **[a,b]** aralığında sınırlı olduğundan $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında da sınırlıdır. Bu nedenle, **f** fonksiyonunun her alt aralıkta **supremum** ve **infimumundan** söz edilebilir. Böylece;

$$M_i = \sup_{x\in I_i} f(x) \qquad m_i = \inf_{x\in I_i} f(x)$$

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \qquad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

tanımlanırsa $m_i \le m \le M_i \le M$ $(i=1,2,3,.....,n)$ her zaman geçerlidir.

Bu tanımlamaların ışığı altında f fonksiyonunun P bölüntüsüne karşılık gelen **Riemann-Darboux alt ve üst toplamları** sırasıyla;

$$s(P,f) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + ... + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$S(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i.\Delta x_i$$

olarak tanımlanır. Alt ve üst toplamlar sırasıyla belirli integral konusunda bahsedeceğimiz küçük ve büyük dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir.

[a,b] aralığının bütün bölüntülerinin kümesini ρ ile gösterelim. Buna göre;

$$Sup_{P \in \rho} S(P,f)$$

sayısına f fonksiyonunun [a,b] aralığı üzerindeki **alt integrali** denir ve

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

şeklinde gösterilir. Benzer şekilde;

$$Inf_{P \in \rho} s(P,f)$$

sayısına benzer şekilde f fonksiyonunun [a,b] aralığındaki **üst integrali** denir ve

$\overline{\int_a^b} f(x)dx$ ile gösterilir.

*Supremum = Üst sınırların en küçüğü * İnfimum = Alt sınırların en büyüğü

Teorem.2.1:

f:[a,b]→ IR'ye sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)dx$$ olur.

Tanım.2.1:

f:[a,b]→ IR'ye sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer;

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

ise f fonksiyonuna [a,b] aralığında **Riemann-Darboux** anlamında **integre edilebilir** bir fonksiyondur denir ve;

$\int_a^b f(x)dx$ şeklinde gösterilir. Burada, f(x) fonksiyonuna **integrand** yani integrali alınacak fonksiyon, **a** sayısına integralin alt sınırı, **b** sayısına da integralin üst sınırı ve **x** değişkenine de **integrasyon** değişkeni denir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem.2.2:

f:[a,b]→ IR'ye sınırlı bir fonksiyonunun integre edilebilmesi için gerek ve yeter şart;

$$S(P,f)-s(P,f)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir P bölüntüsünün mevcut olmasıdır.

Teorem.2.3:

f:[a,b]→ IR 'ye monoton ise integre edilebilir.

Teorem.2.4:

f:[a,b]→ IR'ye sürekli ise integre edilebilir.

2.2. Belirli integralin Özelliklerine Dair Teoremler :

$f:[a.b]\to IR$ ve $g:[a.b]\to IR$ } iki fonksiyon olsun.

Teorem.2.5:

$f\pm g:[a,b]\to IR$ fonksiyonları integre edebilsin. Bu durumda;

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$$

fonksiyonu da integre edilebilir ve;

$$\int_a^b (f\pm g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$$ şeklindedir.

Teorem.2.6:

f:[a,b]→ IR'ye fonksiyonu integre edilebilsin. Bu durumda; **–f:[a,b]→ IR** olmak üzere ;

(-f)(x)=-f(x) fonksiyonu da integre edilebilir ve integrali;

$$\int_a^b (-f)(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$ olur.

Teorem.2.7:

f:[a,b]→ IR'ye fonksiyonu integre edilebilsin ve **c ∈ IR** olsun.Bu durumda;

c.f:[a,b]→ IR olmak üzere **(c.f)(x) = c.f(x)** integre edilebilir ve integrali;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int_a^b (c.f)(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$ olur.

Teorem.2.8:

a<b<c a,b,c∈IR olsun. **f:[a,b]→ IR** verilsin. Bu fonksiyonun **[a,b]** ve **[b,c]** aralıklarına kısıtlanmışına sırasıyla f_1 ve f_2 diyelim. Eğer f fonksiyonu integre edilebilirse f_1 ve f_2 fonksiyonlarıda integre edilebilir ve bu integral;

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx$$ olur.

Teorem.2.9:

f:[a,b]→ IR integre edilebilsin ve **∀x∈[a,b] için f(x) ≥0** olsun. Bu durumda;

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$ 'dır.

Teorem.2.10:

f:[a,b]→ IR integre edilebilsin ve **∀x∈[a,b] için f(x) ≤ 0** olsun. Bu takdirde;

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$ 'dır.

Teorem.2.11:

$f:[a,b]\to IR$, $g:[a,b]\to IR$ fonksiyonları integre edilebilsin ve **∀x∈[a,b]** için **f(x) ≤ g(x)** olsun. Bu takdirde;

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \text{ 'dir.}$$

Teorem.2.12:

f:[a,b]→ IR fonksiyonu integre edilebilsin. Bu takdirde;

|f|:[a,b]→ IR olmak üzere **|f| (x)=| f(x)|** fonksiyonu da integre edilebilir ve integrali;

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$ şeklindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem.2.13:

$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to IR \\ g:[a,b]\to IR \end{array}\right\}$ fonksiyonları integre edilebilsin. Bu durumda;

(f.g)(x) = f(x).g(x) fonksiyonu da integre edilebilir ve integrali;

$$\int_a^b (f.g)(x)dx = \int_a^b f(x).g(x)dx \quad \text{olur.}$$

Özellik.2.1:

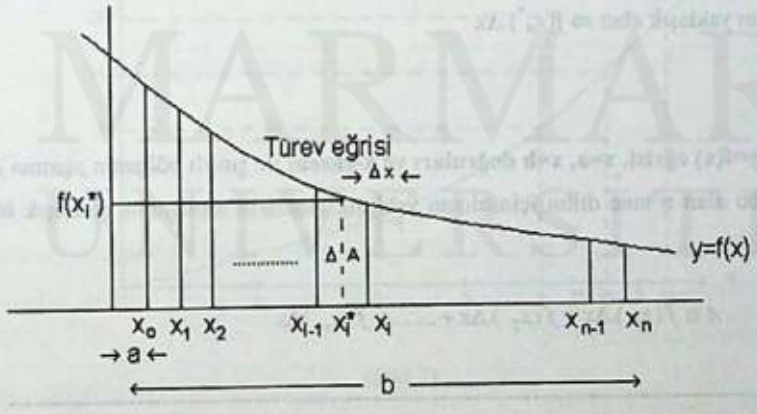
f:[a,b]→ IR fonksiyonu integre edilebilsin. Bu durumda;

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{özelliği geçerlidir.}$$

Özellik.2.2:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2.3. Bir Eğri Altındaki Yaklaşık Alan :



(Şekil-2)

y=f(x) fonksiyonunun grafiğini gözönüne alalım. (Şekil-2) **y=f(x) eğrisi, x=a, x=b doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını** bulmak istiyoruz. Bunun için, ilk olarak bölgenin bu alanını $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktalarında düşey doğrular çizerek ardışık noktalar arasındaki uzaklığın eşit ve Δx kadar olduğu dilimlere ayıralım. Bundan sonra, bu dilimlerin herhangi biri için yaklaşık alanı belirleyelim.

Bunun için, x_{i-1} ve x_i noktaları arasındaki dilimi gözönüne alalım, x_{i-1} ve x_i noktaları arasındaki herhangi bir x_i^* noktasını seçelim.Eğrinin bu noktadaki değeri $f(x_i^*)$ olsun. Buna göre, ΔA yaklaşık olarak $f(x_i^*)$ yüksekliği ve Δx genişliğinde bir dikdörtgen olarak alınırsa;

$$\Delta A \cong f(x_i^*).\Delta x$$

istenilen yaklaşık alanı verir.

Bu yaklaşık alanın ΔA esas alanından küçük veya büyük olması x_i^* noktasının seçimine ve $x_i - x_{i-1}$ noktaları arasındaki uzaklığa bağlıdır.

Diğer dilimlerin alanları da buna benzer olarak;

1. Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_1^*).\Delta x$
2. Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_2^*).\Delta x$
3. Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_3^*).\Delta x$

... .

... .

n Dilim için yaklaşık alan $\Rightarrow f(x_n^*).\Delta x$

şeklindedir.

Buna göre, **y=f(x) eğrisi, x=a, x=b doğruları ve x-ekseni** ile sınırlı bölgenin alanına **A** diyecek olursak, bu alan n tane dilim için alınan yaklaşık alanların toplamının yaklaşık bir değeridir. Yani;

$$A \cong f(x_1^*).\Delta x + f(x_2^*).\Delta x + \ldots\ldots + f(x_n^*).\Delta x$$

ΔA=A alanının küçük bir parçasını ifade eder.

$\Delta x = x_i - x_{i-1}$ farkını ifade eder.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

veya diğer bir gösterimle;

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \text{ olur.}$$

x^* noktalarının seçimine bağlı olarak bu yaklaşık alanın nasıl bulunacağını aşağıdaki metod ile gösterelim.

..3.1.Orta Nokta Metodu:

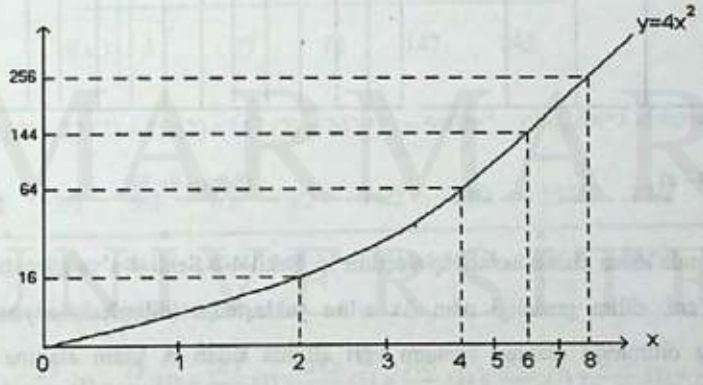
y=f(x) eğrisi, x=a, x=b doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin yaklaşık alanını Δx genişliğinde ve x^* değerlerini ait oldukları dilimlerin orta noktası seçerek elde edilen dikdörtgen şeklindeki dilimlerin alanları toplamı olarak aldığımızda;

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

olur. Burada , $f(x_i^*)$, i. dilimin orta noktasındaki **yüksekliği** ifade eder.

Örnek.2.1:

Orta nokta metodunu kullanarak $f(x)=4x^2$ eğrisi x=0, x=8 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dilim genişliğini 2 birim alarak yaklaşık olarak hesaplayınız.



(Şekil 3)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm.2.1:

İstenilen alan 4 dilimden oluşmaktadır ve bu dilimlerin orta noktaları sırasıyla 1, 3, 5 ve 7'dir. (Şekil-3) Bu orta noktalarda fonksiyon değerleri hesaplanırsa ve bu değerler aşağıdaki tabloya yazılacak olursa;

x^*	1	3	5	7
$f(x^*)$	4	36	100	196

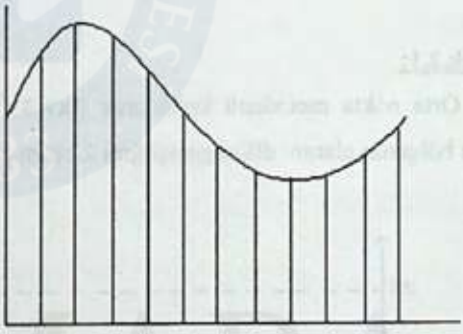
olarak bulunur. Buna göre istenilen alan;

$$A \cong 4.(2)+36.(2)+100.(2)+196(2)=672$$ elde edilir.

2.4. Bir Eğri Altındaki Kesin Alan



(Şekil – 4 – a)



(Şekil – 4 – b)

Eğri altında kalan alanın hesabı için açıktır ki, Şekil-4-b Şekil-4-a'ya göre daha iyi bir yaklaşımdır. Yani, dilim genişliği olan Δx sıfıra yaklaştıkça (dilimlerin sayısı sonsuza yaklaştıkça) bu dilimlerin alanları toplamı eğri altında kalan A kesin alanına yaklaşır. Böylece; bu yaklaşım limit yardımıyla;

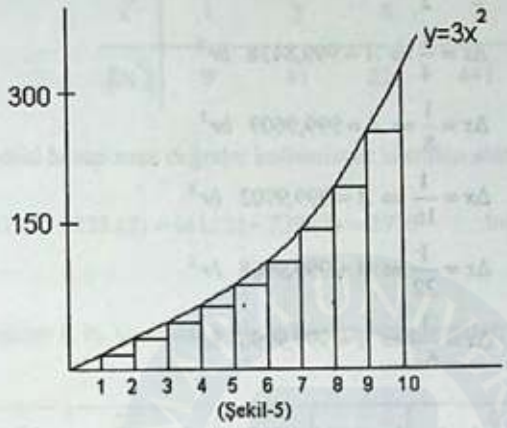
$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

olarak tanımlanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek.2.2: $y=3x^2$ eğrisi $x=0$, $x=10$ doğruları ile x-ekseni tarafından sınırlı bölgenin alanını dilim genişliklerini 2, 1, ½, ¼,..... alarak orta nokta metodunu kullanarak bulunuz.

Çözüm.2.2:



(Şekil-5)

Şekil-5'den de görüldüğü gibi $y=3x^2$ eğrisi $x=0$, $x=10$ doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $\Delta x=1$ olacak şekilde gösterilmiştir.

$\Delta x=2$ alarak istenilen alanı bulmak istediğimizde kullanacağımız değerler aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir. Buna göre;

x^*	1	3	5	7	9
$f(x^*)$	3	27	75	147	243

$A \equiv 3.(2)+27.(2)+75.(2)+147.(2)+243.(2)=990br^2$ olur. $\Delta x=1$ alınırsa;

x^*	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	15/2	17/2	19/2
$f(x^*)$	3/4	27/4	75/4	147/4	243/4	363/4	507/4	675/4	867/4	1083/4

en son tablo kullanılarak istenilen alan;

$$A \equiv \frac{3}{4}.(1)+\frac{27}{4}.(1)+\frac{75}{4}.(1)+\frac{147}{4}.(1)+\frac{243}{4}.(1)+\frac{363}{4}.(1)+\frac{507}{4}.(1)+\frac{675}{4}.(1)+\frac{867}{4}.(1)+\frac{1083}{4}.(1)$$

$A \equiv 997{,}5 \ br^2$

olarak bulunur. Eğer dilim genişliğini benzer şekilde daraltırsak;

$$\Delta x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 999{,}375 \ br^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{4} \Rightarrow A = 999{,}8438 \ br^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{8} \Rightarrow A = 999{,}9609 \ br^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{16} \Rightarrow A = 999{,}9902 \ br^2$$

$$\Delta x = \frac{1}{32} \Rightarrow A = 999{,}9968 \ br^2$$

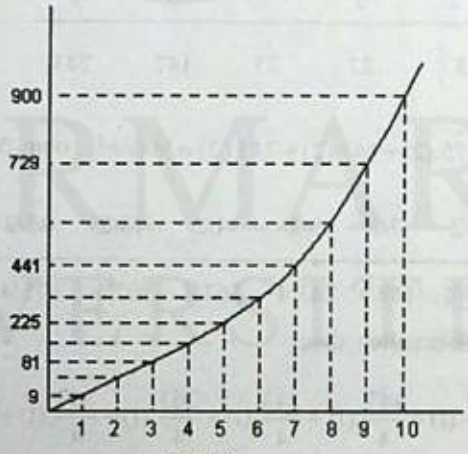
$$\Delta x = \frac{1}{64} \Rightarrow A = 999{,}9996 \ br^2$$

olarak bulunur. Bu hesaplamalardan da görüldüğü gibi $\Delta x \to 0$ iken $A \to 1000$ elde edilir.

Örnek.2.3:

$f(x)=9x^2$ eğrisi x=0, x=10 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dilim genişliklerini 2, 1, ½, ¼, alarak orta nokta metoduyla bulunuz.

Çözüm.2.3:



(Şekil-6)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $y=9x^2$ eğrisi $x=0$, $x=10$ doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını $\Delta x=2$ alarak hesaplayalım. Buna göre;

x^*	1	3	5	7	9
$f(x^*)$	9	81	225	441	729

yukarıdaki tablodaki hesaplanan değerler kullanılarak istenilen alan yaklaşık olarak;

$$A \equiv 9.(2)+81.(2)+225.(2)+441.(2)+729.(2)=2970$$ bulunur.

Δx dilim genişliğinin 1, ½, ¼ olması halinde benzer hesaplamalar;

Δx	2	1	0.5	0.25
Alan	2970	2992	2998	2999

şeklinde bir tabloda toplanacak olursa buradan da görüldüğü gibi;

$\Delta x \to 0$ olması halinde $A \to 3000$'e yaklaşır.

2.5. Bir Toplamın Limiti Olarak İntegral :

Şimdi de **y=f(x) eğrisi x=a, x=b doğruları ve x-ekseni** ile sınırlı bölgenin alanının Limit kuralı ile belirlenmesine ilişkin birkaç örnek çözelim. Bu örneklerde n dilim;

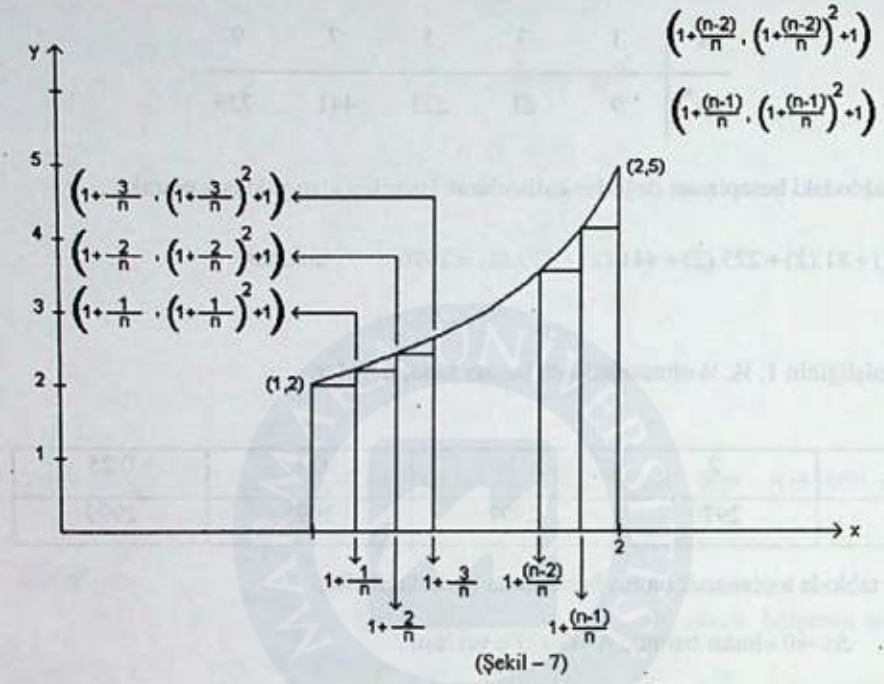
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$ eşit genişliğine sahiptir.

Örnek.2.4:

$f(x)=x^2+1$ eğrisi $x=1$, $x=2$ doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm.2.4:



(Şekil – 7)

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{n}=\frac{1}{n}$$

olarak alınırsa buna bağlı alana ait dilimler yukarıdaki şekildeki gibidir.

Buna göre;

1. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{1}{n}\right)(2)$

2. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{1}{n}\right)\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]$

3. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{1}{n}\right)\left[1+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\right]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. Dikdörtgenin Alanı $= \left(\frac{1}{n}\right)\left[1+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\right]$

.....

(n-1). Dikdörtgenin Alanı $= \left(\frac{1}{n}\right)\left[1+\left(1+\frac{(n-2)}{n}\right)^2\right]$

n. Dikdörtgenin Alanı $= \left(\frac{1}{n}\right)\left[1+\left(1+\frac{(n-1)}{n}\right)^2\right]$

olarak bulunur ve bu n tane dikdörtgenin alanına A_n diyecek olursak;

$$A_n = \left(\frac{1}{n}\right)2+\left(\frac{1}{n}\right)\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]+.....+\left(\frac{1}{n}\right)\left[\left(1+\left(\frac{n-2}{n}\right)\right)^2+1\right]+\left(\frac{1}{n}\right)\left[\left(1+\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)^2\right]$$

ve gerekli işlemler yapılarak;

$$A_n = \frac{1}{n}\left[2n+2.\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2+2.\left(1+\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{2}{n}\right)^2+.....+2\left(1+2.\frac{(n-1)}{n}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

olarak elde edilir. Bu son parantezler açılarak;

$$A_n = \frac{1}{n}\left[2n+2.\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)+.....+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+.....+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\right]$$

ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$A_n = \frac{1}{n}\left[2n+\frac{2}{n}(1+2+.....+(n-1))+\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+.....+(n-1)^2)\right]$$

son halini alır. Burada kullanacağımız bazı formüller şu şekildedir.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu son formülleri gerekli yerlerde kullanırsak;

$$A_n = \frac{1}{n}\left[2n + \frac{2}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$A_n = 2 + \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

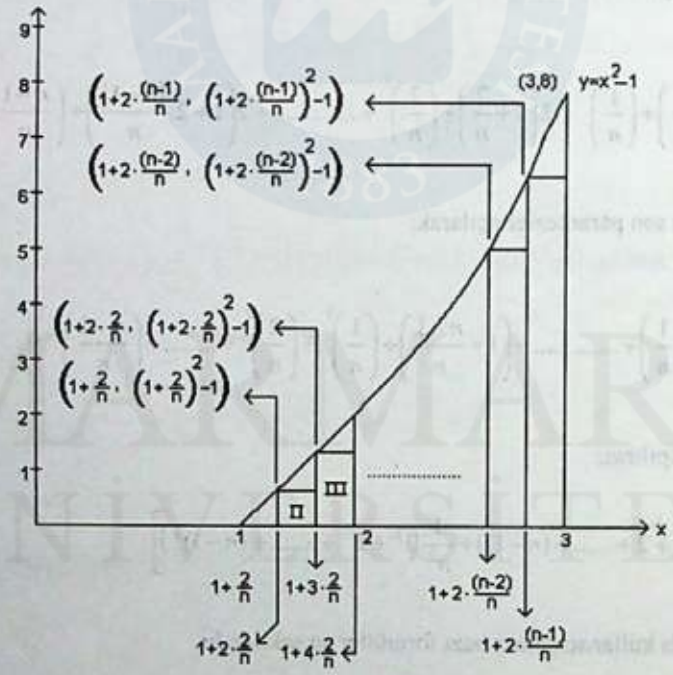
denklem son halini alır.Buna göre, n tane dilimden oluşan A alanı bir toplamın Limiti olarak aşağıdaki gibi bulunabilir. Şöyle ki;

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{n-1}{n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right) = 2 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}\ br^2$$

elde edilir.

Örnek.2.5: $f(x)=x^2-1$ eğrisi x=1, x=3 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.2.5: İlk önce bu probleme ait şekli ve buna ait bazı hesaplamalar yapalım. (Şekil-8)



Şekil-8

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

dilim genişliği olarak alındığında sırasıyla dikdörtgenlerin alanları aşağıdaki gibidir.

1. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{2}{n}\right)0$

2. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{2}{n}\right)\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^2-1\right]$

3. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{2}{n}\right)\left[\left(1+2.\frac{2}{n}\right)^2-1\right]$

(n-1). Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{2}{n}\right)\left[\left(1+(n-2).\frac{2}{n}\right)^2-1\right]$

n. Dikdörtgenin Alanı $=\left(\frac{2}{n}\right)\left[\left(1+(n-1).\frac{2}{n}\right)^2-1\right]$

n tane dikdörtgenin alanları toplamına A_n dersek;

$$A_n=\left(\frac{2}{n}\right)\left[\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^2-1\right)+\left(\left(1+2.\frac{2}{n}\right)^2-1\right)+.....+\left(\left(1+(n-2).\frac{2}{n}\right)^2-1\right)+\left(\left(1+(n-1).\frac{2}{n}\right)^2-1\right)\right]$$

olarak elde edilir. Gerekli işlemler yapılacak olursa;

$$A_n=\frac{2}{n}\left[\frac{2}{n}.2(1+2+3+....+(n-1))+\left(\frac{2}{n}\right)^2.\left(1^2+2^2+.....+(n-1)^2\right)\right]$$

ve daha önceki problemdeki formüller ilgili yerlerde kullanılırsa;

$$A_n=\frac{2}{n}\left[\frac{4}{n}.\frac{n(n-1)}{2}+\left(\frac{2}{n}\right)^2.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

şekline gelir. Buna göre, istenilen A alanı n tane dikdörtgenin alanları toplamının bir limiti olarak;

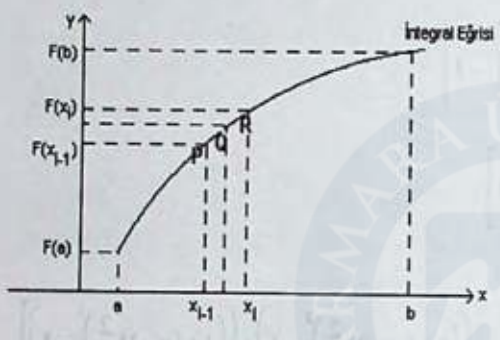
$$A=\lim_{n\to\infty} An=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n-1)}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^3.\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]=\frac{20}{3}\ br^2$$

olur. Belirli integral yardımı ile aynı değer;

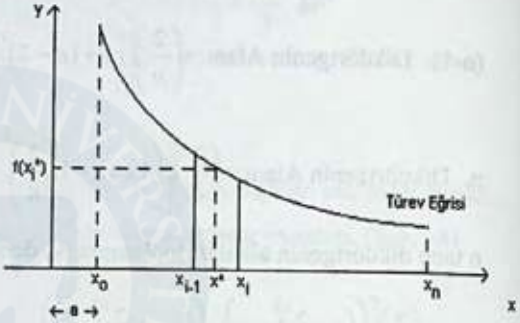
$$A=\int_1^3(x^2-1)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big]_1^3=\frac{20}{3}\ br^2 \text{ bulunur.}$$

2.6. Analiz Hesabının Temel Teoremi :

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi bir eğri altında kalan alanı bulmak için yüzlerce dikdörtgensel dilimlerin alanlarını bulup toplamak çok külfetli bir işlem olup bunun bir işlem ile olup olamayacağı sorusu akla gelebilir. İşte bu sorunun cevabını biz analiz hesabın temel teoremine götürecek bir çerçevede verebiliriz.Aşağıda Şekil-9 ve Şekil-10 ile verilen eğrileri gözönüne alalım. Bunlardan şekil-10 ile y=f(x) fonksiyonunun **türev** eğrisini temsil ederken, şekil-9 ile de tersine F(x) fonksiyonunun **integral** eğrisi ele alınmıştır.



(Şekil-9)



(Şekil-10)

Buna göre, şekil-10 ile verilen y=f(x) eğrisi şekil-9 ile verilen F(x) eğrisinin türevi iken,.F(x) eğrisi şekil-10 ile verilen f(x) eğrisinin integralidir.

Şekil-10 ile gösterilen türev eğrisinde orta nokta metodu için herhangi bir dilimin orta noktasında bir x_i^* seçelim. x_i^* noktasını da integral eğrisinin Q noktasının eğimi olacak şekilde seçelim ki bu PR doğrusunun eğimine eşit olsun.

Q noktasındaki eğim $f(x_i^*)$ olup PR doğrusunun eğimi;

$$f(x_i^*)=\frac{F(x_i)-F(x_{i-1})}{\Delta x}$$

ve buradan;

$$f(x_i^*)\Delta x = F(x_i)-F(x_{i-1})$$

elde edilir. Herbir dilim için bu formülü yazacak olursak;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(x_1^*)\Delta x = F(x_1) - F(a)$$
$$f(x_2^*)\Delta x = F(x_2) - F(x_1)$$
$$f(x_3^*)\Delta x = F(x_3) - F(x_2)$$
.....
.....
$$f(x_n^*)\Delta x = F(b) - F(x_{n-1})$$

olur.Bu ifadeleri toplayacak olursak;

$$f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \ldots\ldots\ldots + f(x_n^*)\Delta x = F(b) - F(a)$$

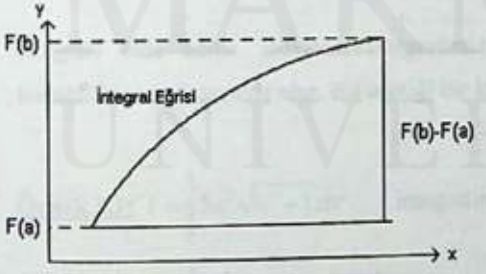
ve toplam notasyonla;

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = F(b) - F(a)$$

elde edilir. Buradan $\Delta x \to 0$ için;

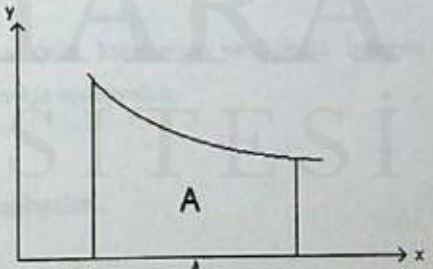
$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = F(b) - F(a)$$

ifadesinin **sol tarafı eğri altında kalan A kesin alanını** verirken **sağ tarafı da a'dan b'ye kadar y=f(x) fonksiyonunun belirli integralini** verir. Bunu daha basit bir örnekle şekil olarak ifade edecek olursak, aşağıdaki şekil 11-a-b ile verilebilir.



A=F(b)-F(a)

(Şekil-11-a)



$A = \int_a^b f(x)dx$

(Şekil-11-b)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Böylece;

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

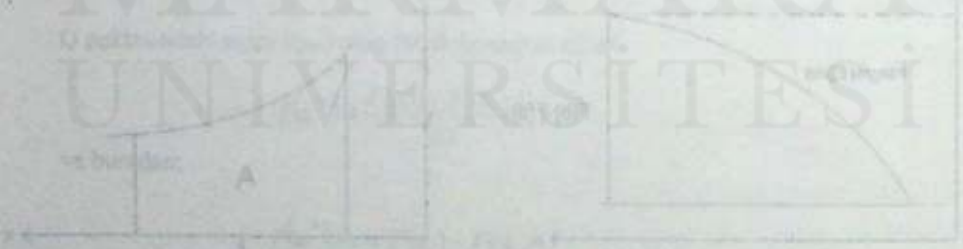
olarak elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. $f(x) = x^2 + 2$ eğrisi x=0 , x=1 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını limit yardımıyla bulunuz?

2. $f(x) = 3x^2$ eğrisi x=0 , x=6 doğruları x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını dillim genişliğini ½, 1, 2 birim alarak orta nokta metodu ile yaklaşık hesaplayınız?

3. $f(x)=x^2-2$ eğrisi x=2 ,x=4 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını limit yardımıyla bulunuz?



MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM 3. İNTEGRAL TEKNİKLERİ

İntegral konusunun başında integral ile türev arasındaki ilişkiden bahsetmiş ve bundan hareketle bazı fonksiyonların integrallerini formüller ile sunmuştuk. Bundan başka, integre edilebilen fonksiyonların integralini almada daha önce verdiğimiz formüller yeterli olmayabilir. Bu durumlar için integre edilebilen fonksiyonların integralini almada bize yardımcı olacak temel teknikler ve başlıca fonksiyon çeşitlerine ait integraller bu bölümde incelenecektir.

3.1. Değişken Dönüşümü

Eğer bir fonksiyon ile o fonksiyonun türevini içeren bir integrale sahip olduğumuzda yani;

$\int_a^b \varphi(u)\varphi'(u)du$ şeklinde ise;

$x = \varphi(u)$ değişken dönüşümü yapılarak;

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

integrali elde edilir. Böylece, integralimiz daha önce kurallarını verdiğimiz integral formüllerine indirgenmiş olur. Bu tekniği bir kaç örnekle açıklayalım.

Örnek.3.1: $I = \int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.1: $x^3+1=u$ dersek

$3x^2dx = du$ olur.

Böylece I integralinde;

$x=0 \Rightarrow u=1$ $\quad x=2 \Rightarrow u=9$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

u' ya bağlı yeni integralin sınırları olmak üzere;

$$I=\int_1^9 \sqrt{u}\,du=\int_1^9 u^{1/2}\,du=\left(\frac{2}{3}u^{1/2}\Big|_1^9\right)=\frac{2}{3}\left(9^{1/2}-1^{1/2}\right)=\frac{52}{3}$$

olarak bulunur. Bu sonuç, integralin sınır değerleri değiştirilmeden yine x' e bağlı sınırlarda da bulunabilirdi. Yani, x' in sınırlarını u cinsinden ifade etmenin zor olduğu problemler için bu dönüşüm yapılmadan belirsiz integral gibi u cinsinden hesaplanır. Buna göre;

$$I=\int_1^9 \sqrt{u}\,du=\int u^{1/2}\,du=\frac{2}{3}u^{3/2}=\frac{2}{3}\left[\left(x^3+1\right)^{3/2}\right]\Big|_0^2=\frac{52}{3}$$

aynı sonuç elde edilir.

Örnek 3.2: $I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\sin x+3}$ İntegralini hesaplayınız.

Çözüm 3.2:

$$3+\sin x=u \Rightarrow \cos x dx=du$$

olur. Buna göre,

$$x=0\Rightarrow u=3 \qquad x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=4$$

$$I=\int_3^4\frac{du}{u}=\left(\ln|u|\right|_3^4=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

veya;

$$I=\int\frac{du}{u}=\ln|u|=\left(\ln|3+\sin x|\right|_0^{\pi/2}=\left(\ln|3+\sin\pi/2|-\ln|3+\sin 0|\right)=\ln\frac{4}{3}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.3: $I = \int e^{\sin x} \cos x dx$ İntegralini hesaplayınız.

Çözüm 3.3:

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

olur. Buna göre;

$$I = \int e^u du = e^u + c = e^{\sin x} + c$$

bulunur.

Örnek 3.4: $I = \int \frac{\ln x}{x} dx$ İntegralini hesaplayınız.

Çözüm 3.4:

$$\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$$

olur. Bu değerleri I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int u du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1) $\int 3x^2 e^{x^3-1} dx = ?$ $\left(e^{x^3-1} + c\right)$

2) $\int_0^{\pi} \sin x . e^{\cos x} dx = ?$ $\left(\frac{e^2 - 1}{e}\right)$

3) $\int \frac{2x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 2}} = ?$ $\left(\frac{5}{8}\sqrt[3]{\left(x^4 + 2\right)^4} + c\right)$

4) $\int \frac{\cos t dt}{e^{\sin t}} = ?$ $\left(-e^{-\sin t} + c\right)$

5) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt = ?$ $(e-1)$

6) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{Arc\tan x}{1+x^2} dx = ?$ $\left(-\frac{5\pi^2}{36}\right)$

7) $\int \frac{Ln(Lnx)}{xLnx} dx = ?$ $\left(\frac{Ln^2(Lnx)}{2} + c\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.2.Kısmi İntegrasyon :

f ve g [a,b] aralığında sürekli türevlere sahip iki fonksiyon olsun.

$$d(f.g) = f.dg + g.df$$

idi. Buradan;

$$f.dg = d(f.g) - g.df$$

ve bu son ifadenin her iki yanının integrali alınırsa;

$$\int f.dg = \int d(f.g) - \int g.df$$

olur. Bunun sonucu olarak;

$$\int f.dg = f.g - \int g.df$$

ifadesi bize kısmi integral formülünü verir. a ve b integralin alt ve üst sınırları olmak üzere belirli integral olarak aynı ifade;

$$\int f.dg = (f.g)_a^b - \int g.df$$

şeklini alır. Böylece iki fonksiyonun çarpımını içeren integraller için geliştirilen kısmi integral formülü;

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(x)g(x))_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

olacak şekilde elde edilir.

