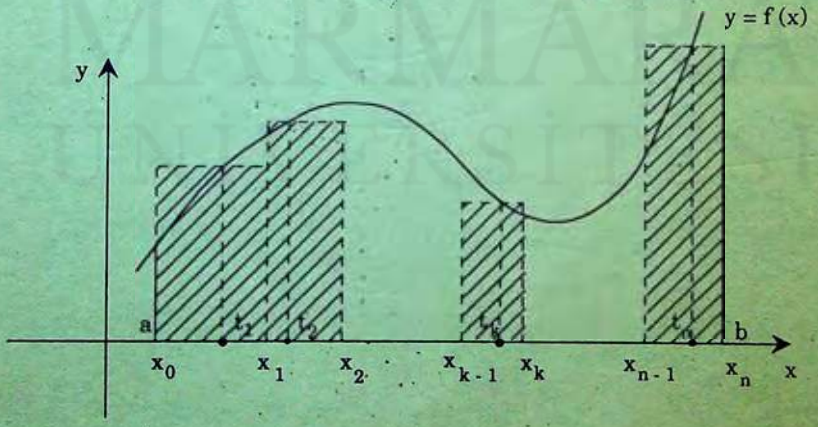
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO: 502
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN NO: 3

YÜKSEK MATEMATİĞE GİRİŞ

CİLT - I

FONKSİYONLAR • LİMİT • TÜREV •
• İNTEGRAL VE UYGULAMALARI



Yrd.Doç.Dr. Ersin EROL

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO: 502
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ YAYIN NO: 3

YÜKSEK MATEMATİĞE GİRİŞ

CİLT - I

Yrd.Doç.Dr. Ersin EROL

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ISBN 975 – 400 – 046 – 8

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ
DÖNER SERMAYE İŞLETMESİ
MATBAA BİRİMİNDE BASILMIŞTIR.

İSTANBUL – 1991

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖNSÖZ

Bu kitap büyük ölçüde 1976-1982 yılları arasında İstanbul Yüksek Teknik Öğretmen Okulu; 1982-1991 arasında da M.Ü. Teknik Eğitim Fakültesi'nde verdiğim matematik derslerinin notlarından yararlanılarak hazırlanmıştır. Kitap, kapsadığı konular ve bu konuları anlatım tekniği bakımlarından lise matematiği ile üniversitelerde okutulan analiz dersleri arasında bir köprü niteliğindedir. Konuların iyi anlaşılması için her konuyla ilgili bol örnek çözülmüş, öğrencinin kendisini kontrol edebilmesi için de alıştırmaların cevapları yanlarında verilmiştir. Bu kapsam ve nitelikleriyle kitabın fen, mühendislik veya teknik öğretim gören üniversite veya yüksek okul öğrencilerine yararlı olacağı kanısındayım. Ayrıca fen liseleri ile normal lise matematik-fen kolu son sınıf öğrencileri de kitaptan büyük ölçüde yararlanabilirler.

Büyük titizlik göstermeme karşın kitapta gözden kaçmış bazı yanlışlıklar veya baskı hataları bulunabilir. Daha sonraki baskılarda bunların giderilmesi için okuyucuların yapacakları uyarı ve eleştirilere şimdiden teşekkür ederim.

Özenli bir çalışmayla kitabın dizgi ve baskısını gerçekleştiren M.Ü. Teknik Eğitim Fakültesi Matbaa Bölümü öğretim elemanları ve personeline, özellikle de başından beri bu konuda desteklerini esirgemeyen bölüm başkanı Yrd.Doç.Dr. Aşkın Çelik ve bölüm başkan yardımcısı Mehmet Oktav ile titiz bir çalışmayla kitabın yazımını yapan dizgi operatörleri Yıldız Çelik ve Esra Çınar'a teşekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, Kasım 1991 Ersin Erol

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İÇİNDEKİLER

I. Bölüm

FONKSİYONLAR

Sayfa No.

1.1. Aralık 1
1.2. Değişken 2
1.3. Fonksiyon 2
1.4. Bir Fonksiyonun Grafiği 3
1.5. Ters Fonksiyon 6
1.6. Bileşke Fonksiyonu 8
1.7. Mutlak Değer 9
1.8. Mutlak Değer Özellikleri 9
1.9. Mutlak Değer Fonksiyonu 10
1.10. İşaret Fonksiyonu 11
1.11. Tam Değer Fonksiyonu 13
1.12. Tek ve Çift Fonksiyonlar 14
1.13. Periyodik (Devirili) Fonksiyonlar 15
1.14. Bir Fonksiyonun En Geniş Tanım Kümesi 16
1.15 Çeşitli Fonksiyonlarda En Geniş Tanım Kümesini Bulmak 17
Alıştırmalar 19

II. Bölüm

LİMİT

2.1 Bir Değişkenin Limiti 26
2.2. Bir Fonksiyonun Limiti 27
2.3. Sağdan ve Soldan Limit 27
2.4. Limitle İlgili Teoremler 30
2.5. Genelleştirilmiş Reel Sayılar Kümesi 32
2.6. Genelleştirilmiş Reel Sayılar Kümesinde Limit 32
2.7. Bazı Özel Limitler 34
2.8. Belirsiz Şekiller 34

2.9. Bir P (x) Polinomunun $x \to \infty$ İçin Limiti 36
2.10. Trigonometrik Fonksiyonların Limitleri 41
Alıştırmalar 45

ANKARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

III. Bölüm
SÜREKLİLİK

3.1. Tanım 52
3.2. Sağdan ve Soldan Süreklilik 54
3.3. Süreklilikle İlgili Teoremler 56
3.4. Trigonometrik Fonksiyonların Sürekliliği 57
Alıştırmalar 60

IV. Bölüm
TÜREV

4.1. Tanım 63
4.2. Sağdan ve Soldan Türev 64
4.3. Türevin Geometrik Anlamı 65
4.4. Teğet ve Normal Denklemleri 66
4.5. Türev Fonksiyonu 68
4.6. Türev Alma Kuralları 70
4.7. Bileşke Fonksiyonunun Türevi, Türevde Zincir Kuralı 74
4.8. Ardışık Türevler 78
4.9. Kapalı Fonksiyonların Türevleri 80
4.10. Ters Fonksiyonların Türevleri 82
4.11. Parametrik Fonksiyonların Türevleri 83
Alıştırmalar 85
4.12. Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri 89
4.13. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar ve Türevleri 95
Alıştırmalar 102
4.14. Üstel Fonksiyon 107
4.15. $y = a^x$ Fonksiyonunun Özellikleri ve Grafiği 107
4.16. Logaritma Fonksiyonu 108

4.17. Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri 109
4.18. Logaritma Formülleri 110
4.19. 10 Tabanlı Logaritma ve Dağal Logaritma 110
4.20. e Sayısının Tanımı 111
4.21. $y = \text{Log}_a x$ Fonksiyonunun Türevi 112
4.22. Logaritmik Türev Alma 115
4.23 Üstel Fonksiyonların Türevleri 116
Alıştırmalar 118
4.24. Hiperbolik Fonksiyonlar 122
4.25. Hiperbolik Fonksiyonlara Ait Formüller 126
4.26. Ters Hiperbolik Fonksiyonlar 129
4.27. Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri 131
Alıştırmalar 134
4.28. Türev Formülleri 137
4.29. Diferansiyel 139
4.30. Diferansiyelin Geometrik Anlamı 140
4.31. Diferansiyel Kuralları 141
4.32. Diferansiyel Yardımıyla Yaklaşık Hesaplama 144
4.33. Ardışık Diferansiyeller 145
Alıştırmalar 146

V. Bölüm
TÜREVİN UYGULAMALARI

5.1. Teğet ve Normal Denklemleri 149
5.2. Teğet, Normal, Teğetaltı, Normalaltı Uzunlukları 149
Alıştırmalar 152
5.3. Artan ve Eksilen Fonksiyonlar 154
5.4. Maksimum, Minimum 155
5.5. Rolle Teoremi 160
5.6. Rolle Teoreminin Geometrik Anlamı 160
5.7. Ortalama Değer Teoremi 161
5.8. Ortalama Değer Teoreminin Geometrik Anlamı 162

Alıştırmalar 163
5.9. Bir Eğrinin Bükülme Yönü 166
5.10. Dönüm Noktası 166
5.11. Maks. ve Min. Noktaların İkinci Türevle Belirlenmesi 168
5.12. Maksimum, Minimum Problemleri 170
Alıştırmalar 172
5.13. Eğrilik 176
Alıştırmalar 184
5.14. L'Hospital Kuralı 186
5.15. 0°, 1^{∞}, ∞° Belirsiz Şekilleri 188
Alıştırmalar 192

VI. Bölüm
GRAFİK ÇİZİMİ

6.1. Kartezyen Denklemiyle Verilen Eğrilerin Çizimi 196
6.2. Asimtot Bulunuşu 196
6.3. Grafik Çizimi 201
Alıştırmalar 213
6.4. Parametrik Denklemiyle Verilen Eğrilerin Çizimi 221
Alıştırmalar 227
6.5. Kutupsal Koordinatlar 229
6.6. Kutupsal Koordinatlarla Kartezyen Koordinatlar
Arasındaki Bağıntılar 230
6.7. Doğrunun Kutupsal Denklemi 232
6.8. Çemberin Kutupsal Denklemi 233
6.9. Kutupsal Denklemden Asimtot Bulunuşu 235
6.10. Simetri Özellikleri 237
6.11. Kutupsal Denklemiyle Verilen Bir Eğrinin Çizimi 239
Alıştırmalar 243

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

VII. Bölüm

BELİRSİZ İNTEGRAL

7.1. Tanım 248

7.2. Temel İntegral Formülleri 249

7.3. Değişken Değiştirme Yöntemi 252

7.4. $\int (ax+b)^n dx$ Şeklindeki İntegraller 254

Alıştırmalar 255

7.5. Basit Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri 257

Alıştırmalar 261

7.6. Üstel Fonksiyonların İntegralleri 263

Alıştırmalar 265

7.7. $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$ veya $\int \frac{du}{a^2 \pm a^2}$ Şeklindeki İntegraller 266

7.8. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ Şeklindeki İntegraller 268

7.9. $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx$ Şeklindeki İntegraller 269

Alıştırmalar 270

7.10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$ veya $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 \pm u^2}}$ Şeklindeki İntegraller ... 272

7.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ veya $\int \frac{(mx+n)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Şeklindeki İntegraller ... 273

Alıştırmalar 274

7.12. $\int \sqrt{a^2 \pm u^2}\, du$ veya $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du$ Şeklindeki İntegraller 276

Alıştırmalar 277

7.13. Kısımlara Ayırarak İntegral Alma (Kısmi İntegrasyon) 277

Alıştırmalar 282

7.14. Rasyonel Kesirlerin İntegrasyonu 284
7.15. Basit Kesirlere Ayırma İşlemi 285
Alıştırmalar 289
7.16. Trigonometrik Fonksiyonların İntegralleri 292
Alıştırmalar 299
7.17. Trigonometrik Değişken Değiştirme 301
Alıştırmalar 305
7.18. Hiperbolik Fonksiyonların İntegralleri 307
Alıştırmalar 309
7.19. Belirsiz İntegral Uygulamaları 311
Alıştırmalar 315

VIII. Bölüm
BELİRLİ İNTEGRAL

8.1. Tanım 316
8.2. Belirli İntegral Özellikleri 319
8.3. Ortalama Değer Teoremi 320
8.4. İntegral Hesabın Birinci Temel Teoremi 322
8.5. İntegral Hesabın İkinci Temel Teoremi 323
Alıştırmalar 330

IX. Bölüm
BELİRLİ İNTEGRAL UYGULAMALARI

9.1. Alan Hesabı 333
9.2. Kutupsal Koordinatlarda Alan 348
Alıştırmalar 350
9.3. Dönel Cisimlerin Hacimleri 354
Alıştırmalar 365
9.4. Eğri Uzunluğu 368
Alıştırmalar 372
9.5. Dönel Yüzeylerin Alanları 374
Alıştırmalar 379

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9.6. Momentler ve Kütle Merkezi 381
Alıştırmalar 395
9.7. Pappus Teoremleri 400
Alıştırmalar 403
9.8. Atalet Momenti 404
Alıştırmalar 414
9.9. Sıvı Basıncı 417
Alıştırmalar 422
9.10. İş 424
Alıştırmalar 427
Kaynak Kitaplar 429

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İŞARETLER VE ANLAMLARI

$\vee$: Veya

$\wedge$: Ve

$\Rightarrow$: İse (gerektirme)

$\Leftrightarrow$: Gerek ve yeter (çift gerektirme)

$\exists\, x$: Bazı x'ler için (en az bir x için)

$\forall\, x$: Her x için (bütün x'ler için)

$\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$: Elemanları $x_1, x_2, \ldots x_n$ olan küme

$\{x : P(x)\}$: P (x) önermesini doğrulayan x'ler kümesi

$\in$: Eleman

$\notin$: Eleman değil

$\subset$: Alt küme

$\not\subset$: Alt küme değil

$\varnothing$: Boş küme

E : Evrensel küme

A' : A kümesinin tümleyeni

s (A) : A kümesinin eleman sayısı

$\cup$: Birleşim

$\cap$: Kesişim

A x B : A ile B kümelerinin kartezyen çarpımı

A - B : A ile B nin fark kümesi

N : Doğal sayılar kümesi

Z : Tamsayılar kümesi

Z^+ : Pozitif tamsayılar kümesi

Z^- : Negatif tamsayılar kümesi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Q : Rasyonel sayılar kümesi

Q^+ : Pozitif rasyonel sayılar kümesi

Q^- : Negatif rasyonel sayılar kümesi

Q' : İrrasyonel sayılar kümesi

R : Reel Sayılar kümesi

R^+ : Pozitif reel sayılar kümesi

R^- : Negatif reel sayılar kümesi

$\bar{R}$: Genişletilmiş reel sayılar kümesi

C : Karmaşk sayılar kümesi

$f:A \to B$: A dan B ye f fonksiyonu

f^{-1} : f fonksiyonunun tersi

fog : g ile f nin bileşke fonksiyonu

$|f|$: f nin mutlak değer fonksiyonu

$[|f|]$: f nin tam değer fonksiyonu

$sgnf$: f nin işaret fonksiyonu

AB : AB doğrusu

$[AB]$: AB doğru parçası

$[AB$: AB ışını

$|AB|$: AB doğru parçasının uzunluğu

$\log_a x$: x'in a tabanına göre logaritması

$\ln x$: x'in e tabanına göre logaritması (doğal logaritma)

$P(n, r)$: n elemanlı kümenin r'li permütasyonları sayısı

$C(n, r) = \binom{n}{r}$: n elemanlı kümenin r li kombinasyonları sayısı

$n!$: n faktöriyel (1. 2. 3... n çarpımı)

(a_n) : Genel terimi a_n olan dizi

$\sum$: Toplam işareti (sigma)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\prod$: Çarpım işareti (pi)

Max. : Maksimum

Min. : Minimum

df : f fonksiyonunun diferansiyeli

$\frac{df}{dx}$: f fonksiyonunun x'e göre türevi

$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x, \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$: f(x , y) fonksiyonunun x ve y'ye göre kısmi türevleri

$\int$: İntegral işareti

$\int_a^b f(x)\,dx$: f fonksiyonunun [a, b] aralığındaki belirli integrali

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA
ÜNİVERSİTESİ

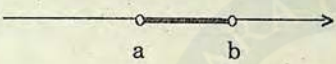
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BİRİNCİ BÖLÜM

FONKSİYONLAR

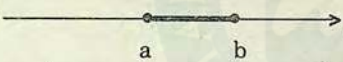
1.1. **ARALIK** $a, b \in R$ ve $a < b$ olsun.

1°) a ile b arasındaki tüm reel sayılar kümesine a dan b ye **açık aralık** denir ve (a, b) veya $a< x < b$ şeklinde gösterilir.



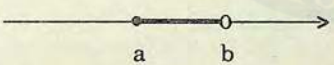
(a, b) aralığı

2°) (a, b) açık aralığına a ile b sayılarının da katılmasıyla bulunan kümeye **kapalı aralık** denir ve [a, b] veya $a\leq x \leq b$ şeklinde gösterilir.



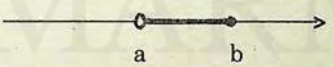
[a, b] aralığı

3°) Eğer a aralığa dahil, b dahil değilse buna **soldan kapalı sağdan açık aralık** denir ve [a, b) veya $a \leq x < b$ şeklinde gösterilir.



[a, b) aralığı

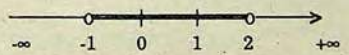
4°) Eğer a aralığa dahil değil, b dahilse buna **soldan açık sağdan kapalı aralık** denir ve (a, b] veya $a < x \leq b$ şeklinde gösterilir.



(a, b] aralığı

a dan büyük reel sayılar kümesi $(a, +\infty)$, a dan küçük reel sayılar kümesi $(-\infty, a)$, tüm reel sayılar kümesi $R = (-\infty, +\infty)$ şeklinde gösterilir.

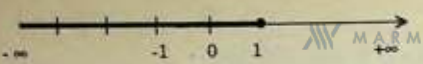
ÖRNEK: (-1,2), [o, 4], $(-\infty, 1]$ aralıklarını sayı ekseni üzerinde gösterelim.



(-1, 2) aralığı



[0, 4] aralığı



(- ∞, 1] aralığı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

I.2. DEĞİŞKEN: Bir sayı kümesinin her elemanına eşit olabilen çokluğa **bağımsız değişken** veya **değişken** denir ve genel olarak x harfiyle gösterilir. x in alabileceği bütün sayıların kümesine değişkenin **değişim kümesi** denir. Örneğin, x ısıtılan bir buzun erime noktasından buharlaşma noktasına kadarki sıcaklıkları ise x in değişim kümesi (derece türünden) $0 \leq x \leq 100$ dür.

I.3. FONKSİYON: A ile B boş olmayan iki küme olsun. $\forall x \in A$ elemanını bir ve en çok bir $y \in B$ elemanına eşleyen bir bağıntıya **A dan B ye fonksiyon** denir ve;

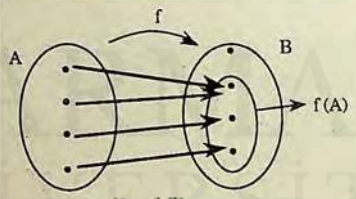
$f: A \to B, f: x \to y$ veya,

$f: A \to B, f(x) = y$ şeklinde gösterilir.

A ya fonksiyonun **tanım kümesi**, B ye **değer kümesi**, x e **değişken**, y ye **x in görüntüsü** veya **x için fonksiyonun aldığı değer** denir. Tüm görüntülerin oluşturduğu kümeye A nın **görüntü kümesi** denir ve f (A) ile gösterilir. $f(A) \subset B$ dir.

$f: A \to B$ fonksiyonunda:

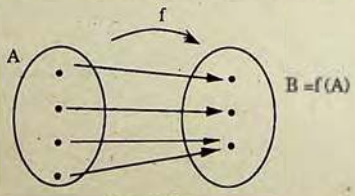
1°) $f(A) \neq B$ ise fonksiyona **içine fonksiyon** denir.



(1. şekil)

(1. şekil) de içine fonksiyona örnek bir şema görüyorsunuz.

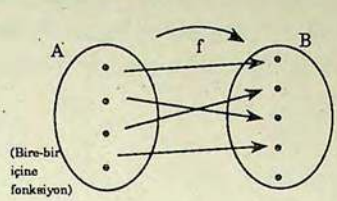
2°) $f(A) = B$ ise fonksiyona **örten fonksiyon** denir. (2. şekil)



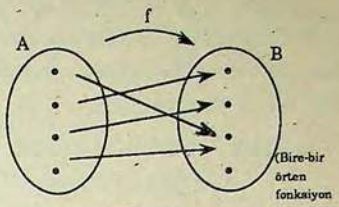
(2. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3°) $\forall x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 \neq x_2$ için $f(x_1) \neq f(x_2)$ ise fonksiyon **bire-birdir** denir. (3. ve 4. şekiller)

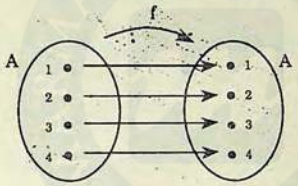


(3. Şekil)



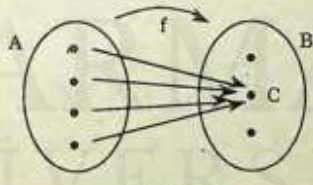
(4. Şekil)

4°) $f : A \to A$ fonksiyonunda $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ oluyorsa fonksiyona **birim fonksiyon** denir ve I ile gösterilir. (5. şekil)



(5. Şekil)

5°) $c \in B$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = c$ ise $f : A \to B$ fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir. (6. şekil)



(6. Şekil)

$A \subset R$ ve $B \subset R$ ise $f : A \to B$ fonksiyonuna **reel değişkenli ve reel değerli fonksiyon** denir. Biz bu tür fonksiyonları inceleyeceğiz.

I.4. BİR FONKSİYONUN GRAFİĞİ: Bir $f : A \to B$, $f(x) = y$ fonksiyonunun grafiği diye,

$$f = \{ (x, y) : x \in A, \quad y \in B, \quad y = f(x) \}$$

kümesinin elemanlarına bir koordinat düzleminde karşı gelen noktalar kümesine denir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1: A = { -2, -1, 0, 1, 2} ve B = { 1,2,5} olmak üzere $f: A \to B$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu veriliyor. f (A) görüntü kümesini bulunuz. f yi elemanlarıyla yazınız, şema ile gösteriniz ve grafiğini çiziniz. f hangi türden fonksiyondur?

Çözümü: $x = -2$ için $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$x = -1$ için $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

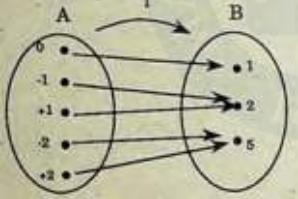
$x = 0$ için $f(0) = 0^2 + 1 = 1$

$x = 1$ için $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

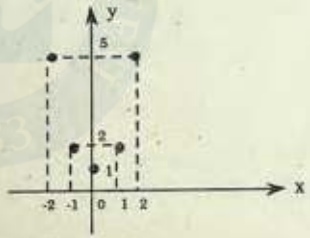
$x = 2$ için $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

dir. Buna göre f (A) = { 1, 2, 5} ve f = {(-2,5), (-1, 2), (0,1), (1,2), (2,5)} olur.

Aşağıda 7. şekilde fonksiyon şema ile gösterilmiş, 8. şekilde grafiği çizilmiştir. Grafik 5 elemanlı bir nokta kümesidir.



(7. Şekil)



(8. Şekil)

f (A) = B olduğundan f örten fonksiyondur.

f (-1) = f (1) = 2 ve f (-2) = f (2) = 5 olduğundan bire-bir değildir.

ÖRNEK 2: $f: R \to R$, $f(x) = y = 2x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Hangi türden fonksiyon olduğunu bulunuz.

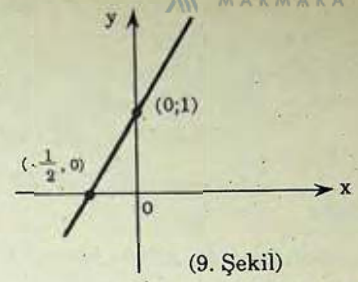
Çözümü: 1. dereceden tam ve rasyonel, genel şekli $f: R \to R$, $f(x) = ax + b$ olan bu tür fonksiyonlara lineer fonksiyonlar da denir. Grafikleri bir doğru olduğundan iki noktasıyla çizilebilirler. Verilen fonksiyonda

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

olduğundan $(0, 1) \in f$ ve $(-\frac{1}{2}, 0) \in f$ dir. Grafik 9. şekilde çizilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(9. Şekil)

$\forall x_1, x_2 \in R$ ve $x_1 \neq x_2$ için $2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan fonksiyon bire-birdir. Diğer taraftan bu fonksiyonda R değer kümesinin her elemanı görüntüdür. Gerçekten $\forall y \in R$ için $f(x) = 2x+1 = y \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-1) \in R$ vardır. Bu nedenle fonksiyon örtendir.

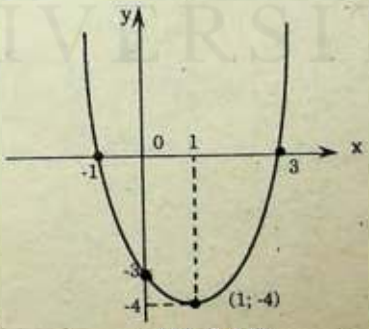
ÖRNEK 3: $f : R \to R$, $f(x) = y = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. f hangi türden fonksiyondur?