Örnek 3.5: $I = \int \ln x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.5:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = x \end{array}$$ olarak bulunur. Böylece;

$\int u.dv = uv - \int v.du$ kısmı integral formülünde yukarıdaki değerler yerine yazılacak olursa;

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x.\frac{dx}{x}$$

ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + c \quad \text{olur}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 3.6: $I = \int x^2 . e^{3x} . dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.6:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = u \\ e^{3x} dx = dv \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x.dx = du \\ \frac{1}{3} e^{3x} = v \end{array}$$

buna göre bu dönüşümler;

$$\int u.dv = uv - \int v.du$$

formülünde yerine yazılırsa;

$$I = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int \underbrace{x e^{3x} . dx}_{I_1} \quad \text{olur.}$$

Şimdide;

$$I_1 = \int x e^{3x} dx \quad \text{integraline kısmi integrasyon uygulayalım.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = u_1 \\ e^{3x} dx = dv_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = du_1 \\ v_1 = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \quad \text{dönüşümleri yapılsın. Böylece;}$$

$$I_1 = \int x e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c \quad \text{olur.}$$

Hesaplanan değeri I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + c$$

olarak elde edilir.

Genel Kural:

$\int x^n . e^{\alpha x} . dx$ şeklindeki integrallerde

$x^n = u$ ve $e^{\alpha x} . dx = dv$

dönüşümü yapılır.

Örnek 3.7: $I = \int e^{-2x} \cos 3x.dx$

integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.7:

$$\left.\begin{array}{l} u = \cos 3x \\ dv = e^{-2x}dx \end{array}\right\} \begin{array}{l} du = -3\sin 3x.dx \\ v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}$$

olur. Buna göre;

$$I = \int e^{-2x}\cos 3x.dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}.\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{-2x}.\sin 3x.dx$$

şekline gelir. Şimdide I_1 integralinde kısmi integral için tekrar dönüşüm uygulayalım.

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \sin 3x \\ dv_1 = e^{-2x}dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du_1 = 3\cos 3x.dx \\ v_1 = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}$$

olur. Böylece;

$$I_1 = \int e^{-2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\sin 3x + \frac{3}{2}\int e^{-2x}\cos 3x.dx$$

olarak hesaplanır ve bu I_1 değeri I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int e^{-2x}\cos 3x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x - -\frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x + \frac{9}{4}\int e^{-2x}\cos 3x dx$$

olarak bulunur. Böylece I integrali;

$$I = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x - \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x + \frac{9}{4}I$$

şeklini alır. Sonuç olarak;

$$\frac{-5}{4}I = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 3x - \frac{3}{4}e^{-2x}\sin 3x + c$$

veya;

$$I = \int e^{-2x}\cos 3x dx = \frac{2}{5}e^{-2x}\cos 3x + \frac{3}{5}e^{-2x}\sin 3x + c$$

olarak bulunur.

Genel Kural:

$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ şeklindeki integrallerde;

$\cos \beta x = u$ dönüşümü yapılır.

$\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$ şeklindeki integrallerde;

$\sin \beta x = u$ dönüşümü yapılır.

Örnek 3.8:

$$I = \int x^2 \ln x.dx = ?$$

Çözüm 3.8:

$$\int \ln x f(x).dx$$

tipi integrallerde $\ln x = u$ dönüşümü yapılır. Buna göre;

$$\left.\begin{array}{l} \ln x = u \\ x^2 dx = dv \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{dx}{x} = du \\ \frac{1}{3}x^3 = v \end{array}$$ olur.

Bu değerleri kısmi integral formülünde yerine yazarsak;

$$I = \int x^2 \ln x.dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^3 . \frac{dx}{x}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak;

$$I = \int x^2 \ln x.dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$$

bulunur.

Örnek 3.9: $I = \int x^n \ln^m x.dx = ?$

Çözüm 3.9:

Bu değerler I integralinde kısmi integral formülüne göre yazılırsa;

$$\left.\begin{array}{l} u = (\ln x)^m \\ dv = x^n .dx \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} du = m(\ln x)^{m-1} \frac{1}{x} .dx \\ v = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \end{array}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I=\int x^n \ln^m x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^m x-\int\frac{m}{n+1}x^n(\ln x)^{m-1}dx$$

olur. Kısmi integrasyon tekniği (n) defa uygulanarak istenen çözüme ulaşılır.

Örnek 3.10: $I=\int 2x\,Arc\tan x.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.10:

$$\left.\begin{matrix}u=Arc\tan x\\ dv=2x.dx\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ v=x^2\end{matrix}$$

Buna göre;

$$I=\int 2x\,Arc\tan x.dx=x^2\,Arc\tan x-\int\frac{x^2dx}{1+x^2}\quad\text{olur.}$$

Şimdi de; $I^*=\int\dfrac{x^2dx}{1+x^2}$ İntegralini hesaplayalım;

$$I^*=\int\frac{x^2dx}{1+x^2}=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int\frac{1+x^2}{1+x^2}dx-\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$I^*=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-Arc\tan x+c$$

I^* integralini I integraline yazacak olursak;

$$I=\int 2x\,Arc\tan x.dx=x^2\,Arc\tan x-x+Arc\tan x+c$$

olarak bulunur.

Örnek 3.11: $I=\int\sec^3 x.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.11:

$$I=\int\sec^3 x.dx=\int\sec^2 x\sec x.dx$$

şeklinde yazalım. Buradan kısmi integral formülü uygulayalım;

$$\left.\begin{matrix}u=\sec x\\ dv=\sec^2 x.dx\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}du=\sec x\tan x.dx\\ v=\tan x\end{matrix}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Böylece integral ;

$$I = \int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x - \int \sec x.\tan x.dx$$

şeklini alır.

$$1+\tan^2 x=\sec^2 x \Rightarrow \tan^2 x=\sec^2 x-1$$

özdeşliği en son ifade de yerine yazılırsa;

$$I = \int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1).dx$$

$$I = \int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x - \int \sec^3 x.dx + \int \sec x.dx$$

$$I = \sec x.\tan x - I + \int \sec x.dx$$

ve buradan;

$$2I = \sec x.\tan x + \int \sec x.dx$$

olur. Böylece;

$$I_2 = \int \sec x.dx$$

olarak elde edilir. Şimdide;

$$2\int \sec^3 x.dx = \sec x.\tan x + \int \sec x.dx$$

integraline kısmi integral uygulayalım.

$u=\sec x+\tan x$ alalım.

Buna göre;

$du = (\sec x.\tan x + \sec^2 x)dx$ olarak bulunur . Böylece;

$$I_2 = \int \sec x.dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

olur. Bu son integral I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int \sec^3 x.dx = \frac{1}{2}(\sec x.\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c$$

sonucuna ulaşılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Kısmi İntegrasyon İle İlgili Problemler :

1. $\int x\sin x.dx = \sin x - x\cos x + c$

2. $\int x\sqrt{1-x}.dx = -\frac{2}{15}(2+3x)(1-x)^{3/2} + c$

3. $\int x\sec^2 x.dx = x\tan x + \ln|\cos x| + c$

4. $\int_0^2 x.\sin\frac{x}{2}.dx = 1{,}20$

5. $\int x\cos x.dx = x\sin x + \cos x + c$

6. $\int x^2 \ln x.dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

7. $\int x\sin^2 3x.dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{12}\sin 6x - \frac{1}{72}\cos 6x + c$

8. $\int \cos^3 x.dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$

9. $\int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}.dx = 1{,}24$

10. $\int \frac{x^3.dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}\left(2-5x^2\right) + c$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11. $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}.dx = -\frac{1}{x+1}(\ln|x+1|+1)+c$

12. $\int x^3 \ln x.dx = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right)+c$

13. $\int_0^4 xe^{2x}.dx = 5217$

14. $\int x\tan^2 x.dx = x\tan x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + c$

15. $\int x^3\sqrt{1-x^2}.dx = -\frac{x^2}{3}(1-x^2)^{3/2} - \frac{2}{15}(1-x^2)^{5/2} + c$

16. $\int \frac{x^2.dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2}Arc\tan x - \frac{x}{2(1+x^2)} + c$

17. $\int \frac{x^2.dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - Arc\tan x + c$

18. $\int_{-2}^{2} \frac{xe^x}{(1+x)^2} = 2{,}60$

19. $\int x^2e^{-x}.dx = -x^2e^x - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

20. $\int x^2e^{2x}.dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + c$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

21. $\int x^2 e^{-x}.dx = -x^2e^{x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$

22. $\int x^2 e^{x}.dx = e^{x}\left(x^2 - 2x + 2\right) + c$

23. $\int e^{x} \sin x.dx = \frac{e^{x}}{2}(\sin x - \cos x) + c$

24. $\int x^2 \cos x.dx = 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x + c$

25. $\int_{1}^{3} e^{-x} \sin 4x.dx = -0{,}081$

26. $\int e^{x} \cos x.dx = \frac{e^{x}}{2}(\sin x + \cos x) + c$

27. $\int e^{-x} \cos \pi x.dx = \frac{e^{-x}}{\pi^2 + 1}(\pi \sin \pi x + \cos \pi x) + c$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.3. Rasyonel Fonksiyonların İntegrali :

$P: IR \to IR$ ve $Q: IR \to IR$

iki polinom fonksiyon ayrıca;

$$d(P(x)) = m \qquad d(Q(x)) = n$$

olsun. Bu durumda;

$$R: IR - \{Q(x) = 0\} \to IR$$

şeklinde tanımlanan bir polinom iken;

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

rasyonel fonksiyonun integralini gözönüne alalım. Eğer m≥n ise pay paydaya polinom bölmesiyle bölünerek;

$$R = \frac{P}{Q} = K + \frac{P_1}{Q}$$

olarak elde edilir. Burada, **K, (n-m).** dereceden polinom fonksiyon iken $\mathbf{P_1}$ ise **m.** dereceden küçük bir polinom fonksiyondur. Bu nedenle;

$\frac{P_1}{Q}$ kesrine **Has Kesir** denir.

Buna göre;

$$\int R(x)dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[K(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx \right] = \int K(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx$$

şekline gelir. Böylece, **R** rasyonel fonksiyonunun integrali **K** polinom fonksiyonunun integrali ile $\mathbf{R_1}$ has kesrinin integrali toplamına indirgenmiş olur.

Örnek 3.12: $I = \int \frac{x^2 dx}{x^3 - 2}$ İntegralini hesaplayalım.

Çözüm 3.12: $\frac{x^2}{x^3 - 2}$ kesri bir has kesirdir.

Çünkü payın derecesi paydadan küçüktür. Şimdi bu integrali çözelim.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$x^3 - 2 = u \Rightarrow 3x^2.dx = du$ olur. Buna göre;

$$I = \int \frac{x^2.dx}{x^3 - 2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + c = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 2| + c$$

olarak bulunur.

Örnek 3.13: $I = \int \frac{3x^3 - 5}{x^2 - 1}.dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.13: $\frac{3x^3 - 5}{x^2 - 1}$

Kesrinde payın derecesi paydadan büyüktür. O halde, pay paydaya polinom bölmesiyle bölünerek aşağıdaki şekle indirgenmiş olur.

$$\frac{3x^3 - 5}{x^2 - 1} = 3x + \frac{3x - 5}{x^2 - 1}$$

Bu son ifadenin integralini alırsak;

$$I = \int \frac{3x^3 - 5}{x^2 - 1}.dx = \int 3x.dx + \int \frac{3x - 5}{x^2 - 1}.dx$$

$$I = \int 3x.dx + \int \frac{3x.dx}{x^2 - 1}.dx - 5\int \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$I = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\ln|x^2 - 1| - \frac{5}{2}\ln|x - 1| + \frac{5}{2}\ln|x + 1| + c$$

olarak elde edilir.

3.3.1. I.Tip Basit Kesirler :

$A_1, A_2 \in IR \quad x \neq \alpha$ olmak üzere;

$$\frac{A_1}{(x - \alpha)} \quad \text{ve} \quad \frac{A_2}{(x - \alpha)^n} \qquad (n \geq 2, n \in IN)$$

şeklindeki kesirlere **1. Tip basit kesirler** denir. Buna göre;

$$I_1 = \int \frac{A_1}{x - \alpha}.dx = A_1 \int \frac{dx}{x - \alpha}$$

$$\left.\begin{matrix} x-\alpha=u \\ dx=du \end{matrix}\right\} I=A_1\int\frac{du}{u}=A_1\ln|u|+c=A_1\ln|x-\alpha|+c$$

olarak bulunur. Şimdi de;

$$I_2=\int\frac{A_2}{(x-\alpha)^n}.dx$$

integralini hesaplayalım.

x - α = u dersek dx = du olur.

$$I_2=\int\frac{A_2}{(x-\alpha)^n}.dx=A_2\int\frac{du}{u^n}=A_2\int u^{-n}.du=A_2\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+c$$

$$I_2=A_2\frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}+c=\left(\frac{A_2}{1-n}\right)\left(\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}}\right)+c$$

elde edilir.

Örnek 3.14: $I=\int\frac{2.dx}{(x-3)^3}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.14: $x-3=u$ dersek $dx=du$ olur.Buna göre;

$$I=2\int\frac{du}{u^3}=2\int u^{-3}.du=2\frac{u^{-2}}{-2}+c=-\frac{1}{u^2}+c=-\frac{1}{(x-3)^2}+c$$

olarak bulunur.

3.3.2. II. Tip Basit Kesirler

$$A_1, A_2, B_1, B_2 \in IR \qquad ve \qquad p^2-4q<0$$

olmak üzere;

$$\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} \text{ ve } \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^n} \qquad n\geq 2, n\in IN$$

şeklindeki kesirlere **2. Tip Basit Kesirler** denir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I_3 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

integralini göz önüne alalım.

Kareye tamamlama metodu kullanılarak;

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}$$

şeklinde yazılırsa I_3 integrali;

$$I_3 = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q - p^2}{4}}$$

şekline gelir. Buradan;

$$x + \frac{p}{2} = u \qquad \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} = a$$

diyecek olursak;

$$I_3 = \int \frac{du}{u^2 + a^2}$$

$$I_3 = \frac{1}{a} Arc\tan\frac{u}{a} + c$$

elde edililir. Böylece;

$$I_3 = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} Arc\tan\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + c$$

olarak bulunur.

NOT: Eğer integralimiz $b^2-4ac<0$ ve $a\neq 0$ olmak üzere;

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

şeklinde ise kareye tamamlama metodu yardımıyla;

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\frac{b}{a}=p,\ \frac{c}{a}=q$ olur ve;

$$p^2-4q=\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}=\frac{1}{a^2}\left(b^2-4ac\right)<0$$

elde edilerek;

$$I=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

integrali I_3 integraline dönüşmüş olur.

Örnek 3.15:

$$I=\int\frac{dx}{x^2+6x+14}$$

Çözüm 3.15: $p=6,\ q=14$ olduğuna göre $p^2-4q=-20<0$ olup kareye tamamlama metodundan;

$$x^2+6x+14=(x+3)^2+5$$

olur. Böylece u=x+3, du=dx olarak alınırsa;

$$I=\int\frac{dx}{(x+3)^2+5}=\int\frac{du}{u^2+5}=\frac{1}{\sqrt{5}}Arc\tan\frac{u}{\sqrt{5}}+c$$

elde edilir ve bu son ifade de **u** değeri yerine yazılırsa;

$$I=\frac{1}{\sqrt{5}}Arc\tan\frac{x+3}{\sqrt{5}}+c$$

olarak bulunur. Şimdi de ;

$$I_4=\int\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}dx\qquad p^2-4q<0\qquad A_1\neq 0$$

integralini hesap edelim. I_4 integralinde pay kısmını paydanın türevini içerecek şekilde oluşturalım. Buna göre;

$$I_4=\int\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A_1}{2}(2x+p)+\left(B_1-\frac{A_1p}{2}\right)}{x^2+px+q}dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde yazarsak I_4 integrali;

$$I_4 = \frac{A_1}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B_1 - \frac{A_1 p}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

şeklinde iki integralin toplamı haline gelir. Şimdide bu integralleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$u=x^2+px+q$ dersek $(2x+p)dx=du$ olur ve böylece;

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|x^2+px+q| + c$$

bulunur. Ayrıca;

$\int \frac{dx}{x^2+px+q}$ integralini daha önce hesaplamıştık. Bu değerler I_4 integralinde yerine yazılırsa;

$$I_4 = \frac{A_1}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B_1 - \frac{A_1 p}{2}\right)I_3 \qquad \text{veya;}$$

$$I_4 = \frac{A_1}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B_1 - \frac{A_1 p}{2}\right)\left[\left(\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,Arc\tan\frac{2x+p}{\sqrt{4a-p^2}}\right)+c\right]$$

olarak elde edilir.

Örnek 3.16:

$$I = \int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}.dx$$ İntegralini hesaplayalım.

Çözüm 3.16: $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ alalım. Buna göre;

$$I = \int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}.dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - 4\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

olur. Şimdi bu son iki integrali ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}$$ olarak yazılır ve;

$x+2=u \Rightarrow dx=du$ dönüşümü yapılırsa;

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}=\int \frac{du}{u^2+1}=Arctanu+c=Arctan(x+2)+c$$

olarak bulunur. Ayrıca, $x^2+4x+5=u$ dersek; $(2x+4)dx=du$ olur.

Bu değerler ;

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx$$

integralinde yerine yazılacak olursa;

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx=\int \frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln|x^2+4x+5|+c$$

elde edilir. Böylece istenilen integral hesaplanan iki integralin yerine yazılmasıyla;

$$I=\int \frac{3x+2}{x^2+4x+5}dx=\frac{3}{2}\ln|x^2+4x+5|-4Arc\tan(x+2)+c$$

olarak bulunur. Bundan başka;

$p^2-4q<0 \qquad n\geq 2 \qquad n\in IN$

olmak üzere;

$$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

integralini hesaplayalım. $n\geq 1$ olmak üzere;

$$I=\int \frac{dx}{\left[\left(x+p/2\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n}$$

olur. Burada;

$$x+\frac{p}{2}=u \qquad , \qquad dx=du$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dönüşümü yapılır ve;

$$\frac{\sqrt{4q-p^2}}{4}=a$$

denilirse;

$$I_n=\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^n}\qquad (a>0)$$

şeklini alır. Şimdi bu son integralin yerine;

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$$ integralini ele alalım.

Bu integrali hesaplamak için kısmi integral uygulayalım. Bunun için;

$$u=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\qquad du=-\frac{2nx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx$$

ve $dv=dx$ diyelim. Buradan, $v=x$ elde edilir. Buna göre;

$$I_n=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}dx$$

olur. Böylece;

$$I_n=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2n\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}-2na^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

elde edilir. Buradan;

$$I_n=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}\qquad ve\qquad I_{n+1}=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}$$

diyecek olursak;

$$I_n=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+2nI_n-2na^2.I_{n+1}\qquad (n\geq 1)$$

bulunur. Bu son ifadede gerekli düzeltmeler yapılıp I_{n+1} yalnız bırakılırsa;

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n \qquad (n \geq 1)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak;

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \cdot \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

şeklinde yazılırak boştaki integralimizi indirgeme yöntemiyle çözüme ulaştıran **Rekürans (İndirgeme)** formülü elde edilmiş olur.

Örnek 3.17:

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3} = ?$$

Çözüm 3.17:

$p^2-4q=-16<0$ ve $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$ olarak alınırsa;

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3} = \int \frac{dx}{\left[(x+1)^2+4\right]^3} \qquad \text{olur.}$$

Burada $x+1=u$ dersek $du=dx$ elde edilir ve bu yukarıda yerine yazılırsa;

$$I = \int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^3} = \int \frac{du}{\left[u^2+4\right]^3}$$

ve buna indirgeme formülü uygulanırsa; n=3, a=2 olmak üzere;

$$I = \frac{1}{2.2.4} \times \frac{u}{\left(u^2+4\right)^2} + \frac{3}{2.2.4} \times I_1$$

veya;

$$I = \frac{u}{16(u^2+4)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{u}{16(u^2+4)^2}$$

bulunur. I_1 integraline tekrar indirgeme formülü uygulanırsa;

$$I = \frac{u}{16(u^2+4)^2} + \frac{3}{16}\left(\frac{1}{2.1.4} \times \frac{u}{(u^2+4)} + \frac{1}{2.1.4} I_2\right)$$

$$I = \frac{u}{16(u^2+4)^2} + \frac{3u}{128(u^2+4)} + \frac{3}{128} \times \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{u}{2} + c$$

$$I = \frac{u}{16(u^2+4)^2} + \frac{3u}{128(u^2+4)} + \frac{3}{128}\int \frac{du}{u^2+4}$$

ve son olarak $u=x+1$ değeri yerine yazılırsa;

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^3} = \frac{x+1}{16(x^2+2x+5)^2} + \frac{3(x+1)}{128(x^2+2x+5)} + \frac{3}{256} \operatorname{Arctan} \frac{(x+1)}{2} + c$$

olarak elde edilir.

Rasyonel Kesirlere Ait Cevaplı Alıştırmalar

1. $\int \frac{(4x-2)dx}{x^3-x^2-2x}$ $\left(\ln\left|\frac{x(x-2)}{(x+1)^2}\right|+c\right)$

2. $\int_2^3 \frac{(3x-1)dx}{x^3-x}$ $(0{,}5232)$

3. $\int_1^3 \frac{(2-x^2)dx}{x^3+3x^2+2x}$ $(-0{,}1054)$

4. $\int \frac{x^2.dx}{x^2-4x+5}$ $\left(x+2\ln|x^2-4x|+3Arc\tan(x-2)+c\right)$

5. $\int \frac{x+1}{x^3+4x^2-3x}.dx$ $\left(\ln\left|\frac{(x-2)^{1/2}}{x^{1/3}(x+3)^{1/6}}\right|+c\right)$

6. $\int_2^4 \frac{(x^3-2)dx}{x^3-x^2}$ $(2{,}788)$

7. $\int_0^1 \frac{(x-5)dx}{(x-3)^2}$ $(-0{,}739)$

8. $\int_2^3 \frac{x^2.dx}{(x-1)^3}$ $(2{,}068)$

9. $\int \frac{(2x-5)}{(x-2)^3}.dx$ $\left(\frac{9-4x}{2(x-2)^2}+c\right)$

10. $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ $\left(-\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+c\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11. $\int_0^2 \frac{x-2}{(x+1)^3}.dx$ $\left(-\frac{2}{3}\right)$

12. $\int_1^2 \frac{dx}{x^4+x^2}$ $(0{,}1784)$

13. $\int_0^1 \frac{(x^2-3)dx}{(x+2)(x^2+1)}$ $(-0{,}8982)$

14. $\int_1^2 \frac{(x^2+6)dx}{x^3+3x}$ $(1{,}946)$

15. $\int_1^4 \frac{(5x^2+4)dx}{x^3+4x}$ $(4{,}159)$

16. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^4}$ $\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{1}{2} Arc\tan x + c\right)$

17. $\int_1^2 \frac{(x-3)dx}{x^3+x^2}$ $(-0{,}349)$

18. $\int_0^1 \frac{5x.dx}{(x+2)(x^2+1)}$ $(0{,}667)$

19. $\int_3^4 \frac{(5x^2-4x)dx}{x^2+16}$ $(0{,}3635)$

20. $\int \frac{x^5.dx}{(x^2+4)^2}$ $\left(\frac{x^2}{2} - 4\ln\left|x^{2+4}\right| - \frac{8}{x^2+4} + c\right)$

Rasyonel Kesirlere Ait Cevapsız Alıştırmalar

1. $\int \frac{x^2}{x^3-2}dx$

2. $\int \frac{3x^3-5}{x^2-1}dx$

3. $\int \frac{dx}{(x-5)^3}$

4. $\int \frac{dx}{x^2+6x+14}$

5. $\int \frac{dx}{3(x^2+2x+5)}$

6. $\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3(x-1)^2}dx$

7. $\int \frac{x^2-2x+2}{(x^2+4)^2}dx$

8. $\int \frac{4dx}{x^2+3x-14}$

9. $\int \frac{2x+7}{x^2+3x-1}dx$

10. $\int_3^6 \frac{dx}{(x^2-6x+5)^{3/2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^3-1}$

12. $\int \frac{2x-2}{(2x^2+4x+9)^{1/2}}dx$

13. $\int \frac{x.dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

14. $\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+3)(x+2)(x-1)}dx$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.4. TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

Bu başlık altında trigonometrik fonksiyonları içeren değişik tipteki fonksiyonların integrali ile trigonometrik dönüşümler yardımıyla integre edilebilen fonksiyonların integralleri tiplerine göre ayrı ayrı incelenecektir.

3.4.1. $I_1=\int R(\sin x).\cos x.dx$ şeklindeki integraller

Bu tip integallerde **u=sinx** dönüşümü yapılırsa **du=cosx.dx** olur ve böylece integralimiz;

$I_1=\int R(u).du$ şeklinde **u** değişkenine bağlı bir rasyonel integrale dönüşür. Bu integral yazılarak ve **u=sinx** değeri integralde tekrar yerine konarak çözüme gidilir. Bunu basit bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.18:

$$I_1=\int\frac{5\cos 2x dx}{3+\sin 2x}$$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.18: **3+sin2x=u** dersek **2cos2xdx=du** olur.Bu değerleri yerine yazarsak;

$$I=\int\frac{5\cos 2x dx}{3+\sin 2x}=\frac{5}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{5}{2}Ln|u|+c=\frac{5}{2}Ln|3+\sin 2x|+c$$ olarak bulunur.

3.4.2. $I_2=\int R(\cos x).\sin x.dx$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde ise **cosx=u** dönüşümü yapılır. Buna göre; **–sinx.dx=du** olur ve bu değerler I_2 integralinde yerine yazılarak ;

$$I_2=-\int R(u).du$$

şeklinde **u** değişkenine bağlı bir rasyonel integrale dönüştürülür. Sonuçta; **u=cosx** değeri yerine yazılarak istenen çözüme ulaşılır.

Örnek 3.19:

$$I=\int\frac{3\sin 2x dx}{1-\sin^2 x}$$ integralini hesaplıyalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm 3.19 : **sin2x=2sinx.cosx** ve **cosx=u** dönüşümü yapılırsa; **–sinxdx=du** olur. Buna göre;

$$I=\int\frac{3\sin 2x dx}{1-\sin^2 x}=\int\frac{6\sin x\cos x}{1-\sin^2 x}dx$$

şeklini alır. Burada **1-sin²x=cos²x=u²** olup integralimiz;

$$I=-\int\frac{6udu}{u^2}=-6\int\frac{du}{u}=-6\ln|u|+c=-6\ln|\cos x|+c$$

olarak hesaplanır.

3.4.3. $I_3=\int R(\tan x)dx$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde **u=tanx** dönüşümü yapılır. **x=Arctanu** ve **dx=du/(1+u²)** olur. Buna göre, I_3 integrali;

$$I_3=\int R(u)du/(1+u^2)$$

şekline gelir. Bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 3.20: $I=\int \tan^3 x\,dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.20: **tanx=u** dersek **dx =du/(1+u²)** olur. Bu değerler yukarıdaki integralde yerine yazılırsa;

$$I=\int\frac{u^3du}{1+u^2}=\int\left(u-\frac{u}{1+u^2}\right)du=\int udu-\int\frac{udu}{1+u^2}$$

şeklinde iki fonksiyonun integraline dönüşür. Şimdi; **∫(udu/(1+u²))** integralini ayrıca hesap edelim. Burada; **1+u² = t** dersek **2u.du = dt** ve **udu = (1/2).dt = dt/2** olur. Buna göre;

$$\int\frac{udu}{1+u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+c=\frac{1}{2}\ln|1+u^2|+c$$

bulunur.Böylece I integralimiz;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I = \int u du - \int \frac{u du}{1+u^2} = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|1+u^2| + c$$

şekline gelir. Bu son ifadede, **u = tanx** değeri yerine yazılarak;

$$I = \int \tan^3 x dx = (1/2)\tan^2 x - (1/2)\,\mathrm{Ln}|1 + \tan^2 x| + c$$

olarak bulunur.

3.4.4. $I_4 = \int \mathrm{Sinax.\ Sinbx.\ dx}$ $(a,b \in IR)$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde **a** ve **b** sayılarının durumuna göre iki tip integral söz konusudur.

i) a=b olması hali:

$$I_4 = \int \sin^2 ax\, dx = \int (1/2)(1-\cos 2ax)dx$$
$$= (1/2)\int dx - (1/2)\int \cos 2ax dx = (1/2)x - (1/4a)\sin 2ax + c$$

ii) a≠b olması hali: Bu durumda aşağıdaki trigonometrik özdeşlikten yararlanırız.

sinax.sinbx=(1/2)[cos(a-b)x – cos(a+b)x] idi . Buna göre;

$$I_4 = \int \sin ax.\sin bx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos(a-b)x dx - \frac{1}{2}\int \cos(a+b)x dx$$
$$= \frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x + c$$

olarak bulunur. Şimdi bu iki hal için birer örnek yapalım.

Örnek 3.21: $I = \int \sin^2 5x dx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.21: $\sin^2 5x = (1/2)(1-\cos 10x)$ olduğuna göre ;

$$I = \int \sin^2 5x dx = \int (1/2)(1-\cos 10x)\, dx = (1/2)\int dx - (1/2)\int \cos 10x dx$$
$$= (1/2)x - (1/20)\sin 10x + c \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Örnek 3.22: I=∫ sin5x.sin4x dx integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.22: sin5x.sin4x=(1/2)[cos(5-4)x-cos(5+4)x] ifadesi I integralinde yerine yazılırsa;

$$I=\int \sin 5x.\sin 4x\,dx=\int (1/2)[\cos(5-4)x-\cos(5+4)x]dx$$
$$=(1/2)\int \cos x-(1/2)\int \cos 9x\,dx=(1/2)\sin x-(1/18)\sin 9x+c \quad \text{olur.}$$

3.4.5. $I_5=\int Cosax.Cosbx.dx$ (a,b ∈ IR) şeklindeki integraller

i) a=b olması hali:

$$I=\int \cos^2 ax\,dx=\int (1/2)(1+\cos 2ax)dx=(1/2)\int dx+(1/2)\int \cos 2ax\,dx$$
$$=(1/2)x+(1/4a)\sin 2ax+c$$

ii) a≠b olması hali:

Bu durumda;

$$Cosax.Cosbx=(1/2)[\,Cos(a-b)x+Cos(a+b)x]$$

özdeşliği kullanılır.Bu özdeşlik I_5 integralinde yerine yazılırsa;

$$I_5=\int \cos ax.\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\int [\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]dx$$
$$=\frac{1}{2}\int \cos(a-b)x\,dx+\frac{1}{2}\int \cos(a+b)x\,dx$$
$$=\frac{1}{2(a-b)}\sin(a-b)x+\frac{1}{2(a+b)}\sin(a+b)x+c$$

olarak elde edilir. Şimdi I_5 tipindeki integraller için birer örnek yapalım.

Örnek 3.23: I=∫cos²3xdx integralini bulalım.

Çözüm 3.23: cos²3x=(1/2)(1+cos6x) olduğuna göre, I integrali;

$$I=\int \cos^2 3x\,dx=\int (1/2)(1+\cos 6x)dx=(1/2)\int dx+(1/2)\int \cos 6x\,dx$$
$$=x/2+(1/12)\sin 6x+c \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Örnek 3.24: $I=\int \cos 4x.\cos 3x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.24: $\cos 4x.\cos 3x=(1/2)[\cos(4-3)x + \cos(4+3)x]$ idi. Bu I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int \cos 4x.\cos 3x dx=\int (1/2)[\cos(4-3)x+\cos(4+3)x]dx =(1/2)\int \cos x dx + (1/2)\int \cos 7x dx$$

olur. Bu son ifadedeki integralin alınmasıyla I integrali;

$$I=\int \cos 4x.\cos 3x dx=(1/2)\sin x + (1/4)\sin 7x + c$$ olarak bulunur.

3.4.6. $I_6=\int \text{Sinax. Cosbx. dx}$ (a,b ∈ IR) şeklindeki integraller

Daha önceki dört tip integraldede olduğu gibi buradada **a** ve **b** ' nin durumuna göre iki çeşit integralle karşılaşırız.

i) a=b olması hali:

sinax.cosax=(1/2)sin2ax olduğuna göre;

$$I=\int \sin ax.\cos ax dx= \int (1/2)\sin 2ax dx = (1/2)\int \sin 2ax dx = (-1/4a)\cos 2ax + c$$ olur.

ii) a≠b olması hali: Bu durumda aşağıdaki özdeşlik kullanılır. Buna göre;

sinax.cosbx=(1/2)[sin(a-b)x+ sin(a+b)x] özdeşliğinden yararlanılırsa I integrali;

$$I = \int \sin ax.\cos bx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(a-b)x dx + \frac{1}{2}\int \sin(a+b)x dx$$

$$= \frac{-1}{2(a-b)}\cos(a-b)x - \frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)x + c$$

olur. Şimdi bu iki durum için birer örnek yapalım.

ARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 3.25: $I=\int \sin 3x.\cos 3x\, dx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.25: $\sin 3x.\cos 3x = (1/2)\sin 6x$ olduğuna göre;

$$I=\int \sin 3x.\cos 3x dx = \int (1/2)\sin 6x dx = (1/2)\int \sin 6x dx = -(1/2)\cos 6x + c$$

Örnek 3.26: $\int \sin 5x.\cos 4x dx$ integralini hesaplıyalım.

Çözüm 3.26: $\sin 5x.\cos 4x = (1/2)[\sin(5-4)x+\sin(5+4)x]$ Özdeşliğinden I integrali;

$$I=\int \sin 5x.\cos 4x dx=\int (1/2)[\sin(5-4)x+\sin(5+4)x]dx$$

şeklini alır ve bu son ifadenin integrali;

$$\int \sin 5x.\cos 4x\, dx = (1/2)\int \sin x dx + (1/2)\int \sin 9x\, dx = -(1/2)\cos x - (1/18)\cos 9x + c$$

olacak şekilde bulunur.

3.4.7. $I_7=\int \sin^m x dx=\int (\sin x)^m dx$ şeklindeki integraller

m sayısının tek veya çift olmasına göre bu tip integraller iki durumda incelenir.

i) m=2k+1 tek sayı olması hali:

$\sin^m x=\sin^{(2k+1)}x=\sin^{(2k)}x.\sin x=(\sin x)^{2k}.\sin x=(\sin^2 x)^k.\sin x$ olacak şekilde alalım.

$$I_7=\int \sin^m x dx=\int (\sin^2 x)^k.\sin x dx \quad \text{olur.}$$

Burada $\cos x=u$ dersek $-\sin x dx=du$ ve $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-u^2$ değerleri bu son integralde yerine yazılırsa I_7 integralimiz;

$$I_7=\int \sin^m x dx=\int (1-\cos^2 x)^k.\sin x dx=-\int (1-u^2)^k.du$$

şekline getirilip bu açılım yapılarak integral alınır.

ii) m=2k çift sayı olması hali:

$\sin^m x=(\sin x)^m=\sin^{2k}x=(\sin^2 x)^k$ ve $\sin 2x=(1/2)(1-\cos 2x)$ olduğuna göre I_7 inegralimiz;

$$I_7=\int \sin^m x dx=\int (\sin^2 x)^k dx=-\int [(1/2)(1-\cos 2x)]^k dx=(1/2^k)\int (1-\cos 2x)^k dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

haline gelir. Bu açılım ilgili probleme bağlı olarak yapılır ve integral alınır. Bu iki durum için birer örnek yapalım.