Çözümü: 2. dereceden tam ve rasyonel, genel şekli $f: R \to R$,

$f(x) = ax^2 + bx + c$ olan bu tür fonksiyonların grafikleri, köşesi $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ olan bir paraboldür. Verilen fonksiyonda: $x_k = -\frac{b}{2a} = 1$ ve $y_k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-12 - 4}{4} = -4$ olduğundan köşe (1, -4) noktasıdır.

$x = 0 \Rightarrow y = -3$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 3$ bulunur. Buna göre parabol y eksenini (0, -3), x eksenini de (-1, 0) ile (3, 0) noktalarında keser. Grafik 10. şekildedir.



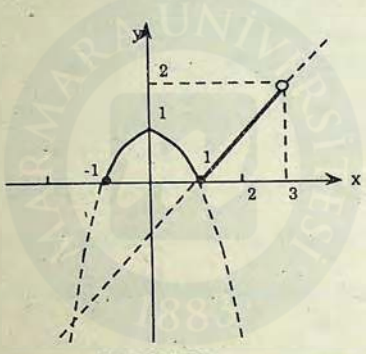
(10. Şekil)

Grafikten $\forall x \in R$ için $f(x) = y \geq -4$ olduğu kolayca görülebilir. Yani R değer kümesindeki -4 den küçük sayılar görüntü değildir. Bu nedenle fonksiyon içinedir. Diğer taraftan farklı iki sayının görüntüleri aynı olabildiği için (örneğin $f(-1) = f(3) = 0$) fonksiyon bire-bir değildir.

ÖRNEK 4: $f[-1, 3) \to R$, $f(x) \begin{cases} -x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ x - 1, & 1 < x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

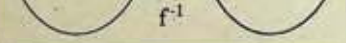
fonksiyonun grafiğini çiziniz.

Çözümü: Bu fonksiyonun grafiği çizilirken $y = -x^2 + 1$ parabolünün $-1 \leq x \leq 1$ aralığındaki parçası, $y = x - 1$ doğrusunun da $1 < x < 3$ aralığındaki parçası alınır. Grafik 11. şekilde devamlı çizgiyle çizilen kısımdır.



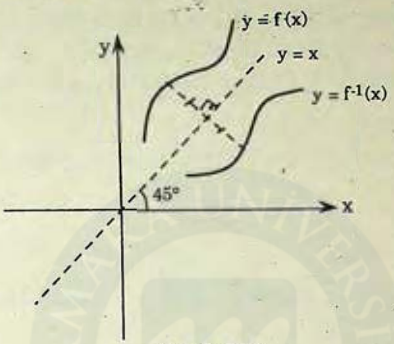
(11. Şekil)

1.5. TERS FONKSİYON A dan B ye $f(x) = y$ fonksiyonu $f = \{(x, y) : x \in A, y \in B, y = f(x)\}$ kümesi ile gösterilebilir. B den A ya $f^{-1} = \{(y, x) : x \in A, y \in B, y = f(x)\}$ kümesine f nin ters bağıntısı denir. Eğer $f: A \to B$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise $f^{-1}: B \to A$ bağıntısı da bire-bir ve örten bir fonksiyondur. Buna f nin **ters fonksiyonu** denir.



(12. Şekil)

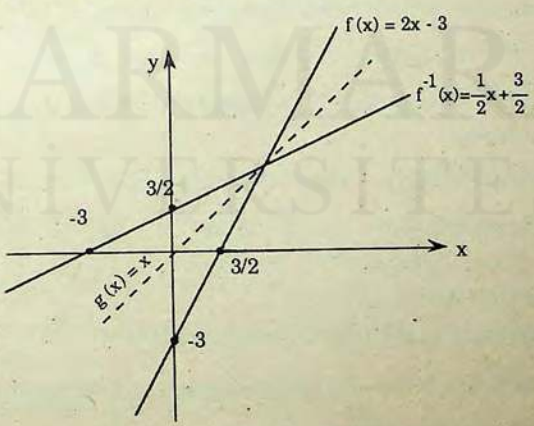
Pratikte f fonksiyonu verildiğinde f^{-1} ters fonksiyonunu bulmak için $y = f(x)$ eşitliğinden x çözülerek $x = f^{-1}(y)$ elde edilir. Daha sonra x yerine y, y yerine x konarak $y = f^{-1}(x)$ şeklinde ters fonksiyonunun kuralı bulunmuş olur. $y = f(x)$ ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. (13. şekil)



(13. Şekil)

ÖRNEK 1: $f : R \to R$, $f(x) = y = 2x - 3$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz. f ve f^{-1} in grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

Çözümü: $f(x) = y = 2x - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} y + \frac{3}{2}$ olduğundan $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} y + \frac{3}{2}$ dir. Buradan $f^{-1} : R \to R$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} x + \frac{3}{2}$ yazılabilir. f ve f^{-1} in grafikleri şekil 14 de çizilmiştir.



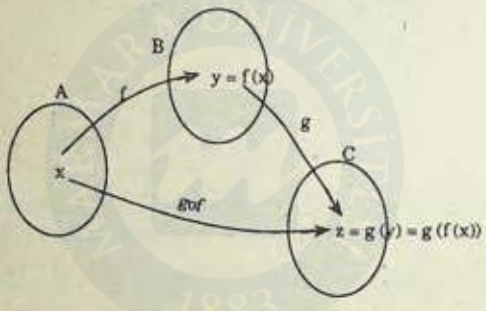
(14. Şekil)

ÖRNEK 2: $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + 1$ in ters fonksiyonunu bulunuz.

Çözümü: $y = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1}$ olduğundan $f^{-1}: R \to R$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ dir.

1.6. BİLEŞKE FONKSİYONU $f: A \to B$, $f(x) = y$ ve $g: B \to C$, $g(y) = z$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu iki fonksiyonun ardarda uygulanmasıyla A nın elemanlarını C nin elemanlarına eşleyen yeni bir fonksiyon elde edilmiş olur. Buna f ile g fonksiyonlarının **bileşke fonksiyonu** denir ve

$gof: A \to C$, $gof(x) = g(f(x))$ şeklinde gösterilir. (15. şekil)



(15. Şekil)

Eğer f bire-bir ve örten bir fonksiyon ise fof^{-1} ve $f^{-1}of$ bileşke fonksiyonları her elemanı kendisine eşleyecekleri için

$fof^{-1} = f^{-1}of = I$ (Birim fonksiyon) olur (Bak: 12. şekil)

ÖRNEK 1: $f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = x^2 - 2$ fonksiyonları için aşağıdakileri bulunuz.

a) $gof(x)$ b) $fog(x)$ c) $gof(1)$ d) $fog(-\sqrt{2})$

Çözümü: a) $gof(x) = g(f(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$

b) $fog(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3$

c) $gof(1) = 4.1^2 + 4.1 - 1 = 7$

d) $fog(-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2})^2 - 3 = 2.2 - 3 = 1$

ÖRNEK 2: $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ fonksiyonunun ters fonksiyonunu bulunuz. $f^{-1}of(x) = fof^{-1}(x) = x$ olduğunu gösteriniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: $f(x) = \frac{1}{x-1} = y \Rightarrow xy - y = 1 \Rightarrow xy = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y}$

olduğundan $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$ dir.

a) $f^{-1} \text{ of } (x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x-1}+1}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{1+x-1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x$

b) $f \text{of}^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x}-1} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x}} = x$

bulunur. a ve b den

$f^{-1}\text{of}(x) = f\text{of}^{-1}(x) = x$ yazılabilir.

I.7.**MUTLAK DEĞER:** Bir a reel sayısının mutlak değeri $|a|$ şeklinde gösterilir ve

$$|a| = \begin{cases} a\ , & a \geq 0 \text{ ise} \\ -a\ , & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin $|2| = 2$, $|0| = 0$, $|-2| = -(-2) = 2$ dir.

I.8. **MUTLAK DEĞER ÖZELLİKLERİ** $a, b \in R$ ise:

1) $|a| = |-a|$

2) $-|a| \leq a \leq |a|$

3) $|a.b| = |a|.|b|$

4) $\left|\frac{a}{b}\right| \quad \frac{|a|}{|b|}$

5) $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

6) $a > 0$ ve $|x| = a \Rightarrow x = a \vee x = -a$

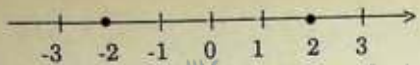
7) $a > 0$ ve $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$

8) $a > 0$ ve $|x| > a \Rightarrow x > a \vee x < -a$

ÖRNEK. Aşağıdaki önermelerin R deki çözümlerini bulunuz. Sayı ekseninde gösteriniz.

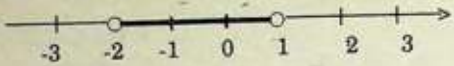
a) $|x| = 2$ b) $|2x + 1| < 3$ c) $|-x + 3| \geq 5$

Çözümü: a) $|x| = 2 \Rightarrow x = 2 \vee x = -2$



MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) $|2x + 1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x + 1 < 3 \Rightarrow -4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1$



c) $|-x + 3| \geq 5 \Rightarrow -x + 3 \geq 5 \vee -x + 3 \leq -5$

$\Rightarrow -x \geq 2 \vee -x \leq -8$

$\Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq 8$



I.9. MUTLAK DEĞER FONKSİYONU. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & , f(x) \geq 0 \text{ ise,} \\ -f(x) & , f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre her $y = f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)| \geq 0$ dır. Bu nedenle $|f|$ nin grafiğine ait bütün noktalar x ekseninin üzeri veya üstündedir. $|f|$ nin grafiği çizilirken f nin grafiğinin x ekseninin üzeri veya üstündeki kısımları aynen alınır, x ekseninin altındaki kısımları simetrik olarak x ekseninin üstüne katlanır.

ÖRNEK 1: $f(x) = x^2 + 4x$ fonksiyonu için $|f(x)|$ fonksiyonunu yazınız, grafiğini çiziniz.

Çözümü:

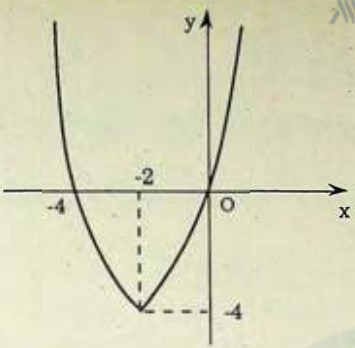
x		-4		0	
$x^2 + 4x$	+	0	−	0	+

Yukarıdaki tabloya göre

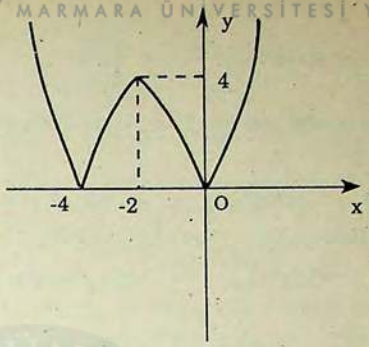
$$|f(x)| = |x^2 + 4x| = \begin{cases} x^2 + 4x & , x \leq -4 \vee x \geq 0 \text{ ise} \\ -x^2 - 4x & , -4 < x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. f nin grafiği 16. şekilde, $|f|$ nin grafiği ise 17. şekilde çizilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(16. şekil)



(17. şekil)

ÖRNEK 2: $f(x) = |x + 1| + |2 - x|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

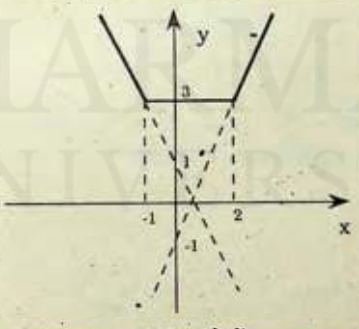
Çözümü:

x		-1		2	
x + 1	−	0	+		+
2 - x	+		+	0	−

Yukarıdaki tabloya göre:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 + 2 - x = -2x + 1, & x < -1 \text{ ise} \\ x + 1 + 2 - x = 3, & -1 \le x < 2 \text{ ise} \\ x + 1 - 2 + x = 2x - 1, & x \ge 2 \text{ ise} \end{cases}$$

yazılabilir. f nin grafiği 18. şekilde çizilmiştir.



(18. şekil)

I.10. İŞARET FONKSİYONU $A \subset R$ olmak üzere $f : A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$$g(x) = \operatorname{Sgn} f(x) = \begin{cases} +1 & , \quad f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0 & , \quad f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1 & , \quad f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ile tanımlanan $g : A \to \{-1, 0, 1\}$ fonksiyonuna f nin **işaret fonksiyonu** denir.

ÖRNEK 1: $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + x - 2$ fonksiyonu için sgnf fonksiyonunu yazınız, grafiğini çiziniz.

Çözümü: $x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \ \vee \ x = -2$ dir.

x		-2		1	
$x^2 + x - 2$	+	0	−	0	+

Yukarıdaki işaret tablosuna göre

$$\operatorname{Sgn} f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x < -2 \ \vee \ x > 1 \text{ ise} \\ 0 & , \quad x = -2 \ \vee \ x = 1 \text{ ise} \\ -1 & , \quad -2 < x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. Grafiği 19. şekildedir.



(19. Şekil)

ÖRNEK 2: $f : [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = \operatorname{Sin} x$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ ve sgn $f(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Çözümü:

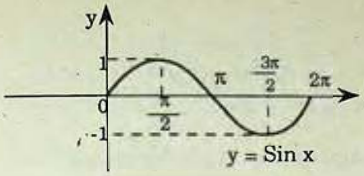
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x) = \operatorname{Sin} x$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0

Yukarıdaki Sinx in değişim tablosuna göre

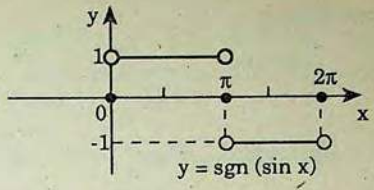
$$\operatorname{Sgn} f(x) = \operatorname{Sgn}(\operatorname{Sin} x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < \pi \text{ ise} \\ 0 & , x = 0 \vee x = \pi \ \vee x = 2\pi \text{ ise} \\ -1 & , \pi < x < 2\pi \text{ ise} \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dir f ve sgnf nin grafikleri aşağıdadır.



(20. Şekil)



(21. Şekil)

I.11. **TAM DEĞER FONKSİYONU.** $x \in R$ olsun. x den büyük olmayan en büyük tamsayıya x in tam değeri denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir. Bu tanıma göre $n \in Z$ (n tamsayı) olmak üzere $n \le x < n + 1$ ise $[\![x]\!] = n$ dir. Ör: $[\![2{,}3]\!] = 2$, $[\![-3]\!] = -3$, $[\![-\pi]\!] = -4$ olur.

$A \subset R$ olmak üzere bir $h: A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x \in A$ için $h(x) \in R$ yi tam değerine eşleyen $g: A \to Z$, $g(x) = [\![h(x)]\!]$ fonksiyonuna h ın **tam değer fonksiyonu** denir.

Bu tanıma göre h (x) in tam değer fonksiyonu

$$g(x) = [\![h(x)]\!] = \begin{cases} h(x) & , \ h(x) \in Z \text{ ise} \\ n & , \ n < h(x) < n+1 \ \text{ ve } n \in Z \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

ÖRNEK 1: $f[-1, 2] \to Z$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

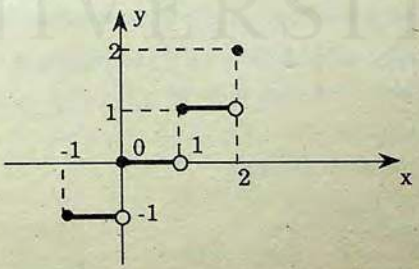
Çözümü: $-1 \le x < 0 \Rightarrow f(x) = [\![x]\!] = -1$

$0 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = [\![x]\!] = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = [\![x]\!] = 1$

$x = 2 \Rightarrow f(x) = [\![x]\!] = 2$ dir.

Grafik 22. şekilde çizilmiştir.



(22. Şekil)

ÖRNEK 2: f: [0, 2π] → Z , f(x) = [] Cos x [] fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

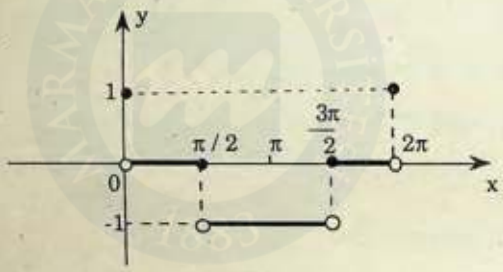
Çözümü:

x	0	π/2	π	3π/2	2π
Cos x	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1

Yukarıdaki Cosx in [0, 2π] aralığındaki değişim tablosuna göre

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & x = 0 \vee x = 2\pi \quad \text{ise} \\ 0 \ , & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \quad \text{ise} \\ -1 \ , & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Grafik aşağıdadır.



(23. Şekil)

1.12. TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

$a \in R^+$ ve A = [-a, a] olmak üzere bir f : A → R fonksiyonu verilmiş olsun

1) ∀ x ∈ A için f(-x) = -f(x) ise f **tek fonksiyondur** denir.

2) ∀ x ∈ A için f(-x) = f(x) ise f **çift fonksiyondur** denir.

Tek fonksiyonların grafikleri O (0,0) başlangıç noktasına göre, çift fonksiyonların grafikleri ise y eksenine göre simetriktir.

ÖRNEK: Aşağıdaki fonksiyonların tek fonksiyon veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştırınız.

a) f: R → R , $f(x) = x^3$

b) g: [-2π , 2π] → R , g (x) = Cos x

c) h: R → R , $h(x) = x^2 - 3x - 4$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü:

a) $\forall x \in R$ için $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ olduğundan f tek fonksiyondur.

b) $\forall x \in [-2\pi, 2\pi]$ için $g(-x) = \text{Cos}(-x) = \text{Cos}\, x = g(x)$ olduğundan g çift fonksiyondur.

c) $\forall x \in R$ için $h(-x) = (-x)^2 - 3(-x) - 4 = x^2 + 3x - 4$ olup $h(-x) \neq -h(x)$ ve $h(-x) \neq h(x)$ dir. h ne tek ne de çift fonksiyondur.

I.13. PERİYODİK (DEVİRLİ) FONKSİYONLAR

$A \subset R$ olmak üzere bir $f : A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall x \in A$ için $x + T \in A$ ve $f(x + T) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı T reel sayıları varsa **bu fonksiyon periyodiktir** denir. T sayılarından pozitif ve en küçük olanına da **fonksiyonun periyodu** denir.

Trigonometrik fonksiyonlar periyodiktir.

ÖRNEK 1: R den R ye Sin x ve Cos x fonksiyonlarında $\text{Sin}(x + k.2\pi) = \text{Sin}\, x$ ve $\text{Cos}(x + k\,2\pi) = \text{Cos}\, x$ $(k \in Z)$ olduğundan periyot 2π dir. Tan x ve Cot x fonksiyonlarında ise $\text{Tan}(x + k\pi) = \text{Tan}\, x$ ve $\text{Cot}(x + k\pi) = \text{Cot}\, x$ olduğundan periyot π dir.

ÖRNEK 2: $f : R \to R$, $f(x) = \text{Cos}\, 5x$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Çözümü: $f(x + T) = f(x) \Rightarrow \text{Cos}\, 5(x + T) = \text{Cos}\, 5x$

$\Rightarrow \text{Cos}(5x + 5T) = \text{Cos}\, 5x \Rightarrow 5x + 5T = 5x + k.2\pi$

$\Rightarrow 5T = k.2\pi \Rightarrow T = \dfrac{k.2\pi}{5}$ olup k = 1 alınarak periyot $\dfrac{2\pi}{5}$ bulunur.

UYARI: Genel olarak Sin (ax + b) ve Cos (ax + b) fonksiyonları ile bunların tek kuvvetlerinin periyodu $\dfrac{2\pi}{|a|}$, çift kuvvetlerinin periyodu $\dfrac{\pi}{|a|}$ dır. Tan (ax + b) ve Cot (ax + b) fonksiyonları ile bunların bütün kuvvetlerinin periyodu $\dfrac{\pi}{|a|}$ dır.

f(x) fonksiyonunun periyodu T_1, g(x) fonksiyonunun periyodu T_2 ise f(x) + g(x) veya f(x) - g(x) fonksiyonlarının periyodu T_1 ve T_2 nin en küçük ortak katı, yani $T = k_1T_1 = k_2T_2$ eşitliğini sağlayan en küçük k_1 ve k_2 sayma sayılarının belirlediği T sayısıdır.

ÖRNEK 3: $f(x) = \text{Sin}(3x + 2) - \text{Cos}\,\frac{2x}{3}$ fonksiyonunda $\text{Sin}(3x + 2)$ nin periyodu $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\text{Cos}\,\frac{2x}{3}$ ün periyodu $T_2 = 3\pi$ dir. $f(x)$ in periyodu için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$T = k_1 \cdot \frac{2\pi}{3} = k_2 \cdot 3\pi \Rightarrow 2k_1 = 9k_2 \Rightarrow k_1 = 9 \wedge k_2 = 2$$

bulunur. Buradan $T = 9 \cdot \frac{2\pi}{3} = 6\pi$ dir.

I.14. BİR FONKSİYONUN EN GENİŞ TANIM KÜMESİ

Bir fonksiyonun $y = f(x)$ şeklinde kuralı verilmiş, tanım kümesi verilmemişse kuralından yararlanarak bu fonksiyonun tanımlı olduğu en geniş küme bulunabilir. Eğer bir $a \in R$ sayısı için $f(a) \in R$ oluyorsa, yani $x = a$ nın görüntüsü varsa **bu fonksiyon $x = a$ için tanımlıdır** denir. Aksi halde, yani $f(a) \notin R$ ise **fonksiyon $x = a$ için tanımsızdır** denir. Fonksiyonu tanımlı yapan bütün $a \in R$ sayılarının kümesine **bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi** denir.

ÖRNEK 1: $y = f(x) = \frac{x}{x - 2}$ fonksiyonunda $f(2) = \frac{2}{0} \notin R$ olduğundan $x = 2$ için bu fonksiyon tanımsızdır. $x = 2$ dışındaki bütün reel sayılar için sonucun reel çıkacağı açıktır. Buna göre bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi $R - \{2\}$ dir.

ÖRNEK 2: $y = f(x) = \sqrt{x + 2}$ fonksiyonunda

$x = 3$ için $f(3) = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5} \in R$,

$x = -1$ için $f(-1) = \sqrt{-1 + 2} = \sqrt{1} = 1 \in R$,

$x = -3$ için $f(-3) = \sqrt{-3+2} = \sqrt{-1} \notin R$

dir. Buna göre fonksiyon $x = 3$ ve $x = -1$ için tanımlı, $x = -3$ için tanımsızdır. Bu fonksiyonun tanımlı olması için kök içinin pozitif veya sıfır olması gerektiği düşünülerek

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

bulunur. Buna göre en geniş tanım kümesi $[-2, +\infty)$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

I.15. ÇEŞİTLİ FONKSİYONLARDA EN GENİŞ TANIM KÜMESİNİ BULMAK

1°) **Tam ve rasyonel fonksiyonlarda:**

$a_o, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere $y = f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$ şeklindeki fonksiyonlara tam ve rasyonel fonksiyonlar denir. Bu tür fonksiyonlarda $\forall a \in R$ için $f(a) \in R$ olacağından en geniş tanım kümesi $R = (-\infty, +\infty)$ olur.

ÖRNEK: $y = 3x - 2$ ve $y = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 3$ fonksiyonları sırasıyla 1. ve 2. dereceden tam ve rasyonel fonksiyonlar olup her ikisinin de en geniş tanım kümesi $R = (-\infty, +\infty)$ dur.

2°) **Kesirli fonksiyonlarda:** $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki kesirli fonksiyonların en geniş tanım kümeleri bulunurken, bu tür fonksiyonların paydayı sıfır yapan x değerleri için tanımsız olacağı düşünülür.

ÖRNEK: Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a) $y = \frac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$ b) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4}$ c) $y = \frac{1}{[\![x^2 - 2]\!]}$

Çözümü:

a) $y = \frac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$ fonksiyonunda

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 4$ bulunur. Bu fonksiyon paydayı sıfır yapan -1 ve 4 dışındaki bütün reel sayılar için tanımlıdır.

En geniş tanım kümesi: $R - \{-1, 4\}$ dür.

b) $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x \notin R$ dir.