Örnek 3.27: $I=\int \sin^5 x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.27:

$\sin^5 x=\sin^4 x.\sin x=(\sin^2 x)^2.\sin x$ ve ayrıca

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$ değerlerini I integralinde yerine yazacak olursak ;

$I=\int \sin^5 x dx=\int (\sin^2 x)^2.\sin x dx=\int (1-\cos^2 x)^2 \sin x dx$

elde edilir. Burada $u=\cos x$ dersek $-\sin x dx=du$ olur. Buna göre;

$I=\int \sin^5 x dx=-\int (1-u^2)^2 du=-\int (1-2u^2+u^4)du=-\int du + 2\int u^2 du - \int u^4 = -u + (2/3)u^3 - (1/5)u^5 + c$

bulunur. Bu son ifadede $u=\cos x$ değeri yerine yazılırsa ;

$I=\int \sin^5 x dx = -\cos x + (2/3)\cos^3 x - (1/5)\cos^5 x + c$ olarak elde edilir.

Örnek 3.28: $I=\int \sin^4 x dx$ integralini bulalım.

Çözüm 3.28: $I=\int \sin^4 x dx=\int (\sin^2 x)^2 dx=\int [(1/2)(1-\cos 2x)^2] dx$

$=(1/4)\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx$

$=(1/4)\int dx - (1/2)\int \cos 2x dx + (1/4)\int \cos^2 2x dx$

Burada $\cos^2 2x=(1/2)(1+\cos 4x)$ değeri yerine yazılırsa;

$I=\int \sin^4 x dx=(1/4)\int dx - (1/2)\int \cos 2x dx + (1/8)\int dx + (1/8)\int \cos 4x dx$

$=(1/4)x - (1/4)\sin 2x + (1/8)x + (1/32)\sin 4x + c$ olarak bulunur.

3.4.8. $I_8=\int (\mathrm{Cos})^m dx=\int \mathrm{Cos}^m x.dx$ şeklindeki İntegraller

Bu tip integrallerde yine bir önceki tipe benzer olarak m sayısının tek veya çift olmasına bağlı olarak iki durum söz konusudur.

i) m=2k+1 tek sayı olması hali:

$I_8=\int (\cos x)^m dx=\int \cos^m x dx=\int \cos^{(2k+1)} x dx=\int \cos^{2k} x.\cos x dx=\int (\cos^2 x)^k.\cos x dx$

Burada, $\sin x=u$ dersek $\cos x dx=du$ olur. Ayrıca ;

$\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-u^2$ olduğu göz önüne alınırsa I_8 integrali;

$I_8=\int \cos^{(2k+1)} x dx=\int (1-u^2)^k du$

şekline getirilip parantezler açılarak ayrı ayrı integral alınır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ii) m=2k çift sayı olması hali:

$I_8=\int(\cos x)^m dx=\int(\cos^m x)dx=\int\cos^{2k}x dx=\int(\cos^2 x)^k dx$

$\cos^2 x=(1/2)(1+\cos 2x)$ özdeşliği bu son ifade yerine yazılacak olursa I_8 integrali;

$I_8=\int\cos^m x dx=\int[(1/2)(1+\cos 2x)]^k dx=(1/2^k).\int(1+\cos 2x)^k dx$

şekline gelir. Burada parantez açılımı yapılarak ayrı ayrı integral alınır. Bu iki durum için yine birer örnek yapalım.

Örnek.3.29: $I=\int\cos^5 x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.29: $I=\int\cos^5 x dx=\int\cos^4 x.\cos x dx$ şeklinde yazalım ve burada $\sin x=u$ dönüşümü yapalım. Buna göre, $\cos x dx=du$ olur. Ayrıca, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-u^2$ dönüşümü gözönüne alınırsa I integralimiz;

$$I=\int\cos^5 x dx=\int(\cos^2 x)^2\cos x dx=\int(1-\sin^2 x)^2.\cos x dx=\int(1-u^2)^2 du=\int du - 2\int u^2 du + \int u^4 du$$
$$=u-(2/3)u^3+(1/5)u^5+c$$

olur. Buradan $u=\sin x$ değeri sonuç ifadede yerine yazılırsa;

$I=\int\cos^5 x dx=\sin x-(2/3)^3\sin x+(1/5)\sin^5 x+c$

olarak elde edilir.

Örnek.3.30: $I=\int\cos^4 x dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.30:

$$I=\int\cos^4 x dx=\int(\cos^2 x)^2 dx=\int[(1/2)(1+\cos 2x)^2]dx$$
$$=(1/4)\int dx+(1/2)\int\cos 2x dx+(1/4)\int\cos^2 2x dx$$

Burada, $\cos^2 2x=(1/2)(1+\cos 4x)$ değeri yukarıda yerine yazılıp integrali alınacak olursa I integralimiz ;

$I=\int\cos^4 x dx=(1/4)\int dx+(1/2)\int\cos 2x dx+(1/8)\int dx+(1/8)\int\cos 4x dx$

$=\int\cos 4x dx=(1/4)x+(1/4)\sin 2x+(1/8)x+(1/32)\sin 4x+c$ olarak elde edilir.

3.4.9. $I_9=\int\tan\alpha x.dx$, $\alpha\in IR$ şeklindeki integraller

$I_9=\int\tan\alpha x dx=\int(\sin\alpha x/\cos\alpha x)dx$ alalım. Burada **$u=\cos\alpha x$** dersek **$-\alpha.\sin\alpha x dx=du$** olur. Bu değerler yerine yazılırsa;

$I_9=\int\tan\alpha x dx=-(1/\alpha)\int(1/u)du;\quad(\alpha\neq 0)$

$=-(1/\alpha)\,Ln|u|+c$

$=-(1/\alpha)\,Ln|\cos\alpha x|+c$ sonucu elde edilir.

Bunu bir örnek ile açıklayalım.

Örnek 3.31: I=∫tan7xdx integralini hesaplıyalım.

Çözüm 3.31: tan7x = sin7x / cos7x alınır ve u = cos7x iken –7sin7xdx=du dönüşümü yapılırsa I integrali;

$$I = \int \tan 7x dx = \int \frac{\sin 7x}{\cos 7x} dx = -\frac{1}{7}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|u| + c$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|\cos 7x| + c$$

olarak bulunur.

3.4.10. $I_{10}=\int Sin^n x.Cos^m x dx$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde **n** ve **m** sayılarının tek veya çift olmalarına bağlı üç durum söz konusudur.

n veya m' den en az biri tek sayı ve **n ≠ m** olsun.

n=2k+1 diyelim . Bu durumda I_{10} integralimiz;

$I_{10}=\int \sin^n x.\cos^m x dx=\int \sin^{(2k+1)} x.\cos^m x dx$ olur. Burada, **cosx=u** dersek **–sinxdx=du** ve

$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-u^2$ olur. Buna göre;

$I_{10}= -\int (1-u^2)^k.u^m.du$ Şekline getirilerek gerekli işlemler yapılır ve integral alınır.

n ile m'nin ikiside tek sayı ise küçük olan birisini dx' in yanına çarpan olarak ayırılır bu çarpan du olacak şekilde dönüşüm yapılır. Bunu örnekle açıklayacağız.

n ile m'nin ikiside çift sayı olsun ve c=2k , m=2L diyelim. Böylece, I_{10} integralimiz;

$I_{10}=\int \sin^n x.\cos^m x dx=\int (\sin^2 x)^k.(\cos^2 x)^L dx$

şeklini alır. Burada;

$\sin^2 x=(1/2)(1-\cos 2x)$ve $\cos^2 x=(1/2)(1+\cos 2x)$

dönüşümleri yerine yazılırsa I_{10} integralimiz;

$I_{10}=\int \sin^n x.\cos^m x dx$

$$I_{10} = \int \frac{1}{2^k}(1-\cos 2x)^k.\frac{1}{2L}(1+\cos 2x)^L dx$$

olur. Böylece;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I_{10} = \int \sin^n x.\cos^m x\,dx = \frac{1}{2^{k+L}} \int (1-\cos 2x)^k .(1+\cos x)^L dx$$

olup parantezler açılırsa cos2x' in kuvvetlerine bağlı bir integral bulunur. Şimdi, bu üç durum için birer örnek yapalım.

Örnek 3.32:

$$I = \int \sin^3 x.\cos^4 x\,dx$$

integralini bulalım.

Çözüm 3.32: $\sin^3 x \cos^4 x dx = \sin^2 x.\cos^4 x.\sin x dx$

şeklinde yazalım. Burada u=cosx dersek du=-sinxdx ve $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-u^2$ olur. Bu değerler I integralinde yerine yazılırsa;

$I = \int \sin^3 x.\cos^4 x dx = -\int (1-u^2).u^4 du = -\int u^4 du + \int u^6 du$

$$= -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + c$$

olarak bulunur.

Örnek 3.33:

$$I = \int \sin^5 x.\cos^7 x.dx$$

integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.33:

Bu tip integrallerde iki çeşit çözüm vardır.

1.Yol:

sinx = u diyelim. Buna göre $cos^2x = 1-sin^2x = 1-u^2$ ve $cosx.dx = du$ olur. Böylece;

$$I = \int \sin^5 x.\cos^7 .dx = \int \sin^5 x.\cos^6 x.\cos x.dx$$

$$= \int u^5 \left(1-u^2\right)^3 .du$$

$$= \int u^5 \left(1-3u^2+3u^4-u^6\right) du$$

$$= \int u^5 du - 3\int u^7 .du + 3\int u^9 .du - \int u^{11} .du$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{3}{8}u^8 + \frac{3}{10}u^{10} - \frac{u^{12}}{12} + c$$

ve son olarak $u = sinx$ değeri yerine yazılırsa sonuç integral;

$$I=\int \sin^5 x.\cos^7 d.dx=\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{3}{8}\sin^8 x+\frac{3}{10}\sin^{10} x-\frac{\sin^{12} x}{12}+c$$

olarak bulunur .

2.Yol:

$$I=\int \sin^5 x.\cos^7 .dx=\int \sin^4 x.\cos^6 x.\sin x.dx$$

şeklinde ayırıp $u=cosx$ dersek $du=-sinx.dx$ ve $sin^2x=1-cos^2x=1-u^2$ olur. Buna göre;

$$I=\int \sin^5 x.\cos^7 ..dx=-\int (1-u^2)^2 u^7 .du=-\int u^7 du+2\int u^9 .du-u^{11}.du$$

$$=-\frac{u^8}{8}+\frac{u^{10}}{5}-\frac{u^{12}}{12}+c$$

$$=-\frac{\cos^8 x}{8}+\frac{\cos^{10} x}{5}-\frac{\cos^{12} x}{12}+c$$

olarak bulunur.

Örnek 3.34:

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 x.dx$$

integralini bulalım.

Çözüm 3.34:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

değerleri I integralinde yerine yazalım.

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 x.dx=\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x).\frac{1}{4}.(1+\cos 2x)^2 .dx$$

$$=\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x+\cos^2 2x).dx$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int \cos 2x dx-\frac{1}{8}\int \cos^2 2x dx-\frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx$$

olur. Buna göre daha önceki örneklerimizde gördüğümüz gibi sonuç integrali;

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 x dx=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$$

veya

$$I=\int \sin^2 x.\cos^4 x dx=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^2 2x+c \quad \textit{olarak elde edilir.}$$

3.4.11. $I_{11}=\int f(\sin x,\cos x)dx$ **şeklindeki integraller :**

sinx ve/veya cosx içeren rasyonel integrallerde aşağıdaki durumlar söz konusu olabilir.

i)

$$\int f(\sin x,\cos x)dx$$

integralinde sinx yerine -sinx yazıldığında ilk integralin negatifi elde ediliyorsa yani;

$$\int f(-\sin x,\cos x)dx=-\int f(\sin x,\cos x)dx$$

oluyorsa verilen integral;

$$I=\int(\cos x).\sin x dx$$

şeklini alır. Buna göre cosx=u dersek, -sinxdx=du ve $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-u^2$ olur. Bu dönüşümler yardımıyla;

$$\int f(\sin x,\cos x)dx=-\int R(u)du$$

şeklinde bir rasyonel integrale dönüşür.

ii)

$$\int f(\sin x,\cos x)dx$$

integralinde cosx yerine –cosx yazıldığında ilk integralin negatifi elde ediliyorsa yani;

$$\int f(\sin x,-\cos x)dx=-\int f(\sin x,\cos x)dx$$

oluyorsa verilen integral;

$$I = \int f(\sin x)\cos x dx$$

şeklini alır. Böylece, bu son integralde u=sinx dersek;du=cosxdx ve $\cos^2 x = 1-\sin^2 x = 1-u^2$ olur. Bu değerler en son integralde yerine yazılacak olursa;

$$I = \int f(\sin x)\cos x dx = \int R(u) du$$

şeklinde bir rasyonel integrale dönüşür. Şimdi 3-4-11'deki integraller için üçüncü duruma geçmeden önce ilk iki duruma ait bir örnek verelim.

Örnek 3.35:

$$\int \frac{\sin^3 x.\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

integralini bulalım.

Çözüm 3.35:

$$\int \frac{\sin^3 x.\cos^2 x dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x.\cos^2 .\sin x dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

olsun. Burada cosx=u dersek $-\sin x dx = du$ ve $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-u^2$ olur. Böylece I integralimiz;

$$I = \int \frac{\sin^3 x.\cos^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{(1\ \ u^2).u^2 du}{1\ \ u^2 + 2u^2} = \int \frac{u^2.(u^2\ \ 1)}{1+u^2} du$$

$$I = \int \frac{u^4\ \ u^2}{1+u^2} du = \int u^2\ \ 2 + \frac{2}{1+u^2}\ du = \int u^2 du\ \ 2\int du + 2\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$I = \frac{u^3}{3}\ \ 2u + 2\arctan u + c = \frac{1}{3}\cos^3 x\ \ 2\cos x + 2\arctan(\cos x) + c$$

olarak bulunur.

iii) $I = \int f(\sin x, cosx) dx$ **şeklindeki integraller;**

Eğer, sinx ve cosx'in rasyonel fonksiyonunu içeren integrallerde yukarıdaki iki durumda yapılan dönüşümler uygulanamıyorsa bu tip fonksiyonları içeren integrallerde;

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

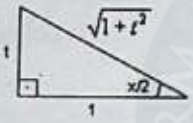
dönüşümü yapılır. Buna göre;

$$t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\arctan t \quad ve \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

olur. Şimdi;

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

dönüşümüne bağlı olarak sinx ve cosx değerlerini bulalım.



$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

özdeşliklerinden yararlanılarak;

$$\sin x = 2.\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2}{1+t^2}$$

ve

$$\cos x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

olarak bulunur. Bu değerler I integralinde yerine yazılırsa;

$$I = \int f(\sin x, \cos x)dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R(t)dt$$

şekline dönüşür. Şimdi bu çeşit integraller için birkaç örnek çözelim.

Örnek 3.36:

$$I = \int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$$

integralini çözelim

Çözüm 3.36:

$\tan\frac{x}{2}=t$ *dersek* $x=2\arctan t$ *ve* $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ *olur.*

Ayrıca;

$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ *ve* $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ *idi. Buna göre;*

$$I=\frac{\sin x dx}{1+\sin x}=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{4tdt}{(1+t^2).(1+t)^2}\ olur.$$

$$\frac{4t}{(1+t^2).(1+t)^2}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2}$$

olacak şekilde kısmi kesirlerin toplamı olarak yazarsak;

$$4t\equiv(At+B).(1+t)^2+C(1+t).(1+t^2)+D.(1+t^2)$$

$$4t\equiv(A+C)t^3+(2A+B+C+D)t^2+(A+2B+C)t+(B+C+D)\ \ olur.$$

Buna göre bu son eşitlikten;

$$\left.\begin{array}{l}A+C=0\\2A+B+C+D=0\\A+2B+C4\\B+C+D=0\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}A=0\\B=2\\C=0\\D=-2\end{array}$$

olarak belirlenir ve bu değerler integralimizde yerine konursa;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \frac{4tdt}{(1+t^2).(1+t)^2} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \quad \int \frac{2dt}{(1+t)^2}$$

$$= 2\arctan t + \frac{2}{1+t} + c \quad \text{ve} \quad t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = 2\arctan \tan\frac{x}{2} + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c$$

$$\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x} = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + c \quad \text{elde edilir.}$$

Örnek 3.37:

$$I = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos x + \cos 2x}$$

integralini bulalım.

Çözüm 3.37:

cosx=u dersek $-\sin x dx = du$ ve $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ olur. Böylece;

$$I = \int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\cos 2x} = -\int \frac{du}{1+u+2u^2-1} = -\int \frac{du}{2u^2+u} = -\int \frac{du}{u(2u+1)}$$

şekline gelir. Buna göre son integralimizi kısmi kesirlerin toplamı olarak yazacak olursak;

$$-\frac{1}{u(2u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{2u+1}$$

şekline gelir ve buradan;

$-1 = A(2u+1) + B.u$ elde edilir. Böylece;

$$\left.\begin{aligned} 2A+B &= 0 \\ A &= -1 \end{aligned}\right\} B = +2$$

bulunur. Sonuç olarak I integrali;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I=\int\frac{\sin x dx}{1+\cos x+\cos 2x}=-\int\frac{du}{u(2u+1)}=-\int\frac{du}{u}+2\int\frac{du}{2u+1}$$

$$I=-Ln|u|+2Ln|2u+1|+c$$

$$I=-Ln|\cos x|+2Ln|2\cos x+1|+c \quad olur.$$

Örnek 3.38:

$$I=\int\frac{dx}{5-3\cos x}$$ integralini çözelim.

Çözüm 3.38:

$$\tan\frac{x}{2}=t \quad dersek \quad x=2\arctan t \quad ve \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2} \quad olur.$$

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad ve \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad idi. \quad Buna \ göre;$$

$$I=\int\frac{dx}{5-3\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-3.\frac{(1-t^2)}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{1+4t^2} \quad olur. \quad Burada;$$

u=2t dersek du=2.dt ve $u^2=4t^2$ olur. Böylece son integralimiz;

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{2}\arctan u+c$$

$$I=\frac{1}{2}\arctan 2t+c=\frac{1}{2}\arctan(2\tan\frac{x}{2})+c$$

olarak bulunur.

Örnek 3.39:

$$I=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$$ integralini bulalım.

Çözüm 3.39:

Bu tip integrallerde 3.4.3'de olduğu gibi u=tanx dönüşümü yapılır ve

$$x=\arctan u \Rightarrow dx=\frac{du}{1+u^2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. Böylece I integralimiz;

$$I=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\int\frac{1-u}{1+u}.\frac{du}{1+u^2}$$

şekline gelir. Şimdi bu son integralimizin hesabı için;

$$\frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)}=\frac{A}{1+u}+\frac{Bu+C}{1+u^2}$$

şeklinde basit kesirlere ayırıp gerekli işlemleri yapalım. Böylece;

$$1-u=A(1+u^2)+(Bu+C)(1+u)$$
$$=(A+B)u^2+(B+C)u+(A+C)$$

ve buradan;

$$\left.\begin{array}{l}A+B=0\\B+C=-1\\A+C=1\end{array}\right\}\qquad\begin{array}{l}A=1\\B=-1\\C=0\end{array}$$

olarak bulunur. Bu değerler son ifadede yerine yazılırsa;

$$I=\int\frac{(1-u)}{(1+u)(1+u^2)}du=\int\frac{du}{1+u}-\int\frac{u.du}{1+u^2}$$

$$=\ln|1+u|-\frac{1}{2}\ln|1+u^2|+c$$

olarak elde edilir. Böylece bu sonuçta $u=tanx$ değeri yerine yazılacak olursa;

$$I=\int\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx=\ln\left|\frac{1+\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\right|+c \quad \text{bulunur.}$$

Örnek 3.40:

$I = \int \sec x \tan^3 x.dx$ integralini hesaplayın.

Çözüm 3.40:

$$I = \int \sec x.\tan^3 x.dx = \int \sec x.\tan x.\tan^2 x.dx$$

$$= \int \sec x.\tan x(\sec^2 x - 1).dx$$

$$= \int \sec^2 x(\sec x.\tan x).dx - \int \sec x.\tan x.dx$$

şeklinde yazalım. $u=secx$ dersek $du=secx.tanx.dx$ olur. Böylece, bu son iki integrali ayrı ayrı hesaplayacak olursak;

$$\int \sec x.\tan x.dx = \int du = u + c = \sec x + c$$

$$\int \sec^2 x(\sec x.\tan x).dx = \int u^2.du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{\sec^3 x}{3} + c$$

olarak bulunur.Buna göre hesaplanan bu iki integral I integralinde yerine yazılacak olursa;

$$I = \int \sec x.\tan^3 x.dx = \frac{\sec^3 x}{3} + \sec x + c$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.41:

$$I = \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$$ integralini hesaplayalım.

Çözüm 3.41:

İntegralimiz *sinx* ve *cosx*' i içeren bir rasyonel integral olduğundan;

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

dönüşümü uygulayamayız. Buna göre;

$$x = 2Arc\tan t \quad ve \quad dx = \frac{2.dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ve \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad idi.$$

olur. Bu değerler I integralinde yerine yazılırsa;

$$I=\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{\frac{2.dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{(1-t^2)}{1+t^2}}$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-8t+15}=2\int\frac{dt}{(t-3)(t-5)}$$

şekline gelir. Bu son integrali bulabilmek için;

$$\frac{1}{(t-3)(t-5)}=\frac{A}{t-3}+\frac{B}{t-5}$$

şeklinde basit kesirlere ayıracak olursak;

$$1=A(t-5)+B(t-3)$$
$$1=t(A+B)+(-5A-3B)$$

ve buradan;

$$\left.\begin{matrix}A+B=0\\-5A-3B=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}A=-\frac{1}{2}\\B=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

olarak bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa;

$$I=2\int\frac{dt}{(t-3)(t-5)}=2\left(-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-3}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-5}\right)$$

$$=\int\frac{dt}{t-5}-\int\frac{dt}{t-3}$$

$$=\ln|t-5|-\ln|t-3|+c$$

$$=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-5}{\tan\frac{x}{2}-3}\right|+c$$ sonucu bulunur.

Trigonometrik İntegrallere Ait Alıştırmalar

1. $\int \frac{3\cos x}{\sin x + 2} dx$

2. $\int \frac{\sin 2x dx}{1 - \sin^2} dx$

3. $\int \tan^3 x dx$

4. $\int \sin^2 4x dx$

5. $\int \sin 5x . \sin 4x dx$

6. $\int \cos^2 2x dx$

7. $\int \cos 5x . \cos 3x dx$

8. $\int \sin 3x . \cos 3x dx$

9. $\int \sin 3x . \cos 2x dx$

10. $\int \sin^3 x dx$

11. $\int \sin^7 x dx$

12. $\int \sin^2 x dx$

13. $\int \sin^4 x dx$

14. $\int (\cos x)^5 dx$

15. $\int \cos^4 x dx$

16. $\int \tan 3x dx$

17. $\int \sin^3 x.\cos^4 x dx$

18. $\int \sin^5 x.\cos^7 x dx$

19. $\int \sin^2 x.\cos^4 x dx$

20. $\int \frac{\sin^3 x.\cos^2 x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$

21. $\int \operatorname{cosec} x dx$

22. $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$

23. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$

24. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

25. $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos x+\cos 2x}$

26. $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$

27. $\int \sin^4 x.\cos^4 x dx$

28. $\int 2\tan 3x dx$

29. $\int \frac{4\cos 2t-2}{\sin 2t} dt$

30. $\int \operatorname{cosec}^4 x dx$

31. $\int \sec x.\tan^3 x dx$

32. $\int \cot^3 x dx$

33. $\int_0^{7/4} \tan^4 x dx$

34. $\int \sin x.\cos^7 x dx$

35. $\int \sin^2 x.\cos x dx$

36. $\int \sin^2 x.\cos^2 x dx$

37. $\int \sin^5 x.\cos x dx$

38. $\int \sin^2 3x.\cos^2 3x dx$

39. $\int \sin x.\cos^5 5x dx$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3.5. Trigonometrik Yerine Koyma Metodu :

$(a^2 - x^2)^p$, $(x^2 - a^2)^p$ ve $(x^2 + a^2)^p$, $p \in Q$

şeklindeki ifadeleri içeren integrallerde aşağıda ayrı ayrı ele alacağımız trigonometrik dönüşümler uygulanır. Şimdi sırasıyla bunları inceleyelim.

3.5.1. $I = \int f(x,(a^2 - x^2)^p)dx, (p \in Q)$ şeklindeki integraller :

Bu tip integrallerde;

$x = a\sin\theta$ dönüşümü uygulanırsa $dx = a.\cos\theta.d\theta$ olur.

Buna göre;

$$I = \int f(a\sin\theta,(a^2 - a^2\sin^2\theta)^p).a\cos\theta.d\theta$$

integrali θ'ya bağlı bir integrale dönüşüp sonuçta tekrar x'e dönülerek istenen çözüm elde edilir.

Örnek 3.42:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

integralini bulalım.

Çözüm.3.42:

$x = a\sin\theta$ dersek $dx = a\cos\theta d\theta$ olur. Bu değerleri yukarıdaki integralde yerine yazarsak;

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a.\cos\theta\, .d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2.\sin^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta.}{\sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta)}}$$

$$I = \int \frac{a\cos\theta.d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}} = \int \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + c$$

olur. Şimdi ilk dönüşümden θ'yı x'e bağlı çözelim.

$$x = a\sin\theta \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin\theta \qquad \text{ve} \qquad \theta = \arcsin\frac{x}{a}$$

bulunur. Böylece sonuç integralimiz;

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$$

olacak şekilde bulunur.

3.5.2. $I = \int f(x,(a^2+x^2)^p)dx$ $(p \in Q)$ şeklindeki integraller

Bu tip integrallerde;

$x=a\tan\theta$ veya $x=\sinh\theta$ dönüşümü uygulanır. Buna göre; $dx=a\sec^2\theta d\theta$ veya $dx=a\cosh\theta$ olur. Böylece;

$$I = \int f(a\tan\theta,(a^2 + a^2\tan^2\theta)^p).a\sec^2\theta.d\theta$$

şeklinde θ'ya bağlı bir integrale dönüşür.

Örnek.3.43:

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

integralini bulalım.

Çözüm.3.43:

$x=a\tan\theta$ dersek $dx=a\sec^2\theta d\theta$ olur. Buna göre;

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta.d\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta.d\theta}{a^2(\tan^2\theta + 1)}$$

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta.d\theta}{a^2\sec^2\theta} = \frac{I}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}.\theta + c$$ olarak bulunur θ'yı x cinsinden yazacak olursak

$$x = a.\tan\theta \Rightarrow \frac{x}{a} = \tan\theta \qquad \text{ve} \qquad \theta = \arctan\frac{x}{a}$$ elde edilir

Sonuç olarak integralimizi;

$$I = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}.\arctan\frac{x}{a} + c \text{ buluruz}$$

3.5.3. $I = \int f(x, (x^2 - a^2)^p)dx, (p \in Q)$ **şeklindeki integraller**

Bu tip integrallerde ise;

x=*a***sec**ϑ veya **x=***a***cosh**ϑ dönüşümü yapılır.

Buna göre;

dx=*a***sec**ϑ**.tan**ϑ**.d**ϑ veya **dx=***a***sinh**ϑ**.d**ϑ olur. Böylece;

$$I = \int f(a\sec\vartheta, (a^2\sec^2\vartheta - a^2)^p).a\sec\vartheta\tan\vartheta d\vartheta$$

şeklinde ϑ 'ya bağlı bir integrale dönüşür. Bu integralin sonucunda ϑ, **x**'e dönüştürülerek istenilen çözüme ulaşılır.

Örnek.3.44:

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

integralini hesaplayalım.

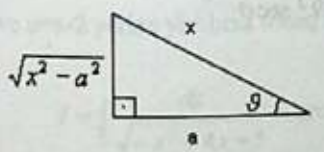
Çözüm.3.44:

x=*a***sec**ϑ dersek **dx=***a***sec**ϑ**.tan**ϑ**.d**ϑ olur. Buna göre;

$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a\sec\vartheta.a\sec\vartheta.\tan\vartheta d\vartheta}{\sqrt{a^2\sec^2\vartheta - a^2}} = \int \frac{a^2.\sec^2\vartheta.\tan\vartheta d\vartheta}{\sqrt{a^2(\sec^2\vartheta - 1)}}$$

$$I = \int \frac{a^2\sec^2\vartheta\tan\vartheta d\vartheta}{\sqrt{a^2\tan^2\vartheta}} = a\int \sec^2\vartheta d\vartheta = a.\tan\vartheta + c \quad olur.$$

Şimdi **tan**ϑ'yı **x** cinsinden belirleyelim. Buna göre;



$$I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a.\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} + c = \sqrt{x^2 - a^2} + c$$

olarak bulunur.

Şimdi konunun daha iyi anlaşılması için trigonometrik yerine koyma metoduna ait birkaç örnek daha çözelim.

Örnek.3.45:

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

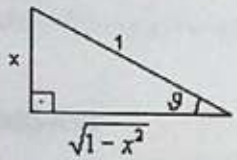
integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.45:

x=sinϑ dersek **dx=cosϑ.dϑ** olur. Buna göre;

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{\sin^2\vartheta.\sqrt{1-\sin^2\vartheta}}=\int\frac{\cos\vartheta d\vartheta}{\sin^2\vartheta.\cos\vartheta}=\int\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta}=-\cot\vartheta+c$$

olur. Buna göre cotϑ değerini hesaplayalım.



$$\sin\vartheta=x\Rightarrow\cot\vartheta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Sonuç olarak;

$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c \quad \textit{elde edilir.}$$

Örnek.3.46: $I=\int\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$ integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.46:

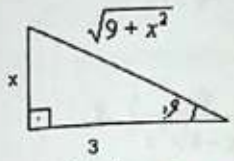
$$I=\int\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}=\int\frac{3\sec\vartheta d\vartheta}{(9+9\tan^2\vartheta)^{3/2}}=\int\frac{3\sec^2\vartheta d\vartheta}{27\sec^3\vartheta}=\frac{1}{9}\int\frac{d\vartheta}{\sec\vartheta}$$

$$I=\frac{1}{9}\int\cos\vartheta d\vartheta=\frac{1}{9}\sin\vartheta+c$$

olarak bulunur. Şimdi de sinϑ'yı x cinsinden bulalım.

Böylece sonuç integralimiz;

$$\tan\vartheta=\frac{x}{3}\Rightarrow \sin\vartheta=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$$



$$I=\int\frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{9}\cdot\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+c$$

şeklinde bulunur.

Örnek.3.47:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$$

integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.47:

$-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9=9-(x-2)^2$ şeklinde yazalım. Burada, u=x-2 dönüşümü yapılırsa du=dx olur. Böylece;

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{9-u^2}}$$

şekline dönüşür. Şimdi bu integrali ayrıca çözelim.

u=3sinϑ dersek **du=3cosϑ. dϑ** olur. Buna göre;

$$I=\int\frac{du}{\sqrt{9-u^2}}=\int\frac{3\cos\vartheta d\vartheta}{\sqrt{9-9\sin^2\vartheta}}=\int\frac{3\cos\vartheta d\vartheta}{\sqrt{9(1-\sin^2\vartheta)}}=\int\frac{3\cos\vartheta d\vartheta}{3\cos\vartheta}=\int d\vartheta=\vartheta+c$$

olur ve ϑ, u cinsinden tekrar hesaplanacak olursa;

$$u=3\sin\vartheta\Rightarrow\frac{u}{3}=\sin\vartheta\Rightarrow\vartheta=\arcsin\frac{u}{3}$$

ve u=x-2 yerine yazılırsa sonuç integral;

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}=\arcsin\frac{x-2}{3}+c$$

şeklinde bulunur.

Örnek.3.48:

$I = \int x^3\sqrt{x^2-25}dx$

integralini hesaplayalım .

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm.3.48 :

$x = 5\sec\vartheta$ dersek $dx = 5\sec\vartheta\tan\vartheta d\vartheta$ olur.

Böylece integralimiz .

$$I = \int x^3\sqrt{x^2-25}dx = \int 125.\sec^3\vartheta.\sqrt{25\sec^2\vartheta-25}.5\sec\vartheta.\tan\vartheta d\vartheta$$

$$I = 3125\int \sec^4\vartheta.\tan^2\vartheta d\vartheta$$

$$I = 3125\int (\tan^2\vartheta+1).\sec^2\vartheta.\tan^2\vartheta d\vartheta$$

şekline dönüşür. Burada **u=tanϑ** dersek **du=sec²ϑ. dϑ** olur. Sonuç olarak, bu dönüşüme göre integralimiz;

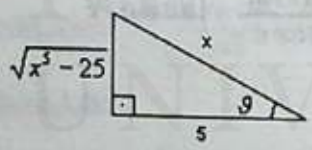
$$I = 3125\int (1+u^2).u^2du = 3125\int (u^2+u^4)du = 3125\left(\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}\right)+c$$

$$I = 3125\int\left(\frac{\tan^3\vartheta}{3}+\frac{\tan^5\vartheta}{5}\right)+c$$

şekline dönüşür. Tekrar ϑ değişkeninden x değişkenine dönecek olursak;

$$x = 5\sec\vartheta \Rightarrow \frac{x}{5} = \sec\vartheta$$

ve buna göre;



$$\tan\vartheta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}$$

olarak bulunur. Bu değer sonuç ifadede yerine yazılırsa baştaki integralimiz;

$$I = \int x^3\sqrt{x^2-25}dx = \frac{25}{3}(x^2-25)^{3/2}+\frac{1}{5}(x^2-25)^{5/2}+c$$

olarak elde edilir.

Alıştırmalar

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

7. $\int \sqrt{16-x^2}.dx$

8. $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{2x^2}.dx$

9. $\int 5x^3\sqrt{x^2+4}.dx$

10. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$

11. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$

12. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}.dx$

13. $\int \frac{3dt}{\sqrt{9t^2-1}}$

14. $\int \frac{2dt}{2t\sqrt{1-4t^2}}$

15. $\int \frac{x^3.dx}{\sqrt{x^2-2}}$

16. $\int \frac{2dx}{4x^2\sqrt{9+4x^2}}$

3.6 CEBİRSEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Cebirsel fonksiyonların integrallerinde şimdiye kadar kısmi integrasyon ve değişken değiştirme yöntemleri ile çözülebilen cebirsel fonksiyonlarla ilgilenmiştik. Bu yöntemlerle bulunamayan cebirsel fonksiyonların integralleri uygun bir değişken dönüşümü ile bir rasyonel fonksiyonun integraline dönüşürler. Bu tip dönüşümler üç alt başlık halinde incelenebilir.

i)

$$I=\int f\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx \quad (a\neq 0) \quad (n\in IN)\ (a,b\in R)$$

şeklinde integraller:

Bu tip integrallerde;

$$u=\sqrt[n]{ax+b}$$

dönüşümü yapılır. Buna göre;

$$u^n=ax+b\Rightarrow x=\frac{1}{a}\left(u^n-b\right) \quad \text{ve} \quad dx=\frac{1}{a}.n.u^{n-1}.du$$

olur. Buradan;

$$I=\int f\left(\left(\frac{1}{a}\left(u^n-b\right),u\right)\right)\frac{1}{a}.n.u^{n-1}.du=\int f\ (u)du$$

şeklinde rasyonel bir integrale dönüşür.

Örnek 3.49:

$$I=\int\left(x\sqrt[3]{3x-5}\right)dx$$

integralini bulalım.