Paydanın reel kökü olmadığı için bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi $R = (-\infty, +\infty)$ olur.

c) $[\![x^2 - 2]\!] = 0 \Rightarrow 0 \le x^2 - 2 < 1$

$\Rightarrow 2 \le x^2 < 3$

$\Rightarrow \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \vee -\sqrt{3} < x \le -\sqrt{2}$

bulunur. Buna göre $[\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ile $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}]$ aralıklarında fonksiyon tanımsızdır. En geniş tanım kümesi: $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ olur.

3°) İrrasyonel fonksiyonlarda: Bir $y = f(x)$ fonksiyonunda değişkene dört temel cebirsel işlemden başka kök alma işlemi de uygulanıyorsa bu fonksiyona irrasyonel fonksiyon denir.

Kök kuvveti çift olan irrasyonel fonksiyonlar kök içini pozitif yapan x değerleri için tanımlı, negatif yapan x değerleri için tanımsızdır. Kök kuvveti tek olan irrasyonel fonksiyonlar ise kök içinin tanımlı olduğu her x değeri için tanımlıdırlar.

ÖRNEK: Aşağıdaki irrasonel fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a) $y = \sqrt{25 - x^2}$ b) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 2} + \dfrac{\sqrt{x}}{x-3}$ d) $y = x + \sqrt[3]{x-1}$

Çözümü: a) Fonksiyon $25 - x^2 \geq 0$ için tanımlıdır. $25 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 25 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$ bulunur. Fonksiyonun en geniş tanım kümesi $[-5, 5]$ dir.

b) Fonksiyon $\dfrac{x+1}{x^2+2x-3} \geq 0$ için tanımlıdır. Tablo ile kesrin işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2x-3	$+$		0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$		$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	

Tabloya göre en geniş tanım kümesi $(-3, -1] \cup (1, +\infty)$. bulunur.

c) Fonksiyonun tanımlı olması için $x^2 - 2 \geq 0$ ve $x \geq 0$ ve $x - 3 \neq 0$ olmalıdır.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		3		$+\infty$
x^2-2	$+$		0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$	$-$			$-$		$-$		$-$	0	$+$	

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tablodan en geniş tanım kümesi $[\sqrt{2}, +\infty) - \{3\}$ olarak bulunur.

d) $\forall x \in R$ için $x - 1 \in R$ ve $\sqrt[3]{x-1} \in R$ ve $y = x + \sqrt[3]{x-1} \in R$ olduğundan bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi $R = (-\infty, +\infty)$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki aralıkları bir sayı ekseni üzerinde gösteriniz.

a) $[-2, 1]$ b) $(-4, 0]$ c) $[2, +\infty)$ d) $(-\infty, 1)$

2) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f: R \to R, f(x) = -x + 3$

b) $f: [0, 2] \to R, f(x) = 2x - 1$

c) $f: R \to R, f(x) = 2x^2 + 5x$

d) $f: (-1, 2] \to R, f(x) = x^2 - 4$

e) $f: [0, +\infty) \to R, f(x) = -x^2 + 2x - 3$

f) $f: R \to R, f(x) = \begin{cases} -1 & , x > 3 \text{ ise} \\ x^2 - 2x, & x \leq 3 \text{ ise} \end{cases}$

3) $f(x) = 2x^2 - 8x + 2$ fonksiyonunda $f(2 - \sqrt{3}) = ?$ (C : O)

4) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$ fonksiyonunda $f(0)$, $f(2)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(x+1)$ değerlerini bulunuz.

[C: $f(0) = -2$, $f(2) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) = -2$, $f(x+1) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+2}$]

5) $f(x) = \text{Sin } x \text{ Cos } 2x$ fonksiyonunda.

a) $f(\frac{\pi}{6})$ b) $f(\frac{\pi}{2})$ c) $f(\frac{\pi}{2} - x)$

değerlerini bulunuz.

[C: a) $\frac{1}{4}$ b) -1 c) $-\text{Cos } x \text{ Cos } 2x$]

6) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ fonksiyonunda $f(a^2 - 1) = ?$

[C: $f(a^2 - 1) = a^6$]

7) Aşağıdaki bire-bir örten fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

a) $f: R \to R, f(x) = 3x + 2$

b) $f: R^- \to (1, +\infty), f(x) = x^2 + 1$

c) $f : R \to R$, $f(x) = x^5 - 1$

d) $f : R - \{3\} \to R - \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

e) $f : [0, 3] \to [0, 3]$, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

f) $f : [1, +\infty) \to [-4, +\infty)$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$

C: a) $f^{-1} : R \to R$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$

b) $f^{-1} : (1, +\infty) \to R^-$, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

c) $f^{-1} : R \to R$, $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x+1}$

d) $f^{-1} : R - \{2\} \to R - \{3\}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

e) $f^{-1} : [0, 3] \to [0, 3]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$

f) $f^{-1} : [-4, +\infty) \to [1, +\infty)$, $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$

8) $R \to R$ tanımlı $f(x) = 2x^2 - 1$ ve $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ fonksiyonları veriliyor. $fog(x)$ ve $gof(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

[$fog(x) = 2x^2 + 1$, $gof(x) = \sqrt{4x^4 - 4x^2 + 2}$]

9) R de $gof(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = 3x + 1$ fonksiyonları veriliyor. $f(x) = ?$

[C: $\dfrac{1}{3}(2x - 4)$]

10) Aşağıdaki önermelerin R deki çözümlerini bulunuz.

a) $|2x - 1| = 3$ $|4x| < 1$ c) $|-3x + 5| + 1 \geq 5$

d) $|x + 2| \leq -1$ e) $|2x - 7| \geq -\dfrac{2}{3}$ f) $|x| + |x - 2| = 4$

g) $\big||x^2 - 2| - 5\big| = 3$ h) $|x + 1| + \sqrt{x^2 - 6x + 9} < 2$

ı) $\dfrac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{|x + 4|} \leq 1$

a) $\{-1, 2\}$ b) $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right)$ c) $(-\infty, \dfrac{1}{3}] \cup (3, +\infty)$ d) $\emptyset$

e) R f) $[-1, 3)$ g) $\{-\sqrt{10}, -2, 0, 2, \sqrt{10}\}$ h) $\emptyset$

ı) $[-1, 5]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f : R \to R$, $f(x) = |x - 3|$

b) $f : R \to R$, $f(x) = |-x^2 + 5| + 2$

c) $f : [-1, 4) \to R$, $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

d) $f : [-\pi, \pi] \to R$, $f(x) = |\text{Sin } x - 1|$

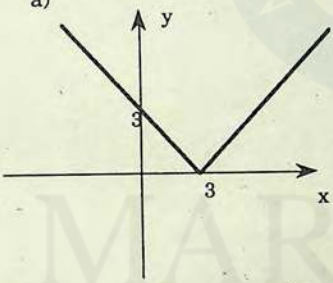
e) $f : [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = \text{Cos } x + |\text{Cos } x|$

f) $f: R \to R$, $f(x) = |x + 3| - |x - 1|$

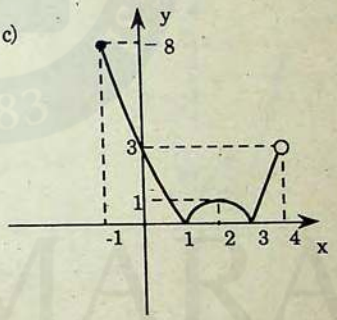
g) $f : R - \{1\} \to R$, $f(x) = x^2 + \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$

h) $f : R - \{-2\} \to R$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$

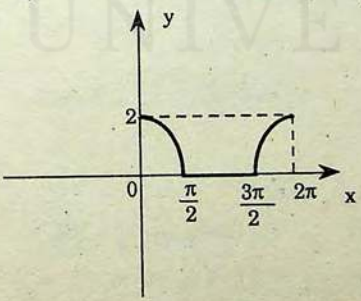
a)



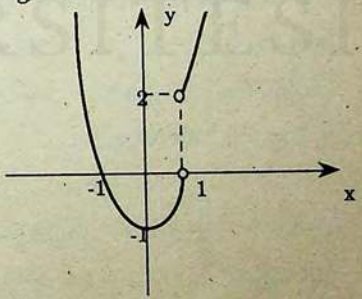
c)



e)



g)



12) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 2)$

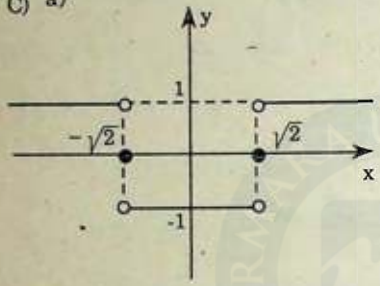
b) $y = \operatorname{sgn} \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$

c) $y = x - 1 + \operatorname{sgn}(x - 1)$

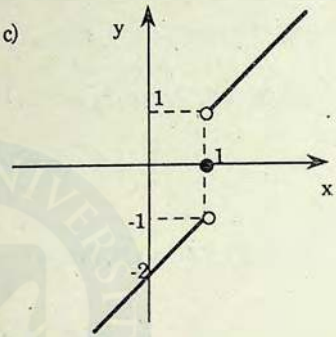
d) $y = |x - 2| + \operatorname{sgn}(x + 1)$

e) $y = x^2 - \operatorname{sgn} \dfrac{x + 1}{x - 2}$

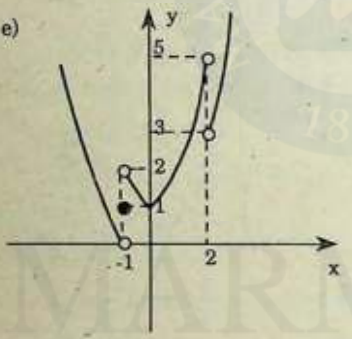
C) a)



c)



e)



13) Aşağıdaki denklemlerin R deki çözümlerini bulunuz.

a) $[\![2x - 3]\!] = -1$

b) $[\![x]\!]^2 = 9$

c) $[\![x^2]\!] = 1$

d) $\left[\!\left[x + [\![x + 2]\!] \right]\!\right] = -6$

e) $\operatorname{sgn}(-x^2 + x + 6) = -1$

f) $[\![x - 1]\!] \cdot \operatorname{sgn}(x - 2) = 1$

C) a) $[\,1, \dfrac{3}{2}\,)$

b) $[\,-3, -2) \cup [3,4)$

c) $(-\sqrt{2}, -1\,] \cup [\,1, \sqrt{2}\,)$

d) $[\,-4, -3)$

e) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

f) $[\,0, 1) \cup (2, 3)$

14) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f : [-2, 2] \to R$, $f(x) = x - [\![x]\!]$

b) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to R$, $f(x) = [\![2x]\!]$

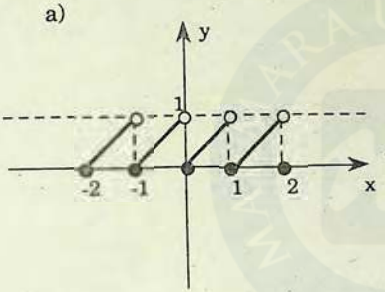
c) $f : [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = [\![\text{Sin } x]\!]$

d) $f : [0, \pi] \to R$, $f(x) = [\![2\text{Cos } x]\!]$

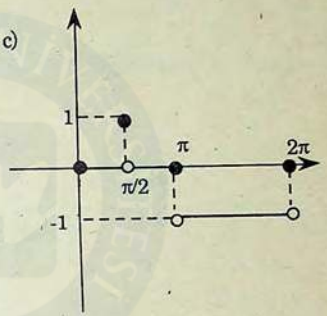
e) $f : [-2, 4] \to R$, $f(x) = [\![\frac{x}{2}]\!] + \text{sgn}(x + 1)$

f) $f : [-1, 2] \to R$, $f(x) = x^2 [\![x]\!]$

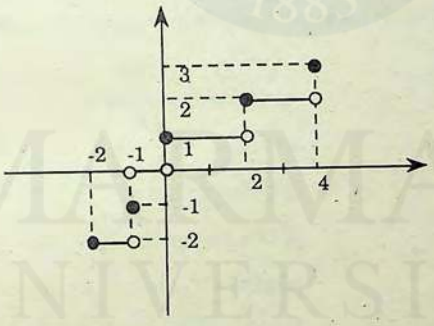
a)



c)



e)



15) Aşağıdaki bağıntıların grafiklerini çiziniz.

a) $|y - 3| = x + 2$

b) $|x| + |y| = 3$

c) $[\![x - y]\!] = -2$

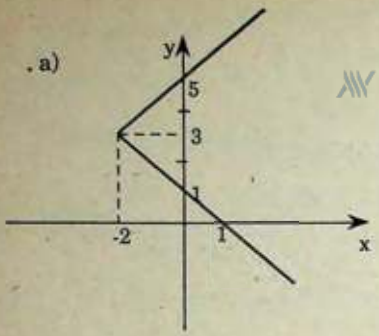
d) $[\![x^2 + y^2]\!] = 1$

e) $[\![x]\!] [\![2y]\!] = -1$

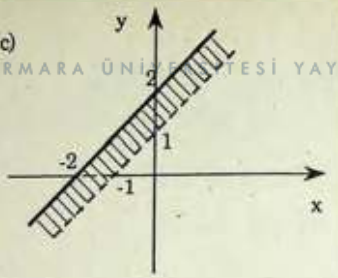
f) $\text{sgn}(x - y^2 + 4) = 1$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

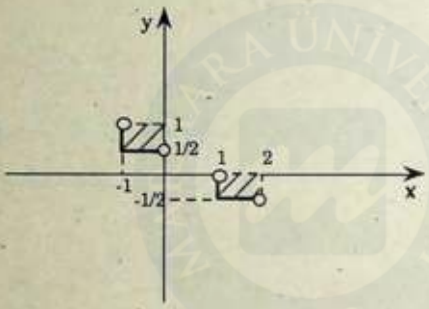
. a)



c)



e)



16) Aşağıdaki fonksiyonların tek fonksiyon veya çift fonksiyon olup olmadıklarını araştırınız.

a) $f(x) = 2x^2 + 3$

b) $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = (x - 2)^2$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

e) $f(x) = x^2 . \text{Sin } x$

f) $f(x) = \text{Cos } 4x + 1$

g) $f(x) = \text{Sin } x \text{ Cos } x$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

ı) $f(x) = x^3 \tan x$

j) $f(x) = \text{sgn } x$

k) $f(x) = x . \text{ sgn } x$

l) $f(x) = x^2 + |x|$

[C : b, d, e, g, j tek ; a, f, ı, k, l çift fonksiyon, c ile h tek veya çift fonksiyon değil.]

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

17) Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $y = \text{Sin } 3x$

b) $y = 4 \text{ Cos } \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$

c) $y = \text{Cos } 2x + \text{Sin } 3x$

d) $y = \tan \frac{x}{3}$

e) $y = 2 \cot (4x + 1)$

f) $y = \text{Sin}^2 \frac{x}{2} - 3 \text{ Cos}^2 \frac{x}{6} + 2$

[C : a) $\frac{2\pi}{3}$ b) 4π c) 2π d) 3π e) $\frac{\pi}{4}$ f) 6π]

18) Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

a) $y = x^3 - 4x$

b) $y = \frac{x}{2x^2 - x + 3}$

c) $y = \frac{1}{x^3 + 1}$

d) $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

e) $y = \sqrt{\frac{-2x+1}{x^2-3}}$

f) $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

g) $y = \frac{x-2}{x\sqrt{x+2}}$

h) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

k) $y = \sqrt{\left| \frac{x}{x-2} \right| - 1}$

ı) $y = \frac{1}{[\![x-2]\!] + [\![x]\!]}$

j) $y = \frac{\sqrt{x}}{x - [\![x]\!]}$

C: a) R b) R c) $R - \{-1\}$ d) $[-1, 2]$

e) $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup [\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ f) $[1, 2)$ g) $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$

h) R ı) $R - [1, 2)$ j) $R^+ - Z$ k) $[1, 2) \cup (2, +\infty)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İKİNCİ BÖLÜM

LİMİT

2.1. BİR DEĞİŞKENİN LİMİTİ. Bir x değişkeni ardarda aldığı sonsuz sayıda değerlerle sabit bir a sayısına istenildiği kadar yaklaşabiliyorsa, diğer bir tanımla $\varepsilon > 0$ sayısı ne kadar küçük olursa olsun $|x - a| < \varepsilon$ olabiliyorsa **x in limiti a dır** denir ve bu $x \to a$ şeklinde gösterilir.

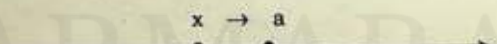
x in a ya yaklaşması iki türlü olabilir.

1°) a dan daha büyük değerler alır ve küçülerek a ya yaklaşır. Buna **sağdan yaklaşma** denir ve $x \to a^+$ şeklinde gösterilir. (24. şekil)



(24. şekil)

2°) a dan daha küçük değerler alır ve büyüyerek a ya yaklaşır. Buna **soldan yaklaşma** denir ve $x \to a^-$ şeklinde gösterilir. (25. şekil)



(25. şekil)

$x \to a$ gösterimi, x in a ya her iki taraftan da yaklaşabileceğini gösterir.

ÖRNEK: $(x_n) = (\frac{1}{n})$ dizisinin terimleri

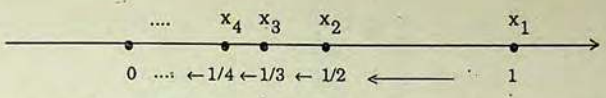
$$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots\ldots\ldots , \frac{1}{n} , \ldots.$$

şeklinde sıralanır. $\varepsilon > 0$ sayısı ne kadar küçük seçilirse seçilsin n yeteri kadar büyük alınarak bu dizide

$$|x_n - 0| = x_n < \varepsilon$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yapılabilir. O halde bu dizi için $(x_n) \to 0^+$ dır.



2.2. BİR FONKSİYONUN LİMİTİ: Bir $f : A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun $(A \subset R)$. Eğer $a, b \in R$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir $\delta > 0$ sayısı varsa **x değişkeni a ya yaklaşırken fonksiyonun limiti b dir** denir ve bu $\lim_{x \to a} f(x) = b$ şeklinde yazılır.

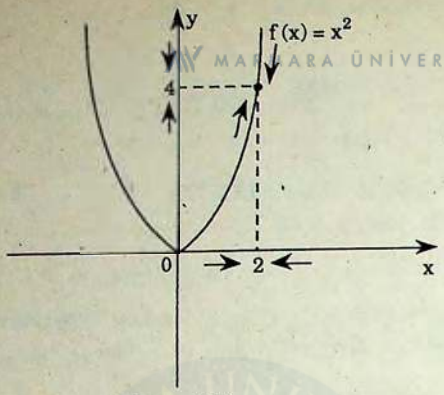
Kısaca bir $f(x) = y$ fonksiyonunda

$$x \to a \Rightarrow f(x) = y \to b$$

ise $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} y = b$ dir denir.

2.3. SAĞDAN VE SOLDAN LİMİT: $y = f(x)$ fonksiyonunda $x \to a^+$ için fonksiyonun b_1 gibi bir limiti varsa buna **sağdan limit** denir ve $\lim_{x \to a^+} y = b_1$ şeklinde yazılır. Eğer $x \to a^-$ için fonksiyonun b_2 gibi bir limiti varsa buna **soldan limit** denir ve $\lim_{x \to a^-} y = b_2$ şeklinde yazılır. $\lim_{x \to a^+} y \neq \lim_{x \to a^-} y$ ise $x \to a$ için fonksiyonun limiti yoktur denir. $\lim_{x \to a^+} y = \lim_{x \to a^-} y = b$ ise $x \to a$ için fonksiyonun limiti b dir denir ve bu $\lim_{x \to a} y = b$ şeklinde yazılır.

ÖRNEK 1: $f : R \to R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunda x i 2,1; 2,01; 2,001 ; ..... dizisiyle sağdan 2 ye yaklaştıralım. f (x) görüntüleri 4,41; 4,0401; 4,004001 ; .... şeklinde 4 e yaklaşır. Buna göre $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$ dür. x i 1,9 ; 1,99 ; 1,999 ; .... dizisiyle 2 ye soldan yaklaştırırsak f (x) görüntüleri 3,61 ; 3,9601 ; 3,996001 ; .... şeklinde yine 4 e yaklaşır. O halde $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$ olup x = 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ olur. f nin x = 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitleri 26. şekilde oklarla gösterilmiştir.



(26. şekil)

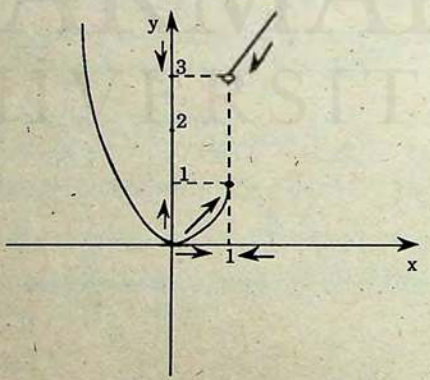
ÖRNEK 2: $f: R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x > 1 \text{ ise} \\ x^2 & , x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki limitini araştırınız.

Çözümü: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x + 2) = 3$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2) = 1$

bulunur. $x = 1$ noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan $\lim_{x \to 1} f(x)$ yoktur. (27. şekil)



(27. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Not: Aynı fonksiyonun $x = 1$ dışındaki bütün noktalarda limiti vardır. Gerçekten:

$$a > 1 \text{ ise } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x + 2) = a + 2$$

$$a < 1 \text{ ise } \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2) = a^2 \text{ dir.}$$

örneğin $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$; $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2) = 1$ dir.

ÖRNEK 3: $f : R - \{0\} \to R$, $f(x) = x + \dfrac{|x|}{x}$ fonksiyonunun $x \to 0$ için limitini araştırınız.

Çözümü:

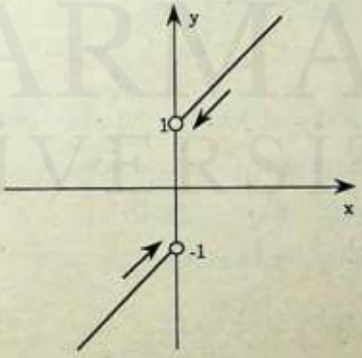
$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{x}{x} = x + 1 & , x > 0 \text{ ise} \\ x + \dfrac{-x}{x} = x - 1 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1$$

bulunur. Buna göre $\lim_{x \to 0} f(x)$ yoktur. (Şekil 28)



(28. şekil)

2.4. LİMİTLE İLGİLİ TEOREMLER:

Eğer $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = B$ ise:

1) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = A + B$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = A - B$

3) $\lim_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to a} f(x) = k \cdot A$ (k sabit)

4) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$

5) $B \neq 0$ ise $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$

6) $n \in N^+$ olmak üzere

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = A^n$$

7) n tek ise $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$

n çift ve $A \geq 0$ ise $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$

dır.

Örnek olarak bu teoremlerden 1. yi ispatlayalım. $\lim_{x \to a} f(x) = A$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = B$ olduğuna göre $\forall\, \varepsilon/2 > 0$ sayısı için aşağıdaki koşulları sağlayan δ_1 ve δ_2 pozitif sayıları vardır. Öyle ki

$$|x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olsun. δ, δ_1 ve δ_2 den daha küçük bir sayı ise $|x - a| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|x - a| < \delta_1$ ve $|x - a| < \delta_2$ eşitsizlikleri de sağlanır. Buna göre:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow |f(x)-A|+|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olur. Mutlak değer özelliğine göre

$$|f(x)+g(x)-(A+B)|\leq |f(x)-A|+|g(x)-B|$$

dir. Bu bir önceki eşitsizlikle karşılaştırılarak

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)+g(x)-(A+B)|<\varepsilon$$

yazılabilir. Bu da $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=A+B$ olduğunu gösterir.

ÖRNEK 1: $\lim_{x\to 1}(3x^2-5x+2)=\lim_{x\to 1}(3x^2)-\lim_{x\to 1}(5x)+\lim_{x\to 1}(2)$

$$=3\lim_{x\to 1}x^2-5\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}2=3.1-5.1+2=0$$

ÖRNEK 2:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{8}{x^2}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\frac{8}{x^2}}=\sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 2}8}{\lim_{x\to 2}x^2}}=\sqrt[3]{\frac{8}{4}}=\sqrt[3]{2}$$

ÖRNEK 3:

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\llbracket x \rrbracket+\operatorname{sgn}(x-3)\right)=\lim_{x\to 3^-}\llbracket x \rrbracket+\lim_{x\to 3^-}\operatorname{sgn}(x-3)=2-1=1$$

(Not: $2\leq x<3 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket=2$ ve $\operatorname{sgn}(x-3)=-1$ olduğunu düşününüz.)