Çözüm.3.49:

$$u=\sqrt[3]{3x-5}\Rightarrow u^3=3x-5 \quad \text{ve} \quad x=\frac{1}{3}\left(u^3+5\right)$$

olur. Buna göre $dx=u^2du$ elde edilir. Bu değerler I integralinde yerine yazılacak olursa;

$$I=\int\frac{1}{3}\left(u^3+5\right)uu^2.du=\frac{1}{3}\int u^6.du+\frac{5}{3}\int u^3du$$

$$I=\frac{1}{21}u^7+\frac{5}{12}u^4+c=\frac{1}{21}(3x-5)^{7/3}+\frac{5}{12}(3x-5)^{4/3}+c$$

şeklinde bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ii)

$$I=\int f\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \quad (a\neq 0, c\neq 0)\ (a,b,c,d\varepsilon\, IR)(ad-bc\neq 0)$$

şeklinde integraller:

Bu tip integrallerde;

$$u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

dönüşümü yapılırsa ;

$$u^n=\frac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow x=\frac{-du^n+b}{cu^n-a}$$

olur ve buradan;

$$dx=\frac{(ad-bc)}{(cu^n-a)^2}.nu^{n-1}.du$$

bulunur. Buna göre;

$$I=\int f\left(\frac{-du^n+b}{cu^{n-a}},u\right)\frac{(ad-bc)}{(cu^n-a)^2}nu^{n-1}.du=\int f^*(u).du$$

şeklinde u' ya bağlı rasyonel bir integrale dönüşür.

Örnek.3.50:

$$I=\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}dx$$

integralini bulalım.

Çözüm.3.50:

$$u=\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$$

dersek;

$$u^2=\frac{2x-1}{x+1}\Rightarrow x=\frac{-1-u^2}{u^2-2} \qquad ve \qquad dx=\frac{6u.du}{(u^2-2)^2}$$

olur. Bu değerler integralimizde yerine yazılırsa;

$$I=\int\frac{u^2-2}{-u^2-1}u\frac{6u}{(u^2-2)^2}.du=-6\int\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2-2)}du$$

şekline gelir. Şimdi bu integrali bulalım. Buna göre;

$$\frac{u^2}{(u^2+1)(u^2-2)}=\frac{Au+B}{u^2+1}+\frac{C}{u-\sqrt{2}}+\frac{D}{u+\sqrt{2}}$$

şeklinde yazılırsa;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$u^2 = (Au+B)(u-\sqrt{2})(u+\sqrt{2}) + C(u+\sqrt{2})(u^2+1) + D(u^2+1)(u-E)$$

olarak elde edilir. Buradan;

$$u=\sqrt{2} \quad için \quad 2 = 6\sqrt{2}C \Rightarrow C = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$u=-2 \quad için \quad 2 = -6\sqrt{2}D \Rightarrow D = -\frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$u=0 \quad için \quad 0 = -2B + \sqrt{2}C - \sqrt{2}D \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$u=1 \quad için \quad 1 = -A - B + 2(1+\sqrt{2})C + 2(1-\sqrt{2})D \Rightarrow A = 0$$

bulunur. Bu değerler tekrar yerine yazılarak;

$$I = -6\int\left(\frac{1}{3}\frac{1}{u^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{1}{u+\sqrt{2}}\right)du$$

veya;

$$I = -2\int\frac{du}{u^2+1} - \sqrt{2}\int\frac{du}{u-\sqrt{2}} + \sqrt{2}\int\frac{du}{u+\sqrt{2}}$$

$$= -2\arctan u - \sqrt{2}\ln|u-\sqrt{2}| + \sqrt{2}\ln|u+\sqrt{2}| + c$$

$$= -2\arctan u + \sqrt{2}\ln\left|\frac{u+\sqrt{2}}{u-\sqrt{2}}\right| + c$$

olur. Bu sonuçta **u** değeri yerine yazılırsa integralimiz;

$$I = \int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}dx = -2\arctan\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}+\sqrt{2}}\right| + c$$

şeklinde bulunur.

iii) (ax+b)^n şeklinde integraller

a≠0 olmak üzere **(ax+b)**'nin rasyonel kuvvetlerini içeren rasyonel bir fonksiyonun integralini ele alalım. Bu integrali bulmak için ***ax+b***' nin rasyonel kuvvetlerinin paydalarının en küçük ortak katı ***n*** olmak üzere;

$$u = \sqrt[n]{ax+b}$$

dönüşümü yapılır. Böylece ***u***' nun rasyonel bir fonksiyonunun integrali elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek.3.51:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}dx$$

İntegralini hesaplayalım.

Çözüm.3.51:

$u=\sqrt{x}$ *dersek* $u^2=x$ *ve* $2u.du=dx$ *olur.*

Buna göre;

$$I=\int\frac{(u+2).2u.du}{u-1}=\int\frac{2u^2+4u}{u-1}du=2\int\left(u+3+\frac{3}{u-1}\right)du$$

$$=2\int u.du+6\int du+6\int\frac{du}{u-1}=u^2+6u+6\ln|u-1|+c$$

$$=x+6\sqrt{x}+6\ln|\sqrt{x}-1|+c$$

olarak bulunur. Şimdi cebirsel fonksiyonların integrallerine ait birkaç örnek problem çözelim.

Örnek.3.52:

$$I=\int\frac{\sqrt{x}.dx}{1+\sqrt[4]{x^3}}$$

integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.52:

$$I=\int\frac{x^{1/2}dx}{1+x^{3/4}}$$

şeklinde yazalım. Burada x'in kuvvetlerinin e.k.o.k'u 1/4 olduğundan;

$u=x^{1/4}$ *dersek* $x=u^4$ ve $dx=4u^3du$

elde edilir. Buradan;

$$I=\int\frac{u^2 4u^3}{1+u^3}.du=4\int\frac{u^5}{1+u^3}.du$$

olur. Pay paydadan büyük olduğundan, pay paydaya bölünerek I integrali;

$$I=4\int\frac{u^5}{1+3}du=4\int\left(u^2-\frac{u^2}{1+u^3}\right)du=4\int u^2.du-4\int\frac{u^2du}{1+u^3}$$

şekline dönüşür. Burada ikinci integrali ayrıca hesap edersek ;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \frac{u^2}{1+u^3}.du = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t = \frac{1}{3}\ln\left|1+u^3\right| + c$$

$$1+u^3 = t$$
$$3u^2 du = dt$$
$$u^2 du = \frac{dt}{3}$$

olarak elde edilir ve bu yerine yazılacak olursa;

$$I = \frac{4}{3}u^3 - \frac{4}{3}\ln\left|1+u^3\right| + c = \frac{3}{4}x^{3/4} - \frac{4}{3}\ln\left|1+x^{3/4}\right| + c$$

sonucunu buluruz.

Örnek.3.53:

$$I = \int \frac{(x+5)}{(x+4)\sqrt{x+2}}.dx$$

Çözüm.3.53:

$u = \sqrt{x+2}$ *dersek* $u^2 = x+2 \Rightarrow x = u^2 - 2$ *ve* $dx = 2udu$

olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa;

$$I = \int \frac{\left(u^2-2+5\right)}{\left(u^2-2+4\right)u}.2u.du = 2\int \frac{u^2+3}{u^2+2}.du$$

şekline dönüşür. Buradan;

$$I = 2\int \frac{u^2+3}{u^2+2}.du = 2\int \frac{u^2+2}{u^2+2}du + 2\int \frac{du}{u^2+2}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$2\int \frac{du}{u^2+2}$$

integrali daha önce incelediğimiz trigonometrik yerine koyma metodundaki gibi;

$$u = \sqrt{2}\tan\theta$$

dönüşümü uygulanarak çözülür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek.3.54:

$$I=\int \frac{x^{1/6}+1}{x^{7/6}+x^{5/4}}.dx$$

integralini hesaplayalım.

Çözüm.3.54:

x'in kuvvetlerinin e.k.o.k'u **12** olup $u=x^{1/2}$ dönüşümünü yaparsak $x=u^{12}$ ve $dx=12u^{11}du$ olur. Böylece I integrali;

$$I=\int \frac{x^{1/6}+1}{x^{7/6}+x^{5/4}}.dx=\int \frac{\left(u^2+1\right)12u^{11}}{\left(u^{14}+u^{15}\right)}du=12\int \frac{\left(u^2+1\right)}{u^3(u+1)}du$$

şekline dönüşür .Şimdi bu son integrali bulalım. Buradan;

$$\frac{\left(u^2+1\right)}{u^3(u+1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u^2}+\frac{C}{u^3}+\frac{D}{u+1}$$

ve

$$u^2+1=(A+D)u^3+(A+B)u^2+(B+C)u+c$$

olur. Böylece;

$$\left.\begin{array}{r} A+D=0 \\ A+B=1 \\ B+C=0 \\ C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B=-1 \\ A=2 \\ D=-2 \end{array}$$

olarak elde edilip bu değerler yerine yazılırsa;

$$I=\int \frac{\left(u^2+1\right)du}{u^3(1+u)}=12\left[2\int \frac{du}{u}-\int \frac{du}{u^2}+\int \frac{du}{u^3}-2\int \frac{du}{1+u}\right]$$

$$=12\left[\ln\left(\frac{u}{1+u}\right)^2+\frac{u-1}{2u^2}\right]+c$$

$$=12\left[\ln\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{1+\sqrt[12]{x}}\right)^2+\frac{\sqrt[12]{x}-1}{\left(2\sqrt[12]{x}\right)^2}\right]+c$$

sonucu bulunur .

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ALIŞTIRMALAR

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ $\quad (2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + c)$

2. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$ $\quad (2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + c)$

3. $\int \frac{dx}{x-\sqrt[3]{x}}$ $\quad (\frac{3}{2}\ln\left|x^{1/3}-1\right| + c)$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x^3}}$ $\quad (4\sqrt[4]{x} - \ln x + c)$

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x}}$ $\quad \frac{3}{5}\sqrt[3]{(1+x)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} + c$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ $\quad (\frac{2}{3}\sqrt{x-1}(x+2) + c)$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.dx$ $\quad (\sqrt{x^2-1} - Arc\tan\sqrt{x^2-1} + c)$

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-7x}}$ $\quad (-\frac{2}{147}\sqrt{2-7x}(7x+4) + c)$

9. $\int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{3/2}}$ $\quad (\frac{6x^2+6x+1}{12(4x+1)^{3/2}} + c)$

10. $\int \frac{dx}{x^{1/8}+x^{1/4}}$ $\quad (4x^{1/4} - 8x^{1/8} + \ln\left(x^{1/8}+1\right) + c)$

11. $\int \frac{xdx}{(1+x)^{3/2}}$ $\quad (2\left(\frac{2+x}{\sqrt{1+x}}\right) + c)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

12. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+c\right)$

13. $\int \frac{(x+5)dx}{(x+4)\sqrt{x+2}}$ $\left(2\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x+2}{2}}+c\right)$.

14. $\int \frac{\left(x^{3/2}-x^{1/3}\right)dx}{6x^{1/4}}$ $\left(\frac{2}{27}x^{9/4}-\frac{12}{3}x^{13/12}+c\right)$

15. $\int x\sqrt[3]{1+x}.dx$ $\left(\frac{3}{28}(1+x)^{4/3}\times(4x-3)+c\right)$

16. $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ (0,6435)

17. $\int_0^1 \frac{x^{3/2}dx}{x+1}$ (0,2375)

18. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ (1,803)

19. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{2x}\left(9+\sqrt[3]{2x}\right)}$ (0,1042)

20. $\int_1^4 \frac{x.dx}{\sqrt{4x+2}}$ 2.121

21. $\int x\sqrt[3]{2x+3}.dx$

22. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}.dx$

23. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

24. $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}.dx$

25. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

26. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^{3/2}}$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$

30. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+5}}.dx$

31. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}.dx$

32. $\int \frac{\cos 2x}{3+4\sin 2x}.dx$

33. $\int x\sqrt{3+2x}.dx$

34. $\int \frac{\sqrt{x^{1/2}}}{1+\sqrt[4]{x^{3/4}}}.dx$

35. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$

36. $\int \sqrt{9-4x^2}\,dx$

37. $\int \frac{(x+5)dx}{(x+4)\sqrt{x+2}}$

38. $\int_2^4 \sqrt{x^2-4}.dx$

39. $\int \frac{x^{1/6}+1}{x^{1/6}+x^{1/4}}.dx$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

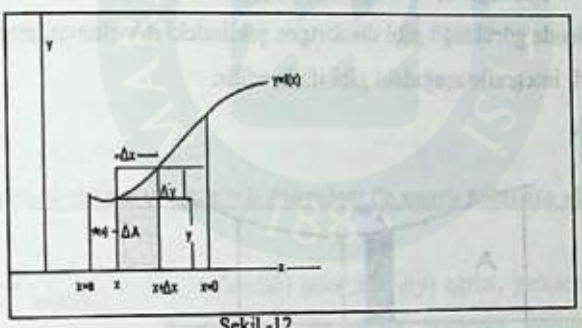
BÖLÜM 4. BELİRLİ İNTEGRALİN UYGULAMALARI

Bu bölümde, belirli integralin uygulamaları başlığı altında bir eğri altında kalan alan hesabı, iki eğri arasında kalan alan, dönel cisimlerin hacmi, dönel yüzeylerin yanal alanı, yay uzunluğu, ağırlık ve kütle merkezi, ortalama ve etkin değer ve dönel yüzeylerin yanal alanları gibi konular ele alınacak ve bu konulara ait örnekler çözülecektir.

4.1. Bir Eğri Altında Kalan Alan Hesabı

4.1.1. y = f(x) eğrisi, x – ekseni, x = a ve x = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı

y = f(x) eğrisi, x – ekseni, x = a ve x = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanı aşağıdaki gibi olsun. (Şekil -12)



Şekil -12

f(x), [a,b] aralığında pozitif olsun (Şekil 12) ve **A = A(x)** fonksiyonu **x=a'dan a≤ x ≤b aralığındaki x'e** kadar alanı temsil eder. **ΔA** ise **x** ile **x+Δx** arasındaki değişimi ifade eder. Buna göre;

$$y.\Delta x \le \Delta A \le (y+\Delta y).\Delta x$$

olduğu açıktır . Bu son ifadeyi Δx ile bölersek;

$$y \le \frac{\Delta A}{\Delta x} \le y+\Delta y$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, **A** alanının x'e göre değişim oranının y ile y+Δy arasında olduğunu gösterir.

$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ için;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{dA}{dx}$$ ve burada eşitsizlik:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y \le \frac{dA}{dx} \le y$ olur. Böylece $y = \frac{dA}{dx}$ ve buradan her iki tarafın integrali alınarak;

$$\int dA = \int ydx \Rightarrow A = \int y.dx$$

veya

$$A = \int f(x)dx$$ olarak elde edilir.

$A = \int f(x)\,dx$ iken $A=F(x)+c$ olur. Burada ;

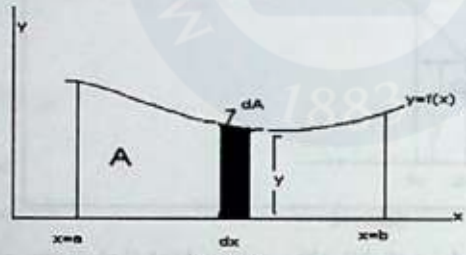
$f(x) = F'(x)$ olup $x = a$, $A = 0$ iken $c = -F(a)$ bulunur. Bu değer, $A=F(x)+c$ ifadesinde yerine yazılırsa;

$$A = F(x) - F(a)$$

alan fonksiyonu elde edilir. Bu son ifadede, x = b alınırsa y = f(x) eğrisi x = a, x = b doğruları ve x-ekseni arasında kalan alan;

$$A = F(b) - F(a)$$ olarak bulunur.

Böylece, **y = f(x) eğrisi, x = a, x= b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanı** Şekil.13'dende görüldüğü gibi dikdörtgen şeklindeki dA elamanlarının toplamının bir Limiti olarak belirli integralle aşağıdaki gibi ifade edilir.



Şekil 13

Şekilde, **dA** alan elamanı **y-** yüksekliğine ve **dx-** genişliğine sahip olan bir dikdörtgendir. Buna göre;

$$dA = y.dx = f(x).dx$$

olarak bulunur. Buradan, bu son ifadenin her iki tarafının integrali alınarak **dA** alan elamanlarının toplamının limiti olan **A** alanı **x = a**'dan **x = b**'ye kadar belirli integral yardımıyla;

$$A = \int_a^b ydx = \int_a^b f(x)dx$$

olarak elde edilir. Bunu basit bir örnek ile açıklayalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

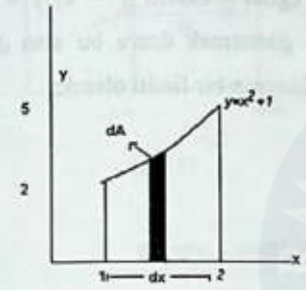
Örnek.4.1: $y=x^2+1$ eğrisi $x=1$, $x=2$ doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz?

Çözüm.4.1:

Şekil-14'deki taralı bölge $y=x^2+1$ eğrisi, x-ekseni, $x=1$, $x=2$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göstermektedir. Bu sınırlı alan dA alan elemanlarının toplamına eşit olacağından bu toplamı;

$A = \int dA = \int (x^2+1)dx$ ile bulabiliriz. Böylece x-ekseni doğrultusundaki elemanların

$x=1$'den $x=2$'ye kadar olan toplamı;



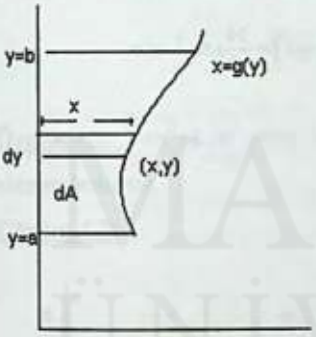
Şekil 14

$$A = \int_1^2 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right|_1^2 \Big|$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} + 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} + 1 \right) = \frac{10}{3} br^2$$

olarak elde edilir.

4.1.2. x = g(y) eğrisi, y-ekseni y = a, y = b doğruları ile sınırlı bölgenin alan hesabı



Şekil.15

Yandaki şekil x = g(y) eğrisi, y-ekseni, y = a ve y = b doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göstermektedir (Şekil 15). x = g(y) eğrisi üzerindeki (x,y) noktasından x yüksekliği ve dy genişliğine sahip yatay alan elemanını bir dikdörtgen olarak alalım. Bu dikdörtgen elemanın alanına dA diyelim. Böylece toplam alan, dA elemanlarının toplamının Limiti olarak integral yardımıyla;

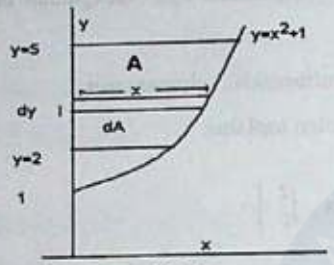
$$A = \int dA = \int x\,dy$$

olarak elde edilir. Böylece x =g(y) eğrisi y = a, y = b doğruları ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı;

$$A = \int_a^b x\,dy = \int_a^b g(y)dy \quad \text{olur.}$$

Örnek.4.2: $y = x^2+1$ eğrisi y-ekseni, $y = 2$, $y = 5$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.4.2:



Şekil-16

Yandaki şekil, $y = x^2+1$ eğrisi y-ekseni $y = 2$, $y = 5$ doğruları ile sınırlı bölgeyi göstermek üzere bu alan dA yatay alan elemanlarının toplamının bir limiti olarak;

$$dA = xdy \Rightarrow A = \int_a^b xdy \text{ elde edilir.}$$

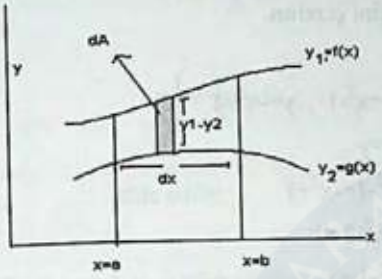
Buna göre;

$$A = \int_2^5 xdy = \int_2^5 \sqrt{y-1}dy = \frac{2}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_2^5$$

$$= \frac{2}{3}\left[(5-12)^{\frac{3}{2}} - (2-1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{3}{2}[8-1] = \frac{14}{3} br^2 \text{ olur.}$$

4.2. İKİ EĞRİ ARASINDA KALAN ALAN HESABI

4.2.1. $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ eğrileri ile x=a, x=b doğruları arasında kalan alan



Şekil 17

Yandaki şekil $y_1=f(x)$, $y_2=g(x)$ eğrileri x=a, x=b doğruları ile sınırlı alanı göstersin. (Şekil 17) Burada, bu sınırlı alanı (**A**) bulmak için küçük bir alan elamanını dikdörtgen olarak alalım ve bu elemana **dA** diyelim . Buna göre, **dA**, yüksekliği y_1-y_2 ve genişliği **dx** olan bir dikdörtgen olup bu dikdörtgen elemanın dA alanı ;

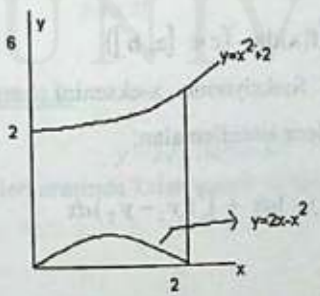
$$dA=(y_1 - y_2)dx = [f(x) - g(x)]dx \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

olur. Burada, **A**, bir bölgenin alanı olduğundan pozitif olmak zorundadır. Negatif çıkması ise **f(x) - g (x)** yerine **g (x) –f (x)** olması ile ortaya çıkar. Böylece (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınırsa x=a , x=b sınırları için;

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \qquad \text{olur.}$$

Örnek.4.3: $y=x^2+2$ ile $y=2x- x^2$ eğrileri ve x=0, x=2 doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.4.3:



Şekil 18

$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

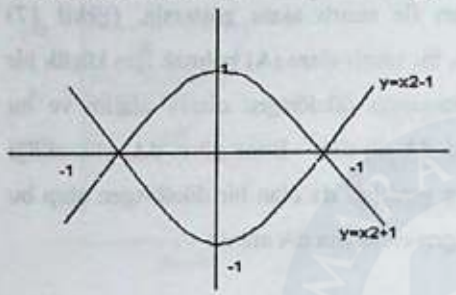
$$= \int_0^2 \left([x^2 + 2] - [2x - x^2]\right)dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}br^2$$

Örnek.4.4: $y=x^2-1$ ile $y=-x^2+1$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm.4.4: Bu örnekte sınırlar verilmediği için integral sınırlarının hangi x'ler için olduğunu bulmamız gerekir. Şimdi bu eğrilerin grafiğini çizelim.



Şekil 19

$y=x^2-1$, $y=-x^2+1$

$y=y$

$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2-2=0$

$x^2-1=0$

$x=\pm 1$

Böylece x= -1 'den x=+1 'e kadar olan alan;

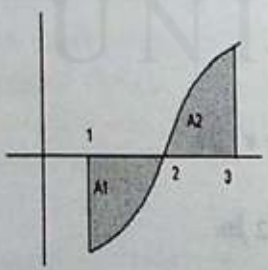
$$A=\int_{-1}^{1}(y_1-y_2)dx=\int_{-1}^{1}\left[(-x^2+1)-(x^2-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)dx = \left(-\frac{2}{3}x^3+2x\right)\Big]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\text{br}^2$$

olarak bulunur.

Örnek.4.5: $y=x^2-4$ eğrisi x=1, x=3 doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.4.5: Şekilde görüldüğü gibi istenilen alan A_1 ve A_2 olmak üzere iki alanın toplamından ibarettir. (Şekil 20) Bu alanların toplamı belirli integralin özelliklerinden ;



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (c\in[a,b])$$

yardımıyla bulunur. Buradan fonksiyonun x-eksenini kestiği nokta; $x^2-4=0 \Rightarrow x=2$ olur. Böylece istenilen alan;

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 (y_1-y_2)dx + \int_2^3 (y_1-y_2)dx$$

yardımıyla;

Şekil.20

$$A = \int_1^2 (0 - (x^2 - 4))dx + \int_2^3 ((x^2 - 4) - 0)dx$$

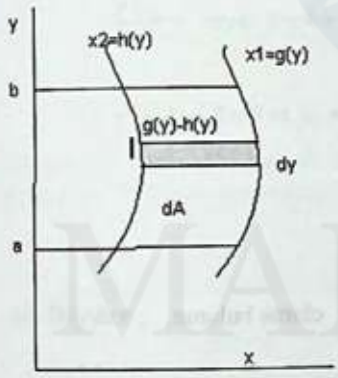
$$A = -\int_1^2 (x^2 - 4)dx + \int_2^3 (x^2 - 4)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3 = \frac{12}{3} = 4br^2$$

elde edilir.

4.2.2. $x_1=g(y)$, $x_2 = h(y)$ eğrileri ile y=a, y=b doğruları arasında kalan bölgenin alanı

$x_1=g(y)$, $x_2 = h(y)$ eğrileri y=a, y=b doğruları ile sınırlı bölgenin alanını göz önüne alalım. (Şekil. 21) Şekilde iki eğri arasında kalan alana A diyelim. Buna göre, genişliği dy ve yüksekliği g (y) – h (y) olan dA küçük alan elamanını göz önüne alalım. Buradan;



Şekil.21

$dA = [g(y)-h(y)]dy$ bulunur.

Her iki tarafın integrali alınırsa y = a, y = b sınırları itibarıyla dA alan elamanlarının toplamının limiti olarak istenilen sınırlı bölgenin alanı ;

$$A = \int_a^b (x_1 - x_2)dy = \int_a^b [g(y) - h(y)]dy$$

olarak elde edilir.

Örnek.4.6:

$y = 3\sqrt{x}$ ile $y = 3x^2$

eğrileri arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulalım.

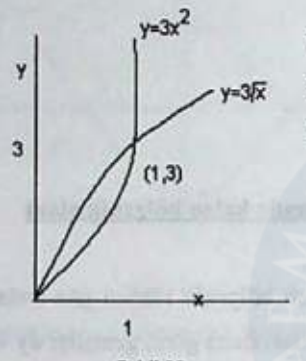
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm.4.6: Öncelikle bu eğrilerin grafiği çizilir ve x ile y'nin sınırları belirlenir. Buna göre;

$y = y \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3x^2$ $\quad x_1 = 0$ için $y_1 = 0$

$9x - 9x^4 = 0$ $\quad x_2 = 1$ için $y_2 = 3$

$x_1 = 0, x_2 = 1$.



Şekil 22

Yandaki şekilde görüldüğü gibi istenilen alan hem x'in sınırlarına göre hemde y'nin sınırlarına göre çözülebilir. Böylece;

$$A = \int_0^1 (y_1 - y_2)dx = \int_0^1 (3\sqrt{x} - 3x^2)dx$$

$$\left(2x^{\frac{3}{2}} - x^3\right)\Big]_0^1 = 1br^2$$

veya

$$\frac{y^2}{9} = x_2, \sqrt{\frac{y}{3}} = x_1 \text{ dersek ;}$$

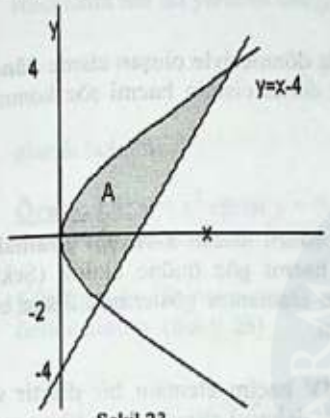
$$A = \int_0^3 (x_1 - x_2)dy = \int_0^3 \left(\sqrt{\frac{y}{3}} - \frac{y^2}{9}\right)dy$$

$$= \left(3\frac{2}{3}\left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{y^3}{27}\right)\Big]_0^3 = 1br^2$$ olarak bulunur.

Not: Eğer problemimiz hem x'in sınırlarına göre hemde y'nin sınırlarına göre ifade edilebiliyorsa bunlardan birisi kullanılarak yukarıdaki çözüme gidilir. x'in sınırları söz konusu olduğunda eğriden aşağıdaki eğri çıkarılarak integral alınırken y'nin sınırları söz konusu olduğunda sağdaki eğriden soldaki eğri çıkarılarak integral alınıp istenen alan aynı olarak bulunur.

Örnek.4.7: $y^2 = 2x$ eğrisi ile y=x-4 doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulalım.

Çözüm.4.7: Bu fonksiyonların grafiklerini çizip istenilen alanı ve buna bağlı olarak x veya y'ye bağlı sınırlarımızı bulalım .



Şekil 23

$\frac{y^2}{2} = x$ veya $y+4 = x$ ise $x = x$ eşitliğinden $\frac{y^2}{2} = y+4$ ve buradan;

$y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = 4$ olarak elde edilir.

$$A = \int_a^b (x_1 - x_2)dy$$

idi. Böylece ;

$$A = \int_{-2}^{4}\left[(y+4) - \frac{y^2}{2}\right]dy = \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg]_{-2}^{4} = 18br^2$$

bulunur.

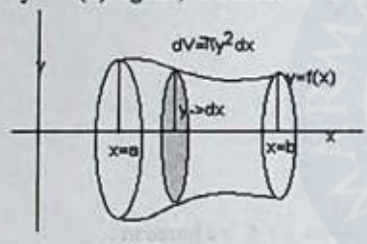
4.3. DÖNEL CİSİMLERİN HACMİNİN BULUNMASI

Belirli integralin uygulamaları sadece bir eğri altında kalan alan veya iki eğri arasında kalan alanı bulmaktan ibaret değildir. Bu nedenle bu ve takip eden bölümlerde bir eğrinin bir doğru veya bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, dönel yüzeylerin alanı, yay uzunluğu ve bunun yanısıra bir fonksiyonun efektif (etkin) değerini ve ortalama değerini ele alacağız.

Sınırlı bir bölgenin bir eksen veya bir doğru etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Sınırlı bir bölgenin alanı söz konusu iken bir dönel cismin hacmi söz konusu olur. Bu hacim hesaplanırken iki metod uygulanır.

4.3.1. Disk Metodu

y = f(x) eğrisi, x-ekseni ile x = a ve x = b doğruları ile sınırlı alanın **x-ekseni** etrafında döndürülmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım (Şekil 24). Buna göre, **V** hacim elamanını göstermek üzere bu elemanı bulmaya çalışalım.



Şekil 24

Şekilde görüldüğü gibi **dV** hacim elemanı bir disktir ve genişliği **dx** ' dir. Disk bir dairesel silindir olup **y** yarıçapı ve **dx** yüksekliğine sahiptir. Buna Göre;

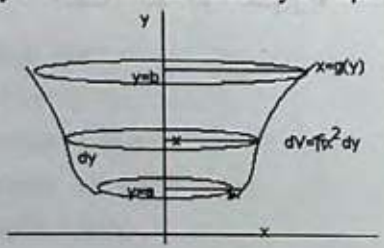
$$dV = \pi . y^2 dx \ldots\ldots \quad \ldots . (*)$$

olarak bulunur. Böylece, V hacmi **dV** dairesel disklerinin hacimleri toplamının limitidir. Yani, **x = a'dan x = b'ye kadar dV dairesel disklerinin toplamının limiti (*) ifadesinin her iki yanının integralinin alınmasıyla;**

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde, **x = g(y)** eğrisi , **y-ekseni, y = a** ve **y = b** doğruları ile sınırlı bölgenin **y-ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi şu şekilde bulunur.



Yandaki şekil x=g(y) eğrisi, y-ekseni, y=a y=b doğruları ile sınırlı bölgeyi göstermektedir. (Şekil-25) Bu alanın y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmine V diyelim .

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu cismi oluşturan **dV** hacim elamanlarının herbiri dairesel disktir ve bu diskin genişliği y'nin diferansiyeli **dy**'dir. Buradaki diskler dairesel silindir olup yarıçapları **x**, yükseklikleri **dy** olup **dV** hacim elemanı;

$dV=\pi x^2 dy$.....(*)

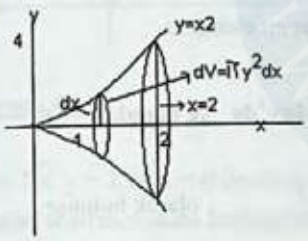
olur. **V** hacim elemanı ise **dV** dairesel disklerinin hacimlerinin toplamının bir limiti olup (*) ifadesinin her iki yanının integrali alınıp y=a'dan y=b'ye kadar oluşan hacim elemanı;

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy$$

olarak bulunur.

Örnek.4.8: $y = x^2$ eğrisi $y = 0$, $x = 2$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan hacim nedir?

Çözüm.4.8: İlk önce sınırlı bölgemizin x- ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi göz önüne alalım. (Şekil 26)



Bir sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi V_x ile gösterirsek;

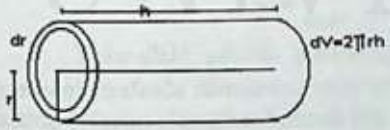
$$Vx = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} \right]_0^2$$

$$= \frac{32\pi}{5} br^3 \text{ olur.}$$

4.3.2. Shell (Kabuk) Metodu

Disk metodunda yukarıda gördüğümüz gibi sınırlı bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulmak için bazen disk yerine ince zarlı bir kabuk (shell) kullanmak daha kolaydır.(Şekil 27)



Şekil - 27

Burada, **dV** hacim elemanı yarıçapı **r**, yüksekliği **h** ve kalınlığı **dr** olan ince zarlı bir silindirik kabuktur. Böylece, **dV** hacim elemanlarının toplamının limiti r=a , r=b sınırları itibarı ile;

$$V = 2\pi \int_a^b rhdr$$

olur. Bu hacim yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi yükseklik boyunca dairesel dik silindirdir. (Şekil 27) Bu tabakanın uzunluğu kabuğun çevresine eşittir. Burada, **r**, kabuğun

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yarıçapıdır. Tabakanın **h** yüksekliği eğriye bağlıdır ve sınırlı alan döndüğünde buna bağlı olarak **dr** veya **dy** seçilir. Buna göre, **dV** hacim hacim elemanı;

$$dV=2\pi.r.h.dr$$

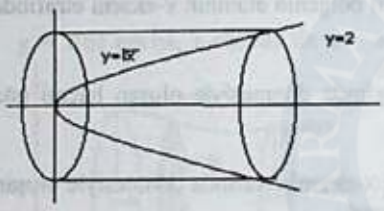
şeklindedir. **h yüksekliği, r yarıçapı ve dr kalınlığı dönme ekseni ve döndürülmüş alana bağlıdır. Yani h,r ve dr değerleri her bir problem için belirlenmek zorundadır.**

Örnek.4.9 :

$y=\sqrt{x}, y=2, x=0$

eğrileri ile sınırlı bölgenin hacmi nedir.

Çözüm.4.9:



Şekil 28

Şeklimizdende görüldüğü gibi burada;

r = y
h = x
dr = dy

olur.Buna göre, **dV** hacim elemanı;

$$dV=2\pi rhdr=2\pi(y).(x).dy=2\pi y.y^2dy=2\pi y^3dy$$ ve buradan;

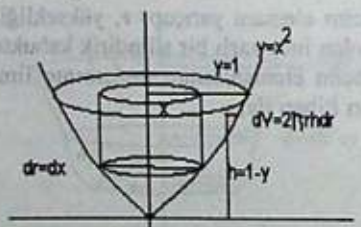
$$V=\int_0^2 dV=2\pi\int_0^2 y^3dy=2\pi\left(\frac{y^4}{4}\right]_0^2=8\pi \quad br^3$$ olarak bulunur.

Örnek.4.10 : $y=x^2$ eğrisi x=0, y=1 doğruları ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin y – ekseni etrafında dönmesi ile oluşan hacmi;

a- Shell Metodu
b- Disk Metodu

yardımıyla bulunuz.