UYARI: Bir $y=f(x)$ fonksiyonunun $a\in R$ noktasındaki sağdan ve soldan limitleri, $\varepsilon\in R^+$ olmak üzere

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}f(x+\varepsilon),$$

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}f(x-\varepsilon)$$

şeklinde de bulunabilir. Buna sağdan ve soldan limitlerin ε (epsilon) yöntemiyle bulunuşu denir.

ÖRNEK 4: $\lim_{x\to -2^+}\dfrac{\operatorname{sgn}(-x-2)}{\llbracket 1-2x \rrbracket}=?$

ÇÖZÜMÜ: $\lim_{x \to -2^+} \frac{\operatorname{sgn}(-x-2)}{[\![\, 1-2x \,]\!]} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\operatorname{sgn}\left(-(-2+\varepsilon)-2\right)}{[\![\, 1-2(-2+\varepsilon) \,]\!]}$

$$= \frac{\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{sgn}(-\varepsilon)}{\lim_{\varepsilon \to 0} [\![\, 5-2\varepsilon \,]\!]} = \frac{-1}{4}$$

2.5. GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİ : Reel sayılar kümesinin $R = (-\infty, +\infty)$ olduğunu biliyoruz. $\bar{R} = R \cup \{ -\infty, +\infty \}$ kümesine **genişletilmiş reel sayılar kümesi** denir. Burada $+\infty \notin R$ ve $-\infty \notin R$ olduğunu unutmayalım.

$a \in R$ olduğuna göre $\bar{R}$ kümesindeki işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1°) $a + (+\infty) = +\infty$ 2°) $a + (-\infty) = -\infty$

3°) $a - (+\infty) = -\infty$ 4°) $a - (-\infty) = +\infty$

5°) $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \text{ ise} \\ -\infty, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$ 6°) $a \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \text{ ise} \\ +\infty, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$

7°) $\frac{a}{+\infty} = 0$ ve $\frac{a}{-\infty} = 0$

8°) $\frac{+\infty}{a} = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \text{ ise} \\ -\infty, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$ 9°) $\frac{-\infty}{a} = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \text{ ise} \\ +\infty, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$

10°) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ 11°) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

12°) $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ 13°) $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

14°) $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$\bar{R}$ deki $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ işlemleri , R deki $\frac{0}{0}$, $\frac{a}{0}$ işlemleri gibi tanımsızdır.

2.6. GENİŞLETİLMİŞ REEL SAYILAR KÜMESİNDE LİMİT

x değişkeninin her pozitif sayının ötesinde sınırsız olarak büyümesi $x \to +\infty$, her negatif sayının ötesinde sınırsız olarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

küçülmesi $x \to -\infty$ şeklinde gösterilir. Bir f fonksiyonunun $x \to +\infty$ (veya $x \to -\infty$) için $A \in R$ gibi bir limiti olabilir. Bu limit $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ (veya $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$) şeklinde gösterilir.

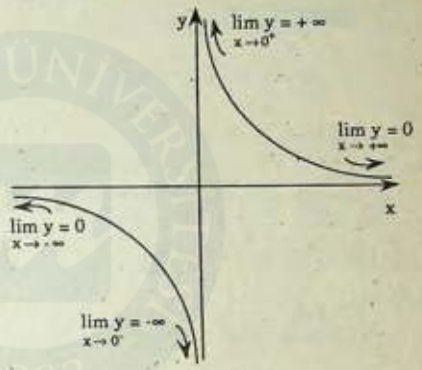
$a \in R$ olmak üzere bir f fonksiyonunda $x \to a$ için $f(x) = y \to +\infty$ (veya $f(x) = y \to -\infty$) oluyorsa bu $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (veya $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$) şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 1: $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



29. şekil

olup bu limitler 29. şekilde $y = \frac{1}{x}$ in grafiği üzerinde gösterilmiştir.

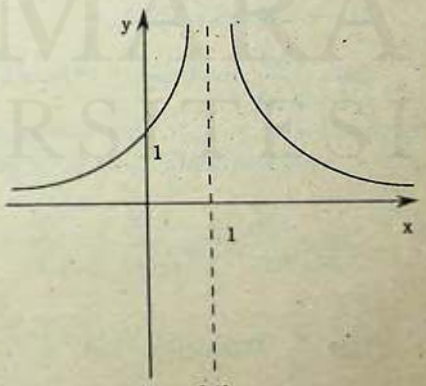
ÖRNEK 2: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ fonksiyonunda

$\lim_{x \to \pm\infty} y = 0$ ve

$\lim_{x \to 1^+} y = \lim_{x \to 1^-} y = +\infty$

dur. (Şekil 30)

($x \to 1^+$ ve $x \to 1^-$ için $(x-1)^2 \to 0^+$ olduğunu düşününüz.)



30. şekil

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2.7. BAZI ÖZEL LİMİTLER: $n \in N^+$ olmak üzere

1°) $\lim_{x \to 0} x^n = 0$ 2°) $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

3°) n çift ise $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$, n tek ise $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

4°) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 5°) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

6°) n çift ise $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$, n tek ise $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$

ÖRNEKLER:

1°) $\lim_{x \to 0} (2x^2) = 2 \lim_{x \to 0} x^2 = 2 . 0 = 0$

2°) $\lim_{x \to \pm\infty} (-3x^2) = -3 \lim_{x \to \pm\infty} x^2 = -3 . (+\infty) = -\infty$

3°) $\lim_{x \to -\infty} (\frac{1}{2} x^3) = -\infty$

4°) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ 5°) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4}{x^3} = 0$

6°) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x^4} = 0$

2.8. BELİRSİZ ŞEKİLLER: Bazı limit hesaplarında $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 . \infty$, 0° , ∞° , 1^∞ biçimindeki ifadelerle karşılaşılabilir. Bunlara **"limitte belirsiz şekiller"** denir. Bu belirsiz şekillerin bir kısmını ileriki derslerimizde inceleyeceğiz.

I) $\frac{0}{0}$ **Belirsiz şekli:**

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ ise $\frac{0}{0}$ belirsiz şekliyle karşılaşılır. Bu durumda eğer $f(x)$ ve $g(x)$ polinom iseler kesir $(x - a)$ ile kısaltılarak limit bulunabilir.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a) f_1(x)}{(x - a) g_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \text{ olur.}$$

Yine $\frac{0}{0}$ belirsizliği varsa $(x - a)$ ile yeniden kısaltma yapılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1: $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = ?$

Çözümü: $x \to -2$ için pay ve paydanın limitleri sıfır olduğundan bu limitte $\frac{0}{0}$ belirsiz şekli vardır. Yukarıda anlatılan yol izlenerek

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = ?$

Çözümü: Bu limitte de $\frac{0}{0}$ belirsiz şekli vardır.

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^3 + x^2 - 5x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(2x - 2)}{(x - 1)(x^2 + 2x - 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{x^2 + 2x - 3}$$

dür. $\frac{0}{0}$ belirsizliği devam ettiğinden kesri $(x - 1)$ ile bir kez daha kısaltarak

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)} = \lim_{x \to 1} \frac{2}{x + 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

ÖRNEK 3: $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{|x^2 - 9|} = ?$

Çözümü:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x - 3}{|x^2 - 9|} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x - 3}{(x^2 - 9)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x - 3}{|x^2 - 9|} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x - 3}{-(x^2 - 9)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x - 3}{-(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{-(x + 3)} = -\frac{1}{6}$$

Sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan $x \to 3$ için limit yoktur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 4: $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x - 4}{x - \sqrt{x+2}} = ?$

Çözümü: Limit $\dfrac{0}{0}$ belirsiz şeklindedir. Burada önce paydanın kökten kurtarılması (rasyonel yapılması) gerekir.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - 4}{x - \sqrt{x+2}} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x-4)(x + \sqrt{x+2})}{(x - \sqrt{x+2})(x + \sqrt{x+2})}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(2x-4)(x + \sqrt{x+2})}{x^2 - (x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x-4)(x + \sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x + \sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x + \sqrt{x+2})}{x+1} = \frac{2.(2+2)}{2+1} = \frac{8}{3}$$

2.9. BİR P (x) POLİNOMUNUN $X \to \infty$ İÇİN LİMİTİ

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$ polinomunda katsayılardan bir kısmı pozitif, bir kısmı negatif olabileceğinden $x \to +\infty$ (veya $x \to -\infty$) için bu polinomun limiti genel olarak $\infty - \infty$ belirsiz şeklinde olur. Polinom x^n parantezine alınarak

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{a_n}{x^n} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Parantez içindeki paydasında x in çeşitli kuvvetleri olan kesirlerin hepsi $x \to \pm\infty$ için sıfıra gideceğinden

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_0x^n = +\infty \text{ veya } -\infty$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = \lim x^2 = +\infty$$

ÖRNEK 2:

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^3 + 5x^2 - 3) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3) = 2 \cdot \lim_{x \to -\infty} x^3 = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

ÖRNEK 3:

$$\lim_{x \to +\infty} (-5x^4 + x^3 - 2x^2 + 1) = \lim_{x \to +\infty} (-5x^4) = -\infty$$

II) $\frac{\infty}{\infty}$ **BELİRSİZ ŞEKLİ** $a \in \bar{R}$ olmak üzere

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (veya $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$) ve $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ (veya $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$) oluyorsa bu limitte $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır denir.

1. tip: $f(x)$ ve $g(x)$ polinom iseler:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + b_m}$$

fonksiyonu $x \to \pm\infty$ için $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz şeklini alır.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + b_m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}\right)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m}$$ yazılabilir. Buradan

a) $n > m$ ise $\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} = +\infty$ veya $-\infty$

b) $n = m$ ise $\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

c) $n < m$ ise $\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_o}{b_o x^{m-n}} = 0$

bulunur.

ÖRNEK 1: $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+2}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2} = +\infty$

ÖRNEK 2: $\lim_{x\to-\infty} \frac{-5x^2+x+3}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x^2}{2x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{2x} = 0$

ÖRNEK 3: $\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^2-1)(2x-1)^2}{(2x+5)(3-x)^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 \cdot 4x^2}{2x \cdot (-x^3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{-2} = -6$

2. tip: f(x) ve g(x) den en az biri irrasyonel ise pay ve paydada kök içi ve dışı x in en büyük üslü teriminin parantezine alınır. Gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra limit bulunur.

Uyarı: x in kök içindeki çarpanı kök dışına çıkartılırken aşağıdaki formüllerden yararlanılır.

n tek ise $\sqrt[n]{x^n} = x$

n çift ise $\sqrt[n]{x^n} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

ÖRNEK 4: $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{4x+\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{4x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{4x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-5}{4x+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\left(4+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4+\sqrt{1}} = \frac{3}{5}$$

Not: Aynı fonksiyonun $x \to -\infty$ için limiti bulunurken $x \to -\infty$ için $|x| = -x$ olduğu düşünülerek

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{4x+\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-5}{4x-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\left(4-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{4-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{3}{4-1} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 5: $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt[3]{x^3+8x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-|x|\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^2}}}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+x\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\sqrt[3]{1+\frac{8}{x^2}}} = \frac{1+2}{\sqrt[3]{1}} = 3$$

III. $0 \cdot \infty$ VE $\infty - \infty$ BELİRSİZ ŞEKİLLERİ

Bu belirsiz şekiller kolaylıkla $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ şekline getirilebilir. Sonra önceki konularda anlatıldığı şekilde limit bulunur.

ÖRNEK 1: $\lim_{x\to3}\left[\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x-3}\right)\cdot\frac{1}{x^2-9}\right] = ?$

Çözümü: Bu limit $0 \cdot \infty$ belirsiz şeklindedir. Paydaların ortak yapılmasıyla $\frac{0}{0}$ şekline getirilerek limit bulunabilir.

$$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3}\left[\frac{2x-3-x}{x(2x-3)}\cdot\frac{1}{x^2-9}\right] = \lim_{x\to3}\frac{x-3}{x(2x-3)(x^2-9)} =$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x(2x-3)(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to3}\frac{1}{x(2x-3)(x+3)} = \frac{1}{3\cdot3\cdot6} = \frac{1}{54}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2: $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x} \right) = ?$

Çözümü: Bu limitte $\infty - \infty$ belirsizlik şekli vardır. Eşleniği ile çarpılıp bölünürse $\frac{\infty}{\infty}$ şekline dönüşmüş olur.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 2x} \right)\left(x + \sqrt{x^2 - 2x} \right)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$$

dir. Bu limit ise $\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz şeklindedir. Buna göre

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x + |x| \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x + x\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}} \right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} = \frac{2}{1+1} = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Not: Bu tür limitler için ispatsız vereceğimiz aşağıdaki teoremden yararlanılabilir.

Teorem:

1°) $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 + px + q} = \lim_{x \to \pm\infty} \left| x + \frac{p}{2} \right| = \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} (x + \frac{p}{2}) \\ \lim_{x \to -\infty} (-x - \frac{p}{2}) \end{cases}$

2°) $a > 0$ ise $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right| \right)$ dır.

ÖRNEK 1: $\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \left| x - \frac{2}{2} \right| \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x - (x - 1) \right)$

$$= \lim_{x \to +\infty} (1) = 1$$

ÖRNEK 2: $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 2} + x + 3 \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\left| x + \frac{1}{2} \right| + x + 3 \right)$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(-x - \frac{1}{2} + x + 3 \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 3: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x+3}}{2x-1-\sqrt{4x^2+x-3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x| - |x-2|}{2x-1-\sqrt{4}\left|x+\frac{1}{8}\right|} =$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x)-(x-2)}{2x-1-2\left(x+\frac{1}{8}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{-1-\frac{1}{4}} = -\frac{8}{5}$$

2.10. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Teorem: a) $\lim_{x \to a} (\text{Sin } x) = \text{Sin } a$

b) $\lim_{x \to a} (\text{Cos } x) = \text{Cos } a$

c) $\lim_{x \to a} (\text{Tan } x) = \text{Tan } a \quad (a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \ k \in Z)$

d) $\lim_{x \to a} (\text{Cot } x) = \text{Cot } a \quad (a \neq k\pi, \ k \in Z)$

İspat:

$\lim_{x \to a} (\text{Sin } x) = \text{Sin a}$ olduğunu ispatlayalım.

$\forall x \in R$ için $\quad 0 \leq |\text{Sin } x - \text{Sin } a| \leq |x - a|$

olduğu trigonometriden bilinir.

$\lim_{x \to a} |x - a| = 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizliğe göre

$\lim_{x \to a} |\text{Sin } x - \text{Sin } a| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} (\text{Sin } x - \text{Sin } a) = 0$

yazılabilir. Buradan da

$$\lim_{x \to a} (\text{Sin } x) - \lim_{x \to a} (\text{Sin } a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \text{Sin } x = \lim_{x \to a} \text{Sin } a = \text{Sin } a$$

bulunur.

$\lim_{x \to a} (\text{Cos } x) = \text{Cos a}$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$$\lim_{x \to a} (\text{Tan } x) = \lim_{x \to a} \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \frac{\lim_{x \to a} \text{Sin } x}{\lim_{x \to a} \text{Cos } x} = \frac{\text{Sin a}}{\text{Cos a}} = \text{Tana} \quad (a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z)$$

dır.

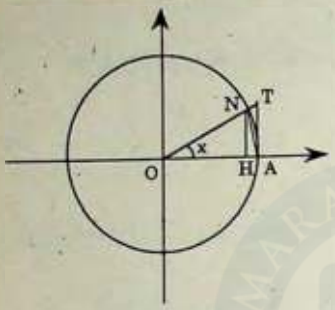
ÖRNEK 1: $\lim_{x \to 0} \text{Sin } x = \text{Sin } 0 = 0$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (\text{Tan } x) = \text{Tan } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

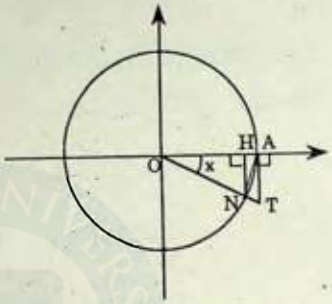
Teorem: $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{Sin}x} = 1$ dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İspatı: $\lim_{x \to 0} (\text{Sin } x) = 0$ olduğundan $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{Sin } x}$ limiti $\frac{0}{0}$ belirsiz şeklindedir.



$(0 < x < \frac{\pi}{2})$



$(-\frac{\pi}{2} < x < 0)$

(31. Şekil)

Birim çemberde $s(\overset{\frown}{AON}) = x$ radyan $(0 < x < \frac{\pi}{2}$ veya $-\frac{\pi}{2} < x < 0)$ açısını alalım (31. şekil). Şekle göre

$\overset{\Delta}{OAN}$ alanı $<$ OAN daire kesmesi alanı $<$ $\overset{\Delta}{OAT}$ alanı

yazılabilir. Buradan

$$\frac{1}{2} |OA| \,.\, |HN| < \frac{1}{2} |x| .1 < \frac{1}{2} |OA| \,.\, |AT|$$

$$\Rightarrow |\text{Sin } x| < |x| < 1 \,.\, |\text{Tan } x|$$

olur. ($|OA| = 1$, $|HN| = |\text{Sin}x|$, $|AT| = |\text{Tan } x|$ dir)

Bütün terimler $|\text{Sin } x|$ ile bölünürse

$$1 < \left| \frac{x}{\text{Sin } x} \right| < \left| \frac{1}{\text{Cos } x} \right|$$

bulunur. Her iki durumda da $(0 < x < \frac{\pi}{2}$ veya $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ durumları)

$\frac{x}{\text{Sin } x} > 0$ ve $\frac{1}{\text{Cos } x} > 0$ olduğundan eşitsizlik

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$1 < \frac{x}{\text{Sin } x} < \frac{1}{\text{Cos } x}$$

şeklini alır. Buradan $x \to 0$ ($x \to 0^+$ veya $x \to 0^-$) için limite geçilirse

$\lim_{x \to 0} (\text{Cos } x) = \text{Cos } 0 = 1$ ve $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\text{Cos } x} = \frac{1}{1} = 1$ olduğundan $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{Sin } x} = 1$

bulunur.

Not:

$1 < \frac{x}{\text{Sin } x} < \frac{1}{\text{Cos } x}$ den $1 > \frac{\text{Sin } x}{x} > \text{Cos } x$ yazılabilir. Buradan

$x \to 0$ için limite geçilirse

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } x}{x} = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 2: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } 3x}{5x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\text{Sin } 3x}{3x} \right) = \frac{3}{5} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$

$$= \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

ÖRNEK 3: $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } \frac{x}{2}}{\text{Sin } \frac{3x}{4}} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{Sin } \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \frac{\frac{3x}{4}}{\text{Sin } \frac{3x}{4}} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} \right)$

$$= \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3x}{4}}{\text{Sin } \frac{3x}{4}} = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Not: a ile b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } ax}{bx} = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{\text{Sin } bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } ax}{\text{Sin } bx} = \frac{a}{b}$$

dir.

ÖRNEK 4:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{\operatorname{Sin} x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{Sin} 3x}{\operatorname{Cos} 3x} \frac{1}{\operatorname{Sin} x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{Sin} 3x}{\operatorname{Sin} x} \frac{1}{\operatorname{Cos} 3x} \right) = \frac{3}{1} \cdot 1 = 3$$

ÖRNEK 5:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \operatorname{Sin} x}{1 - \operatorname{Cos} x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x \cdot 2 \operatorname{Sin} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{Cos} \frac{x}{2}}{2 \operatorname{Sin}^2 \frac{x}{2}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{Sin} \frac{x}{2}} \cdot \operatorname{Cos} \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot 1 = 2$$

ÖRNEK 6:

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{Cos} x - \operatorname{Cos} a}{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Sin} a} = \lim_{x \to a} \frac{-2 \operatorname{Sin} \frac{x+a}{2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{x-a}{2}}{2 \operatorname{Cos} \frac{x+a}{2} \cdot \operatorname{Sin} \frac{x-a}{2}}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(-\operatorname{Tan} \frac{x+a}{2} \right) = -\operatorname{Tan} a$$

ÖRNEK 7: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{Sec} x - \operatorname{Tan} x) = ?$ $\quad (\infty - \infty)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{Sec} x - \operatorname{Tan} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x (1 + \operatorname{Sin} x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Cos} x (1 + \operatorname{Sin} x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Cos} x}{1 + \operatorname{Sin} x} = \frac{0}{2} = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 8: $\lim_{x \to 0} \frac{[\![\text{Sin } x]\!]}{x} = ?$

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow -1 < \text{Sin } x < 0 \Rightarrow [\![\text{Sin } x]\!] = -1$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \text{Sin } x < 1 \Rightarrow [\![\text{Sin } x]\!] = 0$$

dır. Buna göre

$$\frac{[\![\text{Sin } x]\!]}{x} = \begin{cases} -\frac{1}{x} & , \quad -\frac{\pi}{2} < x < 0 \quad \text{ise} \\ \frac{0}{x} = 0 & , \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{ise} \end{cases}$$

olur. Buradan

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{[\![\text{Sin } x]\!]}{x} = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{[\![\text{Sin } x]\!]}{x} = \lim_{x \to 0^+} (0) = 0$$

bulunur. $\lim_{x \to 0} \frac{[\![\text{Sin } x]\!]}{x}$ yoktur

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki limitleri bulunuz.

1) $\lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x^2 + 1}$ $\left(\frac{3}{2}\right)$

2) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ (6)

3) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$ (0)

4) $\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 5}{x - 2}$ $(+\infty)$

5) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{4 - x^2}$ $(-\infty)$

6) $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 5 & , \ x < -1 \text{ ise} \\ -x + 3 & , \ x \geq -1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunda $\lim_{x \to -1} y = ?$ (4)

7) $\lim_{x \to 4^-} \left([\![x + 2]\!] + [\![x]\!] \right)$ (8)

8) $\lim_{x \to 1^+} \left([\![x - 1]\!] + [\![1 - x]\!] \right)$ (-1)

9) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{[\![x^2]\!] - 1}{x - 1}$ $(+\infty)$

10) $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{[\![x^2]\!] - 1}{x - 1}$ (0)

11) $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{[\![2x]\!]}{\operatorname{sgn}(x - 3)}$ (6)

12) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\![\operatorname{Cos} x]\!]$ (yoktur)

13) $\lim_{x \to 3^-} \left[\operatorname{sgn}(x - 3) + [\![x]\!] \right]$ (1)

14) $\lim_{x \to -2^-} \dfrac{\operatorname{sgn}(x + 2)}{|x + 2|}$ $(-\infty)$

15) $\lim_{x \to \pi} \dfrac{[\![x - 3]\!]}{\operatorname{Sin} x}$ (0)

16) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + x - 10}{x^3 - 8}$ $(\frac{3}{4})$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

17) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ (2x)

18) $\lim_{x \to 5^+} \frac{-|x^2 - 11x + 30|}{x^2 - 25}$ $(\frac{1}{10})$

19) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ ise

$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = ?$ (-5)

20) $\lim_{x \to 3^-} \frac{|3x - 9|}{|x^2 - 1| - 8}$ $(-\frac{1}{2})$

21) $\lim_{x \to 1} \left(x^2 + 1 + \frac{|x-1|}{x-1} \right)$ (yoktur)

22) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - \sqrt{2x-4}}$ (-32)

23) $\lim_{x \to -1} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x^3 + 1}$ $(\frac{1}{2})$

24) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ olduğuna göre

$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = ?$ $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

25) $\lim_{x \to a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ (3a)

26) $\lim_{x \to 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x+5} - 3}$ $(-\frac{3}{2})$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

27) $y = \dfrac{ax + \sqrt{x^2 + 12}}{\sqrt{2 - x} - 2}$ fonksiyonunda $\lim_{x \to -2} y \in R$ olduğuna göre a ve $\lim_{x \to -2} y$ yi bulunuz. $\left(a = 2 \ , \ \lim_{x \to -2} y = -6\right)$

28) $y = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 16|}{x - 4} & , \ x < 4 \text{ ise} \\ \dfrac{2x - 8}{\sqrt{x} - 2} & , \ x > 4 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $\lim_{x \to 4} y = ?$ (yoktur)

29) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{\sqrt[3]{x + 1}}$ (3)

30) $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{3x + 2} - \sqrt[3]{x + 6}}{x - 2}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$

31) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x(3x - 2)}{2x^3 + 1}$ (0)

32) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2(3x - 1)^2}{(x - 1)(3 - x)^3}$ (-18)

33) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2(1 - 2x)^3}{(x + 3)^4}$ $(-\infty)$

34) $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n}{n^2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

35) $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2}{n^3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

36) $y = \dfrac{x - 2 + \sqrt{x^2 + 1}}{2x + 1}$ fonksiyonunda

a) $\lim_{x \to +\infty} y = ?$ (1)

b) $\lim_{x \to -\infty} y = ?$ (0)

37) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2 + 1}}{2x + \sqrt[3]{x^3 - 2}}$ fonksiyonunda

a) $\lim_{x \to +\infty} y = ?$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

b) $\lim_{x \to -\infty} y = ?$ $\left(-\frac{2}{3}\right)$

38) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ (1)

39) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x - 1}\right)$ (0)

40) $y = \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$ fonksiyonunda

a) $\lim_{x \to +\infty} y = ?$ (1)

b) $\lim_{x \to -\infty} y = ?$ (-1)

41) $y = \sqrt{x^2 + x + 2} + x$ fonksiyonunda

a) $\lim_{x \to +\infty} y = ?$ $(+\infty)$

b) $\lim_{x \to -\infty} y = ?$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

42) $\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + x + 2} \right)$ $\left(-\frac{1}{4}\right)$

43) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 3} + 2x}$ (-2)

44) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x+1} \right)$ (2)

45) $\lim_{x \to 1} \left(\sqrt{x^3} - \sqrt{x^2 + 2x - 2} \right) \frac{x}{x-1}$ $\left(-\frac{1}{2}\right)$

46) $\lim_{x \to -\infty} \left(ax + b + \frac{x^2 - 2x}{x+1} \right) = 1$ ise

a ve b kaçtır? (a=-1 , b=4)

47) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\sin 2x}$ (0)

48) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x + \tan 2x}{x}$ (5)

49) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x}$ (1)

50) $\lim_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{x}$ (yoktur)

51) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{2} \sin x}{\cos 2x}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

52) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

53) $\lim_{h \to 0} \frac{\text{Sin}(x + h) - \text{Sin}\, x}{h}$ (Cos x)

54) $\lim_{x \to \pi} \frac{\text{Tan}\, x + \text{Sin}\, x}{1 - \text{Cos}\, 2x}$ (0)

55) $\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{\text{Cos}\, 2x}{1 + \text{Tan}\, x}$ (1)

56) $\lim_{x \to 2} \frac{\text{Sin}(2 - x)}{4 - x^2}$ $(\frac{1}{4})$

57) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin}\, x - \text{Tan}\, x}{x^3}$ $(-\frac{1}{2})$

58) $\lim_{x \to a} \frac{x - a}{\text{Cos}\, x - \text{Cos}\, a}$ (-Coseca)

59) $\lim_{x \to 0} \frac{2x + \text{Sin}\, 3x}{x^2 + \text{Sin}\, 4x}$ $(\frac{5}{4})$

60) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \text{Sin}\, x) \,.\, \text{Tan}^2 x$ $(\frac{1}{2})$

61) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \,.\, \text{Sin}^2 \frac{1}{x} \right)$ (1)

62) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{Tan}\, x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ (2)

63) $\lim_{x \to \pi} (1 + \text{Cos}\, x) \,.\, \text{Cot}\, x$ (0)

64) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{Sin}(\text{Cos}\, x)}{\frac{\pi}{2} - x}$ (1)

65) $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \text{Cos}x)^n}{\left(\sqrt{1 - x} - 1\right)^{2n}}$ (2^n)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

SÜREKLİLİK

3.1. TANIM: $A \subset R$ olmak üzere bir $f : A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer bir $a \in A$ için

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ise **f fonksiyonu x = a noktasında süreklidir** denir. Eğer fonksiyon x = a noktasında sürekli değilse **f fonksiyonu x = a noktasında süreksizdir** denir.