Çözüm.4.10: i) Problemimizi shell metodu ile çözelim. Öncelikle bunun için şeklimizi çizelim.(Şekil 29) Shell metodunda;



Şekil - 29

h = 1-y
r = x
dr = dx

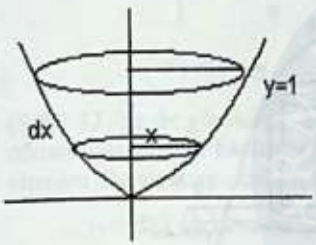
değerleri dV hacim elemanında yerine yazılırsa;

$dV=2\pi rhdr=2\pi.x.(1-y)dx \quad =2\pi(x).(1-x^2)dx$

olur. Buna göre V hacmi;

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy$$
$$= \pi \int_0^1 y dy$$
$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} \right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2} br^3$$

ii) Disk yöntemi: Aynı problemin şeklini disk yöntemi için çizelim. (Şekil 30)

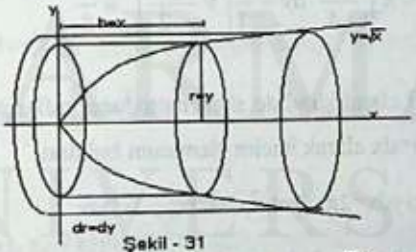


$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy$$
$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} \right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2} br^3$$

Örnek.4.11:

$y = \sqrt{x}, y = 2$ ve $x = 0$ ile sınırlı bölgenin x - ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmi shell metodunu kullanarak bulunuz.

Çözüm.4.11:



Şekil - 31

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi $y = \sqrt{x}$, y=2 ve x=0 ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cisme r=y ile yarıçapı, h=x ile yüksekliği ve dr=dy alalım . Hacim elemanını bulmak için yukarıdaki değerler yerine yazılırsa;

$$dV = 2\pi rhdr = 2\pi(y)(x)dy = 2\pi(y)(y^2)dy = 2\pi y^3 dy$$

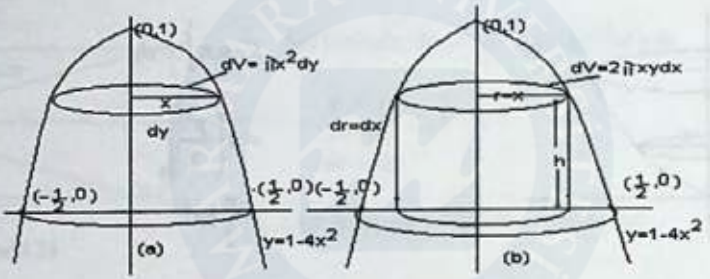
olur. Buradan istenen V hacmi;

$$V = \int_0^2 dv = 2\pi \int_0^2 y^2 dy = 2\pi \left(\frac{y^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi$$

olarak elde edilir.

Örnek.4.12: $y = 1-4x^2$, $x = 0$ ve $y = 0$ parabolü ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim hacmini bulunuz.

Çözüm.4.12:



(Şekil – 32 – a – b)

(Şekil 32-a)'da verilen cisim hacmini disk metodu kullanarak çözelim. Burada x^2 yerine (1-y) / 4 konularak;

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dy = \pi \int_0^1 \frac{1-y}{4} dy = \frac{\pi}{4} \left(y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

olarak bulunur. (Şekil 32-b)' deki cismi şimdide shell metodunu kullanarak çözelim. Şeklin yarıçapı r=x , yüksekliği h=y ve dr=dx alarak hacim elemanını bulalım.

$$dV=2\pi xydx=2\pi x(1-4x^2)dx=2\pi(x-4x^3)dx$$

y=0 'a göre x'in pozitif değerinin alınmasıyla integralin üst sınırı bulunmuş olur.

$1-4x^2=0$ $x^2=1/4$ ve $x=1/2$ bulunur.Buna göreV hacmi;

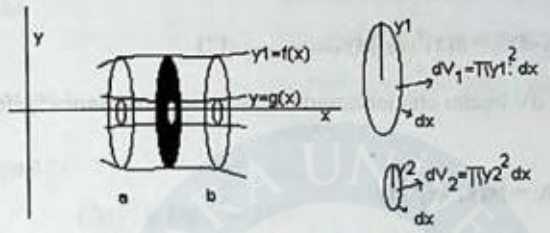
$$V = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} (x-4x^3)dx = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} - x^4 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8} \text{ bulunur.}$$

Böylece, aynı değer shell ve disk metoduyla bulunmuş oldu.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.3.3. İki Eğri Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının Bir Eksen Etrafında Döndürülmesiyle Oluşan Dönel Cismin Hacmi:

4.3.3.1. $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi:



Şekil 33

(Şekil 33)'de de görüldüğü gibi bu iki eğri arasında kalan sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim, eğrilerin hacimleri farkına eşittir. Bu hacmi bulmak için hacim elemanı olarak alınan dairesel disklerin hacimlerini göz önüne alalım.

$y_1 = f(x)$ eğrisine ait dairesel diskin hacmi $\rightarrow$ $\mathbf{dV_1 = \pi y_1^2 dx}$

$y_2 = g(x)$ eğrisine ait dairesel diskin hacmi $\rightarrow$ $\mathbf{dV_2 = \pi y_2^2 dx}$

Buna göre bu iki hacim elemanı arasındaki fark bize taralı olarak gösterilen dairesel diskin hacmini verir. Yani;

$$\mathbf{dV = dV_1 - dV_2 = \pi(y_1^2 - y_2^2)dx} \qquad \text{olur.}$$

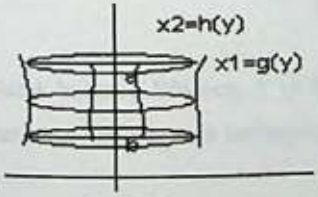
Böylece dV hacim elemanlarının toplamının limiti yani integrali;

$\int dv = \int \pi(y_1^2 - y_2^2)dx$ ve böylece x=a ' da x=b ' ye kadar istenilen hacim;

$$\mathbf{V_x = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2)dx} \qquad \textbf{yada} \quad \mathbf{V_x = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)dx}$$

olarak bulunur.

4.3.3.2 : $x_1 = g(y)$, $x_2 = h(y)$ eğrileri ile $y = a$, $y = b$ doğruları arasında kalan sınırlı alanın y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cisim hacmi :



Şekil - 34

4.3.3.1'dekine benzer olarak istenilen hacim formulünü bulmak için ele alınan hacim elemanı (taralı olarak gösterilen dairesel disklerin arasındaki hacim) dairesel disklerin hacimleri farkına eşittir.

$dV_1 = \pi x_1^2 dy \rightarrow$ Büyük dairesel diskin hacmi.

$dV_2 = \pi x_2^2 dy \rightarrow$ Küçük dairesel diskin hacmi.

olmak üzere;

$$dV = dV_1 - dV_2 = \pi(x_1^2 - x_2^2)dy \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

olarak bulunur. Böylece dV hacim elemanlarının toplamının limiti yani (*) ifadesinin integrali istenilen V hacmi;

$$\int dv = \int \pi(x_1^2 - x_2^2)dy$$

ve x = a , x = b sınırları itibarıyla

$$V_y = \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2)dy$$

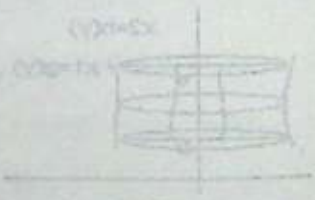
veya

$$V_y = \pi \int_a^b ([g(y)]^2 - [h(y)]^2)dy$$

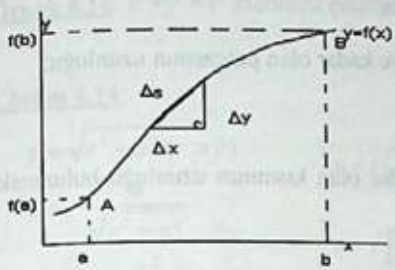
olarak bulunur.

(*) V_y: y-ekseni etrafında dönen cismin hacmini verir.

(**) V_x = x- ekseni etrafında dönen cismin hacmini ifade eder.



4.4. YAY UZUNLUĞU



Şekil.35

f:[a,b] → IR sürekli türeve sahip pozitif bir fonksiyon olsun. (Şekil.35) Bu eğrinin A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulmaya çalışalım. **Δs** ile göstereceğimiz eğrinin küçük bir parçasının uzunluğunu gözönüne alalım. Pisagor teoremine göre ;

$$(\Delta s)^2 \equiv (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

alınabilir. Bu son ifadenin her iki yanı $(\Delta x)^2$ ile bölünerek;

$$\frac{(\Delta s)^2}{(\Delta x)^2} \equiv 1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$$

bulunur. Buradan son ifadenin her iki tarafının karekökü alınarak;

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

elde edilir. Ayrıca ; $\Delta x \to 0$ için;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ve böylece;

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

olarak bulunur. Böylece, A ve B noktaları arasındaki eğri uzunluğu yukarıda bulunan **ds** eğri parçası uzunluklarının toplamının limiti olarak integral yardımıyla ;

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

bulunur. Buna göre, $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$'dan $x = b$'ye kadar olan parçasının uzunluğu;

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

olur. Eğer, $x = g(y)$ eğrisinin $y = c$'den $y = d$'ye kadar olan kısmının uzunluğu bulunmak istenirse yukarıdaki mantığa benzer olarak;

$$s = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

veya

$$s = \int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

elde edilir.

Örnek.4.13: $x = 0$'dan $x = 4$ 'e kadar $y^2 = x^3$ eğrisinin I.bölgedeki uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.4.13: $y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} \Rightarrow dy/dx = 3/2x^{1/2}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{9x}{4}$$

Böylece, s yay uzunluğu;

$$s = \int_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

formülünden;

$$s = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}\,dx$$

olur.

Eğer $1+\frac{9x}{4} = u$ dersek $\frac{9}{4}dx = du$ elde edilir ve bu değerler s integralinde u'nun sınırları itibariyle yerine yazılırsa; $x = 0$ için $u = 1$ ve $x = 4$ için $u = 10$

$$s = \int_1^{10} \frac{4}{9}\sqrt{u}\,du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}(u^{3/2}\Big|_1^{10}$$

$$= \frac{8}{27}(10^{3/2} - 1^{3/2})$$

$$= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1) \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek 4.14: $x^2+y^2 = r^2$ merkezil çemberinin çevresini bulunuz.

Çözüm 4.14:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}\ (r > 0)$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\begin{pmatrix} x = r\sin Q \\ dx = \cos Q.dQ \end{pmatrix}$$

$$x = 0 \Rightarrow Q = 0$$

$$x = r \Rightarrow Q = \frac{\Pi}{2}$$

$$\frac{1}{4}s = r\int_0^r \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^r \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

$$\frac{1}{4}s = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\cos Q\,dQ}{\sqrt{r^2-r^2\sin^2 Q}} = r\int_0^{\frac{\pi}{2}} dQ$$

$$\frac{1}{4}s = r\Big(Q\Big|_0^{\frac{\Pi}{2}} = r\left(\frac{\Pi}{2}-0\right) \Rightarrow s = 2.\Pi.r \text{ olur.}$$

Örnek.4.15: $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)x^2 - \ln x$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.4.15:

$$y' = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$$

$$(y')^2 = \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$s = \int_1^e \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^e \sqrt{1+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{x^2}}\,dx$$

$$= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(\left(\frac{1}{8}x^2+\ln x\right)\right]\Big|_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{8}e^2+\ln e\right) - \left(\frac{1}{8}(1)^2+\ln 1\right) = \frac{1}{8}\left(e^2 - 7\right)br$$

ALIŞTIRMALAR

1. $y = x^{3/2}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = \frac{7}{3}$'e kadar olan uzunluğu bulunuz.

2. $y = \log\cos x$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = \frac{\pi}{3}$'e kadar olan uzunluğunu bulunuz.

3. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}})$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = x_1$'e kadar olan uzunluğu nedir?

4. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = 3$'e kadar uzunluğu nedir?

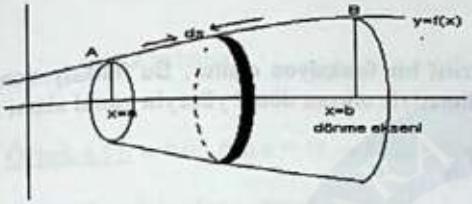
5. $y = 2e^{\sqrt{x}}$ eğrisinin $x = 0$'dan $x = 1$'e kadar uzunluğu nedir?

6. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $x = 1$'den $x = 3$'e kadar uzunluğu nedir?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

4.5 DÖNEL YÜZEYİN YANAL ALANI

Bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan cisme **dönel cisim** denir. Böyle bir cismin yüzey alanına ise **dönel yüzeyin yanal alanı** denir. Bir dönel yüzeyin yanal alanını gösteren aşağıdaki şekli gözönüne alalım.(Şekil 36)



Şekil 36

y = f(x) eğrisi x = a, x = b doğruları ve x-ekseni ile ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı (Şekil. 36) danda görüldüğü gibi koyu renkli olan dairesel kesitlerin alanları toplamına eşittir. Bu toplamı bulmadan önce bu dairesel kesitlerden birinin alanını **dS** ve **ds** olarak kesitin kalınlığını ifade eden yay uzunluğunu alırsak;

$$dS = 2\pi y ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

olur. Burada;

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

değeri (1)de yerine yazılırsa ;

$$dS = 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

olarak bulunur. Böylece a'dan b'ye kadar böyle elemanların alanları toplamı integral yardımıyla;

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

şeklinde bulunur.

Özet olarak :

i) f:[a,b]→IR sürekli türeve sahip pozitif bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon gösterdiği eğri parçasının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı;

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

olarak bulunur. Benzer şekilde;

ii) g:[a,b]→IR sürekli türeve sahip olan pozitif bir fonksiyon olsun . Bu fonksiyonun gösterdiği eğrinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı;

$$S = 2\pi \int_a^b g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$$

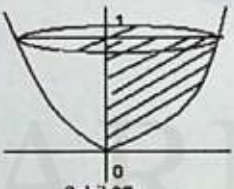
veya

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

olarak elde edilir.

Örnek.4.16: $f(y) = x^2$ eğrisi $y = 1$, $x = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanını bulunuz .

Çözüm.4.16:



Şekil 37

$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$$x' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$(x')^2 = \frac{1}{4y}$$

$$s = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}\,dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 \sqrt{y}\frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}}\,dy = \pi \int_0^1 \sqrt{4y+1}\,dy$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)br^2$$

$$=\pi\frac{1}{4}\frac{2}{3}(4y+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

olarak bulunur.

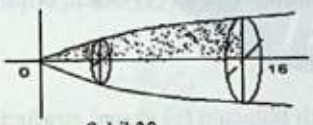
Örnek.4.17: x = 0 ' dan x = 16 ya kadar olan $y^2 = 16x$ parabolünün x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanını bulunuz.

Çözüm.4.17:

$$y^2 = 16x \Rightarrow y = 4\sqrt{x}$$

$$y' = \frac{4}{2\sqrt{x}}$$

$$(y')^2 = \frac{4}{x}$$



Şekil 38

$$s = 2\pi\int_0^{16} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^{16} 4\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}}dx$$

$$= 8\pi\int_0^{16}\sqrt{x+4}\,dx = 8\pi\frac{2}{3}((x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{16}$$

$$=\frac{16}{3}\pi\left(20\sqrt{20}-8\right)\equiv 1365br^2$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1) $y = \frac{x^2}{9}$ eğrisi x=0, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

2) $y^2 = 24 - 4x$ eğrisi x=3, x=6 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

3) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ eğrisi, x=1, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

4) $y = e^{-x}$ eğrisi, x=0, x=5 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

5) $y = 3x^2$ eğrisi, x=0, x=5 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

6) $y = 4 - x^2$ eğrisi, x=0, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

7) $y = 24 - x^2$ eğrisi, x=0, x=2 doğruları ile sınırlı bölgenin (y) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

8) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ eğrisinin I. bölge ile sınırlı kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

9) $y^2 = 4x$ eğrisi, x=0, x=3 doğruları ile sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

10) $y^2 = x + 3, y^2 = 4x$ eğrileri arasındaki sınırlı bölgenin (x) ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

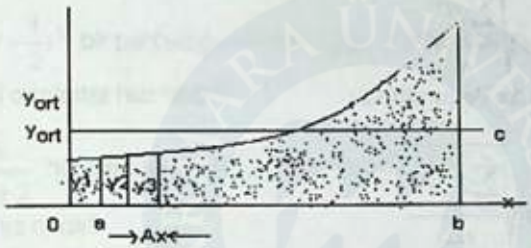
4.6 BİR FONKSİYONUN ORTALAMA VE ETKİN (EFEKTİF) DEĞERLERİ

4.6.1. Bir Fonksiyonun Ortalama Değeri

Hatırlanacağı gibi y = f(x) eğrisi x = a , x = b doğruları ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

olarak elde edilmişti. Aşağıdaki şekilde taralı bölge bu alanı göstermektedir.(Şekil 39)



Şekil 39

Aynı aralık içersinde bu fonksiyon ortalama ordinatı olan y_{ort} değeri eğri altında kalan alan ile aynı değere sahip olan abcd dikdörtgeninin alanıdır. Yani;

$$(b-a).y_{ort} = A = \int_a^b f(x)dx$$

ve buradan;

$$y_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

olarak bulunur.

Örnek.4.18: V=vsinQ sinüsodial gerilimin yarı dairesinin ortalama ordinatını bulunuz.

Çözüm.4.18: a = 0, b = π olduğuna göre ;

$$V_{ort} = \frac{v}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \sin Q dQ = \frac{v}{\pi}(-\cos Q)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{v}{\pi}(-\cos\pi + \cos Q) = \frac{2}{\pi}v = 0{,}637v$$

olarak bulunur.

4.6.2 Bir Fonksiyonun Etkin Değeri

Bir fonksiyonun etkin değeri **(rms-root-mean-square)** ordinatların karesinin ortalamasının karekköküdür. Eğer (Şekil 39) de Δx eşit uzunluğunda bölünmüş n tane y değerini göz önüne alırsak;

$$rms \equiv \sqrt{\frac{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}{n}}$$

veya

$$rms \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} yi^2}{n}}$$

olur. Bu ifadede pay ve payda Δx ile çarpılırsa ;

$$rms \equiv \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} yi^2 \Delta x}{n\Delta x}}$$

elde edilir. Burada **n.Δx, (b-a)** aralık genişliğini verir.n sonsuza yaklaşırken ;

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} yi^2 \Delta x = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

elde edilir. Buna göre;

$$rms = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

ifadesi bir fonksiyonun etkin değerini veren formüldür.

Örnek.4.19: Önceki örneğin sinüsodial voltajı için rms değerini bulunuz.

Çözüm.4.19: a=0, b=π değerleri rms formülünde yerine yazılarak ;

$$rms = \sqrt{\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} v^2 Sin^2 QdQ} = \sqrt{\frac{v^2}{\pi}\int_0^{\pi} Sin^2 QdQ}$$

$$\int_0^{\pi} Sin^2 QdQ = \left(\frac{Q}{2} - \frac{Sin2Q}{4}\right)_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \frac{Sin2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

olur. Bu sonucu **rms** ' de yerine yazacak olursak;

$$\text{rms} = \sqrt{\frac{V^2}{\pi}\frac{\pi}{2}} = \frac{V}{\sqrt{2}} = 0{,}707V$$

elde edilir.

ORTALAMA DEĞER İLE İLGİLİ ALIŞTIRMALAR

1. $y = 4\sin x$ fonksiyonu'nun $x = 0$'dan $x = \pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

2. $y = 2\sin^3 \frac{x}{2}$ fonksiyonu'nun $x = 0$ ile $x = 2\pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

3. $Q = (2 + \sqrt{t})^2$ fonksiyonu'nun $t = 0$ ile $t = 1$ arasındaki ortalama değeri nedir?

4. $Q = \frac{1}{3} t^3 \sqrt{9 - t^2}$ fonksiyonu'nun $t = 0$ ile $t = 3$ arasındaki ortalama değeri nedir?

5. $V = \frac{16}{3} t - \frac{1}{2} t^2$ bir parçacığın hızına bağlı denklemdir. Buna göre, $t = 0$ ile $t = 16sn$ arasındaki ortalama hızı nedir?

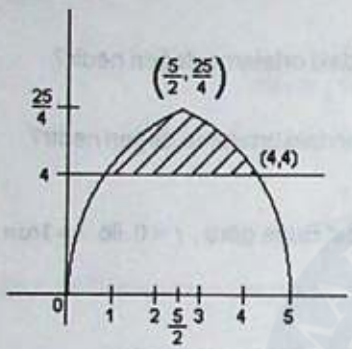
6. $V = \frac{4t}{\sqrt{t+2}}$ hız denklemi veriliyor. Buna göre, $t = 2$ ile $t = 14sn$ arasındaki ortalama hız nedir?

7. $y = \cos^2 x$ fonksiyonunun $x = 0$, $x = \pi$ arasındaki ortalama değeri nedir?

4. Bölümle İlgili Çözümlü Problemler

1) $y=5x-x^2$ eğrisi ile $y=4$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Şekil-40

$$5x - x^2 = 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1, \quad x = 4$$

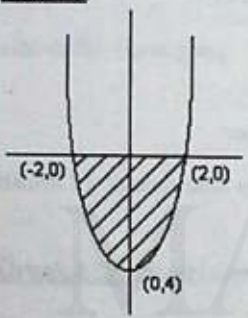
$$A = \int_1^4 (y_2 - y_1)dx$$

$$A = \int_1^4 [(5x - x^2) - 4]dx$$

$$A = \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} - 4x \right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2} \; br^2$$

2) $y=x^2-4$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Şekil-41

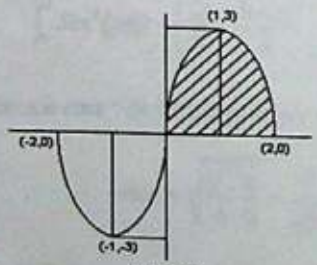
$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, \; x_2 = 2$$

$$A = \int_{-2}^{2} (y_2 - y_1)dx = \int_{-2}^{2} [0 - (x^2 - 4)]dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3} \; br^2$$

3) Birinci bölgede $f(x)=4x-x^3$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Şekil-42

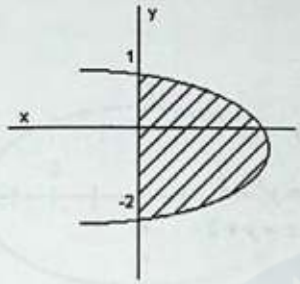
$$A = \int_0^2 (4x - x^3)dx$$

$$A = \int_0^2 4x dx - \int_0^2 x^3 dx$$

$$A = 4\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4 \; br^2$$

4) $x=2-y-y^2$ eğrisi ve y-ekseni ile sınırlı bölgenin alanı nedir?

Çözüm:



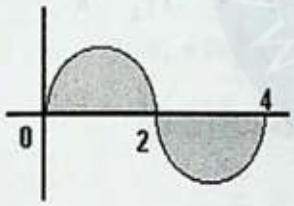
Şekil-43

$$A=\int_{-2}^{1}(x_2-x_1)dy=\int_{-2}^{1}(2-y-y^2-0)dy$$

$$A=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}\ br^2$$

5) $y=x^3-6x^2+8x$ eğrisi ile x-ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:



Şekil-44

$x=0$ için $y=0$

$y=0$ için $x^3-6x^2+8x=0$

$x(x^2-6x+8)=0$

$x_1=0,\quad x_2=2,\quad x_3=4$

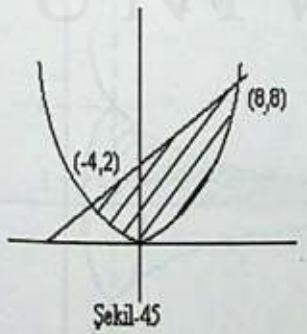
$$A=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)dx-\int_2^4(x^3-6x^2+8x)dx$$

$$A=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_0^2-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{8x^2}{2}\right]_2^4$$

$$A=8br^2$$

6) $x^2=8y$ eğrisi ve $x-2y+8=0$ doğrusuyla sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm:



Şekil-45

$x^2=8y \Rightarrow y=\frac{x^2}{8}$

$x=2y-8 \Rightarrow y=\frac{x+8}{2}$

$y=y \Rightarrow \frac{x+8}{2}=\frac{x^2}{8}$

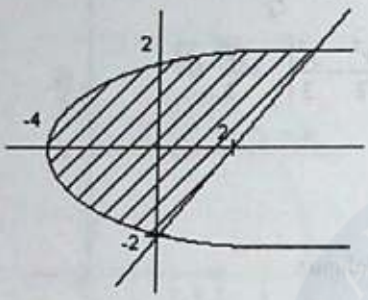
$2x^2-8x-64=0$

$x_1=-4,\quad x_2=8$

$$A=\int_{-4}^{8}\left(\frac{x+8}{2}-\frac{x^2}{8}\right)dx=\frac{x^2}{4}+4x-\frac{x^3}{24}\Big|_{-4}^{8}=36br^2$$

7) $y^2=x+4$ eğrisi ile $y-x+2=0$ doğrusu arasındaki alanı bulun.

Çözüm:



Şekil-47

$$A=\int_a^b (x_2-x_1)dy$$

$$y^2=x+4 \Rightarrow x=y^2-4$$

$$y-x+2=0 \Rightarrow x=y+2$$

$$y^2-4=y+2$$

$$y^2-y-6=0 \Rightarrow y_1=-3, \qquad y_2=+2$$

$$A=\int_{-2}^{3}[(y+2)-(y^2-4)]dy$$

$$A=\int_{-2}^{3}(y+6-y^2)dy=\frac{y^2}{2}+6y-\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3}=\frac{125}{6}\ br^2$$

8) $\frac{y^2}{4}=x^3$ eğrisinin x=1'den x=4'e kadar olan kısmının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$$y^2=4x^3 \Rightarrow y=2x^{3/2}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=2.\frac{3}{2}x^{1/2}=3\sqrt{x}$$

$$S=\int_0^4\sqrt{1+(3\sqrt{x})^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+9x}\,dx=\frac{1}{9}\int u^{1/2}du=\frac{1}{9}.\frac{2}{3}u^{3/2}$$

$$=\frac{2}{27}\Big[(1+9x)^{3/2}\Big|_0^4=\frac{2}{27}\left(37^{3/2}-1\right)$$

$$1+9x=u$$

$$dx=\frac{du}{9}$$

9)

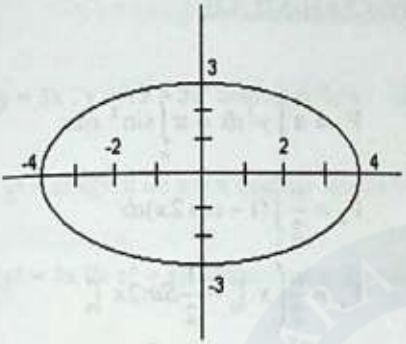
$9x^2+16y^2=144$ eğrisinin

a) x-ekseni etrafında

b) y-ekseni etrafında

dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



Şekil-48

$$9x^2+16y^2=144$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$x^2=16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)$$

$x=0$ *için* $y=\pm 3$

$$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$

$y=0$ *için* $x=\pm 4$

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx$$

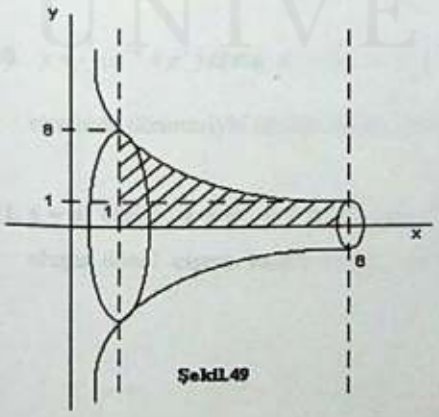
$$V_x=2\pi\int_0^4 9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)dx=18\pi\left(x-\frac{x^3}{48}\Big|_0^4\right)=48\pi$$

$$V_y=\pi\int_a^b x^2dy$$

$$V_y=2\pi\int_0^3 16\left(1-\frac{y^2}{9}\right)dy=32\pi\left(y-\left(\frac{y^3}{27}\right)\right]_0^3=64\pi$$

10) $y=\dfrac{8}{x}$ eğrisi x=1, x=8 doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacmini bulunuz.

Çözüm:



Şekil-49

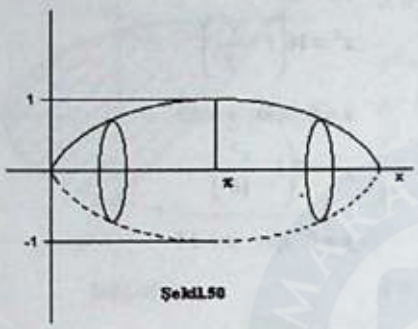
$$V_x=\pi\int_1^8 y^2dx$$

$$V_x=\pi\int_1^8\frac{64}{x^2}dx=64\pi\left(-\frac{1}{x}\right]_1^8$$

$$V_x=56\pi$$

11) $y=\sin x$ eğrisi $x=0$, $x=\pi$ doğruları ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:



Şekil.50

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$V_x = \frac{n}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx$$

$$V_x = \frac{n}{2} \left(x \Big|_0^n - \frac{1}{2} Sin2x \Big|_0^n \right.$$

$$Vx = \frac{n}{2}(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2} br^3 \text{ bulunur}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ALAN, HACİM, DÖNEL YÜZEYİN YANAL ALANI İLE İLGİLİ ÇÖZÜMSÜZ ALIŞTIRMALAR

1. $y = 3x$, $y = 15 - 3x$ doğruları ile **x – ekseni** arasında kalan alan nedir ?... (18.75)

2. $y^2 = x^3$ eğrisi ile $x = 4$ doğrusu arasında kalan alan nedir ?... (25.6)

3. $y^2 = 4x$ ile $x^2 = 4y$ eğrileri arasında kalan alan nedir ?... (16/3)

4. $10y = x^2 - 80$ eğrisi ile $y = 0$, $x = 1$ ve $x = 6$ doğruları arasındaki alan nedir ?... (32.83)

5. $y = x^2 + 2$ eğrisi ile $y = 3$, $y = 5$, $x = 0$ doğruları arasındaki alan nedir ?... (2.797)

6. $y^2 = 16 - x$ eğrisi $y = 0$, $x = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanı nedir ?... (126/3)

7. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisi ile $y = 0$, $x = 0$ doğruları arasındaki alan nedir ?... (1/6)

8. $4y^2 = x^3$ eğrisi ile $x = 8$ doğrusu arasında kalan alan nedir ?... (72.4)

9. Birinci bölgede $y^2 = x^3 - 3x^2 + 3x$ eğrisi ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir ?... (0.785)

10. $y = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x})$ eğrisi x = 0 , y = 0 , x = 1 doğruları ile sınırlı bölgenin x – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim nedir ?... (4.42)

11. $y = x^3$ eğrisi , $x = 0$, $y = 8$ doğruları ile sınırlı bölgenin y – ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (60.3)

12. $9x^2+16y^2 = 144$ elipsoidinin **y – ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (329)

13. $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$ eğrisinin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir?

14. $y = e^x$ eğrisi , $x = 1$, $y = 0$, $x = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin $x = 1$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (4.51)

15. $y = 4x - x^2$ eğrisi , $y = 3$, $x = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin $y = 3$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi nedir? ... (3.35)

16. $y^2 = 24 - 4x$ eğrisi $y=0$, $x = 3$, $x = 6$ doğruları ile sınırlı bölgenin **x- ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? ... (58.6)

17. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ eğrisinin 1.bölgedeki kısmının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir?

18. $y = 4 - x^2$ eğrisi $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin y-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? ... (36.2)

19. $y = 5x^2$ eğrisi $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$ doğruları ile sınırlı bölgenin **y-ekseni** etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir? ... (1408)

5. HAS OLMAYAN İNTEGRALLER

Şimdiye kadar integrali alınacak **y=f(x)** fonksiyonu **a ≤ x ≤ b** aralığındaki her x için sürekli ve

$$\int_a^b f(x)dx$$

belirli integralinde limitler sınırlı idi. Eğer, bu şartlardan biri veya her ikisi ile karşılaşılmazsa yani integralin sınırlarından biri veya her ikisi sonlu değilse, sonlu iken bu noktada sürekli değilse,

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

integraline has olmayan integral denir. Böylece limitlerden biri veya her ikisi sonsuz veya **a ≤ x ≤ b** aralığında bazı **x** noktalarında integrand süreksiz ise bu integral has olmayan integral kategorisine girer.

Has olmayan integrallere birkaç örnek verelim:

$$\int_1^{\infty} x^{3}\,dx$$

integrali has olmayan integraldir. Çünkü, limitlerden biri sınırsızdır.

$\int_0^2 \frac{x^2}{x-2}dx$ integrali has olmayan integraldir. Çünkü;

$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$ integrandı x=2 noktasında süreksizdir.

$$\int_{-\infty}^{-} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

integrali has olmayan integraldir. Çünkü limitlerin her ikiside sonlu değildir.

5.1 Sonsuz Limitler İçin Has Olmayan İntegraller

Eğer limitlerden birisi veya her ikisi birden sonlu değilse has olmayan integrallerin nasıl olacağı aşağıdaki gibidir.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \quad \text{.....(2)}$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \quad \text{.....(3)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx \quad \text{.....(4)}$$

Eğer (2) eşitliğinin sağ tarafındaki limit varsa ;

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ integraline yakınsak, aksi halde ıraksaktır denir.

Örnek.5.1:

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm.5.1:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\left[\ln x\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\ln b - \ln 1\right] = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty$$

Böylece $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ integrali mevcut değildir. Yani ıraksaktır.

Örnek.5.2:

$\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ integrali yakınsak mıdır?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözüm.5.2:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{0}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1$$

integral mevcut. O halde, $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ integrali yakınsaktır.

5.2. Süreksiz İntegrand

İntegrand, f(x), yani integrali alınacak f(x) fonksiyonu limitlerin birinde süreksiz ise integralin nasıl alınacağını görelim.

Eğer $\int_a^b f(x)dx$ integrali b noktası hariç $a \le x \le b$ aralığındaki her noktada sürekli ise

$\int_a^b f(x)dx$ integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(x)dx \qquad \text{.....(5)}$$

şeklinde tanımlanır.*

Benzer şekilde integrand a noktasında süreksiz ise (1) integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(x)dx$$ şeklinde tanımlanır.

Eğer $\int_a^b f(x)dx$ integrali $\mathbf{a \le x \le b}$ aralığındaki bir **c** noktasında süreksiz ise ;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

integralinin toplamı olarak incelenir.

---

* x → a+ ifadesi x'in a noktasına a'dan daha büyük değerlerle yaklaşması anlamındadır.
x → b- ifadesi x'in b noktasına b'den daha küçük değerlerle yaklaşması anlamındadır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek.5.3:

$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.3:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu x=0 noktasında süreksizdir. Buna göre;

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\int_x^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\int_x^9 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{x}\,\right|_x^9$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(2\sqrt{9}-2\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(6-2\sqrt{x}\right) = 6 - \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}$$
$$= 6-0 = 6$$

olur. Bu nedenle; $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integrali yakınsaktır.

Örnek.5.4:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.4: Görüldüğü gibi integralimizin hem alt hemde üst limiti sonlu değildir. Bu nedenle;

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}$ şeklinde olur. Buradan;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\arctan x\,\right|_a^b = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(\arctan b - \arctan a) = \frac{\Pi}{2}+\frac{\Pi}{2} = \Pi$$

bulunur. O halde; $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integrali yakınsaktır.

Has olmayan integrallerin diğer detaylarına burada girmiyoruz.

Örnek.5.5:

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.5:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ fonksiyonu x=0 noktasında süreksizdir. Bu nedenle has olmayan integralimiz;

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} 2\left(\sqrt{1-x}\ \right|_0^x$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -2\sqrt{1-x}+2 = 2$$

Buna göre, integralimiz limit mevcut olduğundan yakınsaktır.

Örnek.5.6:

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integrali yakınsakmıdır?