Yukarıdaki tanıma göre bir f (x) fonksiyonu bir x = a noktasında aşağıdaki durumlarda süreksiz olur.

1°) Fonksiyon x = a da tanımlı değilse. Yani f (a) yoksa,

2°) $\lim_{x \to a} f(x)$ yoksa,

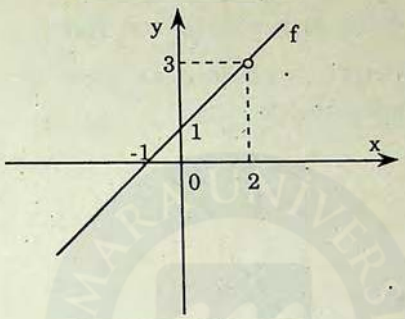
3°) f (a) var, $\lim_{x \to a} f(x)$ var ama $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ ise.

f fonksiyonu bir aralığın her noktasında sürekli ise bu aralıkta süreklidir denir. Aralığın en az bir noktasında süreksiz olan fonksiyon bu aralıkta süreksizdir denir.

ÖRNEK 1: Katsayıları reel sayılar olan $f : R \to R$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n$ şeklindeki fonksiyonlarda (polinomlar) $\forall a \in R$ için $\lim_{x \to a} f(x) = a_0a^n + a_1a^{n-1} + a_2 a^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = f(a)$ olduğundan bu tür fonksiyonlar $\forall a \in R$ noktasında (yani R de) süreklidirler.

Örneğin: $y = 2x - 5$, $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 4$, $y = x^3 - x$ fonksiyonları R de sürekli fonksiyonlardır.

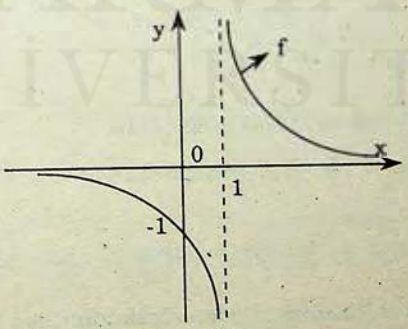
ÖRNEK 2: $f : R - \{2\} \to R$, $f(x) = x + \dfrac{x-2}{x-2}$ fonksiyonu $x = 2$ için tanımsız olduğundan bu noktada süreksizdir. $x \neq 2$ için $f(x) = x + 1$ olup buradan $x \neq 2$ için f nin sürekli olduğu anlaşılır (33. şekil)



(33. şekil)

Not: Bu örnekte $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$ olduğundan $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ tür. Ancak $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ eşitliği sağlanamadığından f, $x = 2$ de süreksizdir.

ÖRNEK 3: $f : R - \{1\} \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ fonksiyonu $x = 1$ de tanımsızdır ve $\lim_{x \to 1} f(x)$ yoktur. $\forall a \in R - \{1\}$ sayısı için f tanımlıdır ve $\lim_{x \to a} f(x) = \dfrac{1}{a-1} = f(a)$ dır. Buna göre $x = 1$ dışındaki bütün noktalarda f süreklidir. (34. şekil)



(34. şekil)

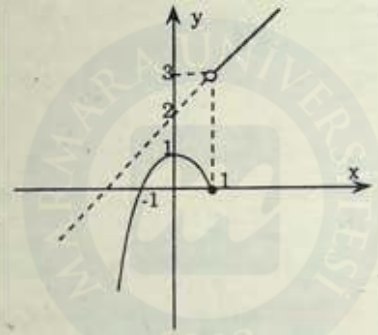
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 4:

$$f: R \to R \ , \ f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 \ , & x \leq 1 \text{ ise} \\ x + 2 \ , & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunda $f(1) = 0$ dır. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x^2 + 1) = 0$ ve $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x + 2) = 3$ olduğundan $\lim_{x \to 1} f(x)$ yoktur.

Buna göre fonksiyon $x = 1$ noktasında süreksizdir. $x = 1$ dışındaki bütün noktalarda f süreklidir. (35. şekil)



(35. şekil)

ÖRNEK 5: $f: R \to R \ , f(x) = [\,|x|\,]$ fonksiyonu R nin tamsayı noktalarında süreksizdir. Gerçekten $n \in Z$ ise $\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\,|x|\,] = n$ ve $\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\,|x|\,] = n - 1$ olup $\lim_{x \to n} f(x)$ yoktur. Bu nedenle $n \in Z$ noktalarında f süreksizdir. $n \in Z$ ve $n < a < n + 1$ ise (yani $a \in R$ ama $a \notin Z$) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = n$ olacağından f , R nin tamsayı olmayan noktalarında süreklidir.

3.2. SAĞDAN VE SOLDAN SÜREKLİLİK

$A \subset R$ olmak üzere bir $f: A \to R$ fonksiyonunu düşünelim. $a \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ise **f fonksiyonu x = a noktasında sağdan süreklidir** denir. Eğer

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

ise f **fonksiyonu x = a noktasında soldan süreklidir** denir.

Bir f fonksiyonunun x = a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, fonksiyonun bu noktada hem sağdan hem de soldan sürekli olmasıdır.

ÖRNEK 1: $f : [-1, 2) \to R$, $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonunun x = 0 ve x = 1 noktalarında sağdan ve soldan süreklilik durumunu inceleyiniz.

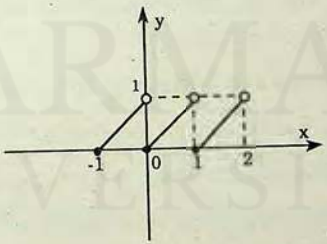
Çözümü: Tam değer tanımına göre

$$f(x) = \begin{cases} x - (-1) = x + 1 & , \ -1 \le x < 0 \text{ ise} \\ x - (0) = x & , \ 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ x - (1) = x - 1 & , \ 1 \le x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan f (0) = 0 ve f (1) = 0 dır.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1 \neq f(0)$ ve $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0 = f(0)$ olduğundan fonksiyon x = 0 noktasında soldan süreksiz, sağdan süreklidir. Benzer şekilde $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \neq f(1)$ ve $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 = f(1)$ olduğundan f, x = 1 noktasında da soldan süreksiz sağdan süreklidir.

(36. şekil)



(36. şekil)

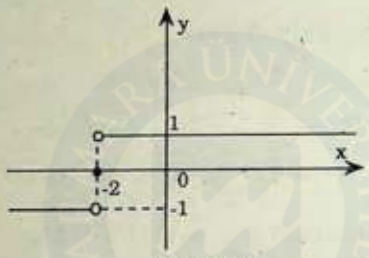
ÖRNEK 2: f (x) = sgn (x + 2) fonksiyonunun x = -2 noktasında hem sağdan hem de soldan süreksiz olduğunu gösteriniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \quad x < -2 \text{ ise} \\ 0 & , \quad x = -2 \text{ ise} \\ 1 & , \quad x > -2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $f(-2) = 0$ dır. $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -1 \neq f(-2)$ ve $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 1 \neq f(-2)$ olduğundan f , x = -2 noktasında hem soldan hem de sağdan süreksizdir. (37. şekil)



(37. şekil)

3.3. SÜREKLİLİKLE İLGİLİ TEOREMLER

$A \subset R$ olmak üzere $f : A \to R$ ve $g : A \to R$ fonksiyonları bir $a \in A$ noktasında sürekli iseler:

1°) $f + g$ ve $f - g$ fonksiyonları da $a \in A$ noktasında süreklidirler.

2°) $k.f$ ve $k.g$ ($k \in R$ ve sabit) fonksiyonları da $a \in A$ noktasında süreklidirler.

3°) $f.g$ fonksiyonu da $a \in A$ noktasında süreklidir.

4°) $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $a \in A$ noktasında süreklidir.

5°) $f(a) \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ fonksiyonu da $a \in A$ noktasında süreklidir.

6°) $|f|$ ve $|g|$ fonksiyonları da $a \in A$ noktasında süreklidirler.

Örnek olarak 1. şıkkı ispatlayalım.

f ve g fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli olduklarından $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ve $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$ dır. Limit teoremlerine göre

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \pm g(a)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Bu da $f \pm g$ fonksiyonunun $a \in A$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.

ÖRNEK: Aşağıdaki fonksiyonların süreklilik aralıklarını bulunuz.

a) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4}$ b) $y = |x^2 + 3x - 5|$ c) $y = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$

Çözümü:

a) $f(x) = x - 1$ ve $g(x) = x^2 + 4$ fonksiyonları R de süreklidirler. Diğer taraftan $\forall a \in R$ için $g(a) \neq 0$ dır. Buna göre $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4}$ fonksiyonu R de süreklidir.

b) $f(x) = x^2 + 3x - 5$ fonksiyonu R de sürekli olduğundan $y = |f(x)| = |x^2 + 3x - 5|$ fonksiyonu da R de süreklidir.

c) $f(x) = x$ fonksiyonu R de süreklidir. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu ise

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

aralığında süreklidir. Buna göre $y = f(x) \cdot g(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında sürekli olur.

3.4 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN SÜREKLİLİĞİ

$f(x) = \text{Sin } x$ fonksiyonunda $\forall a \in R$ için $\lim_{x \to a} (\text{Sin } x) = \text{Sin } a = f(a)$ olduğundan bu fonksiyon R de süreklidir. $f(x) = \text{Cos } x$ fonksiyonu da $\forall a \in R$ için $\lim_{x \to a} (\text{Cos } x) = \text{Cos } a$ olduğundan R de süreklidir. Süreklilik teoremlerine göre

$$f(x) = \text{Tan } x = \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} \quad \text{ve} \quad f(x) = \text{Cot } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{Sin } x}$$

fonksiyonları yalnızca paydanın sıfır olduğu noktalarda süreksizdirler. Buna göre tanjant fonksiyonu $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$ ve kotanjant fonksiyonu da $x = k\pi$ $(k \in Z)$ noktalarında süreksizdirler.

ÖRNEK : Aşağıdaki fonksiyonların varsa süreksiz olduğu noktaları bulunuz.

a) $f(x) = x^2 \cdot \text{Sin}x$ b) $f(x) = \dfrac{2}{\text{Cos } x - 1}$ c) $f(x) = [\![\text{Sin } x]\!]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü:

a) $g(x) = x^2$ ve $h(x) = \text{Sin } x$ fonksiyonları R de sürekli olduklarından $f(x) = x^2 . \text{Sin } x$ fonksiyonu da R de süreklidir. Süreksizlik noktası yoktur.

b) $f(x) \quad \frac{2}{\text{Cos } x - 1}$ fonksiyonunun payı ve paydası R de sürekli fonksiyonlar olduğundan bu fonksiyon yalnızca paydanın sıfır olduğu noktalarda süreksizdir.

$\text{Cos } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{Cos } x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$, $(k \in Z)$ bulunur. Buna göre fonksiyon $x = 2k\pi$ $(k \in Z)$ noktalarında süreksizdir.

c) $f(x) = [\![\text{Sin } x]\!]$ fonksiyonunun (Sin x) i tamsayı (-1, 0 veya +1) yapan $x \in R$ noktalarında süreksizliği olabilir.

$$\text{Sin } x = 0 \Rightarrow x = k\pi ,$$

$$\text{Sin } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi ,$$

$$\text{Sin } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad , \quad (k \in Z)$$

dir.Bunlardan $k\pi$ ve $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ noktalarında $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ eşitliği kurulamaz. Bu nedenle f, bu noktalarda süreksizdir. [Örneğin k =0 alınırsa $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ ve $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ olduğundan $\lim_{x \to 0} f(x)$ yoktur. $a = \frac{\pi}{2}$ için ise $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 0 \neq f(\frac{\pi}{2})$ dir. Çünkü $f(\frac{\pi}{2}) = \text{Sin } \frac{\pi}{2} = 1$ dir.]

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ noktalarında ise $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ olduğu gösterjlebilir.

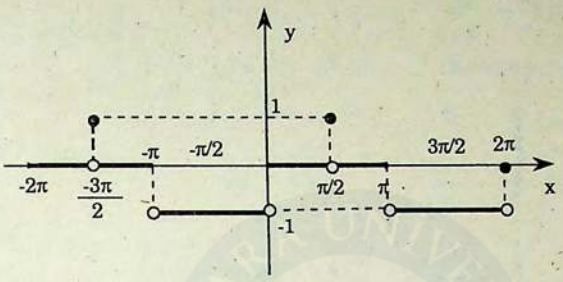
[Örneğin $a = \frac{3\pi}{2}$ için $\lim_{x \to (\frac{3\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \to (\frac{3\pi}{2})^+} f(x) = -1 = f(\frac{3\pi}{2})$ dir.] Bu nedenle f,

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ noktalarında süreklidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Sonuç olarak f, $\{ x \mid x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in Z\}$ noktalarında süreksizdir.

38. şekilde f nin $[-2\pi , 2\pi]$ aralığındaki grafiği çizilmiştir.



(38. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

ALIŞTIRMALAR

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki fonksiyonların karşılarındaki noktalarda süreksiz olduklarını gösteriniz ve grafiklerini çiziniz.

1) $f(x) = x^2 + \dfrac{2x}{|x|}$ $(x = 0)$

2) $f(x) = \text{sgn}(x - 2)$ $(x = 2)$

3) $f(x) = \begin{cases} 2 & , x = -1 \text{ ise} \\ \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & , x \neq -1 \text{ ise} \end{cases}$ $(x = -1)$

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 1|}{x - 1} & , x \neq 1 \text{ ise} \\ 0 & , x = 1 \text{ ise} \end{cases}$ $(x = 1)$

5) $f(x) = \text{Sgn}(4x^2 - 9) + \text{Sgn } x$ $\left(x = 0 , \dfrac{3}{2} , -\dfrac{3}{2}\right)$

6) $f : [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = [\![\text{Cos } x]\!]$ $\left(x = 0 , \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Aşağıdaki fonksiyonların sürekli oldukları en geniş kümeyi bulunuz.

7) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (R)

8) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x(2x + 3)(x^2 + 3)}$ $R - \left\{0 , -\dfrac{3}{2}\right\}$

9) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ $R - \{2 , -2\}$

10) $f(x) \begin{cases} -x^2 + x & , x \leq 1 \text{ ise} \\ x - 1 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$ (R)

11) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}, & x \neq 9 \text{ ise} \\ 6, & x = 9 \end{cases}$ $[0, +\infty)$

12) $f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 2 \text{ ise} \\ \dfrac{6}{x^2-1}, & |x| \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$ (R)

13) $f(x) = \sqrt{2-x}$ $(-\infty, 2]$

14) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ (R)

15) $f(x) = [\![x-1]\!]$ R - Z

16) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x+12}, & x \leq 2 \text{ ise} \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}, & x > 2 \text{ ise} \end{cases}$ R - {-6}

17) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-1}{2}, & x < -1 \text{ ise} \\ 3, & -1 \leq x \leq 2 \text{ ise} \\ \dfrac{x-8}{x^2-5x+4}, & 2 < x \text{ ise} \end{cases}$ R - {-1, 4}

18) $f(x) = \dfrac{\text{Sin } x}{2\,\text{Cos}^2 x - 1}$ $R - \{x : x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\}$

19) $f(x) = \text{Sgn}(\text{Sin } x) + [\![2x]\!]$ $R - \{x : x = k\pi \vee x = \dfrac{k}{2}, k \in Z\}$

20) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2mx - m + 6}$ fonksiyonunun R de sürekli olması için m ne olmalıdır.

$(-3 < m < 2)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

21) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + 10}{x - 2} & , \ x < 2 \text{ ise} \\ bx - 7 & , \ x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 2$ de sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

$(a = -5 \quad , \quad b = 1)$

22) $f(x) = \begin{cases} a : \text{Cos } x, & x \leq -\dfrac{\pi}{3} \text{ ise} \\ \text{Sin}\dfrac{x}{2} + b, & -\dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{3} \text{ ise} \\ \text{Cos } x - 1, & \dfrac{\pi}{3} \leq x \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun R de sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

$(a = -3 \ , \ b = -1)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

TÜREV

4.1. TANIM: $A \subset R$ olmak üzere bir $f: A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer bir $a \in A$ için

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti varsa bu limite **fonksiyonun x = a noktasındaki türevi** denir ve $f'(a)$ veya $\frac{df}{dx}(a)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

dır. $h \neq 0$ olmak üzere $x = a + h$ konursa

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to o} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

şeklinde de yazılabilir.

$f: A \to R$ fonksiyonu $\forall x \in A$ noktasında türevli ise **f fonksiyonu A kümesinde türevlidir** denir.

ÖRNEK 1: $f: R \to R$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = -1$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözümü: $$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

ÖRNEK 2: $f: R^+ \cup \{o\} \to R$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözümü:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4}$$

4.2. SAĞDAN VE SOLDAN TÜREV: $x = a$ noktasında tanımlı bir $y = f(x)$ fonksiyonunda $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa buna **f nin x = a noktasındaki sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir. Eğer $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ limiti varsa buna da **f nin x = a noktasındaki soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir.

f nin x = a noktasında türevli olması için gerek ve yeter koşul, bu noktada sağdan ve soldan türevlerinin var ve eşit olmasıdır.

ÖRNEK. $f: R \to R$, $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki sağdan ve soldan türevlerini bulunuz. f, $x = 2$ noktasında türevli midir?

Çözümü:

$$f(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & , \ x \le -2 \ \vee \ x \ge 2 \text{ ise} \\ -(x^2 - 4) & , \ -2 < x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \to 2^+} (x + 2) = 4$$

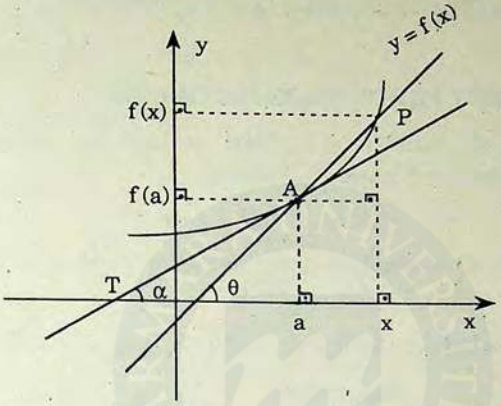
$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} (-x - 2) = -4$$

$f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan f nin x = 2 noktasında türevi yoktur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.3 TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI



(39. şekil)

y = f(x) fonksiyonu x = a noktasında türevli olsun. f nin grafiği üzerinde A (a, f(a)) ile buna yakın P (x, f(x)) noktalarını alalım. AP doğrusunun eğimi

$$m_{AP} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \text{Tan}\,\theta \qquad (1)$$

dır. Şimdi (x) i (a) ya yaklaştıralım ve $x \to a$ için her iki yanın limitini arayalım.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \qquad (2)$$

dır. (Türev tanımından). Diğer taraftan $x \to a$ için $P \to A$ olur. Yani (x), (a) ya yaklaşırken P noktası eğri üzerinde hareket ederek A ya yaklaşır. Bu durumda AP keseni de A noktası etrafında döner ve bu kesenin $x \to a$ için limiti AT teğeti olur. Buna göre AT nin eğim açısı α ise $x \to a$ için $\theta \to \alpha$ olacağından

$$\lim_{x \to a} (\text{Tan}\,\theta) = \text{Tan}\,\alpha = m_{AT} \qquad (3)$$

yazılabilir.(1), (2), (3) eşitliklerinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f'(a) = m_{AT}$$

bulunur. Buna göre f nin x = a noktasındaki türevi bu fonksiyonun grafiğine x = a apsisli noktadan çizilen teğetin eğimine eşittir.

4.4 TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ

$y = f(x)$ eğrisinin bir $A(a, f(a))$ noktasındaki teğetinin eğimi $m_T = f'(a)$ olduğundan bu teğetin denklemi

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

formülü ile bulunur. (Bir noktasının koordinatları ile eğimi bilinen doğru denklemi)

Aynı noktadaki normalin denklemi ise, normalin eğimi $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(a)}$ olduğundan

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

şeklindedir.

ÖRNEK 1: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ eğrisinin $A(1, \frac{3}{2})$ noktasındaki teğet ve normalinin denklemlerini bulunuz.

Çözümü: Türevin geometrik anlamına göre x = 1 noktasındaki teğetin eğimi $m_t = f'(1)$ dir.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) - \left(-\frac{1}{2} + 2\right)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{2}(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \left(-\frac{1}{2}(x + 1)\right) = -1$$

bulunur. Teğetin denklemi:

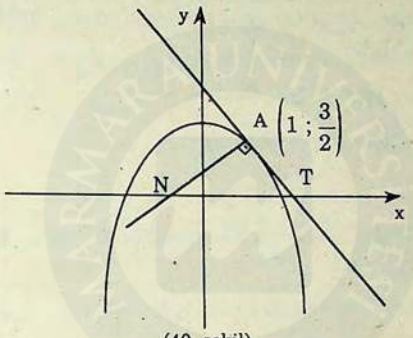
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y - \frac{3}{2} = -1\,(x-1)$ den $y = -x + \frac{5}{2}$

normalin denklemi ise

$y - \frac{3}{2} = +1\,(x-1)$ den $y = x + \frac{1}{2}$

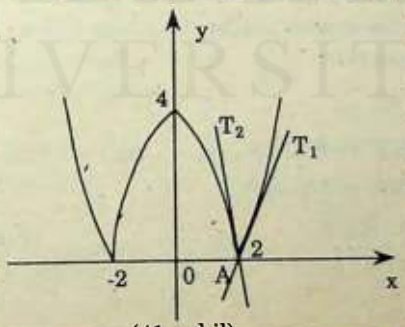
olarak bulunur. (40. şekil)



(40. şekil)

ÖRNEK 2: $f(x) = |x^2 - 4|$ eğrisinin $x = 2$ noktasındaki teğet denklemlerini bulunuz.

Çözümü: $f(2) = 0$ olduğundan değme noktası A (2, 0) dır. (41. şekilde eğrinin A noktasında T_1 ve T_2 gibi farklı iki teğeti olduğuna dikkat ediniz.)



(41. şekil)

A noktasındaki T_1 ve T_2 teğetlerinin eğimleri

$$m_{T_1} = f'(2^+) \text{ ve } m_{T_2} = f'(2^-)$$

dir. Verilen fonksiyon için $f'(2^+) = 4$ ve $f'(2^-) = -4$ olduğunu bulmuştuk. (Bak: 4.2 deki örnek) Buna göre T_1 in denklemi

$$y - 0 = 4(x - 2) \Rightarrow y = 4x - 8$$

T_2 nin denklemi ise

$$y - 0 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 8 \quad \text{bulunur.}$$

TEOREM: Bir $y = f(x)$ fonksiyonu bir $a \in R$ noktasında türevli ise bu noktada süreklidir.

İspatı: $x \neq a$ için $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$ yazılabilir.

Her iki yanın $x \to a$ için limiti alınırsa

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\right] = f'(a) \cdot 0 = 0$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

elde edilir ki bu da f fonksiyonunu $x = a$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani bir f fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli olduğu halde türevli olmayabilir. (Bak: Şekil 41 de f fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli olduğu halde $f'(2^+) \neq f'(2^-)$ olduğundan $f'(2)$ yoktur.

4.5 TÜREV FONKSİYONU: Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun sabit bir $a \in R$ noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{veya} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

idi. Bu formüllerle f nin her farklı noktadaki türevi için yeni bir limit hesabı yapmak gerekir ki bu da pratik değildir. Oysa f nin türevli olduğu her x noktası için x e bağlı bir türev formülü bulunabilir. Bunun için yukarıdaki 2. formülde a yerine x koyarak limit almak yeter. Buna göre f nin herhangibir x noktasındaki türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olur. $f'(x)$ e $f(x)$ in **türev fonksiyonu** denir. Çoğu zaman $h = \Delta x$ ve $f(x+h) - f(x) = \Delta y$ ile gösterilir. Δx e (x) in, Δy ye (y) nin değişme miktarı denir. Bu değerler yukarıda yerine konarak $f'(x)$ türevi en kısa biçimde

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

şeklinde yazılabilir. Bu türev fonksiyonu y', f' veya $\frac{dy}{dx}$ ile de gösterilebilir.

ÖRNEK. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $f'(x)$ türev fonksiyonunu ve bundan yararlanarak $f'(1)$, $f'(0)$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ değerlerini bulunuz.

Çözümü: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(x+h) = (x+h)^2$ dir.

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to o} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to o} (2x + h) = 2x$$

bulunur. Buradan kolayca

$$f'(1) = 2 \quad , \quad f'(0) = 0 \quad , \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

elde edilir.

4.6. TÜREV ALMA KURALLARI

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$f(x) = u$ ve $g(x) = v$ türevlenebilen iki fonksiyon olsun.

1°) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ ($c \in R$ ve sabit)

2°) $f(x) = a \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = a \cdot n\, x^{n-1}$ ($n \in Q$, $a \in R$ ve sabit)

3°) $y = f(x) \pm g(x) = u \pm v \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x) = u' \pm v'$

4°) $y = u \cdot v \Rightarrow y' = u'v + v'u$

5°) $y = c \cdot u \Rightarrow y' = c \cdot u'$ ($c \in R$ ve sabit)

6°) $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow y' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

7°) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

8°) $y = \sqrt[n]{u} \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

9°) $y = |u| \Rightarrow y' = u' \dfrac{u}{|u|}$ ($u \neq 0$)

10°) $y = \text{Sgn}\, u \Rightarrow y' = \begin{cases} 0 & , u \neq 0 \text{ ise} \\ \text{yoktur} & , u = 0 \text{ ise} \end{cases}$

11°) $y = [\![u]\!] \Rightarrow y' = \begin{cases} 0 & , u \notin Z \text{ ise} \\ \text{yoktur} & , u \in Z \text{ ise} \end{cases}$

dir. (Son iki formülde $f(x) = u$ sabit fonksiyon olmamalıdır.)

İspatı:

1°) $f(x) = c \Rightarrow f(x + \Delta x) = c$

$\Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

ve $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (0) = 0$ bulunur.

2°) $n \in N^+$ olsun. (Formülün $\forall n \in Q$ için doğruluğu ileride gösterilecektir.)

$$f(x) = y = a\,x^n \Rightarrow f(x + \Delta x) = y + \Delta y = a\,(x + \Delta x)^n$$
$$\Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y = a(x + \Delta x)^n - ax^n$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\,[(x + \Delta x)^n - x^n]}{\Delta x}$$

$$= \frac{a\left[(x + \Delta x) - x\right]\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + \ldots\ldots + x^{n-1}\right]}{\Delta x}$$

$$= a\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + \ldots\ldots + x^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a\left[(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + \ldots\ldots + x^{n-1}\right]$$

$$\Rightarrow y' = a\,(\underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots\ldots + x^{n-1}}_{n \text{ tane}}) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

3°) x in Δx değişimine karşılık $f(x) = u$ nun değişimi Δu, $g(x) = v$ nin değişimi Δv, $f(x) + g(x) = y$ nin değişimi de Δy olsun.

$$y = u + v \Rightarrow y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v)) \Rightarrow \Delta y = \Delta u + \Delta v$$

olur. Buradan:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$$

bulunur.

$y = u - v \Rightarrow y' = u' - v'$ türevi benzer şekilde elde edilebilir.

4°) $y = u \cdot v \Rightarrow y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$

$\Rightarrow \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

dir. $f(x) = u$ ve $g(x) = v$ fonksiyonları türevlenebilen fonksiyonlar olduklarından süreklidirler. O halde $\Delta x \to 0$ için $\Delta u \to 0$ ve $\Delta v \to 0$ olur. Buna göre

$$\Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx} = u \cdot v' + v \cdot u' = u'v + v'u$$

bulunur.

Diğer şıkların ispatları benzer şekilde yapılabilir.

ÖRNEKLER

1°) $f(x) = y = 2 \Rightarrow f'(x) = y' = 0$

2°) $y = 2x^5 \Rightarrow y' = 5 \cdot 2 \cdot x^{5-1} = 10 \cdot x^4$

3°) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4 \Rightarrow y' = (x^3)' - (3x^2)' + (2x)' + (4)'$

$\Rightarrow y' = 3x^2 - 6x + 2$

4°) $y = \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} - 5 \cdot x^{-2} + 2 \cdot x^{-3}$

$y' = -1 \cdot x^{-2} - 5 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = \frac{-1}{x^2} + \frac{10}{x^3} - \frac{6}{x^4}$

5°) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$

$y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6°) $y = x^2 (x^3 - 1) \Rightarrow y' = 2x \cdot (x^3 - 1) + 3x^2 \cdot x^2 = 5x^4 - 2x$

7°) $y = \dfrac{2 - 3x}{3 + 4x} \Rightarrow y' = \dfrac{-3(3 + 4x) - 4(2 - 3x)}{(3 + 4x)^2} = \dfrac{-17}{(3 + 4x)^2}$

8°) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 3} \Rightarrow y' = \dfrac{2x - 4}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 4x - 3}} = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}$

9°) $y = (x - a)\sqrt{x + a}$ $\quad (a \in R$ ve sabit)

$$y' = 1 \cdot \sqrt{x + a} + \frac{1}{2\sqrt{x + a}} (x - a)$$

$$y' = \frac{2(x + a) + (x - a)}{2 \cdot \sqrt{x + a}} = \frac{3x + a}{2 \cdot \sqrt{x + a}}$$

10°) $y = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow y' = \dfrac{2x \cdot \sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} (x^2 - 1)}{x^2 + 1}$

$$y' = \frac{\dfrac{2x(x^2 + 1) - x(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + 3x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

11°) $y = |x - 3| \Rightarrow y' = 1 \cdot \dfrac{x - 3}{|x - 3|} = \begin{cases} 1 & , \quad x > 3 \text{ ise} \\ -1 & , \quad x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

12°) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2) \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 2$ olduğundan $x = 1$ ve $x = 2$ noktalarında fonksiyonun türevi yoktur. Bu noktaların dışında ise $y' = 0$ dır. Yani:

$$x \in R - \{1, 2\} \text{ için } y' = 0 \text{ dır.}$$

13°) $f:(-1,2)\to R$, $f(x)=x^2([\![x]\!]+1) \Rightarrow f''(x)=?$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: Önce fonksiyonu parçalı biçimde yazalım.

$$f(x)=\begin{cases} x^2(-1+1)=0 & , \quad -1<x<0 \text{ ise} \\ x^2(0+1)=x^2 & , \quad 0\le x<1 \text{ ise} \\ x^2(1+1)=2x^2 & , \quad 1\le x<2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$f'(x)=\begin{cases} 0 & , \quad -1<x<0 \text{ ise} \\ 2x & , \quad 0\le x<1 \text{ ise} \\ 4x & , \quad 1<x<2 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. $x=1$ noktasında süreksiz olduğundan bu noktada fonksiyonun türevi yoktur.

14°) $f(x)=x^3+[\![x^2]\!]+\operatorname{sgn}(x-1)$ fonksiyonunda $x\in(1,\sqrt{2})$ için $f'(x)=?$

Çözümü: $1<x<\sqrt{2}$ için $1<x^2<2$ olduğundan $[\![x^2]\!]=1$ ve $x-1>0$ olduğundan $\operatorname{sgn}(x-1)=1$ dir. O halde $x\in(1,\sqrt{2})$ için $f(x)=x^3+1+1=x^3+2$ olur. Buradan $f'(x)=3x^2$ bulunur.

4.7. BİLEŞKE FONKSİYONUNUN TÜREVİ, TÜREVDE ZİNCİR KURALI

Teorem: $f:A\to B$ ve $g:B\to R$ fonksiyonları verilmiş olsun. ($A\subset R$ ve $B\subset R$) Eğer f fonksiyonu bir $a\in A$ noktasında, g fonksiyonu da $f(a)\in B$ noktasında türevli iseler gof fonksiyonu da a noktasında türevlidir ve

$$(gof)'(a)=g'(f(a)).f'(a) \quad \text{dır.}$$

İspatı: Türev tanımına göre:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(gof)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(gof)(x) - (gof)(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

yazılabilir. f fonksiyonu x = a da türevli olduğundan bu noktada süreklidir. Bu nedenle $x \to a$ için $f(x) \to f(a)$ dır. O halde yukarıdaki eşitlikten

$$(gof)'(a) = \lim_{f(x) \to f(a)} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$(gof)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

bulunur. Buradan gof bileşke fonksiyonunun türev fonksiyonu olarak

$$(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

yazılabilir.

NOT: $f(x) = y$, $g(y) = z$ ile gösterilirse $gof(x) = z$ olur.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad , \quad g'(y) = \frac{dz}{dy} \quad \text{ve} \quad (gof)'(x) = \frac{dz}{dx}$$

şeklinde yazılabilir. Bu değerler yukarıdaki formülde yerlerine konursa

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{veya} \quad z'_x = z'_y \cdot y'_x$$

bulunur. Buna türevde zincir kuralı denir.

Eğer $f(x) = y$, $g(y) = z$, $h(z) = u$ ise $u = hogof(x)$ dir. Bu durumda

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{veya} \quad u'_x = u'_z \cdot z'_y \cdot y'_x$$

olur.

ÖRNEK: $f: R \to R$, $f(x) = x^2 - 3$ ve $g: R \to R$, $g(x) = x^3 + 1$ fonksiyonları veriliyor. $(gof)'(x) = ?$

Çözümü: $f'(x) = 2x$ ve $g'(x) = 3x^2$ dir.

$(gof)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3[f(x)]^2 \, 2x = 3(x^2 - 3)^2 \, 2x = 6x(x^2 - 3)^2$ bulunur.

Aynı sonuç $f(x) = x^2 - 3 = y$ ve $g(y) = y^3 + 1 = z$ şeklinde gösterildikten sonra türevde zincir kuralı uygulanarak

$$(gof)'(x) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 3y^2 \cdot 2x = 3(x^2 - 3)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 - 3)^2$$

şeklinde de bulunabilir.

ÖRNEK 2: $y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$ formülünün $\forall n \in Q$ için doğruluğunu gösteriniz.

Çözümü: Formülün $\forall n \in Z^+$ için doğruluğu daha önce gösterilmişti. Şimdi önce $\forall n \in Z$ için, daha sonra da $\forall n \in Q$ için doğruluğunu ispatlayalım.

a) $n = 0$ ise $y = x^0 = 1$ olacağından $y' = 0$ olup formül doğrulanır.

$n \in Z^-$ ise $n = -k$ konulduğunda $y = x^n = x^{-k} = \frac{1}{x^k}$ olur. $k = -n \in Z^+$ olacağından bölümün türev formülü uygulanarak

$$y' = \frac{0 - k \cdot x^{k-1}}{(x^k)^2} = -k \cdot x^{k-1-2k} = -kx^{-k-1}$$

ve buradan da $-k = n$ konarak $y' = n \cdot x^{n-1}$ bulunur. O halde $\forall n \in Z$ için $y' = n x^{n-1}$ dir.

b) $n \in Q$ olsun. $p, q \in Z$ ve $q \neq 0$ olmak üzere $n = \frac{p}{q}$ konabilir. Bu durumda

$y = x^n = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ olur. $u = x^p$ ve $y = \sqrt[q]{u}$ ile gösterilirse türevde zincir kuralına göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{q \cdot \sqrt[q]{u^{q-1}}} \cdot p \cdot x^{p-1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{p x^{p-1}}{q \cdot \sqrt[q]{(x^p)^{q-1}}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{\frac{pq-p}{q}}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-\frac{p}{q}}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{p}{q} \; x^{p-1-(p-\frac{p}{q})} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \quad \text{bulunur.}$$

Buradan da $\frac{p}{q} = n$ konarak $y' = n \cdot x^{n-1}$ elde edilir. O halde $y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$ formülü $\forall n \in Q$ için doğrudur.

ÖRNEK 3: $f(x) = u$ türevlenebilen bir fonksiyon ise $\forall n \in Q$ için $y = [f(x)]^n = u^n$ in türevi

$y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$ veya kısaca $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ dür.

İspatı: Türevde zincir kuralına göre

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = n \cdot u^{n-1} \cdot \frac{du}{dx} = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 4: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini yukarıdaki formülü kullanarak alınız.

a) $y = (x^3 - 1)^5$ b) $y = x^2 (2x^3 - x)^4$ c) $y = \frac{x^3}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

Çözümü:

a) $x^3 - 1 = u$ konursa $y = u^5$ olur.

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$ formülüne göre

$$y'_x = 5 \cdot u^4 \cdot u'_x = 5 \cdot (x^3 - 1)^4 \cdot 3x^2 = 15x^2 (x^3 - 1)^4$$

bulunur.

b) $y = x^2 . (2x^3 - x)^4 \Rightarrow y' = 2x . (2x^3 - x)^4 + 4(2x^3 - x)^3 (6x^2 - 1) x^2$

$y' = 2x (2x^3 - x)^3 [(2x^3 - x) + 2x (6x^2 - 1)] = 2x (2x^3 - x)^3 (14x^3 - 3x)$

$y' = 2x^5 (2x^2 - 1)^3 (14x^2 - 3)$

c) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \dfrac{x^3}{(1-x^2)^{3/2}}$

$$y' = \frac{3x^2(1-x^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(1-x^2)^{1/2}(-2x)x^3}{(1-x^2)^3}$$

$$y' = \frac{3x^2(1-x^2)^{1/2}[(1-x^2)+x^2]}{(1-x^2)^3} = \frac{3x^2}{(1-x^2)^{5/2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$$

bulunur.

4.8 ARDIŞIK TÜREVLER: Bir $y = f(x)$ fonksiyonu bir A kümesinde türevli olsun. $y' = f'(x)$ türev fonksiyonuna **f nin 1. sıradan türevi** denir. Eğer f' fonksiyonu da bir $A_1 \subset A$ kümesinde türevli ise bu türeve **f nin ikinci sıradan türevi** denir ve y'' veya $f''(x)$ ile gösterilir.

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

olduğundan ikinci sıradan türev $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ şeklinde de gösterilir. Benzer biçimde 3. sıradan türev y''', $f'''(x)$ veya $\dfrac{d^3y}{dx^3}$; 4. sıradan türev $y^{(4)}$, $f^{(4)}(x)$ veya $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ ve genel olarak n. sıradan türev $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$ veya $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ ile gösterilir. Bunlara **f nin ardışık türevleri** denir.

ÖRNEK 1: $y = x^3 - 5x^2 + x - 1 \Rightarrow y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$

Çözümü: $y' = 3x^2 - 10x + 1$, $y'' = 6x - 10$, $y''' = 6$

ÖRNEK 2: $y = \dfrac{x + 2}{2x - 1}$ fonksiyonunun ikinci türevinin $x = 1$ için aldığı değer $y''(1) = ?$

Çözümü: $y' = \dfrac{1 \cdot (2x - 1) - 2(x + 2)}{(2x - 1)^2} = \dfrac{-5}{(2x - 1)^2}$

$$y'' = \frac{0 + 5 \cdot 2 (2x - 1) \cdot 2}{(2x - 1)^4} = \frac{20}{(2x - 1)^3}$$

dir. Buradan

$$y''(1) = \frac{20}{(2 - 1)^3} = 20$$

bulunur.

ÖRNEK 3: $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = ?$

Çözümü: $y = \dfrac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow y' = -1 \cdot x^{-2} \Rightarrow y'' = 1 \cdot 2x^{-3} = 2!x^{-3}$

$\Rightarrow y''' = -1.2.3.\, x^{-4} = -3!\, x^{-4} \Rightarrow y^{(4)} = 1.2.3.4.\, x^{-5} = 4!\, x^{-5}$

dir. Buna göre

$$y^{(n)} = (-1)^n .1.2.3.....n.x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n . n!}{x^{n+1}}$$

olur.

4.9 KAPALI FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

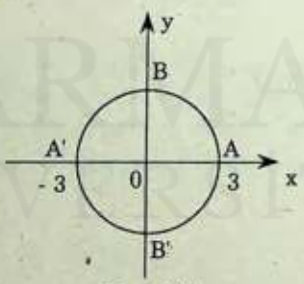
$x, y \in R$ olmak üzere x ile y arasındaki bir bağıntı genel olarak $F(x, y) = 0$ ile gösterilir. Bu,

$$\{(x, y) : F(x, y) = 0 \ , \ (x, y) \in R^2\}$$

kümesi demektir. Eğer bu bağıntı bir fonksiyonsa $F(x, y) = 0$ eşitliğine y nin x e göre **kapalı fonksiyonu** denir. Örneğin $F(x,y) = 4x - 2y - 3 = 0$ eşitliğinden $y = 2x - \frac{3}{2}$ fonksiyonu, $G(x,y) = x^2y - x + y = 0$ eşitliğinden $y(x^2 + 1) = x \Rightarrow y = \frac{x}{x^2 + 1}$ fonksiyonu elde edildiğinden bu eşitlikler y nin x e göre kapalı fonksiyonlarıdır. Bazı bağıntılardan iki veya daha çok sayıda fonksiyon elde edilebilir. Örneğin $x^2 + y^2 = 9$ bağıntısından y çözülürse:

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 9 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

bulunur. Buna göre bu bağıntıdan, biri $y = \sqrt{9 - x^2}$ diğeri $y = -\sqrt{9 - x^2}$ olmak üzere iki tane fonksiyon elde edilmiş olur. $x^2 + y^2 = 9$ bağıntısının grafiği $r = 3$ yarıçaplı bir çemberdir. (42. şekil) $y = \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonunun grafiği bu çemberin ABA' yayı, $y = -\sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonunun grafiği ise AB'A' yayıdır.



(42. şekil)

Bazı bağıntılar da $y = f(x)$ şekline getirilemezler. Örneğin $y + \text{Sin } y = x$ gibi.

Genel olarak $F(x,y) = 0$ bağıntısından y nin x e göre $\frac{dy}{dx}$ türevi türevde zincir kuralı uygulanarak bulunabilir.

ÖRNEK. Aşağıdaki bağıntılardan $y' = \frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $3x^2y = y^2 - 2x$ c) $(y+2)^3 = 2x^2$

Çözümü: a) $x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(9)$

$$\Rightarrow 2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

b) $\frac{d}{dx}(3x^2y) = \frac{d}{dx}(y^2 - 2x)$

$$\Rightarrow 6x \cdot y + 3x^2y' = 2yy' - 2 \Rightarrow (3x^2 - 2y)y' = -6xy - 2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2(3xy + 1)}{3x^2 - 2y}$$

c) $\frac{d}{dx}(y + 2)^3 = \frac{d}{dx}(2x^2) \Rightarrow 3(y + 2)^2 \cdot y' = 4x$

$$\Rightarrow y' = \frac{4x}{3(y + 2)^2}$$

NOT: $F(x,y)$ ifadesinin x e göre türevi $F'_x(x,y)$, y ye göre türevi $F'_y(x,y)$ ile gösterilirse $F(x,y) = 0$ bağıntısında her terimin x e göre türevi alınarak

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

bulunur. $F'_x(x,y)$ ve $F'_y(x,y)$ türevlerine $F(x,y)$ nin x ve y göre **kısmi türevleri** denir. F'_x türevi bulunurken y, F'_y türevi bulunurken x sabit gibi düşünülür.

Şimdi yukarıdaki örnekleri bir kez de bu formülle çözelim.

a) $F(x,y) = x^2 + y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

b) $F(x,y) = 3x^2y - y^2 + 2x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6xy + 2}{3x^2 - 2y}$

c) $F(x,y) = (y+2)^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{4x}{3(y+2)^2}$

dir.

4.10. TERS FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

$f: A \to B$, $f(x) = y$ fonksiyonu birebir örten bir fonksiyon olsun ($A \subset R$ ve $B \subset R$). Bu takdirde f nin $f^{-1}: B \to A$, $f^{-1}(y) = x$ şeklinde bir ters fonksiyonu vardır. $f^{-1}(y) = x$ eşitliğinin her iki yanının x e göre türevini alırsak

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(y) = \frac{d}{dx}(x) \Rightarrow \frac{df^{-1}(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

bulunur.

ÖRNEK: $f: R \to R$, $f(x) = x^3 - 2 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = ?$

Çözümü: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{3x^2}$ dir.

$x^3 - 2 = y \Rightarrow x^3 = y + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+2}$ olduğundan

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(y+2)^2}}$ veya $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2. Çözümü: $f(x) = x^3 - 2 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+2}$

olduğundan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$ dir. Buradan türev alınarak

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

bulunur.

4.11. PARAMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

Bir fonksiyon $y = f(x)$ açık veya $F(x,y) = 0$ kapalı şekilleriyle verilebileceği gibi bazan da $x = g(t)$ ve $y = h(t)$ denklemleriyle de verilebilir. Buradaki t yardımcı değişkenine **parametre**, bu şekilde verilen fonksiyonlara da **parametrik fonksiyonlar** denir. g ve h fonksiyonlarının t ye göre türetilebildiğini varsayalım. t nin Δt değişimine karşılık x in değişimi Δx, y nin değişimi Δy olsun.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} : \frac{\Delta x}{\Delta t}$ yazılabilir. $\Delta t \to 0$ için $\Delta x \to 0$ olduğu gözönüne alınarak her iki yanın $\Delta t \to 0$ için limiti alınırsa

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) : \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$$

veya kısa yazılışıyla $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ bulunur.

Buradan $\frac{d^2y}{dx^2}$ 2. türevi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t\, y'_t}{(x'_t)^3}$$

bulunur.

ÖRNEK 1: $x = t^2 + 1$ ve $y = t^3 - t$ denklemleriyle verilen parametrik fonksiyonda $\frac{dy}{dx}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevlerini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: $x'_t = 2t$, $y'_t = 3t^2 - 1$, $x''_t = 2$, $y''_t = 6t$

dir. $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2 - 1}{2t}$ ve $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}$

$$= \frac{6t \cdot 2t - 2 \cdot (3t^2 - 1)}{(2t)^3} = \frac{12t^2 - 6t^2 + 2}{8t^3} = \frac{3t^2 + 1}{4t^3}$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{1 - t}$ parametrik fonksiyonunu $y = f(x)$ açık fonksiyon şeklinde yazınız ve $\frac{dy}{dx}$ türevini her iki fonksiyondan da bulunuz.