Çözüm.5.6:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonu –1 ve 1 noktalarının her ikisinde süreksizdir. Buna göre;

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a\to -1^- \\ b\to +1^-}} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a\to -1^- \\ b\to +1^-}} (\arcsin x\ |_a^b$$

$$= \lim_{\substack{a\to -1^- \\ b\to +1^-}} (\arcsin b - \arcsin a) \quad = \frac{\Pi}{2}+\frac{\Pi}{2}=\Pi$$

bulunur. O halde; $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integrali yakınsaktır.

ALIŞTIRMALAR

A) Aşağıdaki İntegrallerin Yakınsak Olup Olmadığını İnceleyiniz :

1. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}.dx$ integrali yakınsakmıdır.

2. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}.dx$ integrali yakınsakmıdır.

3. $\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2+1}.dx$ integrali yakınsakmıdır.

4. $\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)^2}.dx$ integrali yakınsakmıdır.

5. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x.\ln^2 x}.dx$ integrali yakınsakmıdır.

B) Aşağıdaki Has Olmayan İntegrallerin Çözümünü Bulunuz :

1. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ C = 0,5

2. $\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^3}$ C = 0,5

3. $\int_{-\infty}^{1} e^x.dx$ C = e

4. $\int_{5}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ C = π

6. $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}}$ C = π

7. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ C = 2

8. $1\int_{0}^{} \frac{dx}{x^3}$

9. $\int_{0}^{\pi/2} \tan x.dx$

6. SAYISAL İNTEGRAL

Şimdiye kadar incelediğimiz fonksiyonların integrali alınmakta ve bu integral bilinen tekniklerden biri yardımıyla belirlenmekteydi. Bazen integrali alınacak fonksiyon denklem formunda değil de basit bir grafik yardımıyla veya nokta çiftleri ile verilebilir. İşte böyle durumlarda yaklaşık integral için bir metoda ihtiyacımız vardır.

Bütün bu metodlar temelde y=f(x) fonksiyonun eğrisi x- ekseni ile verilen limitleri ile sınırlı bir bölgenin alanı olarak yorumlanabilir. Bu nedenle bir eğri altında kalan alanı bulmak için ortalama ordinat metodu, yamuk metodu, Simpson metodu ve prizmoidal metodu olmak üzere belli başlı dört metod mevcuttur. Şimdi sırasıyla bu metodları inceleyelim.

6.1. Ortalama Ordinat Metodu

Bu metod daha önce gördüğümüz bir fonksiyonun ortalama değerinden yararlanılarak ortaya çıkmıştır. **[a,b]**'de tanımlı **y=f(x)** fonksiyonun ortalama değeri;

$$Y_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{.....(1)}$$

şeklinde idi.

$$\int_a^b f(x)dx$$

integrali **y=f(x) eğrisi, x- ekseni x=a, x=b doğruları** ile sınırlı bölgenin alanını ifade ettiğine göre;

$$A \equiv Y_{ort}(b-a) \quad \text{.....(2)}$$

formülü ortalama ordinat metodunu veren formüldür.

Örnek.6.1: (1, 3.51) , (2, 4.23) , (4, 6.29) , (5, 7.81) , (7, 7.96) , (7.5, 8.91) , (9, 9.25) noktalarından geçen eğrinin altındaki alanı bulunuz.

Çözüm.6.1:

x	1	2	4	5	7	7.5	9
y	3.51	4.23	6.29	7.81	7.96	8.91	9.25

yedi ordinatın ortalaması

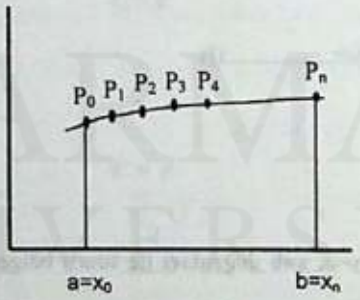
$$Yort = \frac{3.51+4.23+6.25+7.81+7.96+8.91+9.25}{7} \qquad Yort = 6.85$$

olur. Buna göre verilen noktalardan geçen eğri ile sınırlı alan yaklaşık olarak;

$$A = 6.85(9-1) = 54.8 \quad br^2$$

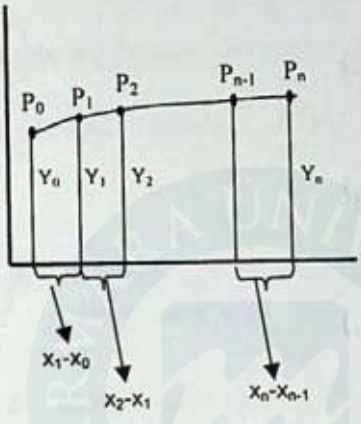
6.2. Yamuk Metodu

(x_0,y_0) , (x_1,y_1),.....,(x_n,y_n) nokta çiftlerini aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi birleştirelim ve bu nokta çiftlerine sırasıyla P_0,P_1,.....,P_n diyelim. (Şekil 40)



Şekil 40

P_0,P_1,.....,P_n noktalarını birleştirdiğimizde elde ettiğimiz grafik **y=f(x)** fonksiyonu temsil etsin. **P_0,P_1,.....,P_n** noktalarında düşey doğrular çizerek **y=f(x)** fonksiyonu **x- ekseni; x=a, x=b doğruları** ile sınırlı bölgeyi **n** tane dilime ayıralım. (Şekil 41)



Şekil 41

Şekilde görüldüğü gibi bu dilimlere yaklaşık olarak birer yamuk gözü ile bakılabilir. Buna göre;

1.yamuğun alanı = $\frac{1}{2}(x_1 - x_0)(y_1 + y_0)$

2. yamuğun alanı = $\frac{1}{2}.(x_2 - x_1).(y_2 + y_1)$

n. yamuğunun alanı = $\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})$

olarak bulunur. Bu yamukların alanları toplamı yaklaşık olarak y=f(x) eğrisi x=a,x=b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanını verir. Böylece;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_1 + y_0) + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + \ldots\ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})]$$

formülü ardışık x_i noktaları arasındaki uzaklık farklı iken yamuk kuralı için formülü verir. Ardışık x_i noktaları arasındaki uzaklık eşit olsun ve bunu Δx ile gösterelim.

$\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n - x_{n-1}$ olsun. Buna göre istenilen alan yamuk

kuralı yardımıyla şu şekilde bulunur. Sırasıyla her bir yamuğun alanı:

1. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_1 + y_0)$

2. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_2 + y_1)$

3. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_3 + y_2)$

$\downarrow$ $\downarrow$

n. yamuğun alanı $\frac{1}{2}\Delta x(y_n + y_{n-1})$

iken bu alanlar toplamı;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n-1}\right]$$

olarak bulunur. Böylece eşit aralıklı nokta çiftleri için yamuk kuralı;

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_{n-1}\right]$$

olarak elde edilir.

Örnek.6.2: Aşağıda verilen nokta çiftlerinden oluşan fonksiyonun grafiği altındaki alanı bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	3	4	7	12	19	28	39	52	67	84

Çözüm.6.2: $\Delta x = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1$ olur.

$$A = \int_a^b f(x)dx \cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_9) + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8\right]$$

$$\cong \Delta x\left[\frac{1}{2}(4+84) + 3 + 4 + 7 + 12 + 19 + 28 + 39 + 52 + 67\right] \cong 275br^2$$

Örnek.6.3:

$\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10} + 2\right)dx$ integralini $\Delta x = 1$ alarak yamuk kuralı ile yaklaşık olarak belirleyiniz.

Çözüm.6.3: $y = \frac{x^2}{10} + 2$ olduğuna göre (x,y) değerlerini belirleyelim.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	2.1	2.4	2.9	3.6	4.5	5.6	6.9	8.4	11.1	12

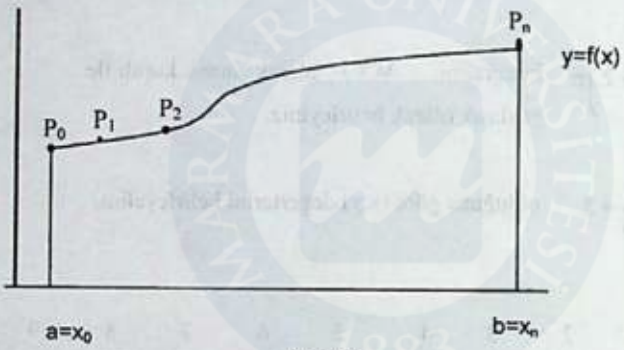
Toplamı=47.5

$$\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10} + 2\right)dx \cong 1.\left[\frac{1}{2}(2+12) + 47.5\right] \cong 54.5 \quad \text{İken}$$

$$\int_0^{10}\left(\frac{x^2}{10} + 2\right)dx = \left(\frac{x^3}{30} + 2x\right)\Big|_0^{10} = \frac{1000}{3} + 20 = \frac{160}{3} \quad \text{bulunur.}$$

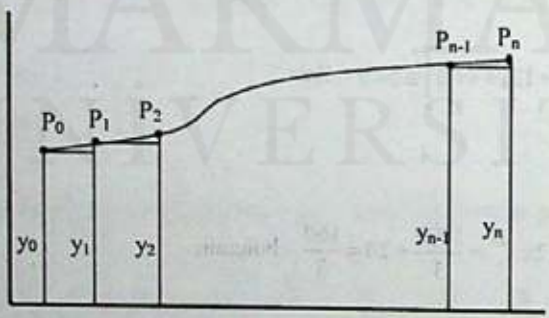
6.3. Dikdörtgen Metodu

(x_0,y_0), (x_1,y_1),.....,(x_n,y_n) nokta çiftlerini birleştiren grafik **y=f(x)** fonksiyonun grafiği olsun. Bu noktalara yine sırasıyla $P_0,P_1,P_2,...,P_n$ diyelim. (Şekil 42)



Şekil 42

$P_0,P_1,P_2,...,P_n$ noktalarında yine düşey doğrular çizelim ve bu doğrular x- eksenini sırasıyla $x_0,x_1,x_2,.....,x_n$ noktalarında kessin. Yamuk metodunda olduğu gibi şeklimiz n tane dilimden oluşur. (Şekil- 43)



Şekil 43

Bu dilimlerden herbiri birer dikdörtgen olarak gözönüne alınırsa bu dikdörtgensel dilimlerin alanları toplamı yaklaşık olarak y=f(x) eğrisi x=a,x=b doğruları ve x- ekseni ile sınırlı bölgenin alanına eşit olacaktır. Buna göre;

1. dikdörtgenin alanı $= (x_1-x_0)y_0$

2. dikdörtgenin alanı $= (x_2-x_1)y_1$

3. dikdörtgenin alanı $= (x_3-x_2)y_2$

↓ ↓

n-1. dikdörtgenin alanı $= (x_{n-1}-x_{n-2})y_{n-2}$

n. dikdörtgenin alanı $= (x_n-x_{n-1})y_{n-1}$



olarak elde edilir. Böylece toplam alan dikdörtgen metodu yardımıyla yaklaşık olarak;

$$A=\int_a^b f(x)dx \equiv (x_1-x_0)y_0+(x_2-x_1)y_1+\ldots\ldots\ldots\ldots+(x_n-x_{n-1})y_{n-1}$$

şeklinde bulunur. Ardışık x_i noktaları arasındaki uzaklık;

$$\Delta x = x_1-x_0 = x_2-x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots = x_n-x_{n-1}$$

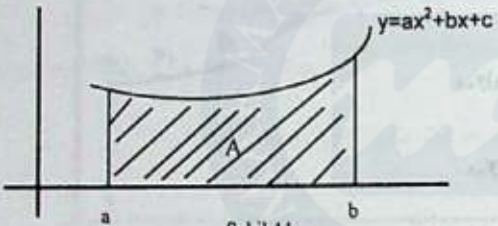
olacak şekilde eşit ise istenilen alan;

$$A=\int_a^b f(x)dx \equiv \Delta x[y_0+y_1+\ldots\ldots+y_{n-1}]$$

olarak bulunur.

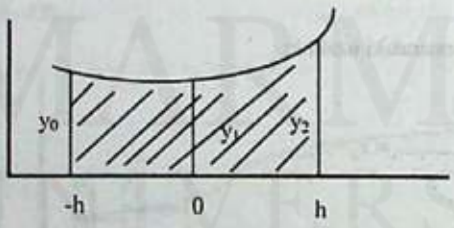
6.4. Parabolik Alan Formülü

Parabolik alan formülü parabolik bir eğri altında kalan alanı bulmamızı sağlar. Bunun için $y=ax^2+bx+c$ fonksiyonu. **x- ekseni x=a,x=b doğruları** ile sınırlı bölgenin alanını bulmaya çalışalım. (Şekil 44)



Şekil 44

Bu alanı aşağıdaki gibi y- eksenine eşit uzaklıkta olacak şekilde seçelim ve alanımızı h genişliğinde iki dilime ayıralım. (Şekil 45)



Şekil 45

Bu dilimlerin **-h,0,h** noktalarındaki yükseklikleri sırasıyla y_0,y_1 **ve** y_2 olsun. Daha önceden bildiğimiz gibi alan:

$$A=\int_{-h}^{h} y\,dx=\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)dx$$

$$=\left(a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right)\Big|_{-h}^{h}$$

$$=\frac{2}{3}ah^3+2ch=\frac{h}{3}(2ah^2+6c).....(*)$$

olarak bulunur.$y=ax^2+bx+c$ fonksiyonunda sırasıyla **-h, 0 ve h** değerlerini yani y_0, y_1 **ve** y_2 yüksekliklerini bulalım. Buradan:

$$y_0=y(-h)=ah^2-bh+c$$
$$y_1=y(0)=c$$
$$y_2=y(h)=ah^2+bh+c$$

olarak bulunur. y_0 ve y_2 değerlerini toplarsak;

$$y_0+y_2=2ah^2+2c=2ah^2+2y_1$$

olur. Buradan a değerini çekersek;

$$a=\frac{y_0+y_2-2y_1}{2h^2}$$

ve yine aynı eşitlikten $c=y_1$ değeri bulunur. a ve c'nin bu değerlerini (*) ifadesinde yerine yazarsak;

$$A=\frac{h}{3}(2ah^2+6c)=\frac{h}{3}\left(2h^2\frac{(y_0+y_2-2y_1)}{2h^2}+6y_1\right)$$

$$A=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

olur. Böylece **Simpson** metodunu elde etmemizi sağlayacak Parabolik alan formülü elde edilir.

Örnek.6.4: (1 . 2.05) , (3 . 5.83) ve (5 .17.9) noktalarından geçen eğri parabol şeklinde ise bu eğri ile x- ekseni, x=1 ve x=5 doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz?

Çözüm.6.4: $h = \Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = 3-1 = 5-3 = 2$ olur.

$y_0 = 2.05, y_1 = 5.83, y_2 = 17.9$ olduğuna göre;

$$A \equiv \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$A \equiv \frac{2}{3}(2.05 + 4.(5.83) + 17.9)$$

$$A \equiv 28.8br^2$$

6.5. Simpson Metodu

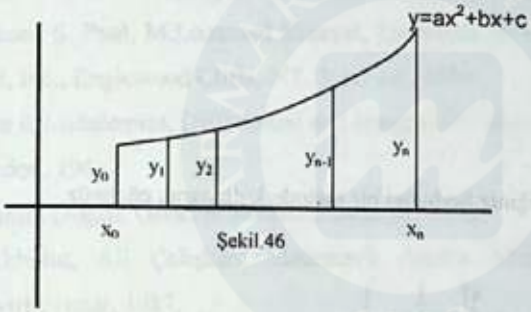
Bir eğri altında kalan yaklaşık alanın hesabı için aldığımız fonksiyonun eğrisi bir parabol olsun. (Şekil 46) Parabolik Alan formülü eğri üzerindeki üç nokta çifti belli iken yaklaşık alanı veriyordu. Eğer nokta çifti sayısı n ise yaklaşık alan hesabı yine benzer mantıkla geliştirilebilir. Bunun için farklı her üç nokta çiftine Parabolik Alan formülü uygulanarak ardışık her iki dilimin alanı bulunabilir. Şöyle ki;

Dilim numarası	Alanı
1. ve 2. dilim	$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$
3. ve 4. dilim	$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$
5. ve 6. dilim	$\frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$
n-1. ve n. dilim	$\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

olarak belirlenip alt alta toplanırsa;

$$A \equiv \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots\ldots + 4y_{n-1} + y_n)$$

şeklinde Simpson metodunu oluşturan formül elde edilir.



Şekil.46

Şimdiye kadar ele alınan tüm metodlar için nokta çiftlerine sahip olduğumuz söyledik. Bunun yerine bir denkleme sahip olduğumuzda verilen Δx değerine göre x_k'ler belirlenip $f(x_k)$'lar buna göre hesaplanarak $(x_k, f(x_k))$ $(k=1,2,\ldots\ldots,n)$ nokta çiftleri bir tablo şeklinde oluşturulup hangi metodla çözülecekse tablo ona göre kullanılır.

Örnek.6.5: Verilen tablodaki değerlerden geçen eğrinin altındaki alanı Simpson Kuralını kullanarak yaklaşık olarak bulunuz.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4.02	5.23	5.66	6.05	5.81	5.62	5.53	5.71	6.32	7.55	8.91

* Simpson metodu İngiliz matematikçi **Thomas Simpson** (1710-1761)tarafından geliştirilmiştir.

Çözüm.6.5: $h=x_i-x_{i-1}=1$ olduğuna göre:

$$A \cong \frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+2y_8+y_9]$$

$$A \cong \frac{h}{3}\left[\begin{array}{l}4.02+4(5.23)+2(5.66)+4(6.05)+2(5.81)+4(5.62)\\+2(5.53)+4(5.71)+2(6.32)+4(7.55)+8.91\end{array}\right]$$

$$A \cong 60.1 br^2$$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki problemleri istediğiniz herhangi bir metodu kullanarak çözünüz.

1) $\int_1^3 \frac{1+2x}{x+x^2}\,dx$

2) $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$

3) $\int_1^8 \left(4x^{\frac{1}{3}}+3\right)dx$

4) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

5)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	24	25.2	25.6	26	25.8	25.6	25.5	25.7	26.3	27.5	28.9

6)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3.02	4.63	4.76	5.08	6.31	6.60	6.23	6.48	7.27	8.93	9.11

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

KAYNAKLAR

1. Paul Calter, Technical Mathematics with Calculus, 2nd. ed, Prentice - Hall, inc., Englewood Clifss, New Jersey, 1990.
2. Arthur D.Kramer, Fundamentals of Technical Mathematics with Calculus, 2nd ed., McGraw – Hill, Inc., USA, 1989.
3. M.Üreyen, Ş.Koçak, C.Tayfur, M.Göğüş. Matematik – II (İntegral Hesap), Eskişehir, 1985.
4. Uğur Er , Çözümlü İntegral Teknikleri, Eskişehir, 1988.
5. Richard S. Paul, M.Leoanard Shaevel, Essentials of Tecnichal Mathematics, Prentice – Hall, İnc., Englewood Cliffs, NT, 3. rd ed., 1989.
6. Ross R.Middlemiss, Differantial and İntegral calculus, Mc Graw – Hill, İnc., New York, London, 1946.
7. İbrahim Doğan, Genel Matematik, İstanbul, 1996.
8. F.Akbulut, Ali Çalışkan, Matematik Analiz Alıştırma ve Problemler Derlemesi (çeviri), İzmir, 1987.
9. John H.Mathews, Numerical Methods, Prentice – Hall, İnc., Englewood Cliffs, NJ, 1987.
10. Hamdi Arıkan, Matematik – II , İ.T.Ü , Sakarya , 1990.
11. Lütfi Biran, Erol Yarız, Genel Matematik, İstanbul, 1982.
12. Ahmet Karedeniz, Yüksek Matematik, Cilt – 1, Diferansiyel ve İntegral Hesap.1980
13. Ernest F. Haeussler, Jr., Richard s. Paul, Introductory Mathematical Analysis, Sixth Editon, Prentice-Hall, Inc., NJ,1990.
14. Bernard Kolman, Charles G.Denlinger, Applied Calculus, HBJ, Inc., LA,1989.

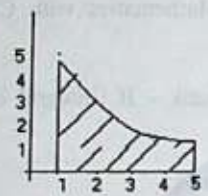
Ek.1 Çözümlü Örnekler

1) $y = \frac{5}{x}$ eğrisi y = 0 , x = 1, x = 5 doğruları ile sınırlı bölgenin;

a) A = ? **b)** V_x = ? **c)** V_y = ?

Çözüm :

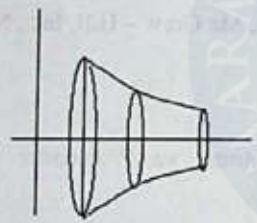
a)



$$A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx = \int_1^5 \left(\frac{5}{x} - 0\right)dx = \int_1^5 \frac{5}{x}dx$$

$$= 5\int_1^5 \frac{1}{x}dx = 5(\ln|_1^5 = 5Ln5$$

b)

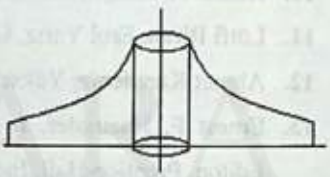


$$Vx = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_1^5 \left(\frac{5}{x}\right)^2 dx = 25\pi\int_1^5 x^{-2}dx$$

$$V_X = 25\pi\left(-\frac{1}{x}\right|_1^5 = 25\pi\frac{4}{5} = 20\pi$$

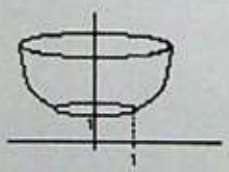
c) $V_y = 2\pi\int_a^b xydx = 2\pi\int_1^5 x\frac{5}{x}dx = 10\pi\int_1^5 dx$

$$V_y = 10\pi(x|_1^5 = 10\pi(5-1) = 40\pi$$



2-) $x^2 = y$ eğrisi , x = 0, y = 1, y = 4 doğruları ile sınırlı bölgenin y- ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin dönel alanı nedir?

Çözüm :



$$S = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+(x')^2}dy \text{ idi.}$$

$$x = \sqrt{y} \Rightarrow x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow (x')^2 = \frac{1}{4y}$$

$$S = 2\pi\int_1^4 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}dy = 2\pi\int_1^4 \sqrt{y}\,\frac{\sqrt{4y+1}}{\sqrt{y}}dy$$

$$S = 2\pi\int_1^4 \sqrt{4y+1}dy = 2\pi = \int_5^{17} u\frac{1}{2}u.du = \pi\left(\frac{u^3}{3}\Big|_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}} = \pi\left(\frac{17\sqrt{17}-5\sqrt{5}}{3}\right)\right.$$

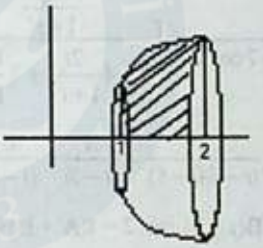
$$\sqrt{4y+1} = u \Rightarrow 4y+1 = u^2$$

$$y = 1 \Rightarrow u_1 = \sqrt{5} \Rightarrow y = \frac{u^2-1}{4} \Rightarrow dy = \frac{1}{2}ud\,u$$

$$y = 4 \Rightarrow u_2 = \sqrt{17}$$

3) $y = 3\sqrt{x}$ eğrisi y = 0, x = 1, x = 2 doğruları ile sınırlı bölgenin x- ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin yanal alanı nedir ?

Çözüm : $S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx$



$$y = 3\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (y')^2 = \frac{9}{4x}$$

$$S = 2\pi\int_1^2 3\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{9}{4x}}dx = 3\pi\int_1^2 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+9}{\sqrt{x}}}dx$$

$$S = 3\pi\int_1^2 \sqrt{4x+9}dx = 3\pi\int_{\sqrt{13}}^{\sqrt{17}} u\frac{1}{2}u.du \qquad S = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{u}{3}\Big|_{\sqrt{13}}^{\sqrt{17}}\right. \text{ ise } S = \pi\left(17\sqrt{17}-13\sqrt{13}\right) \text{ olur.}$$

$$\sqrt{4x+9} = u \quad 4x+9 = u^2 \Rightarrow x = \frac{u^2-9}{4} \quad dx = \frac{1}{2}u.du$$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{13} \quad \Rightarrow x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{17}$$

4-) $\int e^{Lnx-Ln(x^2-1)}dx = ?$

Çözüm : $\int e^{Lnx-Ln(x^2-1)}dx = \int e^{Ln\left(\frac{x}{x^2-1}\right)}dx = \int\frac{x.dx}{x^2-1}$

1. Yol : $x^2-1 = u$ dersek ve $x.dx = \frac{du}{2}$ olur. Böylece ;

$$\int\frac{x.dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}Ln|u|+c = \frac{1}{2}Ln|x^2-1|+c$$

2. Yol : $\int\frac{x.dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}Ln|x-1|+\frac{1}{2}Ln|x+1|+c = \frac{1}{2}Ln|x^2-1|+c$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\frac{x}{x^2-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ ise $x=A(x+1)+B(x-1)$

$x=\underbrace{x(A+B)}_{1}+\underbrace{(A-B)}_{0}$ ve $\begin{matrix}A+B=1\\A-B=0\end{matrix}$ ise $A=B=\frac{1}{2}$ bulunur.

$\int\frac{x.dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}Ln|u|+c=\frac{1}{2}Ln|x^2-1|+c$ aynı sonuç bulunur.

5) $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=?$

Çözüm : $tg\frac{x}{2}=t$ dersek $\frac{x}{2}=Arctg.t$ ve $x=2\,Arctg.t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ ve

$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ değerleri verilen integralde yerine yazılırsa;

$$\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{8-4\frac{2t}{1+t^2}+7\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{t^2-8t+15}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{t^2-8t+15}$$

$$\frac{2}{t^2-8t+15}=\frac{2}{(t-3)(t-5)}=\frac{A}{(t-3)}+\frac{B}{(t-5)}$$

$2=A(t-5)+B(t-3)$ ise $2=t(A+B)+(-5A-3B)$

$-5A-3B=2$ ve $A+B=0$ ise $A=-1$, $B=1$ olur.

$$=-\int\frac{dt}{t-3}+\int\frac{dt}{t-5}$$

$$=Ln|t-5|-Ln|t-3|+c$$

$$=Ln\left|\frac{t-5}{t-3}\right|+c=Ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{g\frac{x}{2}-3}\right|+c$$

6-) $y''=3x^2-2x+1$ olan ve (-2, 3) 'deki eğimi $m=\frac{3}{4}$ olan eğrinin denklemini bulunuz.

Çözüm : $\int y''dx=y'\Rightarrow\int(3x^2-2x+1)dx=\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow x^3-x^2+x+c_1=\frac{3}{4}\Rightarrow(-2)^3-(-2)^2+(-2)+c_1=\frac{3}{4}\Rightarrow c_1=\frac{59}{4}$$

$$\int y'dx=y\Rightarrow\int(3x^3-x^2+x+\frac{59}{4})dx=y\qquad\Rightarrow\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{59}{4}x+c_2=y$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}(-2)^4-\frac{1}{3}(-2)^3+\frac{1}{2}(-2)^2+\frac{59}{4}(-2)+c_2=3\Rightarrow c_2=14$$

Böylece; $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{59}{4}x+14$ olur.

Ek.2 Rasyonel Kesirleri İçeren İntegral Örnekleri

1)

$$\int \frac{x-3}{x^3+x^2}dx = ?$$

$$\frac{x-3}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$x-3 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x-3 = Ax^2 + Ax + Bx + B + Cx^2$$

$$A+C=4 \quad A+B=1 \quad B=-3$$

Buradan A=4 ve C=-4 bulunur

$$= 4\ln x + \frac{3}{x} - 4\ln|x+1| + c$$

2)

$$\int \frac{3x^2-4x+5dx}{(x^2-4)(x^2-9)} = ? \quad x^2=4 \Rightarrow (x-2)(x+2) \quad x^2-9 \Rightarrow (x-3)(x+3)$$

$$\frac{3x^2-4x+5}{(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x+3}$$

$$3x^2-4x+5 = A(x+2)(x^2-9) + B(x-2)(x^2-9) + C(x^2-4)(x+3) + D(x-3)(x^2-4)$$

$$x=2 \Rightarrow 9=-20A \quad A=-\frac{20}{19} \quad x=3 \Rightarrow 20=30C \quad C=\frac{2}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow 25=20B \quad B=\frac{5}{4} \quad x=-3 \Rightarrow 44=-30D \quad D=\frac{-15}{22}$$

$$= -\frac{20}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{15}{22}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{-20}{9}\ln|x-2| + \frac{5}{4}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-3| - \frac{15}{22}\ln|x+3| + c$$

3)

$$\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4}dx = ?$$

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$$

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$$

$$x^3+1 = Ax^3 - 3Ax^2 + 3Ax - A + Bx^2 - 2Bx + B + Cx - C + D$$

$$x^3+1 = x^3A + x^2(-3A+B) + x(3A-2B+C) - A + B - C + D$$

$$A=1, B=3, C=3, D=2$$

$$=\int\frac{x^3+1}{(x-1)^4}=\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+3\int\frac{dx}{(x-1)^3}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$=\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)^3}+c$$

4)

$$\int\frac{3x-1}{4x^2-2x}dx=?$$

$$\frac{3x-1}{4x^2-2x}=\frac{3x-1}{2x(2x-1)}=\frac{A}{2x}+\frac{B}{2x-1}$$

$$3x-1=A(2x-1)+B(2x)$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow B=\frac{1}{2}\quad x=0\Rightarrow A=1$$

$$=\int\frac{dx}{2x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{4}\ln|2x-1|+c$$

5)

$$\int\frac{dx}{\sin x.\cos x}=?$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{2t(1-t^2)}$$

$$=-\frac{(1+t^2)}{t(t^2-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}$$

$$-1+t^2=A(t-1)(t+1)+B.t(t+1)+C.t(t-1)$$

$$t=1\Rightarrow 2B=-2, B=-1$$

$$t=-1\Rightarrow 2C=-2, C=-1$$

$$t=0\Rightarrow -A=-1, A=1$$

$$=\int\frac{dx}{\sin x.\cos x}=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}-\int\frac{dt}{t+1}=\ln t-\ln|t-1|-\ln|t+1|+c$$

$$=\ln\left|\frac{t}{t^2-1}\right|+c=\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}-1}\right|+c$$

6)

$$I=\int\frac{x^3-1}{x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4}dx=?$$

$$x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=(x+1)^3(x-2)^2$$

$$\frac{x^3-1}{x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-2}+\frac{E}{(x-2)^2}$$

$$x^3-1=A(x+1)^2(x-2)^2+B(x+1)(x-2)^2+C(x-2)^2+D(x-2)(x+1)^3+E(x+1)^3$$

$$x^3-1=A(x^2+2x+1)(x^2-4x+4)+B(x+1)(x^2-4x+4)+C(x^2-4x+4)$$

$$+D(x-2)(x^3+3x^2+3x+1)+E(x^3+3x^2+3x+1)$$

$$x^3-1=x^4(A+D)+x^3(-2A+B+D+E)+x^2(-3E-3B+C-3D+3E)+x(-4A-4B-5D+3E)$$

$$+(12A+4B+4C-2D+E)$$

$$x=-1\,için\,-2=9c\Rightarrow C=-\frac{2}{9}=-\frac{6}{27}$$

$$x=2\,için\,7=27E\Rightarrow E=\frac{7}{27}$$

$$-3A-3B+C-3D+3E=0$$

$$-3A-3B-\frac{2}{9}-3D+\frac{21}{27}=0\Rightarrow -3A-3B-3D=-\frac{15}{27}(i)$$

$$-2A+B+D+E=1\Rightarrow -2A+B+D=\frac{20}{27}(ii)$$

$$-2A+B+D=\frac{20}{27}$$

$$A+D=0\Rightarrow A=-D$$

$$+3D-3B-3D=-\frac{15}{27}\quad -3B=-\frac{15}{27}\Rightarrow B=\frac{15}{81}=\frac{5}{27}$$

$$D=\frac{15}{81}=\frac{5}{27}\Rightarrow -2A+B-A=\frac{20}{27}\Rightarrow -3A=\frac{20}{27}-B\Rightarrow -3A=\frac{20}{27}-\frac{15}{81}\Rightarrow A=-\frac{45}{243}$$

$$A=-\frac{15}{81}=-\frac{5}{27}$$

Cevap:

$$I=\frac{5}{27}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{5}{27}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{6}{27}\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{5}{27}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{2}{27}\int\frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$=-\frac{5}{27}.\ln|x+1|-\frac{5}{27}.\frac{1}{(x+1)}+\frac{3}{27}.\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{5}{27}.\ln|x-2|-\frac{2}{27}.\frac{1}{(x-2)}+c$$

7)

$$I=\int\frac{x^4+1}{x^3-x}=?$$

$$I=\int\left(x+\frac{x^2+1}{x^3-x}\right)dx=\int x\,dx+\int\frac{x^2+1}{x^3-x}dx$$

$$\frac{x^2+1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}$$

$$x^2+1=A(x-1)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)$$

$$I=\int x\,dx-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+1}=\frac{x^2}{2}-\ln x+\ln(x-1)+\ln(x+1)+c=\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x}\right|+c$$

Ek.3. Trigonometrik fonksiyonları içeren veya gerektiren integral örnekleri

1)

$$\int \frac{dx}{2(1+\cos x)+\sin x} = ?$$

$$tg\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4+2t}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{4+2t} = \int \frac{2dt}{2(2+t)} = \int \frac{dt}{2+t} = \ln(2+t)+c$$

$$= \ln\left|2+tg\frac{x}{2}\right|+c$$

2)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = ? \quad tg\frac{x}{2} = t \quad x = 2\,Arc\tan t \quad \frac{x}{2} = Arc\tan t \quad dx = 2\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{2}$$

$$\sin x = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$\cos x = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{2}{1+t^2}.\frac{1+t^2}{2t+2}dt = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| = \ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|+c$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right| = \ln\left|tg\frac{\pi/2}{2}+1\right| - \ln\left|tg\frac{0}{2}+1\right|$$

$$= \ln\left|tg\frac{\pi}{4}+1\right| - \ln|tg\,0+1|$$

$$= \ln|2| - \ln|1| = \ln 2$$

3)

$$I=\int\frac{-dx}{8(\cos x+1)}=?$$

integralinin çözümünü yapınız

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\quad t=\tan\frac{x}{2}$$

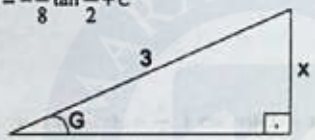
Dönüşümlerini uygulayalım

$$I=\int\frac{-dx}{8(\cos x+1)}=\int\frac{\frac{-2dt}{1+t^2}}{8\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)}=\int\frac{\frac{-2dt}{1+t^2}}{8\left(\frac{1-t^2+1+t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{-2dt}{8.2}=-\frac{1}{8}\int dt$$

$$I=\int\frac{-2dt}{8(\cos x+1)}=-\frac{1}{8}t+C=-\frac{1}{8}\tan\frac{x}{2}+C$$

4)

$$\int\frac{x^2dx}{(9-x^2)^{3/2}}$$



integralini cevaplayınız. $\sqrt{9-x^2}$

$$x=3\sin\theta\Rightarrow dx=3\cos\theta.d\theta$$

$$\sqrt{(9-x^2)}=3\cos\theta\ \ o\ halde\int\frac{x^2}{(9-x^2)^{3/2}}\Rightarrow\int\frac{9\sin^2\theta.3\cos\theta.d\theta}{27.\cos^3\theta}$$

$$=\int\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int\tan^2\theta d.d\theta=\int(\sec^2\theta-1)d\theta=\int\sec^2\theta.d\theta-\int d\theta$$

$$=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}-Arc\tan\frac{x}{3}+C$$

5) $\int Tan^4x.d.x$ integralini hesaplayınız.