Çözümü: $x = \sqrt{t} \Rightarrow t = x^2$ dir. 2. denklemde yerine konursa $y = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonu bulunur. Bu da $r = 1$ yarıçaplı merkezil çemberin üst yarısının denklemidir.

$x'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ve $y'_t = \frac{-1}{2\sqrt{1 - t}}$ olduğundan

$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1 - t}}$ veya $\sqrt{t} = x$ konarak $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

bulunur. Diğer Taraftan $y = \sqrt{1 - x^2}$ fonksiyonundan da aynı türev

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ şeklinde bulunabilir.

1) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = 5x^3 - 2x^2 + x - 3$ $\quad y' = 15x^2 - 4x + 1$

b) $y = a\,x^{3/2} + b\,x^{1/2}$ $\quad y' = \frac{3a}{2}x^{1/2} + \frac{b}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

c) $y = \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\quad y' = -\frac{6}{5\,.\sqrt[5]{x^8}}$

d) $y = \frac{5}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}$ $\quad y' = -\frac{15}{x^4} + \frac{6}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

e) $y = \frac{x^2 - x - 3}{x^2 - 1}$ $\quad y' = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)^2}$

f) $y = (2x - 1)\,.\,\sqrt{3x + 2}$ $\quad y' = \frac{18x + 5}{2\sqrt{3x + 2}}$

g) $y = \sqrt[3]{ax^3 + b}$ $\quad y' = \frac{ax^2}{\sqrt[3]{(ax^3 + b)^2}}$

h) $y = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}$ $\quad y' = \frac{a^2}{(a^2 - t^2)\sqrt{a^2 - t^2}}$

ı) $y = \frac{1 + \sqrt{t}}{1 - \sqrt{t}}$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{t}\,(1 - \sqrt{t})^2}$

i) $y = (3 - 2x)^3$ $\quad y' = -6\,(3 - 2x)^2$

j) $y = \dfrac{5}{4(x-3)^2} - \dfrac{2}{5(x-3)}$ $\qquad y' = \dfrac{-5}{2(x-3)^3} + \dfrac{2}{5(x-3)^2}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

k) $y = \dfrac{(x^2-3)^2}{(x+1)^3}$ $\qquad y' = \dfrac{(x^2-3)(x^2+4x+9)}{(x+1)^4}$

l) $f(x) = x^4$ ve $g(x) = x^2 - 1$ $\qquad (fog)'(x) = 8x(x^2-1)^3$

$(fog)'(x) = ?$

m) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ ve $g(x) = \sqrt[5]{x}$ $\qquad (gof)'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{(1-x)^6}}$

$(gof)'(x) = ?$

2) $f(x) = |-x+2|$ fonksiyonunda $f'(2^-)$ ve $f'(2^+)$ türevlerini bulunuz.

$[f'(2^-) = -1 \quad , \quad f'(2^+) = +1]$

3) $f(x) = |x^2 + x - 6|$ fonksiyonunda $f'(-3^+)$ türevini bulunuz. Bu fonksiyon hangi noktalarda türevsizdir?

$[f'(-3^+) = 5 \quad ; \quad f, x = -3$ ve $x = 2$ de türevsizdir$]$

4) $f(x) = \text{sgn}\ \dfrac{x-1}{x+2}$ fonksiyonu hangi noktalarda türevsizdir. Türevli olduğu noktalarda $f'(x) = ?$

$(x = -2$ ve $x = 1$ de türevsiz. Bu noktalar dışında $f'(x) = 0)$

5) $f(x) = x[\![x]\!] \Rightarrow f'(\sqrt{5}) = ?$ $\qquad [f'(\sqrt{5}) = 2]$

6) $f(x) = x|x| \Rightarrow f'(-2) = ?$ $\qquad [f'(-2) = 4]$

7) $f(x) = x \cdot \text{sgn}(x-1) + [\![x]\!]x^2$ fonksiyonunda $x \in (-1, 2)$ için $f'(x) = ?$

$$\left[f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & , -1 < x < 0 \text{ ise} \\ -1 & , 0 \le x < 1 \text{ ise} \\ 2x + 1 & , 1 < x < 2 \text{ ise} \end{cases} \qquad f'(1) \text{ yoktur} \right]$$

8) Aşağıdaki denklemlerden $y' = \frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

a) $xy^2 - x - y = 0$ $\qquad y' = \frac{1 - y^2}{2xy - 1}$

b) $x^3 + y^3 = 2xy$ $\qquad y' = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $\qquad y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$

d) $(x + y)^2 - xy = 1$ $\qquad y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$

9) Aşağıdaki fonksiyonların 2. sıradan türevlerini bulunuz.

a) $y = \frac{1}{ax + b}$ $\qquad y'' = \frac{2a^2}{(ax + b)^3}$

b) $y = \sqrt{t + 1}$ $\qquad y'' = -\frac{1}{4\sqrt{(t + 1)^3}}$

c) $x^3 - y^3 = 1$ $\qquad y'' = -\frac{2x}{y^5}$

d) $xy = x + y$ $\qquad y'' = \frac{2(y - 1)}{(x - 1)^2}$

e) $y + 2\sqrt{y} = x$ $\qquad y'' = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{y})^{-3}$

f) $y = \left(\frac{x}{x + 2}\right)^6$ $\qquad y'' = \frac{24x^4(5 - x)}{(x + 2)^8}$

10) Aşağıdaki fonksiyonların n. sıradan türevlerini bulunuz.

a) $y = \frac{1}{1 - x}$ $\qquad y^{(n)} = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}}$

b) $y = (ax + b)^n$ $\qquad y^{(n)} = a^n \cdot n!$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

c) $y = \dfrac{1}{(ax + b)^n}$ $\qquad y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!\, a^n}{(ax + b)^{n+1}}$

11) $y = x^2 - 5x + 6$ eğrisinin x eksenini kestiği noktalardaki teğet denklemlerini bulunuz.

$(y = x - 3$ ve $y = -x + 2)$

12) $y = x^3 - 2x^2 + 3$ eğrisinin $x = -1$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$\left(y = 7x + 7 \quad \text{ve} \quad y = -\dfrac{1}{7}x - \dfrac{1}{7}\right)$

13) $x^2 - xy = y^2 - 1$ eğrisinin $(1 \; ; \; -?)$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$(4x + 3y + 2 = 0$ ve $3x - 4y - 11 = 0)$

14) $x^2 + 2y^2 = 6$ elipsinin eğim açısı $\alpha = 45°$ olan teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

$(y = x + 3$ ve $y = x - 3)$

15) Aşağıdaki parametrik fonksiyonların $y'_t = \dfrac{dy}{dx}$ ve $y''_x = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ türevlerini bulunuz.

a) $x = a(1 - t)$, $y = a(1 + t)$ $\qquad y'_x = -1$, $y''_x = 0$

b) $x = t^2 + 1$, $y = t^3 - 6t + 5$ $\qquad y'_x = \dfrac{3t^2 - 6}{2t}$, $y''_x = \dfrac{3t^2 + 6}{4t^3}$

c) $x = t^{1/4}$, $y = t^{1/3}$ $\qquad y'_x = \dfrac{4}{3}t^{1/12}$, $y''_x = \dfrac{4}{9}t^{-\frac{1}{6}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

d) $x = \frac{1}{t^2 + 1}$, $y = \frac{2t}{t^2 + 1}$ $\qquad y'_x = \frac{t^2 - 1}{t}$, $y''_x = \frac{(t^2 + 1)^3}{-2t^3}$

16) $x^2 + y^2 = r^2$ çember denklemi için $\left| \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} \right| = \frac{1}{r}$ olduğunu gösteriniz.

17) $n \in N^+$ olmak üzere $f : R^+ \to R$, $f(x) = (1 + x)^n$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ in açılımından ve türevinden yararlanarak

$$P = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots\ldots + n\binom{n}{n}$$

toplamını bulunuz.

$(P = n \cdot 2^{n-1})$

18) $n \in N^+$ olmak üzere $f : R^+ \to R$, $f(x) = (1 - x)^n$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ in açılımından ve türevinden yararlanarak

$$P = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k \binom{n}{k} = -\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} + \ldots\ldots + (-1)^n n\binom{n}{n}$$

toplamını bulunuz.

$(P = 0)$

4.12. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

1°) y = Sin x in türevi: x in Δx değişme miktarına karşılık y nin değişme miktarı Δy ise

$$\Delta y = \text{Sin}(x + \Delta x) - \text{Sin } x$$

olur. İki sinüs farkının dönüşümü formülüne göre:

$$\Delta y = 2 \text{ Cos } \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \text{Sin } \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$= 2 \text{ Cos } \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \text{Sin } \frac{\Delta x}{2}$$

dir. Her iki taraf Δx ile bölünerek

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,\mathrm{Cos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

buradan da $\Delta x \to 0$ için limite geçilerek

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\mathrm{Cos}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] = \mathrm{Cos}\,x$$

bulunur.

2°) y = Cos x in türevi: Yukarıdakine benzer işlemlerle $y' = -\,\mathrm{Sin}\,x$ bulunur.

$y = \mathrm{Sin}\,x$ ve $y = \mathrm{Cos}\,x$ fonksiyonları $\forall x \in R$ noktasında türevlidirler.

3°) y = Tan x in türevi: $y = \mathrm{Tan}\,x = \dfrac{\mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}\,x}$ olup

$$y' = \frac{\mathrm{Cos}\,x \,.\, \mathrm{Cos}\,x - (-\,\mathrm{Sin}\,x) \,.\, \mathrm{Sin}\,x}{\mathrm{Cos}^2 x} = \frac{\mathrm{Cos}^2 x + \mathrm{Sin}^2 x}{\mathrm{Cos}^2 x}$$

$$y' = \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 x} = \mathrm{Sec}^2 x \qquad \text{veya} \qquad y' = 1 + \mathrm{Tan}^2 x$$

bulunur. $\left(x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$

4°) y = Cot x in türevi: $y = \mathrm{Cot}\,x = \dfrac{\mathrm{Cos}\,x}{\mathrm{Sin}\,x}$ den bir öncekine benzer şekilde

$$y' = -\frac{1}{\mathrm{Sin}^2 x} = -\,\mathrm{Cosec}^2 x \qquad \text{veya} \qquad y' = -(1 + \mathrm{Cot}^2 x)$$

bulunur. $(x \neq k\pi)$

5°) y = Sec x in türevi: $y = \text{Sec } x = \dfrac{1}{\text{Cos } x}$ dir.

Buradan $y' = \dfrac{\text{Sin } x}{\text{Cos}^2 x} = \dfrac{1}{\text{Cos } x} \cdot \dfrac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x} = \text{Sec } x \,.\, \text{Tan } x$

bulunur.

6°) y = Cosec x in türevi: $y = \text{Cosec } x = \dfrac{1}{\text{Sin } x}$ olup buradan $y' = -\text{Cosec } x \,.\, \text{Cot } x$ bulunur.

Buraya kadar bulduğumuz trigonometrik fonksiyonlarla ilgili türev formüllerinden türevde zincir kuralı ile aşağıdaki formüller hemen yazılabilir.

$u = f(x)$ olmak üzere:

1°) $y = \text{Sin } u \Rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = (\text{Cos } u) \,.\, u' = u' \,.\, \text{Cos } u$

2°) $y = \text{Cos } u \Rightarrow y' = -u' \,.\, \text{Sin } u$

3°) $y = \text{Tan } u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\text{Cos}^2 u} = u' \,.\, \text{Sec}^2 u = u'(1 + \text{Tan}^2 u)$

4°) $y = \text{Cotu} \Rightarrow y' = \dfrac{-u'}{\text{Sin}^2 u} = -u' \,.\, \text{Cosec}^2 u = -u'(1 + \text{Cot}^2 u)$

5°) $y = \text{Sec } u \Rightarrow y' = u' \,.\, \text{Sec } u \,.\, \text{Tan } u$

6°) $y = \text{Cosec } u \Rightarrow y' = -u' \,.\, \text{Cosec } u \,.\, \text{Cot } u$

ÖRNEK 1: Aşağıdaki trigonometrik fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \text{Sin } 3x + \text{Cos } \dfrac{x}{3}$

b) $y = \text{Sin}^2 x$

c) $y = \dfrac{1 - \text{Cos } at}{1 + \text{Cos } at}$ (a sabit)

d) $y = \text{Cos}^3 2x$

e) $y = \sqrt{\text{Cot}\,\frac{1}{t}}$ f) $y = \text{Tan}\,(x + y)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

g) $\text{Sin}^2 x + \text{Cos}\, y = 1$

Çözümü: a) $y = \text{Sin}\, 3x + \text{Cos}\,\frac{x}{3} \Rightarrow y' = 3\,\text{Cos}\, 3x - \frac{1}{3}\,\text{Sin}\,\frac{x}{3}$

b) $y = \text{Sin}^2 x = (\text{Sin}\, x)^2 \Rightarrow y' = 2\,\text{Sin}\, x\,.\,\text{Cos}\, x = \text{Sin}\, 2x$

c) $y = \dfrac{1 - \text{Cos}\, at}{1 + \text{Cos}\, at}$

$$y' = \frac{a\,.\,\text{Sin}\, at\,(1 + \text{Cos}\, at) - (-a\,\text{Sin}\, at)(1 - \text{Cos}\, at)}{(1 + \text{Cos}\, at)^2}$$

$$y' = \frac{2a\,.\,\text{Sin}\, at}{(1 + \text{Cos}\, at)^2}$$

d) $y = \text{Cos}^3 2x \Rightarrow y' = 3\,\text{Cos}^2 2x\,.\,(-2\,\text{Sin}\, 2x)$

$$\Rightarrow y' = -6\,\text{Cos}^2 2x\,.\,\text{Sin}\, 2x$$

e) $y = \sqrt{\text{Cot}\,\frac{1}{t}} = \left(\text{Cot}\,\frac{1}{t}\right)^{1/2}$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\text{Cot}\,\frac{1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{t^2}\,\text{Cosec}^2\,\frac{1}{t}\right) = \frac{\text{Cosec}^2\,\frac{1}{t}}{2t^2 \cdot \sqrt{\text{Cot}\,\frac{1}{t}}}$$

f) $y = \text{Tan}\,(x + y) \Rightarrow y' = \dfrac{1 + y'}{\text{Cos}^2\,(x + y)} \Rightarrow$

$$1 + y' = y'\,.\,\text{Cos}^2\,(x + y) \Rightarrow y' = \frac{-1}{1 - \text{Cos}^2\,(x + y)} = \frac{-1}{\text{Sin}^2\,(x + y)}$$

g) $\text{Sin}^2 x + \text{Cos}\, y = 1 \Rightarrow 2\,\text{Sin}\, x \,.\, \text{Cos}\, x + (-\text{Sin}\, y)\,.\, y' = 0$

$$\Rightarrow y' = \frac{2\,\text{Sin}\, x \,.\, \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, y} = \frac{\text{Sin}\, 2x}{\text{Sin}\, y} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 2: $f(x) = \text{Sin}\, 2x \,.\, \text{Cos}\, x$ fonksiyonunda

$f''(x) = -4\,\text{Cos}\, 2x \,.\, \text{Sin}x - 5\,.\, f(x)$ olduğunu gösteriniz ve $f''(\frac{\pi}{6})$ değerini bulunuz.

Çözümü: $f'(x) = 2\,\text{Cos}\, 2x \,.\, \text{Cos}\, x - \text{Sin}\, 2x \,.\, \text{Sin}\, x$

$f''(x) = (-4\,\text{Sin}\, 2x) \,.\, \text{Cos}\, x + 2\,\text{Cos}\, 2x\,(-\text{Sin}\, x) - (2\,\text{Cos}\, 2x) \,.\, \text{Sin}\, x$

$$-\text{Sin}\, 2x \,.\, \text{Cos}\, x$$

$f''(x) = -4\,\text{Cos}\, 2x \,.\, \text{Sin}\, x - 5\,\text{Sin}\, 2x \,.\, \text{Cos}\, x = -4 \,.\, \text{Cos}\, 2x \,.\, \text{Sin}\, x - 5\,.\, f(x)$

bulunur.

$f''(\frac{\pi}{6}) = -4\,\text{Cos}\frac{\pi}{3} \,.\, \text{Sin}\frac{\pi}{6} - 5\,.\, f(\frac{\pi}{6}) = -4\,.\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} - 5\,f(\frac{\pi}{6}) = -1 - 5\,.\, f(\frac{\pi}{6})$

dır.

$$f(\frac{\pi}{6}) = \text{Sin}\frac{\pi}{3}\,\text{Cos}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

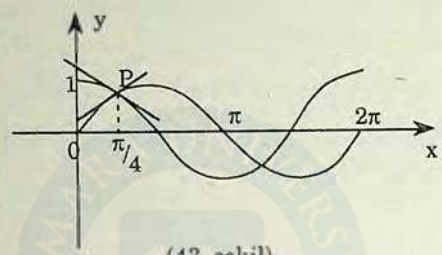
olduğundan

$$f''(\frac{\pi}{6}) = -1 - 5\,.\,\frac{3}{4} = -\frac{19}{4}$$

elde edilir.

ÖRNEK 3: $y = \text{Sin}\, x$ ve $y = \text{Cos}\, x$ eğrilerinin $[0, \pi]$ aralığındaki kesiştikleri noktayı ve bu noktadaki teğetler arasındaki dar açıyı bulunuz.

Çözümü: $y = \text{Sin } x$ ile $y = \text{Cos } x$ in ortak çözümünden $\text{Sin } x = \text{Cos } x$ veya her iki taraf $\text{Cos } x$ ile bölünerek $\text{Tan } x = 1$ bulunur. Bu denklemin $[\,0, \pi\,]$ aralığındaki kökü $x = \frac{\pi}{4}$ olduğuna göre iki eğri $[\,0\,, \pi\,]$ aralığında $P\left(\frac{\pi}{4}\,,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktasında kesişirler (43. şekil)



(43. şekil)

$y = \text{Sin } x \Rightarrow y' = \text{Cos } x$ olduğundan $y = \text{Sin } x$ eğrisinin P noktasındaki teğetinin eğimi

$$m_1 = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{Cos}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir. $y = \text{Cos } x \Rightarrow y' = -\text{Sin } x$ olduğundan $y = \text{Cos } x$ eğrisinin P deki teğetinin eğimi de

$$m_2 = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\text{Sin}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir. İki teğet arasındaki dar açı α ise

$$\text{Tan } \alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right| = 2\sqrt{2}$$

bulunur.

4.13. TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR VE TÜREVLERİ

1°) **Arcsin fonksiyonu:** $\forall x \in R$ için $-1 \leq \text{Sin } x \leq 1$ olduğundan $f(x) = \text{Sin } x$ fonksiyonu $R \to [-1, 1]$ örten fonksiyondur. Ancak bu şekliyle bire - bir olmadığı için ters fonksiyonu tanımlanamaz. Ama eğer tanım kümesini örneğin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ye daraltır, yani

$$f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad f(x) = \text{Sin } x$$

şeklinde alırsak bu durumda fonksiyon bire-bir ve örten olacağı için ters fonksiyonu vardır. İşte bu ters fonksiyona **Arcsin fonksiyonu** denir ve

$$f^{-1}:[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x$$

(veya $f^{-1}(x) = \text{Sin}^{-1} x$) şeklinde yazılır.

Bu tanıma göre $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için

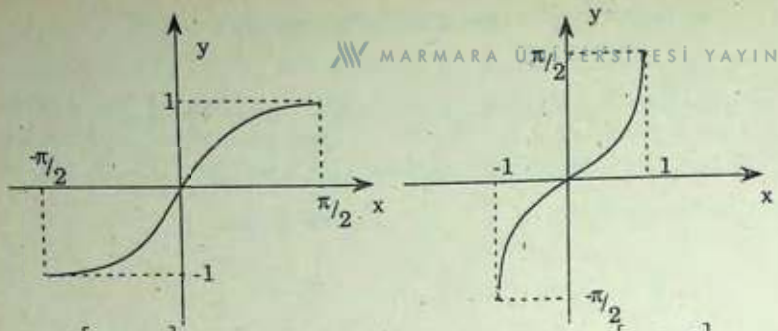
$$\text{Sin } x = y \iff x = \text{Arcsin } y$$

dir. Buna göre $x = \text{Arcsin } y$ eşitliğinde x, sinüsü y olan $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki açı demektir. Örneğin

$$\text{Arcsin } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{Arcsin } (-1) = -\frac{\pi}{2}$$

dir. $f(x)$ fonksiyonu ile $f^{-1}(x)$ ters fonksiyununun grafiklerinin 1. açı-ortaya göre simetrik olduğunu biliyoruz. Buna göre $f(x) = \text{Sin } x$ ve $f^{-1}(x) = \text{Arcsin } x$ fonksiyonlarının grafikleri 44. şekilde çizilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Sin : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ Arcsin : $[-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(44. şekil)

$f(x) = \text{Sin } x$ fonksiyonu $f: \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ veya $f: \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ gibi değişik şekillerde alınarak farklı Arcsin fonksiyonları oluşturulabilir.

y = Arcsin x fonksiyonunun türevi

$y = \text{Arcsin } x \Rightarrow x = \text{Sin } y$ dir. Buradan

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\text{Sin } y) \Rightarrow 1 = (\text{Cos } y) \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\text{Cos } y}$$

bulunur. $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\text{Cos } y = \sqrt{1 - \text{Sin}^2 y}$

dir. Sin y = x olduğundan $\text{Cos } y = \sqrt{1 - x^2}$ olup

$$y' = \frac{1}{\text{Cos } y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

bulunur.

2°) **Arccos fonksiyonu:** $f(x) = \text{Cos } x$ fonksiyonunun tanım ve değer kümelerini fonksiyon bire-bir ve örten olacak şekilde alalım.

$$f: [0, \pi] \to [-1, 1], \quad f(x) = \text{Cos } x$$

olsun. Bu takdirde f nin ters fonksiyonu vardır. Buna **Arccos fonksiyonu** denir ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $f^{-1}(x) = \text{Arccos } x$

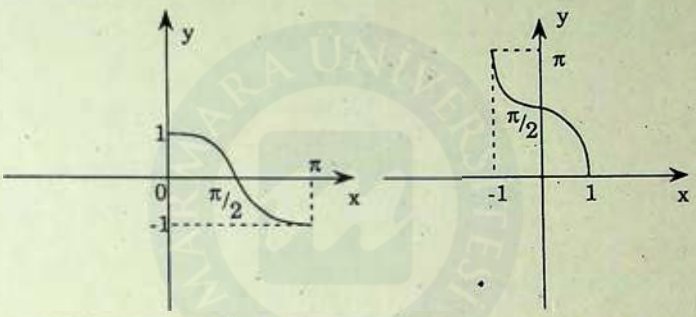
şeklinde yazılır.

$$\text{Cos } x = y \Rightarrow \text{Arccos } y = x$$

dir. Örneğin

$$\text{Arccos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad , \quad \text{Arccos } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

dür.



$\text{Cos} : [0, \pi] \Rightarrow [-1, 1]$ $\qquad$ $\text{Arccos} : [-1, 1] \Rightarrow [0, \pi]$

(45. şekil)

y = Arccos x in türevi:

$$y = \text{Arccos } x \Rightarrow x = \text{Cos } y \Rightarrow \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\text{Cos}y)$$

$$\Rightarrow 1 = (-\text{Sin } y) \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{-\text{Sin } y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \text{Cos}^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

bulunur.

3) **Arctan fonksiyonu:** $f(x) = \text{Tanx}$ in ters fonksiyonudur.

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ şeklinde alınırsa birebir ve örten olacağından bunun

$$f^{-1} : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad f^{-1}(x) = \text{Arctan } x$$

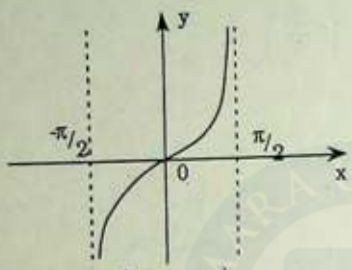
ters fonksiyonu vardır. Bu tanıma göre $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

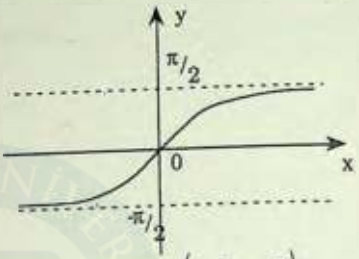
$$\text{Tan } x = y \iff \text{Arctan } y = x$$

dir.