$u=Tanx$

$du=\sec^2x.dx$

$$\int Tan^4x.dx=\int Tan^2x.Tan^2x.dx=\int Tan^2x(\sec^2x-1)dx$$

$$=\int Tan^2x.\sec^2x.dx-\int Tan^2x.dx$$

$$=\int Tan^2x.\sec^2x.dx-\int(\sec^2x-1)dx$$

$$=\int Tan^2x.\sec^2x.dx-\int\sec^2x.dx+\int dx$$

$$=\int Tan^4x.dx=\int u^2.du-\int du+\int dx$$

$$=\frac{1}{3}u^3-u+x+c$$

$$=\frac{1}{3}Tan^3x-Tanx+x+c$$

6)

$$I=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{1-\cos x}dx$$

1 – yol.

$t=\tan\frac{x}{2}$ dersek, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, ve, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ olur.

$x=\frac{R}{3}$ için, $t=\tan\frac{R}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x=\frac{R}{2}$ için, $t=\tan\frac{R}{4}=1$

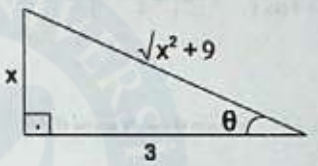
$$I=\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int_{1/\sqrt{3}}^{1}\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1}=-1+\sqrt{3}$$

2 – yol

$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$

$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ olur.

$$I=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{2\sin^2\frac{x}{2}}=-\cot an\frac{x}{2}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}=-1+\sqrt{3}olur.$$



7) $\int\frac{dx}{2(1+\cos x)+\sin x}=?$

$tg\frac{x}{2}=t\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{4+2t}{1+t^2}}$$

$$=\int\frac{2dt}{4+2t}=\int\frac{2dt}{2(2+t)}=\int\frac{dt}{2+t}=\ln(2+t)+c$$

$$=\ln\left|2+tg\frac{x}{2}\right|+c$$

8) $\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{x^2+9}}=?$

$x=atg\theta$ $x=3tg\theta$ $dx=3\sec^2\theta.d\theta$

$$=\int\frac{3\sec^2\theta.d\theta}{(3tg\theta)^2.\sqrt{(3tg\theta)^2+9}}=\int\frac{3\sec^2\theta.d\theta}{9tg^2\theta.\sqrt{9tg^2\theta+9}}=\int\frac{3\sec^2\theta.d\theta}{9tg^2\theta.\sqrt{9(tg^2\theta+1)}}=\int\frac{3\sec^2\theta.d\theta}{9tg^2\theta.3\sec\theta}$$

$=\int\frac{\sec\theta.d\theta}{9tg^2\theta}=\frac{1}{9}\int\frac{1}{\cos\theta}.\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.d\theta=\frac{1}{9}\int\frac{\cos\theta.d\theta}{\sin^2\theta}$ olur. Burada; $\sin\theta=u$ dersek $\cos\theta.d\theta=du$ ve böylece;

$$=\frac{1}{9}\int\frac{du}{u^2}=\frac{1}{9}\int u^{-2}du=\frac{1}{9}.\left(-\frac{1}{9u}\right)+c=-\frac{1}{9u}+c=-\frac{1}{9.\sin\theta}+c=-\frac{1}{9.\sin\theta}+c=-\frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}+c$$

$x=3tg\theta$ ise $tg\theta=\frac{x}{3}\Rightarrow\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\Rightarrow\theta=Arctg\frac{x}{3}$ olur.

9)

$$I=\int\frac{dx}{6+4\cos x+4\sin x}=?$$

$$\tan\frac{x}{2}=t \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2} \quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$I=\int\frac{dx}{6+4\cos x+4\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{6+\frac{4(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{4(2t)}{1+t^2}}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6+6t^2+4-4t^2+8t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{2t^2+8t+10}$$

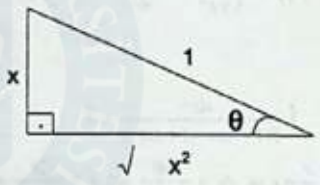
$$=\int\frac{2dt}{2(t^2+4t+5)}=\int\frac{dt}{(t^2+4t+4+1)}=\int\frac{dt}{(t+2)^2+1}$$

$$I=\int\frac{dx}{6+4\cos x+4\sin x}=Arctg\left(tg\frac{x}{2}+2\right)+c$$

10)

$$I=\int\frac{dx}{x^2.\sqrt{1-x^2}}=? \qquad x=\sin\theta\Rightarrow dx=\cos\theta.d\theta$$

$$I=\int\frac{\cos\theta.d\theta}{\sin^2\theta.\sqrt{1-\sin^2\theta}}=\int\frac{\cos\theta.d\theta}{\sin^2\theta.\cos\theta}=\int\frac{d\theta}{\sin^2\theta}=-\cot an\theta+c$$



$$=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+c=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+c$$

11)

$$I=\int\frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx=?$$

$$I=\frac{1}{4}\int\frac{8x+8}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx+3\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}$$

$$4x^2+8x+9=u$$

$$(8x+8)dx=du$$

$$\int\frac{(8x+8)dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}=\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\int u^{-1/2}du=2\sqrt{u}+C=2\sqrt{4x^2+8x+9}+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 2x+\frac{9}{4}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+\frac{5}{4}}}$$

$$x+1=\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta$$

$$dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec^2\theta.d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}.\sec^2\theta.d\theta}{\sqrt{\frac{5}{4}\tan^2\theta+\frac{5}{4}}}=\frac{1}{2}\int\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\sec^2\theta.d\theta}{\sqrt{5}/2\sec\theta}=\frac{1}{2}\int\sec\theta.d\theta=\frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$x+1=\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta \Rightarrow \frac{2(x+1)}{\sqrt{5}}=\tan\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+8x+9}}{\sqrt{5}}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{5}}\right|+c$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+8x+9}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+8x+9}}{\sqrt{5}}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{5}}\right|+c$$

12)

$$\int_3^6\frac{dx}{(x^2-6x+5)^{1/2}}=?$$

$$x^2-6x+5=x^2-6x+9-9+5=(x-3)^2-4$$

$$\int_3^6\frac{dx}{(x^2-6x+5)^{1/2}}=\int_3^6\frac{dx}{((x-3)^2-4)^{1/2}}=\int\frac{du}{(u^2-4)^{1/2}}$$

$x-3=u \Rightarrow dx=du$

$u=a\sec\theta \Rightarrow x-3=2\sec\theta$

$a^2=4$

$du=a\sec\theta.\tan\theta.d\theta \Rightarrow dx=2\sec\theta\tan\theta.d\theta$

$$\int_3^6\frac{dx}{((x-3)^2-4)^{1/2}}=\int_3^6\frac{2\sec\theta\tan\theta.d\theta}{(4\sec^2\theta-4)^{1/2}}=\int\frac{2\sec\theta.\tan\theta.d\theta}{(4(\sec^2\theta-1))^{1/2}}$$

$$=\int\frac{2\sec\theta.\tan\theta.d\theta}{(4\tan^2\theta)^{1/2}}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec\theta.\tan\theta.d\theta}{\tan^3\theta}=\frac{1}{4}\int\frac{\sec\theta.d\theta}{\tan^2\theta}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}.d\theta=\frac{1}{4}\int\frac{\cos\theta.d\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{4}\int t^{-2}dt$$

$\sin\theta=t$

$\cos\theta.d\theta=dt$

$x-3=2\sec\theta$

$$\frac{x-3}{2}=\sec\theta$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{x-3}$$

$$=-\frac{1}{4}.\frac{1}{t}+c=-\frac{1}{4}.\frac{1}{\sin\theta}+c=-\frac{1}{4}.\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}+c$$

$$\int_3^6\frac{dx}{((x-3)^2-4)^{1/2}}=\left(-\frac{1}{4}.\frac{(x-3)}{\sqrt{x^2-6x+5}}\right)=-\frac{3}{4\sqrt{5}}$$

13)

$$\int \frac{dx}{3-5\cos x} = ?$$

$$\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3-5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{3+3t^2-5+5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{8t^2-2} = \int \frac{dt}{4t^2-1}$$

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{A}{2t-1} + \frac{B}{2t+1}$$

$$1 = A(2t+1) + B(2t-1)$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2t+1}$$

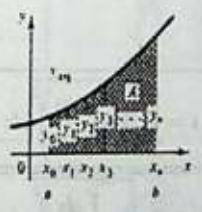
$$2t-1 = u$$

$$2dt = du$$

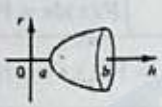
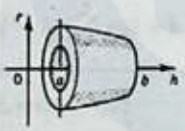
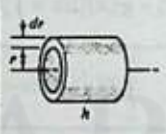
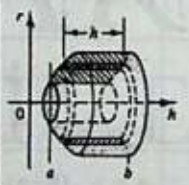
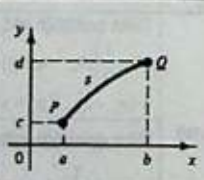
$$dt = \frac{du}{2}$$

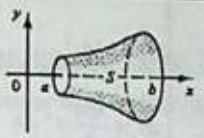
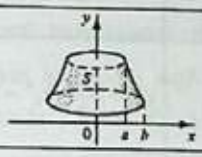
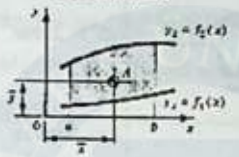
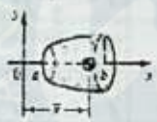
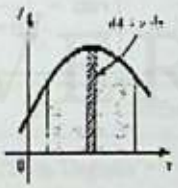
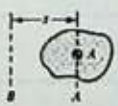
$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right| + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2tg\frac{x}{2}-1}{2tg\frac{x}{2}+1}\right| + c$$

Ek.4: İntegrale Ait Tanım ve Formüller: Kitabın bu bölümünde integrale ait temel bağıntı, formül ve tekniklerin özeti verilmiştir. Bu ek bölümü hazırlamaktaki amacım, öğrencinin aradığı bir formül için kaybedeceği zamanı geri kazanması ve ezberden kurtulup verilen formülü nerede uygulayacağını öğrenmesidir.

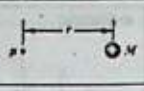
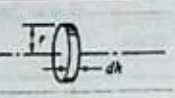
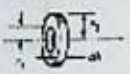
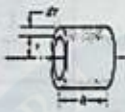
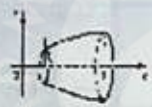
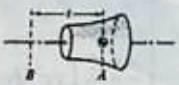
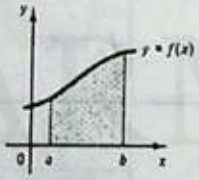
	1		Belirli İntegral	$\int F'(x)dx = F(x) + c$	
	2			$\int f(x)dx = F(x) + c$ burada $f(x) = F'(x)$	
	3		Temel Teorem 	$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$	
	4		Riemann Toplamları ile İntegral Tanımı	$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$	
	5		Belirli İntegralin Özellikleri	$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$	
	6			$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$	
	7			$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx$	
	8			$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	
	9	Yaklaşık İntegral		Orta Nokta Metodu	$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ burada; $f(x_i^*)$, İ.dilimin yüksekliğidir.
	10			Ortalama Ordinat Metodu	$A = y_{ort}(b - a)$
	11			Yamuk Kuralı	Dilim genişliği eşit değilse; $A \cong \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)(y_1 + y_0) + (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1})$
	12				Dilim genişliği eşitse, $h = x_1 - x_0$: $A \cong h[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	13			İkinci Derece Formülü	$A=\frac{h}{2}(y_0+4y_1+y_2)$
	14			Simpson Kuralı	$A\equiv\frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+4y_{n-1}+y_n)$
	15	Dönel Cisimlerin Hacimleri	Disk Metodu		Hacim = $dV=\pi r^2 dh$
	16				$V=\pi\int_a^b r^2\,dh$
	17		Halka Metodu		$dV=\pi(r_0^2-r_1^2)\,dh$
	18				$V=\pi\int_a^b (r_0^2-r_1^2)\,dh$
	19		Tabaka Metodu		$dV=2\pi rh\,dr$
	20				$V=2\pi\int_a^b rh\,dr$
	21	Yay Uzunluğu			$s=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	22				$s=\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$

	23	Yüzey Alanı			x-ekseni; $s = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	24				x-ekseni; $s = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	25	Ağırlık ve Kütle Merkezi		Düzlem Alanı 	$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx$
	26				$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)\,dx$
	27				x-ekseni; $\bar{x} = \frac{\pi}{V}\int_a^b xy^2\,dx$
	28				y-ekseni; $\bar{y} = \frac{\pi}{V}\int_c^d yx^2\,dy$
	29				$I_p = Ar^2$
	30				$I_x = \frac{1}{3}\int y^3\,dx$
	31				$I_y = \int x^2 y\,dx$
	32				Kutupsal: $I_0 = I_x + I_y$
	33				Radius of Gyration: $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$
	34				Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + Ax^2$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	35				$I_p = Mr^2$
	36			Disk: 	$dI = \frac{m\pi}{2} r^4\, dh$
	37			Halka 	$dI = \frac{m\pi}{2}(r_0^4 - r_i^4)\, dh$
	38			Kabuk 	$dI = 2\pi\rho r^3 h\, dr$
	39				Disk Metodu: $I = \frac{m\pi}{2}\int_a^b r^4\, dh$
	40				Shell(Tabaka) Metodu: $I = 2\pi\rho n \int r^3 h\, dr$
	41				Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + Ms^2$
	42				Ortalama Ordinat Formülü: $y_{ort} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$
	43				Etkin (Efektif) Değer: $rms = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\, dx}$

Ek.5. Diferansiyel, Hesap, İntegral, Cebir, Diferansiyel, Denklemler, Geometri, Trigonometr, Olasılık ve İstatistik alanlarında kullanılan temel özellikler, bağıntılar ve formüller.

Kitabımıza ek olarak hazırlanan bu bölümde, gerek kitapta yer alan konular ve gerekse diğer bilim dallarında yer alan belli başlı tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüller verilmiştir. Bu ek bölümde Analiz, Cebir, Geometri, Diferansiyel, İntegral, Diferansiyel Denklemler, Analitik Geometri, Trigonometri, Logaritma, Fonksiyonlar ve benzeri Matematik dallarındaki temel tanımlar, özellikler, özet bilgiler ve formüllerin yanısıra Mühendisliğin her branşında kullanılan temel bilgiler, Olasılık ve İstatistik dallarına ait 546 adet tanım, özellik, özet bilgi ve formülden oluşmuştur.

CEBİRSEL KURALLAR	1	Değişme Özelliği	Toplama	$a + b = b + a$
	2		Çarpma	$a.b = b.a$
	3	Birleşme Özelliği	Toplama	$a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$
	4		Çarpma	$a.(b.c) = (a.b).c = (a.c).b = a.b.c$
	5	Dağılma Özelliği		$a.(b + c) = a.b + a.c$
İŞARET KURALLARI	6	Toplama ve Çıkarma		$a + (-b) = a - (+b) = a - b$
	7			$a + (+b) = a - (-b) = a + b$
	8	Çarpma		$(+a).(+b) = (-a).(-b) = a.b$
	9			$(+a).(-b) = (-a).(+b) = -(+a).(+b) = -a.b$
	10	Bölme		$\frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{+b} = -\frac{+a}{-b} = \frac{a}{b}$
	11			$\frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{a}{b}$
YÜZDELİKLER	12	Miktar = Temel x Oran		
	13	$\text{Yüzde Değişim} = \frac{\text{Yeni Değer} - \text{Esas Değer}}{\text{Esas Değer}} \times \%100$		
	14	$\text{YüzdeHata} = \frac{\text{Ölçülen Değer} - \text{Bilinen Değer}}{\text{Bilinen Değer}} \times \%100$		
	15	$\text{A'nın Yüzdekarışımı} = \frac{\text{A'nın Miktarı}}{\text{Karışım Miktarı}} \times \%100$		
	16	$\text{YüzdeEtki} = \frac{\text{Çıkış}}{\text{Giriş}} \times \%100$		

İKİLİ SAYILAR	17	En büyük n bit ikili sayı		$2^n - 1$
	18	Toplama		0 + 0 = 0 0 + 1 = 1 1 + 0 = 1 1 + 1 = 0 eldeli toplama
	19	Çıkarma		0 − 0 = 0 0 − 1 = 1 eldeli çıkarma 1 − 0 = 1 1 − 1 = 0 10 − 1 = 1
	20			A-B=A+(-B)
	21	Çarpma		0 x 0 = 0 0 x 1 = 0 1 x 0 = 0 1 x 1 = 1
	22	Bölme		0 ÷ 0 tanımsız 1 ÷ 0 tanımsız 0 ÷ 1 = 0 1 ÷ 1 = 1
İKİLİ SAYILAR	23	Ters alma	N bit x sayısının birinci tersi	$(2^n - 1) - x$
	24			Bir sayının birinci tersi 1'lerin 0, 0'ların 1 yapılmasıyla elde edilir.
	25		N bit x sayısının ikinci tersi	$(2^n - x)$
	26			Bir sayının ikinci tersi, birinci tersinin alınıp bulunan sayıya 1 ilave edilmesiyle elde edilir
	27	Negatif ikili sayılar		Eğer M pozitif ikili bir sayı ise –M, M sayısının ikinci tersidir.
ÜSLER	28	Tanım		$a^n = a * a * a * \ldots\ldots a$ n adet a çarpımı
	29	Üs Alma Kuralları	Çarpım	$(x^a) * (x^b) = x^{a+b}$
	30		Bölme	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
	31		Kuvvet	$(x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a$
	32		Çarpımın kuvveti	$(xy)^n = x^n * y^n$
	33		Bölümün kuvveti	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
	34		0. üs	$x^0 = 1$
	35		Negatif üs	$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
	36	Kesirli üsler		$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
	37			$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

KÖKLER	38	Kök kuralları	Çarpımın kökü	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
	39		Bölümün kökü	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
	40		Kuvvetin kökü	$\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$
ÖZEL ÇARPANLAR VE ÇARPIMLAR	41	İki terimliler	İki kare farkı	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
	42		İki küp toplamı	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
	43		İki küp farkı	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
	44	Üç terimliler	Çarpanlara ayırma testi	Eğer b^2-4ac tam kare ise ax^2+bx+c çarpanlarına ayrılabilir
	45		Eğer a=1	$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
	46		Genel ikinci derece üç terimli	$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
	47		Tam kare üç terimliler	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
	48			$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
	49	Gruplayarak çarpanlarına ayırma		$ac+ad+bc+bd=(a+b)(c+d)$
KESİRLER	50	Sadeleştirme		$\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$
	51	Çarpma		$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
	52	Bölme		$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
	53	Toplama ve çıkarma	Aynı paydalar	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$
	54		Farklı Paydalar	$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}\pm\frac{bc}{bd}=\frac{ad\pm bc}{bd}$
ORANTI	55	a:b=c:d orantısında	İçler çarpımı dışlar çarpımına eşittir	$ad=bc$
	56		Dışlar kendi arasında yer değiştirebilir	$d:b=c:a$
	57		İçler kendi arasında yer değiştirebilir	$a:c=b:d$
	58		İçler ile dışlar yerdeğiştirebilir	$b:a=d:c$
	59	Orta orantılı	Orantı	$a:b=b:c$
			Geometrik ortalama	$b=\pm\sqrt{ac}$
DEĞİŞİM	60	k= Orantı katsayısı	Doğru	$y \propto x$ yada $y=kx$
	61		Ters	$y \propto \frac{1}{x}$ yada $y=\frac{k}{x}$
	62		Bileşik	$y \propto xw$ yada $y=kxw$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Determinantlar

Cebirsel Çözüm

63

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

$$x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \text{ ve } y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

burada $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$

64

$$a_1x+b_1y+c_1z=k_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=k_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=k_3$$

$$x=\frac{b_2c_3k_1+b_1c_2k_3+b_3c_1k_2-b_2c_1k_3-b_3c_2k_1-b_1c_3k_2}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

$$y=\frac{a_1c_3k_2+a_3c_2k_1+a_2c_1k_3-a_3c_1k_2-a_1c_2k_3-a_2c_3k_1}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

$$z=\frac{a_1b_2k_3+a_3b_1k_2+a_2b_3k_1-a_3b_2k_1-a_1b_3k_2-a_2b_1k_3}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

Bir Determinantın Değeri

65 — İkinci Derece

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

66 — Üçüncü derece

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-(a_3b_2c_1+a_1b_3c_2+a_2b_1c_3)$$

67 — Minörler

Determinantta b elemanının işaretli minörü

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix} \text{ ise } -\begin{vmatrix}d & f\\ g & i\end{vmatrix}$$

68

Bir determinantın değerinin bulmak için;

1. 1. Herhangi bir satır veya sütun seçilip işaretli minörü hesaplanır..
2. 2. Bu satır veya sütundaki her bir eleman ile o elemanın işaretli minörü çarpılır.
3. 3. Bu çarpımlar toplanarak determinantın değeri bulunur.

Cramer Kuralı

69

Herhangi bir değişkenin çözümü, paydası katsayılar determinantı, payı ise o değişkenin bulunduğu sütuna sabitler vektörü konularak elde edilen determinantın, hesaplanması ile edilen kesrin değeridir.

70 — İki denklem

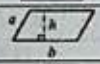
$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b\end{vmatrix}} \text{ ve } y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b\end{vmatrix}}$$

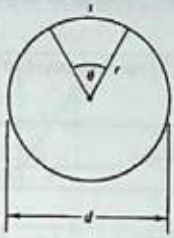
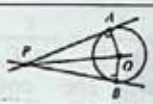
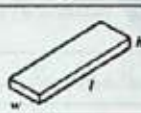
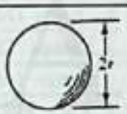
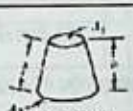
71 — Üç denklem

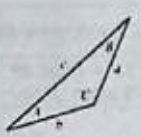
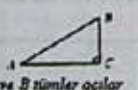
$$x=\frac{\begin{vmatrix}k_1 & b_1 & c_1\\ k_2 & b_2 & c_2\\ k_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}}{\Lambda} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & k_1 & c_1\\ a_2 & k_2 & c_2\\ a_3 & k_3 & c_3\end{vmatrix}}{\Lambda} \quad z=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & k_1\\ a_2 & b_2 & k_2\\ a_3 & b_3 & k_3\end{vmatrix}}{\Lambda}$$

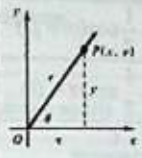
Burada ; $\Lambda=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$

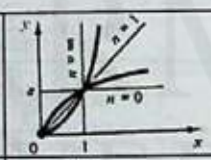
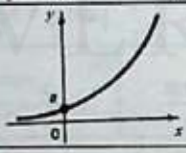
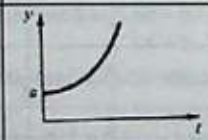
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ	72	Determinantın Özellikleri	Sıfır satır veya sütun	Bir satırın (veya sütun) bütün elemanları 0 ise determinant değeri 0'dır.
	73		Eşit satırlar veya sütunlar	Eğer iki satır (veya sütun) eşitse determinant değeri 0' dır.
	74		Temel köşegen altındaki sıfırlar	Eğer temel köşegen altındaki elemanların hepsi sıfırsa determinantın değeri köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.
	75		Satırlar ile sütunların yerdeğiştirmesi	Eğer satırlarla sütunları (veya sütunlarla satırları) yer değiştirirsek determinantın değeri değişmez.
	76		Satırlar veya sütunların yerdeğiştirmesi	İki satır (veya sütun) aralarında yerdeğişitirilirse determinantın işareti değişir.
	77		Bir sabit ile çarpım	Bir determinantın bir sabitle çarpımı o determinantın bütün elemanlarının o sayıyla çarpımı demektir.
	78		Bir satır veya sütunun bir katının diğerine ilave edilmesi	Bir satır (veya sütunun) elemanları bir çarpanla çarpılır ve diğer satır veya sütunun aynı konumdaki elemanlarına ilave edilirse determinantın değeri değişmez.
MATRİSLER	79	Toplama	Değişme özelliği	A+B=B+A
	80		Birleşme özelliği	A+(B+C)=(A+B)+C=(A+C)+B
	81		Toplama ve Çıkarma	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+w & b+x \\ c+y & d+z \end{pmatrix}$
	82	Çarpma	Çarpılabilir Matrisler	A ve B iki matris olsun. AB çarpım matrisi ancak A matrisinin sütun sayısı B matrisinin satır sayısına eşit iken tanımlanır.
	83		Değişme Özelliği	AB ≠ BA Matris çarpımında değişme özelliği yoktur
	84		Birleşme Özelliği	A(BC) = (AB)C = ABC
	85		Dağılma Özelliği	A(B+C) = AB + AC
	86		Çarpımın boyutu	(m x p)(p x n)=(m x n)
	87		Bir matrisin ve bir skalerin çarpımı	$k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$
	88		Bir sütun vektörü ve bir satır vektörünün skaler çarpımı	$\underset{(1\,X\,2)(2\,X\,1)}{(a \quad b)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\underset{(1\,X\,1)}{(ax \quad + \quad by)}$
	89		Bir satır vektörü ve bir sütun vektörünün tensör çarpımı	$\underset{(2\,X\,1)(1\,X\,2)}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}\underset{}{(x \quad y)}=\underset{(2\,X\,2)}{\begin{pmatrix} ax & ay \\ bx & by \end{pmatrix}}$
	90		Bir satır vektörü ve bir matrisin çarpımı	$\underset{(1\,X\,2)}{(a \quad b)}\underset{(2\,X\,3)}{\begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}}=\underset{(1\,X\,3)}{(au+bx \quad av+by \quad aw+bz)}$
	91		Bir sütun vektörü ve bir matrisin çarpımı	$\underset{(2\,X\,2)}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}\underset{(2\,X\,1)}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}=\underset{(2\,X\,1)}{\begin{pmatrix} ax & by \\ cx & dy \end{pmatrix}}$

	92		İki matrisin çarpımı	$\underset{(2\times 3)}{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \end{pmatrix}} \underset{(3\times 2)}{\begin{pmatrix} u & x \\ v & y \\ w & z \end{pmatrix}} = \underset{(2\times 2)}{\begin{pmatrix} au+bv+cw & ax+by+cz \\ du+ev+fw & dx+ey+fz \end{pmatrix}}$
	93		Bir matrisin tersi ile çarpımı	$AA^{-1}=A^{-1}A=I$
	94		Bir matrisin birim matris ile çarpımı	$AI=IA=A$
	95	Denklem sistemlerinin çözümleri	Bir denklem sistemin matris formu	$AX=B$
	96		Bir matrisin	1. 1. Herhangi satırların değişimi 2. 2. 0 olmayan bir sabit ile bu satırları çarpma 3. 3. Bir satırın sabit çarpımının diğer satıra ilave edilmesi
	97		Birim matris metodu	$AX=B$ formunun her iki tarafı A^{-1} ile çarpılarak X bilinmeyenler vektörü aşağıdaki gibi elde edilir.
	98		Ters matris yöntemiyle denklem sistemi çözümü	$X=A^{-1}B$
	99	Genel form	$ax^2+bx+c=0$	
	100	Quadratik form	$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	
	101	Diskriminant	Eğer a,b ve c reel sayı ise	Eğer $b^2-4ac>0$ gerçel iki farklı kök varsa Eğer $b^2-4ac=0$ İki eşit kök varsa Eğer $b^2-4ac<0$ Gerçel olmayan kökler
	102	n. derece polinom	$a_0x^n+a_1x^{n-1}+.....+a_{n-1}x+a_n$	
	103	Çarpan teoremi	Eğer f(x)=0 denkleminin kökü r ise x-r f(x) polinomunun bir çarpanıdır; tersine x-r f(x) polinomunun bir çarpanı ise r, f(x)=0 denkleminin bir köküdür.	
Kesişen doğrular	104	Kesişen iki doğrunun ters açıları eşittir.		
	105	Eğer iki paralel doğruyu üçüncü bir doğru keserse oluşan yöndeş ve iç ters açılar eşittir.		
	106	Eğer iki doğru birçok paralel doğruyla kesilirse karşılıklı doğru parçaları orantılıdır.		
ÇOKGENLER	107		Kare	$\text{Alan} = a^2$
	108		Dikdörtgenler	$\text{Alan} = a.b$
	109		Paralelkenar	$\text{Alan} = b.h$
	110		Eşkenar Dörtgen	$\text{Alan} = a.h$
	111		Yamuk	$\text{Alan} = \dfrac{(a+b).h}{2}$
	112		Çokgen	$\text{AçılarToplamı} = (n-2).180^\circ$

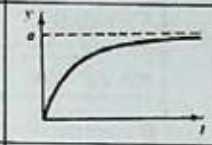
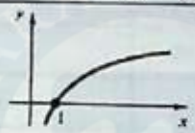
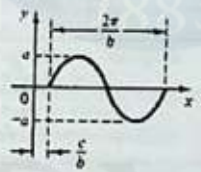
DAİRE VE ÇEMBER	113		$Çevre = 2\pi r = \pi d$	
	114		$Alan = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$	
	115		$Merkezaç\ ı\theta\,(radyan) = \frac{s}{r}$	
	116		$Kesit\ alanı = \frac{rs}{2} = \frac{r^2\theta}{2}$	
	117		$1\ \ dönüş = 2\pi\ \ radyan = 360^\circ\ \ 1^\circ = 60dak.\ \ 1\min = 60s$	
	118		Bir dik üçgende??????	
	119		Bir çemberin teğetleri	AP teğeti OA yarıçapına diktir
	120			Teğet AP = Teğet BP OP APB açısını ortalar
	121		Kesişen kirişler	a.b = c.d
	122		Küp	$hacim = a^3$
	123			$Yüzey\ Alanı = 6a^2$
	124		Dikdörtgen prizma	$Hacim = lwh$
	125			YüzeyAlanı= 2(lh+lw+hw)
	126		Herhangibir silindir veya prizma	Hacim = (taban alanı)(yükseklik)
	127		Dik silindir veya prizma	Yanal alan = (Taban çevresi)(yükseklik)
	128		Küre	$Hacim = \frac{4}{3}\pi r^3$
	129			$Yüzey\ Alanı = 4\pi r^2$
	130		Herhangi koni veya silindir	Hacim=1/3(taban alanı)(yükseklik)
	131		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal Alan=1/2(Taban çevresi) X (yan yükseklik)
	132		Herhangi koni veya düzgün piramit	$Hacim = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})$
	133		Dik dairesel koni veya düzgün piramit	Yanal alan= $\frac{s}{2}$ (taban çevrelerinin toplamı)= $\frac{s}{2}(P_1 + P_2)$

	134		Katı benzer şekiller veya düzlemin karşılıklı boyutları orantılıdır.	
	135		Benzer düzlem veya katı şekillerin alanları, herhangi iki karşılıklı boyutun oranının karesi ile orantılıdır.	
	136		Benzer katı şekillerin hacimleri herhangi iki karşılıklı boyutun oranının kübü ile orantılıdır.	
	137		$Alan = \frac{1}{2}bh$	
	138		Hero Formülü: $Alan = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ burada $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$	
	139		İç açılar toplamı	$A+B+C=180^{\circ}$
	140		Sinüs teoremi	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
	141		Kosinüs teoremi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ $c^2 = b^2 + b^2 - 2ab \cos C$
	142		Dış Açı	$\theta = A + B$
	143	Eğer bir üçgenin iki açısı diğer bir üçgenin iki açısına eşitse,bu iki üçgen benzerdir.		
	144	Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılıdır.		
	145		Pisagor teoremi	$a^2 + b^2 = c^2$
	146		Sinüs	$\sin\Theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$
	147		Kosinüs	$\cos\Theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Hipotenüs}}$
	148		Tanjant	$\tan\Theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{Karşı Dik Kenar}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$
	149		Kotanjant	$\cot\Theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{Komşu Dik Kenar}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$
	150		Sekant	$\sec\Theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Komşu Dik Kenar}}$
	151		Kosekant	$\csc\Theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{Hipotenüs}}{\text{Karşı Dik Kenar}}$
	152	Ters Bağıntılar	(a) $\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	(b) $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ (3) $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
	153		Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin oluşturduğu iki üçgenden herbiri diğerine ve ilk dik üçgene benzerdir.	
	154	 A ve B tümler açılar	Eş fonksiyonlar	(a) $\sin A = \cos B$ (b) $\cos A = \sin B$ (c) $\tan A = \cot B$ (d) $\cot A = \tan B$ (e) $\sec A = \csc B$ (f) $\csc A = \sec B$
	155	İki üçgenin eşliği	Karşılıklı birer kenarları ve ikişer açıları aynı olan üçgenler eştir. (A.K.A) (A.A.K)	

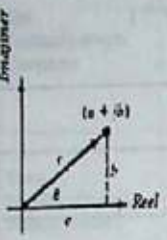
	156		Karşılıklı ikişer kenarları ile bu kenarlar arasındaki açıları aynı olan üçgenler eştir.(K.A.K)	
	157		Karşılıklı kenarları aynı olan üçgenler eştir. (K.K.K)	
	158		Kartezyen Form	$x = r\cos\theta$
	159			$y = r\sin\theta$
	160		Kutupsal Form	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
	161			$\theta = \arctan\frac{y}{x}$
	162	Bölüm Bağıntıları	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	
	163		$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
	164	Pisagor Bağıntılar	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	
	165		$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	
	166		$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$	
	167	İki açı farkı veya toplamı	$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	
	168		$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$	
	169		$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \pm \tan\alpha\tan\beta}$	
	170	İki kat yay formülleri	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$	
	171		(a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin$	(b) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ / (c) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
	172		$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$	
	173	Yarım açı formülleri	$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	
	174		$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$	
	175		(a) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$	(b) $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ / (c) $\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
	176	İki fonksiyonun farkının toplamı	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	
	177		$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	
	178		$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	
	179		$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$	

	180	İki Fonksiyonun Çarpımı	$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$	
	181		$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$	
	182		$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta)$	
	183	Ters trigonometrik fonksiyonlar	$\theta=\arcsin C=\arctan\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$	
	184		$\theta=\arccos D=\frac{\sqrt{1-D^2}}{D}$	
LOGARİTMA	185	Üstel formun Logaritmik ifadesi		Eğer, $b^x=y$ ise $x=\log_b y$ olur. Terside doğrudur. ($y>0$, $b>0$, $b\neq 1$)
	186	Logaritma kuralları	Çarpımlar	$\log_b MN=\log_b M+\log_b N$
	187		Bölümler	$\log_b\frac{M}{N}=\log_b M-\log_b N$
	188		Kuvvetler	$\log_b M^p=p\log_b M$
	189		Kökler	$\log_b\sqrt[q]{M}=\frac{1}{q}\log_b M$
	190		1'in logaritması	$\log_b 1=0$
	191		Taban ile üs aynı ise	$\log_b b=1$
	192	Taban ile üs aynı iken kuvvet alma		$\log_b b^n=n$
	193	Taban değiştirme		$\log N=\frac{\ln N}{\ln 10}\equiv\frac{\ln N}{2.3026}$
	194	Kuvvet Fonksiyon		$y=ax^n$
	195	Üstel Fonksiyon		$y=a(b)^{nx}$
	196	Seri Açılımı	$b^x=1+x\ln b+\frac{(x\ln b)^2}{2!}+\frac{(x\ln b)^2}{3!}+\ldots.$ (b>0)	
	197	Üstel Büyüme		$y=ae^{\ln}$
	198			Yarılanma Süresi: $t=\frac{\ln 2}{n}$

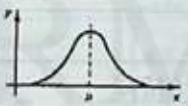
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	199	Üstel Azalış		$y = ae^{-kt}$
	200	Bir üst limitle üstel büyüme		$y = a(1-e^{-kt})$
	201	Zaman sabiti	$T = \frac{1}{\text{Büyüme Oranı}}$	
	202	Seri Açılımı	$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$	
	203		$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	
	204	Logaritmik fonksiyon		$y = \log_b x$ $(x > 0, b > 0, b \neq 1)$
	205	Seri Açılımı	$\ln x = 2a + \frac{2a^3}{3} + \frac{2a^5}{5} + \frac{2a^7}{7} + \cdots$ burada $a = \frac{x-1}{x+1}$	
	206	Sinüs dalgası		$y = a\sin(bx + c)$
	207			$Periyod = \frac{360}{b} deg/cycle = \frac{2\pi}{b} rad/cycle$
	208			$Frekans = \frac{b}{360} cycle/deg = \frac{b}{2\pi} cycle/rad$
	209			$Faz\ Kayması = -\frac{c}{b}$
	210	Seri Açılımı	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$	
	211		$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$	
	212	i nin kuvveti	$i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, i^5 = i, \ldots$	
	213	Kartezyen Form	$a + ib$	
	214		Toplamlar	$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$
	215		Farklar	$(a+ib)-(c+id) = (a-c)+i(b-d)$
	216		Çarpımlar	$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$
	217		Bölme	$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	218		Trigonometrik Form	$z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$	
	219			Burada	$a=r\cos\theta$
	220				$b=r\sin\theta$
	221				$r=\sqrt{a^2+b^2}$
	222				$\theta=\arctan\frac{b}{a}$
	223		Kutupsal Form	$z=r\angle\theta=a+ib$	
	224			Çarpma	
	225			Bölme	
	226			Üsler ve Kökler	
	227		Üstel I Form	Euler Formülü	$re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$
	228			Çarpma	$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
	229			Bölme	$\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_1e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
	230			Üsler ve Kökler	$(re^{i\theta})^n=r^ne^{in\theta}$
	231	**Aritmetik Dizi Ortak fark=r**	İndirgeme Formülü		$a_n=a_{n-1}+d$
	232		Genel Terim		$a_n=a+(n-1)d$
	233		Terimler Toplamı		$s_n=\frac{n(a+a_n)}{2}$
	234				$s_n=\frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$
	235	**Geometrik Dizi Ortak oran=r**	İndirgeme Formülü		$a_n=ra_{n-1}$
	236		Genel Terim		$a_n=ra^{n-1}$
	237		Terimler Toplamı		$s_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$
	238				$s_n=\frac{a-ra_n}{1-r}$
	239		Sonsuz Toplam		$S=\frac{a}{1-r}$ burada $\lvert r\rvert<1$
	240	**Binom Açılımı**			$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\cdots+b^n$

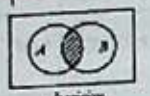
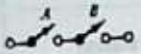
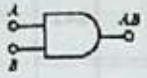
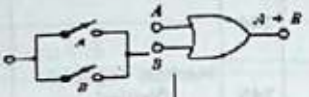
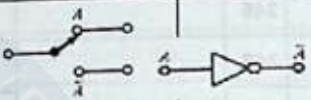
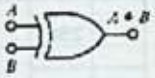
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	241	Genel Terim		$r.terim = \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} a^{n-r+1} b^{r-1}$
	242	Binom Serisi		$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$ burada $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$
	243			$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$ burada $\lvert x\rvert < 1$
	244	Merkezi Yoğunluk Ölçüleri	Aritmetik Ortalama	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$
	245		Medyan	Bir seride tek sayıda terim varsa en ortadaki terim,seride çift terim varsa ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması medyanı verir.
	246		Mod	Bir seride en çok tekrarlanan veya gözlenen terim o serinin modudur.
	247	Dağılım Ölçüleri	Değişim Aralığı	Bir serideki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka değişim aralığı denir.
	248		Varyans (s^2)	$s^2 = \frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n}$
	249		Standart Sapma (s)	Standard sapma, varyansın pozitif kareköküdür.
	250	Olasılık	Bir olayın olma olasılığı	$P(A) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Bütün olayın eleman sayısı}}$
	251		Bağımsız İki olayın birlikte olma olasılığı	$P(A,B) = P(A)P(B)$
	252		Bağımsız ikiden fazla olayın birlikte olma olasılığı	$P(A,B,C,....) = P(A)P(B)P(C)\cdots$
	253		Aynık olmayan iki olayın birleşiminin olasılığı(A veya B olayı)	$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A,B)$
	254		Aynık iki olayın birleşiminin olasılığı(A veya B olayı)	$P(A+B) = P(A) + P(B)$
	255	Gauss Dağılımı		$y = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
	256	Standart Hata	Ortalamanın standart hatası	$SE_{\bar{x}} = \frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
	257		Standart sapmanın hatası	$SE_s = \frac{a}{\sqrt{2n}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

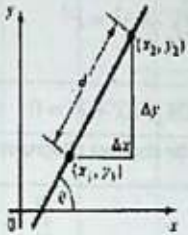
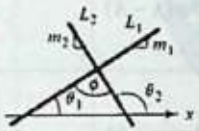
BOOLEAN CEBİRİ VE KÜMELER

Boolean Cebiri

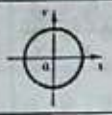
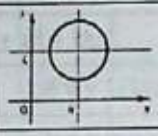
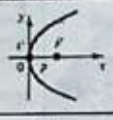
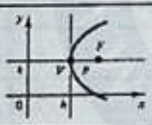
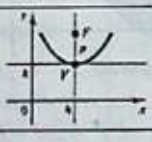
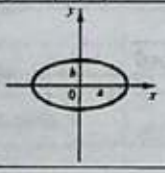
	Doğruluk Tablosu	Venn Diyagramı	Anahtar Diyagram	Lojik Kapılar
258 AND	$\begin{array}{ccc} A & B & A\cdot B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$	 kesişim $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$		
259 OR	$\begin{array}{ccc} A & B & A+B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$	 Birleşim $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$		
260 NOT	$\begin{array}{cc} A & \overline{A} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$	 A'nın tümleyeni $A' = \{x : x \notin U, x \in A\}$		
261 EXOR	$\begin{array}{ccc} A & B & A\oplus B \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	 $A \oplus B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B, x \notin A \cap B\}$		

Boolean cebirinin özellikleri

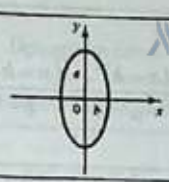
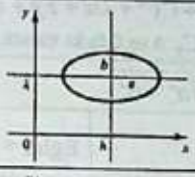
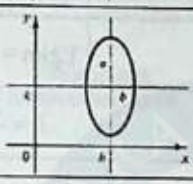
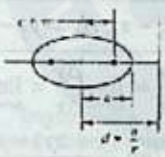
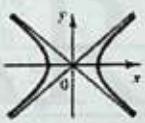
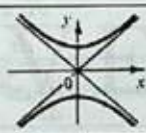
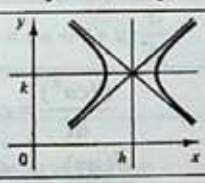
		AND	OR
262	Değişme özelliği	$AB \equiv BA$	$A+B \equiv B+A$
263	Sınırlılık özelliği	$A\cdot 0 \equiv 0$	$A+1 \equiv 1$
264	Birim özellik	$A\cdot 1 \equiv A$	$A+0 \equiv A$
265	Idempotent Özelliği	$AA \equiv A$	$A+A \equiv A$
266	Ters işlem	$A\cdot \overline{A} \equiv 0$	$A+\overline{A} \equiv 1$
267	Birleşme özelliği	$A(BC) \equiv (AB)C$	$A+(B+C) \equiv (A+B)+C$
268	Dağılma özelliği	$A(B+C) \equiv AB+AC$	$A+BC \equiv (A+B)(A+C)$
269	Dağılma özelliği	$A(\overline{A}+B) \equiv AB$	$A+\overline{A}\cdot B \equiv A+B$
270	Absorption Laws	$A(A+B) \equiv A$	$A+(AB) \equiv A$
271	DeMorgan Kuralı	$\overline{A\cdot B} \equiv \overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B} \equiv \overline{A}\cdot\overline{B}$
272	Üs alma kuralı	$\overline{\overline{A}} \equiv A$	

	273		Uzunluk Formülü	$d=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	
	274		Eğim (m)	$m=\frac{rise}{run}=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	
	275			$m=\tan\theta$ $0\le\theta<180°$	
	276		DOĞRU DENKLEMİ	Genel Form	$Ax+By+C=0$
	277			x-eksenine Paralel	$y=b$
	278			y-eksenine Paralel	$x=a$
	279			Standart Form	$y=mx+b$
	280			İki noktası belli	$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
	281			Bir noktası ve eğimi belli	$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$
	282			Eksen form	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
	283			Kutupsal Form	$r\cos(\theta-\beta)=p$
	284		L_1 ve L_2 paralelse		$m_1=m_2$
	285		L_1 ve L_2 dikse		$m_1=-\frac{1}{m_2}$
	286		L_1 ve L_2 doğruları arasındaki açı		$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$
	287	KONİKLER	İkinci derece eğrilerin genel denklemi(Konikler)	$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	
	288		Eksenlerin dönüşümü	Bir eğrinin eksenlerinin dönüşümü veya kaydırılması (Öteleme) : (h,k) noktasına eksenleri ötelemek,x-eksenini h kadar sola ve y-eksenini k kadar aşağı doğru kaydırmaktır.	
	289		Dışmerkezlik 	$e=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$	
	290			e=0 ise Çember 0< e < 1 ise Elips e = 1 ise Parabol e > 1 ise Hiperbol	
	291		Bir koniğin tanımı	$PF=e\cdot PD$	
	292		Konikler için kutupsal denklem	$r=\frac{ke}{1-e\cos\theta}$	

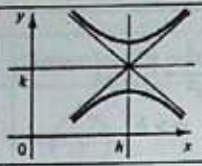
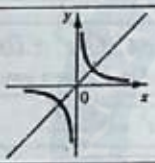
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	293		Çember:Sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesi		
	294	ÇEMBER		Standart Form	$x^2 + y^2 = r^2$
	295				$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
	296		Genel Form		$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
	297	PARABOL	Parabol:Bir düzlemde sabit bir nokta(Odak) ile sabit bir doğruya (Doğrultman) eşit uzaklıktaki noktalar kümesi		
	298			Standart Form	$y^2 = 4px$
	299				$x^2 = 4py$
	300				$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
	301				$(x-h)^2 = 4p(y-h)$
	302		Genel Form		$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ *or* $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$
	303		Odaklar arası uzaklık		$L = \lvert 4p \rvert$
	304		Alan 		$\text{Alan} = \frac{2}{3}ab$
	305		Elips: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları toplamı sabit ve büyük eksenin uzunluğuna (2a) eşit noktalar kümesi (PF + PF' = 2a)		
	306	ELİPS		Standart Form	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	307	ELİPS			$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ $a>b$
	308				$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$
	309				$\frac{(x-k)^2}{a^2}+\frac{(y-h)^2}{b^2}=1$ $a>b$
	310		Genel Form		$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ $A\neq C$, ama aynı işaretli
	311		Merkezin odağa uzaklığı	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	
	312		Odaklar arası uzaklık	$c=\sqrt{a^2-b^2}$	
	313			(Dışmerkezlilik) $e=\frac{a}{d}=\frac{c}{a}$	
	314		Alan = πab		
	315	HİPERBOL	Hiperbol: F ve F' sabit noktalarına (odaklar) uzaklıkları farkı sabit ve 2a noktalar kümesi (PF - PF' =2a)		
	316				$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
	317				$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
	318				$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

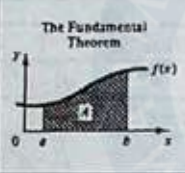
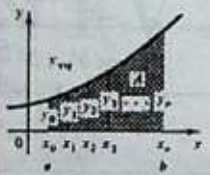
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

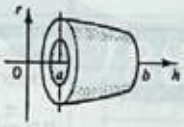
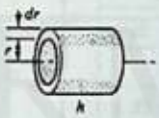
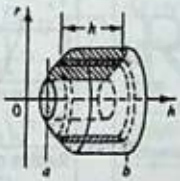
	319	HİPERBOL			$\frac{(x-k)^2}{a^2} - \frac{(y-h)^2}{b^2} = 1$
	320	HİPERBOL	Genel Form		$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ $A \neq C$, A ve C farklı işaretli
	321	HİPERBOL	Merkezin odağa uzaklığı		$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
	322	HİPERBOL	Asimptotların eğimi	Yatay Eksen	Eğim $= \pm\frac{b}{a}$
	323	HİPERBOL		Düşey Eksen	Eğim $= \pm\frac{b}{a}$
	324	HİPERBOL	Length of Latus Recturn		$L = \frac{2b^2}{a}$
	325	HİPERBOL			*Axes Rotated* 45°: $xy = k$
	326		Limit Notasyonu		$\lim_{x \to a} f(x) = L$
	327		Apsisler-Ordinatlar farkı		$\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1$
	328		Türevin Tanımı		$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(y+\Delta y) - y}{\Delta x}$
	329		Zincir Kuralı		$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
	330	TÜREV	Sabitin türevi		$\frac{d(c)}{dx} = 0$
	331	TÜREV	Kuvvet fonksiyonunun türevi		$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
	332	TÜREV	Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımının türevi		$\frac{d(cu)}{dx} = c\frac{du}{dx}$
	333	TÜREV	x'in kuvvetinin c katının türevi		$\frac{d}{dx} cx^n = cnx^{n-1}$
	334	TÜREV	Toplamın türevi		$\frac{d}{dx}(u+v+w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}$
	335	TÜREV	u'nun kuvvetinin c katının türevi		$\frac{d(cu^n)}{dx} = cnu^{n-1}\frac{du}{dx}$
	336	TÜREV	Çarpımın türevi		$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

	337		Üçlü çarpım türevi	$\frac{d(uvw)}{dx} = uv\frac{dv}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$
	338		N terimin çarpım türevi	N terimin herbiri, kendi türevi ile diğer (N-1) terimin çarpımından oluşur ve toplam terim sayısı N tanedir.
	339		Bölümün türevi	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
	340		Trigonometrik fonksiyonların türevi	$\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$
	341			$\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$
	342			$\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
	343			$\frac{d(\cot u)}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
	344			$\frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
	345			$\frac{d(\csc u)}{dx} = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
	346		Ters Trigonometrik Fonksiyonların türevi	$\frac{d(\sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ $-1 < u < 1$
	347			$\frac{d(\cos^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ $-1 < u < 1$
	348			$\frac{d(\tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
	349			$\frac{d(\cot^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$
	350			$\frac{d(\sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ $\lvert u\rvert > 1$
	351			$\frac{d(\csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ $\lvert u\rvert > 1$
	352		Logaritmik ve Üstel fonksiyonların türevi	(a) $\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u}\log_b e \frac{du}{dx}$ (b) $\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u \ln b}\frac{du}{dx}$
	353			$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$
	354			$\frac{d}{dx}b^u = b^u \frac{du}{dx}\ln b$
	355			$\frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$
	356		Maksimum ve Minimum Noktalar	Maksimum ve Minimum noktaları bulmak için birinci türev alınıp sıfıra eşitlenerek elde edilen denklem çözülür.Bu denklemin çözümü olan x değerlerine sabit noktalar denir ve bu noktalar ekstremum (maksimum yada minimum) adayıdır.

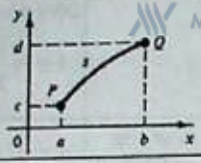
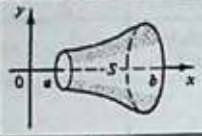
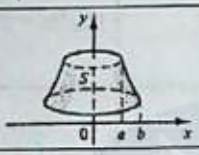
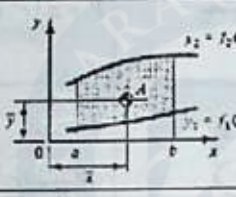
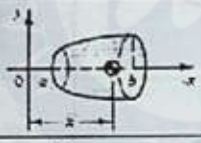
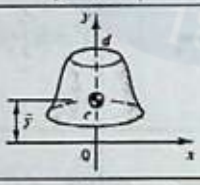
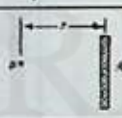
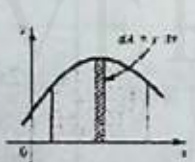
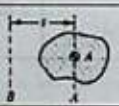
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

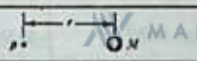
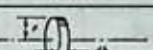
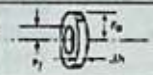
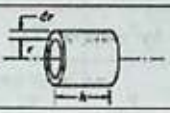
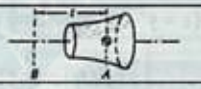
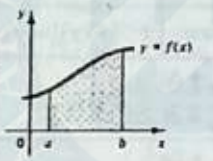
	357		Birinci Türev Testi	$f'(x_0)=0$ olsun. Eğer, x_0 noktasında birinci türev işaret değiştirirse, x_0 noktası ekstremum noktadır.
	358		İkinci Türev Testi	Eğer, $f'(x_0)=0$ iken x_0 noktasında: $f''(x_0) > 0$ ise noktası minimum $f''(x_0) < 0$ ise noktası maksimum noktadır. $f''(x_0) = 0$ ise test başarısız
	359		Büküm Noktaları	$f''(x_0)=0$ olsun. Eğer, x_0 noktasında ikinci türev işaret değiştirirse noktası büküm noktasıdır.
	360		Newton Metodu	$x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
	361		Diferansiyel (y'nin)	$dy = f'(x)dx$
	362		Diferansiyel ile yaklaşık hesap	$\Delta y \cong \dfrac{dy}{dx}\Delta x$
	363		**Belirli İntegral**	$\int F'(x)dx = F(x)+c$
	364			$\int f(xdx = F(x)+c) \quad f(x)=F'(x)$
	365			$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
	366		**Riemann Toplamları ile İntegral Tanımı**	$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$
	367		**Belirli İntegralin Özellikleri**	$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
	368			$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
	369			$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^c f(x)\,dx$
	370			$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
	371	**Yaklaşık İntegral**		Orta Nokta Metodu: $A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ burada; $f(x_i^*)$, İ.dilimin yüksekliğidir.
	372			Ortalama Ordinat Metodu: $A = y_{ort}(b-a)$
	373			Yamuk Kuralı: Dilim genişliği eşit değilse; $A \cong \frac{1}{2}[(x_1-x_0)(y_1+y_0)+(x_2-x_1)(y_2+y_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})(y_n+y_{n-1})$

	374				Dilim genişliği eşitse, $h = x_1 - x_0$: $A \cong h[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}]$
	375			Prismoidal Formülü	$A = \frac{h}{2}(y_0 + 4y_1 + y_2)$
	376			Simpson Kuralı	$A \cong \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n)$
	377	Dönel Cisimlerin Hacimleri	Disk Metodu		Hacim = dV = $\pi r^2 dh$
	378				$V = \pi \int_a^b r^2\, dh$
	379		Halka Metodu		$dV = \pi(r_0^2 - r_i^2)\, dh$
	380				$V = \pi \int_a^b (r_0^2 - r_i^2)\, dh$
	381		Tabaka Metodu		$dV = 2\pi r h\, dr$
	382				$V = 2\pi \int_a^b r h\, dr$
	383	Yay Uzunluğu			$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	384				$s = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$
	385	Yüzey Alanı			x-ekseni; $s = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	386				x-ekseni; $s = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$
	387	Ağırlık ve Kütle Merkezi			$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx$
	388				$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b (y_1 + y_2)(y_2 - y_1)\,dx$
	389				x-ekseni; $\bar{x} = \frac{\pi}{V}\int_a^b xy^2\,dx$
	390				y-ekseni; $\bar{y} = \frac{\pi}{V}\int_c^d yx^2\,dy$
	391				$I_p = Ar^2$
	392				$I_x = \frac{1}{3}\int y^3\,dx$
	393				$I_y = \int x^2 y\,dx$
	394				Kutupsal: $I_0 = I_x + I_y$
	395				Radius of Gyration: $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$
	396				Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + Ax^2$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	397				$I_P = Mr^2$
	398			Disk: 	$dI = \frac{m\pi}{2} r^4\, dh$
	399			Halka 	$dI = \frac{m\pi}{2}(r_0^4 - r_i^4)\, dh$
	400			Tabaka 	$dI = 2\pi m r^3 h\, dr$
	401			Katıların döndürülmesi 	Disk Metodu: $I = \frac{m\pi}{2}\int_a^b r^4\, dh$
	402				Shell(Tabaka) Metodu: $I = 2\pi m \int r^3 h\, dr$
	403				Paralel Eksen Teoremi $I_B = I_A + Ms^2$
	404				Ortalama Ordinat Formülü: $y_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$
	405				Etkin (Efektif) Değer: $rms = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^2\, dx}$
	406	1.MERTEBE DİFERANSİYEL DENKLEMLER	Değişkenlerine Ayrılabilen		$f(y)\,dy = g(x)\,dx$
	407		İntegral Yöntemi		$f(y)\,dy = g(x)\,dx$
	408				$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
	409				$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
	410				$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$
	411		Homojen D.D		$M\,dx + N\,dy = 0$ (y = ux) konarak
	412		Lineer D.D	Form	$y' + Py = Q$
	413			İntegral Çarpanı	$R = e^{\int P dx}$
	414			Çözüm	$ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx$
	415	2.MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER	HOMOJEN D.D	Form	$ay'' + by' + cy = 0$
	416			Karakteristik Denklem	$am^2 + bm + c = 0$
				Çözüm Formu	Karakteristik Denklemin Kökleri — Çözüm

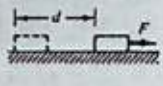
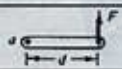
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	417				Reel ve eşit değil	$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
	418				Reel ve eşit	$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$
	419				Kompleks	$(a)\ y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$ veya $(b)\ y = Ce^{ax} \sin(bx + \phi)$
	420		HOMOJEN OLMAYAN	Form	$ay'' + by' + cy = f(x)$	
	421			Genel Çözüm	$y = y_c + y_p$ (Homojen Kısmın Çözümü; Sağ Taraf Çözümü)	
	422	**Bernoulli Denklemi**			$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ Burada; $(z = y^{1-n})$ dönüşümü yapılır.	
	423	**Laplace Dönüşümü**			Tanım	$\ell[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$
	424				Ters Laplace	$\ell^{-1}[F(s)] = f(t)$
	425	Nümerik Çözümler	**Euler Metodu**		$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + m_p \Delta x$	
	426		**Değiştirilmiş Euler Metodu**		$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + \left(\frac{m_p + m_q}{2}\right)\Delta x$	
	427		**Runge-Kutta Metodu**		$x_q = x_p + \Delta x$ $y_q = y_p + m_{ort}\Delta x$ $m_{ort} = \left(\frac{1}{6}\right)(m_p + 2m_r + 2m_s + m_q)$ $m_p = f'(x_p, y_p)$ $m_r = f'\left(x_p + \frac{\Delta x}{2}, y_p + m_p \frac{\Delta x}{2}\right)$ $m_s = f'\left(x_p + \frac{\Delta x}{2}, y_p + m_r \frac{\Delta x}{2}\right)$ $m_s = f'(x_p + \Delta x, y_p + m_s \Delta x)$	

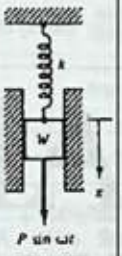
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	428	Kuvvet Serileri	Notasyon		$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$
	429		Yakınsaklık testleri	Limit Testi	$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
	430			Kısmi toplamlar testi	$\lim_{n\to\infty} S_n = S$
	431			Oran testi	Eğer $\lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{u_{n-1}}{u_n}\right\rvert$ (a) 1' den küçükse, seri yakınsaktır. (b) 1' den büyükse, seri ıraksaktır (c) 1' e eşitse, test edilemez.
	432		Maclauren t Serisi		$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$
	433		Taylor Serisi		$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$
	434			n. terimden sonra kalan terim	$R_n=\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$ c, a ile x arasında
	435	Fourier Serileri	Periyod 2π		$f(x)=a_0/2+a_1\cos x+a_2\cos 2x+a_3\cos 3x+\cdots+a_n\cos nx+\cdots$ $+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots+b_n\sin nx+\cdots$
	436			burada	$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$
	437				$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$
	438				$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$
	439		Periyod 2L		$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\frac{\pi x}{L}+a_2\cos\frac{2\pi x}{L}+a_3\cos\frac{3\pi x}{L}+\cdots$ $b_1\sin\frac{\pi x}{L}+b_2\sin\frac{2\pi x}{L}+b_3\sin\frac{3\pi x}{L}+\cdots$
	440			Katsayılar	$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx$
	441				$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$
	442				$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$
	443		Simetrik dalga şekli	Tek ve çift fonksiyonlar	(a) Tek fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız sinüslü terimlerden oluşur. (sabit yoktur) (b) Çift fonksiyonların fourier serilerine açılımları yalnız kosinüslü terimlerden oluşur. (sabit vardır)
	444			Yarım dalga simetri	Bir dalganın fourier dönüşümleri yalnızca tek harmoniklere sahipse yarım dalga simetri vardır

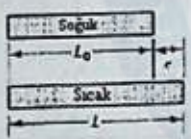
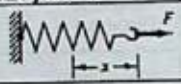
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	A1	Karışım A, B, C .... gibi maddelerden oluşsun	Toplam karışım miktarı= A' nın miktarı + B' nin miktarı +.....	
	A2		Her karışımın son değeri= Başlangıç miktarı + eklenen miktar – çıkarılan miktar	
	A3	İki karışım	Final amount of A from mixture 1 + amount of A from mixture 2	
	A4	Akış miktarı	Akış miktarı = akış oranı x akma zamanı $A=QT$	
	A5	Yapılan iş = iş oranı x çalışma süresi		
	A6		Sabit kuvvet	İş = Kuvvet X Yol = Fd
	A7		Değişken kuvvet	$İş = \int_a^b F(x)\,dx$
FİNANS	A8	Birim maliyet	Birim maliyet $= \frac{\text{Toplam maliyet}}{\text{Birimlerin sayısı}}$	
FİNANS	A9	Faiz: t= yıl, a = ana para, n=faiz oranı, y=biriktirilmiş miktar	Basit faiz	$y = a(1+nt)$
FİNANS	A10		Yıllık bileşik faiz	$y = a(1+n)^t$
FİNANS	A11		Bileşik faiz (m) zaman/yıl	$y = a(1+\frac{n}{m})^{mt}$
STATİK	A12		Bir noktanın momenti	$M_a = Fd$
STATİK	A13	Denge denklemleri (Newton' nun birinci kanunu)	Dikey kuvvetler toplamı = 0	
STATİK	A14		Yatay kuvvetler toplamı = 0	
STATİK	A15		Bir noktadaki momentler toplamı = 0	
STATİK	A16		Sürtünme katsayısı	$\mu = \frac{f}{N}$
HAREKET DENKLEMLERİ	A17	Lineer Hareket	Düzgün hareket (Sabit Hız)	Uzaklık = oran X time $D = Rt$
HAREKET DENKLEMLERİ	A18		Düzgün ivmelenme (Sabit ivme a, Başlangıç hızı v_0) Serbest düşme için, $a=g=9.807\ m/s^2 = 32.2\ ft/s^2$	t zamanda yerdeğiştirme: $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$
HAREKET DENKLEMLERİ	A19			t anındaki hız: $v = v_0 + at$
HAREKET DENKLEMLERİ	A20			Newton' nun İkinci Kanunu: $F = ma$
HAREKET DENKLEMLERİ	A21		Düzgün olmayan hareket	Ortalama hız: Ortalama Hız= Toplam alınan yol / Toplam süre
HAREKET DENKLEMLERİ	A22			Yerdeğiştirme: $s = \int v\,dt$
HAREKET DENKLEMLERİ	A23			Ani hız: $v = \frac{ds}{dt}$
HAREKET DENKLEMLERİ	A24			$v = \int a\,dt$

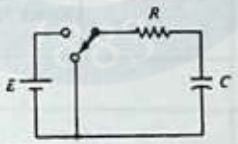
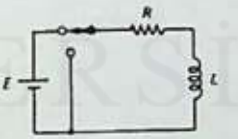
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

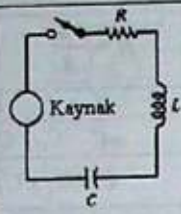
	A25			Ani ivme	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$
	A26	Dönme	Düzgün hareket	Açısal yerdeğişitirme	$\theta = wt$
	A27			r yarıçapında noktanın lineer hızı	$v = wr$
	A28		Düzgün olmayan hareket	Açısal yerdeğiştirme	$\theta = \int w\,dt$
	A29			Açısal Hız	$w = \frac{d\theta}{dt}$
	A30				$w = \int \alpha\,dt$
	A31			Açısal ivme	$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
	A32	Lineer dairesel hareket	x ve y bileşenleri	Yerdeğiştirme	(a) $x = \int v_x\,dt$ (b) $y = \int v_y\,dt$
	A33			Hız	(a) $v_x = \frac{dx}{dt}$ (b) $v_y = \frac{dy}{dt}$
	A34				(a) $v_x = \int a_x\,dt$ (b) $v_y = \int a_y\,dt$
	A35			İvme	(a) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ (b) $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$
MEKANİK TİTREŞİMLER	A36		Serbest salınımlar ($P = 0$)	Basit harmonik hareket	$x = x_0 \cos w_n t$
	A37			Sönümsüz açısal hız	$w_n = \sqrt{\frac{kg}{W}}$
	A38			Doğal frekans	$f_n = \frac{w_n}{2\pi}$
	A39			Eksik Sönümlü (Underdamped)	$x = x_0 e^{-\alpha t} \cos w_d t$
	A40			Sönümlü Açısal Hız	$w_d = \sqrt{w_n^2 - \frac{c^2 g^2}{w^2}}$
	A41	Sürtünme katsayısı = c		Aşırı Sönümlü (overdamped)	$x = C_1 e^{m_1 t} + C_2 e^{m_2 t}$
	A42		Kuvvet Titreşimleri	Maksimum Sapma	$x_0 = \frac{P_g}{W\sqrt{4a^2w^2 + (w_n^2 - w^2)^2}}$
	A43	Yoğunluk		*Yoğunluk = Kütle / Hacim*	
	A44	Kütle		*Kütle = Ağırlık / Yerçekimi ivmesi*	
	A45	Özgül Ağırlık		*SG = Madde Yoğunluğu / Su Yoğunluğu*	
	A46	 Basınç		Bir yüzeydeki toplam kuvvet	*Kuvvet = Basınç X Yüzey*

ANKARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	A47		Suyun içindeki bir yüzeye etkiyen kuvvet	$F = \delta \int y\, dA$
	A48			$F = \delta \bar{y} A$
	A49	PH	pH = -10 log konsantrasyon	
SICAKLIK	A50	Celsuis derecesi (C) ile Fahrenheit derecesi arasındaki ilişki (F)	$C = \frac{5}{9}(F - 32)$	
	A51		$F = \frac{9}{5}C + 32$	
MATERYAL KUVVETLERİ	A52	 Gerilme yada sıkıştırma	Normal gerilim	$a = \frac{P}{a}$
	A53		Uzama	$\varepsilon = \frac{e}{L}$
	A54		Modül elastikiyeti ve Hooke Kanunu	$E = \frac{PL}{ae}$
	A55			$E = \frac{a}{\varepsilon}$
	A56	Sıcaklıkla genleşme	Uzama	$e = \alpha L\, \Delta t$
	A57		Yeni uzunluk	$L = L_0(1 + \alpha\, \Delta t)$
	A58		Birim uzama katsayısı	$\varepsilon = \frac{e}{L}\alpha\, \Delta t$
	A59		Gerilme	$\sigma = E\varepsilon = E\alpha\, \Delta t$
	A60	Sıcaklık değişimi= Δt Sıcaklık genleşme katsayısı = α	Gerilme kuvveti	$P = a\sigma = aE\alpha\, \Delta t$
	A61		Bir yaya etki eden kuvvet	F = yay katsayısı X uzunluk = kx
	A62	Ohm Kanunu	Akım = $\frac{\text{Gerilim}}{\text{Direnç}}$	$i = \frac{V}{R}$
	A63	Direnç Eşdeğerleri	Seri	$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$
	A64		Paralel	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots$
	A65	Bir direncin gücü	$Güç = P = VI$	
	A66		$P = \frac{V^2}{R}$	
	A67		$P = I_2 R$	
	A68	Kirchhoff Kanunu	Çevreler	Bir kapalı çevredeki gerilimlerin toplamı sıfırdır.
	A69		Düğümler	Bir düğüme giren ve çıkan akımların toplamı sıfırdır.
	A70	Sıcaklıkla direncin değişimi	$R = R_1[1 + \alpha(t - t_1)]$	

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

	A71	Bir kablonun direnci 		$R=\frac{\rho L}{A}$	
	A72	Kapasitör Eşdeğerleri		Seri	$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\cdots$
	A73			Paralel	$C=C_1+C_2+C_3+\cdots$
	A74	V geriliminde C kapasitesinin yükü		$Q=CV$	
	A75	Alternatif Gerilimi		Sinusoidal Form: $v=V_m\cos(wt+\phi_1)$	Kompleks Form: $V=V_m\angle\phi_1$
	A76	Alternatif Akım		$I=I_m\cos(wt+\phi_1)$	$I=I_m\angle\phi_2$
	A77	Periyod		$P=\frac{2\pi}{w}$ saniye	
	A78	Frekans		$f=\frac{1}{P}=\frac{w}{2\pi}$ hertz	
	A79	Akım		$i=\frac{dp}{dt}$	
	A80	Yük		$q=\int i\,dt$ coulombs	
	A81	Kapasitör	Ani Akım	$i=C\frac{dv}{dt}$	
	A82	Kapasitör	Ani Gerilim	$v=\frac{1}{C}\int i\,dt$ volt	
	A83	Kapasitör	Dolma yada boşalma anında akım		$i=\frac{E}{R}e^{-1/RC}$
	A84	Kapasitör	Boşalma anında Gerilim		$v=Ve^{-1/RC}$
	A85		Ani akım	$i=\frac{1}{L}\int v\,dt$ [amper]	
	A86		Ani Gerilim	$v=L\frac{di}{dt}$	
	A87		Dolma anında akım	 Seri RL Devresi	$i=\frac{V}{R}(1-e^{-Rt/L})$
	A88		Dolma yada boşalma anında gerilim		$v=Ve^{-Rt/L}$
	A89	Seri *RLC* Devresi	DC Kaynak	Rezonans Frekansı	$\omega_n=\sqrt{\frac{1}{LC}}$
	A90			Dirençsiz: Seri LC Devresi:	$i=\frac{V}{\omega_n L}\sin\omega_n t$

	A91			Underdamped	$i = \frac{V}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$
	A92				$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$
	A93			Overdamped	$i = \frac{V}{2i\omega_d L}[e^{(-\alpha+i\omega_d)t} - e^{(-\alpha-i\omega_d)t}$
	A94		AC Kaynak	Endüktif Reaktans	$X_L = \omega L$
	A95			Kapasitif Reaktans	$X_C = \frac{1}{\omega C}$
	A96			Toplam Reaktans	$X = X_L - X_C$
	A97			Empedans	$\lvert Z \rvert = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$
	A98			Faz açısı	$\phi = \arctan \frac{X}{R}$
	A99			Empedansın kompleks formu	$Z = R + iX = Z\angle\phi = Ze^{i\phi}$
	A100			Kararlı hal akımı	$i_{ss} = \frac{V}{Z}\sin(\omega t - \phi)$
	A101	AC için ohm kanunu	$V = ZI$		
	A102	Desibel cinsinden kazanç yada kayıp	$G = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1}\ dB$		

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ISBN 975-400-252-5

Marmara Üniversitesi
Döner Sermaye İşletmesi
Teknik Eğitim Fakültesi
Matbaa Biriminde Basılmıştır.