Örneğin $\text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$, $\text{Arctan } (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ dür.



$\text{Tan} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$



$\text{Arctan} : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(46. şekil)

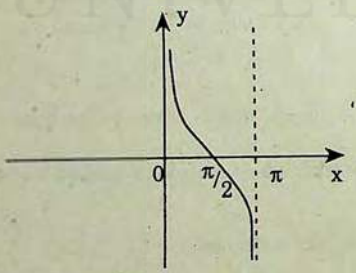
y = Arctan x in türevi:

$$y = \text{Arctan } x \Rightarrow x = \text{Tan } y \Rightarrow 1 = (1 + \text{Tan}^2 y) \cdot y'$$

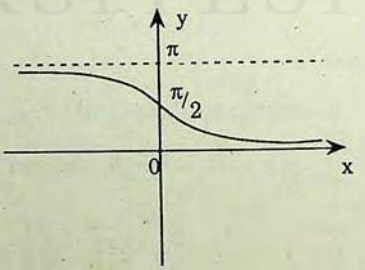
$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1 + \text{Tan}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

4) Arccot x fonksiyonu: $f(x) = \text{Cot } x$ in ters fonksiyonudur.

$f : (0, \pi) \to R$, $f(x) = \text{Cot } x$ alınırsa ters fonksiyonu
$f^{-1} : R \to (0, \pi)$, $f^{-1}(x) = \text{Arccot } x$
olur.



$\text{Cot} : (0, \pi) \to R$



$\text{Arccot} : R \to (0, \pi)$

(47. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

y = Arccot x in türevi: Daha öncekilere benzer şekilde

$y' = -\frac{1}{1+x^2}$ bulunur.

Ters trigonometrik fonksiyonlarla ilgili buraya kadar bulduğumuz türev formüllerinden aşağıdaki formüller türevde zincir kuralı ile kolayca bulunabilir.

1) $y = \text{Arcsin } u \quad , \quad u = f(x)$ ise

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

2) $y = \text{Arccos } u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

3) $y = \text{Arctan } u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

4) $y = \text{Arccot } u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{1+u^2}$

ÖRNEK 1: Cos (2 Arcsin x) = ?

Çözümü: Arcsin x = α konursa Sin α = x olur. Buna göre

Cos (2 Arcsin x) = Cos 2 α = 1 - 2 $\text{Sin}^2 \alpha$ = 1 - $2x^2$

bulunur.

ÖRNEK 2: Sin (Arcsin x) = ?

Çözümü: Sin ve Arcsin fonksiyonları ters fonksiyonlar olduğundan Sin (Arcsin x) = x dir.

ÖRNEK 3: Cos (Arctan x) = ?

Çözümü: Arctan x = α konursa Tan α = x olur.

$$\text{Cos (Arctan x)} = \text{Cos } \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{Tan}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

bulunur.

ÖRNEK 4: Arctan 2 - Arctan $\frac{1}{3}$ = ?

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: Arctan 2- Arctan $\frac{1}{3}$ = x olsun.

$$\text{Tan } x = \text{Tan (Arctan 2 - Arctan } \frac{1}{3}\text{)}$$

$$= \frac{\text{Tan (Arctan 2) - Tan (Arctan 1/3)}}{1 + \text{Tan (Arctan 2) . Tan (Arctan 1/3)}}$$

$$= \frac{2 - 1/3}{1 + 2 \cdot 1/3} = 1$$

Buradan da $x = \text{Arctan } 1 = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

ÖRNEK 5: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \text{Arcsin } (2x - 1)$ b) $y = \text{Arc cos } \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$

c) $y = \text{Arctan } \sqrt{x}$

Çözümü:

a) $2x - 1 = u$ konursa $y = \text{Arcsin } u$ olur.

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{4x - 4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}$$

b) $\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} = u$ konursa $y = \text{Arccos } u$ olur.

$$u' = \frac{-2x(a^2 + x^2) - 2x(a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2} = -\frac{4a^2x}{(a^2 + x^2)^2}$$ olduğundan

$$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} = -\frac{-\frac{4a^2x}{(a^2 + x^2)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\right)^2}}$$ ve buradan işlemler yapılarak

$$y' = \frac{2ax}{(a^2 + x^2)\,|x|}$$ bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

c) $y' = \dfrac{u'}{1+u^2} = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$

ÖRNEK 6: $f(x) = \text{Arccos}\sqrt{x-\frac{1}{2}}$ fonksiyonunda $f(1)$ ve $f'(1)$ değerlerini bulunuz.

Çözümü: $f(1) = \text{Arccos}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \text{Arccos}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x-\frac{1}{2}}}}{\sqrt{1-(x-\frac{1}{2})}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}-x}},$$

$$f'(1) = \frac{-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}} = -1$$

bulunur.

ÖRNEK 7: $y = x\,\text{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$

Çözümü: $y' = \text{Arcsin}\,x + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-2x}{2\cdot\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}\,x$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y''' = -\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

ALIŞTIRMALAR

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

1) $y = \text{Sin } 2x - \text{Cos } \frac{x}{2}$ C: $y' = 2 \text{ Cos } 2x + \frac{1}{2} \text{Sin } \frac{x}{2}$

2) $y = \text{Sin } x^2$ $y' = 2x \text{ . Cos } x^2$

3) $y = \frac{1}{a} \text{ . Cos } \frac{a}{x}$ $y' = \frac{1}{x^2} \text{ . Sin } \frac{a}{x}$

4) $y = \text{Cot } (1 - x^2)$ $y' = 2x \text{ . Cosec}^2 (1 - x^2)$

5) $y = \frac{\text{Sin } x + \text{Cos } x}{\text{Sin } x - \text{Cos } x}$ $y' = \frac{-2}{1 - \text{Sin } 2x}$

6) $y = x \text{ . Sin } (x + a) + \text{Cos } (x + a)$ $y' = x \text{ . Cos } (x + a)$

7) $y = \frac{\text{Sin } 2x}{1 + \text{Cos } 2x}$ $y' = \frac{2}{1 + \text{Cos } 2x}$

8) $y = \text{Sin}^2 x$ $y' = \text{Sin } 2x$

9) $y = \text{Cos}^3 (2x - \frac{\pi}{3})$ $y' = -6 \text{ Cos}^2 (2x - \frac{\pi}{3}) \text{ . Sin } (2x - \frac{\pi}{3})$

10) $y = \text{Tan}^3 \frac{x}{2}$ $y' = \frac{3}{2} \text{ . Tan}^2 \frac{x}{2} \text{ . Sec}^2 \frac{x}{2}$

11) $y = \text{Sec } 2x$ $y' = 2 \text{ . Sec } 2x \text{ . Tan } 2x$

12) $y = \frac{1}{2} \text{ Cosec } (1 - x)^2$ $y' = (1 - x) \text{ . Cosec } (1 - x)^2 \text{ . Cot } (1 - x)^2$

13) $y = \text{Tan } x + \frac{1}{3} \text{ . Tan}^3 x$ $y' = \text{Sec}^4 x$

14) $y = \cos^3 x \,.\, (3\cos^2 x - 5)$ $\qquad y' = 15 \,.\, \sin^3 x \,.\, \cos^2 x$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

15) $y = \cos(\sin^2 3x)$ $\qquad y' = -3 \sin 6x \,.\, \sin(\sin^2 3x)$

16) $y = \dfrac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$ $\qquad y' = \dfrac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2}$

17) $\cos y + \sin 2x = 0$ $\qquad y' = \dfrac{2 \cos 2x}{\sin y}$

18) $\sin x \cos y = 1$ $\qquad y' = \cot x \,.\, \cot y$

19) $\sin(x + y) - x \cos y = 0$ $\qquad y' = \dfrac{\cos y - \cos(x + y)}{x \,.\, \sin y + \cos(x + y)}$

Aşağıdaki fonksiyonlar için istenilen değerleri bulunuz.

20) $f(x) = x \,.\, \sin 2x + \cos 2x \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = ?$ $\qquad (-\pi)$

21) $f(x) = \dfrac{1 - \cos\dfrac{x}{3}}{\sin\dfrac{x}{3}} \Rightarrow f'(\pi) = ?$ $\qquad \left(\dfrac{2}{9}\right)$

22) $f(x) = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} \sin x\right) \Rightarrow f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = ?$ $\qquad \left(-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}\right)$

Aşağıdaki fonksiyonlar için yanlarında verilen bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

23) $y = x \,.\, \sin\dfrac{1}{x} \Rightarrow x^4 y'' + y = 0$

24) $y = \sin 2x \,.\, \cos x \Rightarrow y'' = -4\cos 2x \sin x - 5y$

25) $y = x \,.\, \cos 2x + 2x^2 \sin 2x \Rightarrow y'' + 4y = 16x \cos 2x$

26) $y = \text{Cos}^2 x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki teğet denklemini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\left(y = -x + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$

27) $f : [0, \pi] \to R$, $f(x) = \text{Sin } 2x$ eğrisinin $x - y = 0$ doğrusuna paralel teğet denklemlerini bulunuz.

$$\left(y = x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad y = x - \frac{5\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Aşağıdaki parametrik fonksiyonlarda $y' = \frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

28) $\begin{cases} x = a(t - \text{Sin } t) \\ y = a(1 - \text{Cos } t) \end{cases}$ $\left(y' = \frac{dy}{dx} = \text{Cot } \frac{t}{2} \right)$

29) $\begin{cases} y = \text{Cos}^3 t \\ y = \text{Sin}^3 t \end{cases}$ $\left(y' = \frac{dy}{dx} = -\text{Tan } t \right)$

30) $\begin{cases} x = \frac{\text{Cos}^3 \theta}{\text{Cos } 2\theta} \\ y = \frac{\text{Sin}^3 \theta}{\text{Cos } 2\theta} \end{cases}$ fonksiyonunda $\frac{dy}{dx}$ in $x = \frac{\pi}{3}$ için değerini bulunuz.

$\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} \right)$

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

31) $\text{Arcsin } \frac{1}{2} + \text{Arccos } (-1) = \frac{7\pi}{6}$

32) $\text{Arctan } 3 - \text{Arctan } 2 = \text{Arctan } \frac{1}{7}$

33) $\text{Arccos } \frac{1}{7} + \text{Arccos } \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\pi}{6}$

34) $\text{Cos } (\text{Arcsin } x) = \sqrt{1 - x^2}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

35) $\text{Sin}\,(2\,\text{Arcsin}\,x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$

36) $\text{Cos}\,(2\,\text{Arccos}\,x) = 2x^2 - 1$

37) $\text{Cos}^2\,(\text{Arcsin}\,x) = 1 - x^2$

38) $\text{Sin}\,(\text{Arctan}\,x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

39) $\text{Tan}\,(\text{Arccos}\,x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

40) $\text{Cos}\,(2\,\text{Arctan}\,x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

41) $\text{Cos}\,(\text{Arctan}\,\dfrac{4}{3} + \text{Arctan}\,1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

42) $y = \text{Arccos}\,\dfrac{1}{x - 2}$ $\qquad (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

43) $y = \dfrac{1}{\text{Arcsin}\sqrt{x^2 - 1}}$ $\qquad [-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}]$

44) $y = \text{Arctan}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ $\qquad (-1, 1]$

Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

45) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,\text{Arctan}\,x - \dfrac{\pi}{6}$ $\qquad f^{-1}(x) = \text{Tan}\,(2x + \dfrac{\pi}{3})$

46) $f(x) = \text{Arccos}\,\dfrac{x + 1}{x - 2}$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{2\,\text{Cos}\,x + 1}{\text{Cos}x - 1}$

47) $\text{Arctan}\,x + \text{Arctany} + \text{Arctan}\,z = \dfrac{\pi}{2}$ ise

$xy + xz + yz = 1$ olduğunu gösteriniz.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

48) $y = \text{Arcsin}\,\frac{x}{2}$ $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

49) $y = x \,.\, \text{Arcsin}\, x + \sqrt{1 - x^2}$ $\qquad y' = \text{Arcsin}\, x$

50) $y = \text{Arccos}\,\frac{1 - x}{1 + x}$ $\qquad y' = \frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}}$

51) $y = \text{Arctan}\,\sqrt{x + 2}$ $\qquad y' = \frac{1}{2(x + 3)\sqrt{x + 2}}$

52) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \,.\, \text{Arcsin}\,\frac{x}{a}$ $\qquad y' = 2 \,.\, \sqrt{a^2 - x^2}$

53) $y = \text{Arctan}\,\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ $\qquad y' = \frac{-1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

54) $y = x \,.\, \text{Arccos}\, 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4x^2}$ $\qquad y' = \text{Arccos}\, 2x$

55) $y = \text{Arcsin}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \text{Arctan}\, x$ $\qquad y' = 0$

56) $y = \text{Arccot}\,\frac{\text{Cos}x}{1 + \text{Sin}\, x}$ $\qquad y' = \frac{1}{2}$

57) $y = \sqrt{x - x^2} + (2x - 1)\,\text{Arcsin}\,\sqrt{x}$ $\qquad y' = 2\,\text{Arcsin}\,\sqrt{x}$

58) $y = x \,.\, (\text{Arcsin}\, x)^2 + 2\sqrt{1 - x^2}\,\text{Arcsin}\, x - 2x$ $\qquad y' = (\text{Arcsin}\, x)^2$

59) $\text{Arctan}\,(x + y) = x$ $\qquad y' = (x + y)^2$

Aşağıdaki fonksiyonlar için istenilen değerleri bulunuz.

60) $f(x) = \text{Arcsin}\,\sqrt{1 - 2x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = ? \quad , \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = ?$

$$\left[f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = -2 \right]$$

61) $f(x) = \text{Arctan}\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow f(2) = ?$, $f'(2) = ?$

$$\left[f(2) = \frac{\pi}{4} \quad , \quad f'(2) = -\frac{1}{2} \right]$$

4.14. ÜSTEL FONKSİYON $a > 0$ ve $a \neq 1$, u değişken olmak üzere $y = a^u$ şeklindeki fonksiyonlara üstel fonksiyonlar denir. $u = f(x)$ ile gösterirsek $y = a^u$ ile $u = f(x)$ fonksiyonlarının en geniş tanım kümeleri aynıdır. Örneğin $y = a^x$ in en geniş tanım kümesi R, $y = a^{\sqrt{x-1}}$ in en geniş tanım kümesi $[1, +\infty)$ dur.

4.15. $y = a^x$ FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ VE GRAFİĞİ

I. $a > 1$ ise:

1°) Fonksiyon artandır. Yani tanım aralığında x artarken y de artar. Gerçekten x in Δx artmasına karşılık ($\Delta x > 0$ kabul ediyoruz) y nin Δy değişimi

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$$

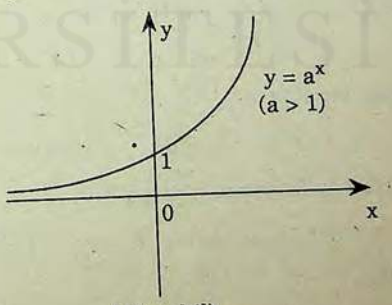
olup $a > 1$ olduğundan $a^{\Delta x} > 1$, $a^{\Delta x} - 1 > 0$ ve dolayısıyla $\Delta y > 0$ dır. Bu da fonksiyonun artan oluğunu gösterir.

2°) $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ ve $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ dır.

3°) Fonksiyon süreklidir.

$a > 1$ olması halinde $y = a^x$ fonksiyonunun değişim çizelgesi aşağıdadır. Grafik 48. şekilde çizilmiştir.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = a^x$ $(a > 1)$	0	↗	1	↗	$+\infty$



(48. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

II. $0 < a < 1$ ise:

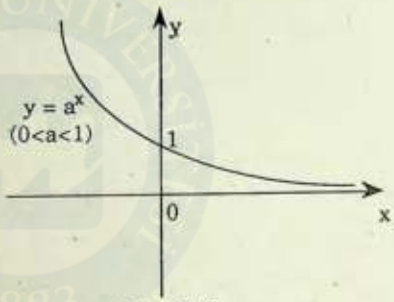
1°) Fonksiyon eksilendir. Gerçekten x in $\Delta x > 0$ artmasına karşılık $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1)$ olup $0 < a < 1$ olduğundan $a^{\Delta x} < 1$, $a^{\Delta x} - 1 < 0$ ve dolayısıyla $\Delta y < 0$ dır. O halde fonksiyon eksilendir.

2°) $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ ve $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ olur.

3°) Fonksiyon süreklidir.

Bu duruma ait değişim çizelgesi ile grafik aşağıdadır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = a^x$ $(0<a<1)$	$+\infty$	↘	1	↘	0



(49. şekil)

Yukarıda yaptığımız incelemelere göre $f(x) = y = a^x$ fonksiyonu $f : R \to (0, +\infty)$ birebir ve örten bir fonksiyondur.

4.16. LOGARİTMA FONKSİYONU $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $y = a^x$ ise **x, y nin a tabanına göre logaritmasına eşittir** denir ve bu $x = \log_a y$ şeklinde yazılır.

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \qquad (a > 0 \text{ ve } a \neq 1)$$

dir. Buna göre

$$f : R \to (0, +\infty), \quad f(x) = a^x$$

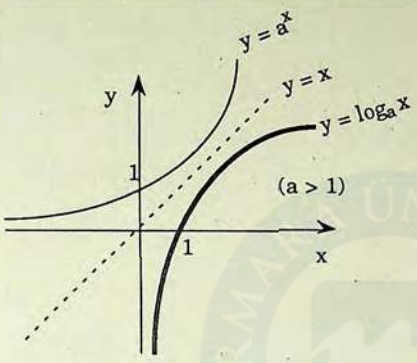
üstel fonksiyonun ters fonksiyonu

$$f^{-1} : (0, +\infty) \to R, \quad f^{-1}(x) = \log_a x$$

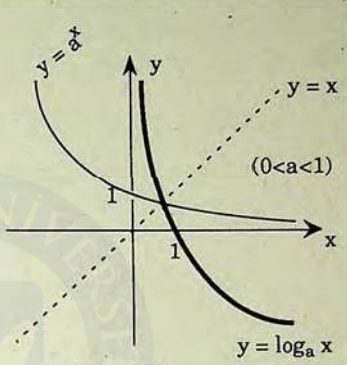
olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y = a^x$ ile $y = \log_a x$ fonksiyonları ters fonksiyonlar olduklarından grafikleri 1. açıortaya göre simetriktir. Buna göre $y = \log_a x$ in grafiği $a > 1$ için 50. şekilde, $0 < a < 1$ için de 51. şekilde çizilmiştir.



(50. şekil)



(51. şekil)

4.17. LOGARİTMA FONKSİYONUNUN ÖZELLİKLERİ

$y = \log_a x$ fonksiyonunun yukarıdaki tanımından ve grafiğinden aşağıdaki özellikler kolayca çıkarılabilir.

1°) Yalnız pozitif sayıların logaritmaları vardır. Sıfırın ve negatif sayıların logaritmaları yoktur.

2°) $a^0 = 1$ olduğundan $\log_a 1 = 0$ dır. (1 in her tabanda logaritması sıfıra eşittir).

3°) $a^1 = a$ olduğundan $\log_a a = 1$ dir. (Tabanın logaritması 1 e eşittir)

4°) $a > 1$ ise 1 den büyük sayıların logaritmaları pozitif, 1 den küçük sayıların logaritmaları negatiftir. Bu durumda

$$\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$$

olur. $0 < a < 1$ ise 1 den büyük sayıların logaritmaları negatif, 1 den küçük sayıların logaritmaları pozitiftir. Bu durumda da

$\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = -\infty$ ve $\lim_{x \to 0^+} (\log_a x) = +\infty$

olur.

4.18. LOGARİTMA FORMÜLLERİ

Aşağıdaki formüller logaritmanın tanımı ve özelliklerinden yararlanılarak bulunabilir.

1°) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

2°) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

3°) $\log_a u^n = n \cdot \log_a u$

4°) $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

5°) $a^{\log_a x} = x$

6°) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (Taban değiştirme formülü)

7°) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

Örnek olarak 1. formülü ispatlayalım.

$\log_a u = x$ ve $\log_a v = y$ olsun. Buradan $a^x = u$ ve $a^y = v$ yazılır. Bu iki eşitliğin taraf tarafa çarpılmasıyla $a^x \cdot a^y = u \cdot v$ veya $a^{x+y} = u.v$ bulunur. Buradan da logaritmik eşitliğe geçilerek

$$\log_a (u \cdot v) = x + y = \log_a u + \log_a v$$

elde edilir.

4.19. 10 TABANLI LOGARİTMA VE DOĞAL LOGARİTMA

Pratikte en çok 10 tabanlı logaritma kullanılır. Bir $x \in R$ sayısının 10 tabanına göre logaritması $10^y = x$ eşitliğini sağlayan y sayısıdır. Bu eşitlikten $y = \log_{10} x$ veya yalnızca $y = \log x$ yazılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çok kullanılan diğer bir logaritma türü de tabanı, yüksek matematikte önemli bir yeri bulunan e sayısı olan logaritmadır. Buna doğal logaritma denir. e irrasyonel bir sayı olup ondalık açılımı

$$e = 2,\ 71828182845....$$

şeklindedir. Bir $x \in R^+$ sayısının doğal logaritması $e^y = x$ eşitliğini sağlayan y sayısıdır. Bu eşitlikten x in doğal logaritması $y = \ln x$ şeklinde yazılır.

4.20. e SAYISININ TANIMI e sayısı adını 18. yüzyılda yaşamış İsviçreli matematikçi Euler'den almış olup

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

limitiyle tanımlanır. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ ifadesinde x' e sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000, 10000 değerlerinin verilmesiyle bulunan sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

x	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,37	2,441	2,488	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181

Bu çizelge e sayısı hakkında bize bir fikir verir. Şimdi e sayısını veren yukarıdaki limiti Binom formülünden yararlanarak inceleyelim.

Binom formülüne göre:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1 + \frac{x}{1!}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x(x-1)}{2!}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\left(\frac{1}{x}\right)^3 + ...$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1 - \frac{1}{x}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)}{3!} + ...$$

dır. Buradan $x \to \infty$ için limite geçilerek

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Eşitliğin solundaki limit e sayısını verdiğinden

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots$$

dir. Bu eşitlikten yararlanılarak e sayısının 2,5 ile 3 arasında olduğu gösterilebilir. Baştan ilk 3 terimin toplamı 2,5 olduğundan $e > 2{,}5$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $n > 2$ için $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan yukarıdaki eşitlikten

$$e - 1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots.$$

yazılabilir. Sağ taraftaki $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots.$ toplamı ilk terimi $a = 1$ ve ortak çarpanı $r = \frac{1}{2}$ olan bir geometrik seri olduğundan bu toplam

$$S = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

dir. Buna göre $e - 1 < 2$ veya $e < 3$ bulunur. O halde $2{,}5 < e < 3$ yazılabilir.

4.21. $y = \log_a x$ FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$$y = \log_a x \Rightarrow y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

$$\Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. $\frac{x}{\Delta x} = u$ konursa $\Delta x \to 0$ için $u \to \infty$ olacağından

$$y' = \lim_{u \to \infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \right] = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

bulunur. Çünkü $u \to \infty$ için $\left(1 + \frac{1}{u} \right)^u \to e$ dir. O halde

$$y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

dir. Buradan $u = f(x)$ olmak üzere $y = \log_a u$ nun türevi, türevde zincir kuralı uygulanarak

$$y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$$

bulunur. Tabanın e sayısı olma durumunda ise

$$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \qquad (u = f(x))$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \qquad \text{olur.}$$

ÖRNEK 1: $y = \log_2 (x^2 - 1) \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $x^2 - 1 = u$ konursa $y = \log_2 u$ olur. Buradan

$$y' = \frac{u'}{u} \log_2 e = \frac{2x}{x^2 - 1} \log_2 e \qquad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 2: $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $x + \sqrt{x^2 - a^2} = u$ konursa $y = \ln u$ olur. $y' = \frac{u'}{u}$ olup buna göre

$$y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 3: $y = \ln(\ln x) \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $y' = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$

ÖRNEK 4: $y = \ln \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^4}} \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $y = 2 \ln x - \dfrac{4}{3} \ln (1 - x^2)$

şeklinde yazılabilir. Buradan türev alarak

$$y' = \frac{2}{x} - \frac{4}{3} \cdot \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{6(1-x^2)+8x^2}{3x(1-x^2)} = \frac{2(x^2+3)}{3x(1-x^2)}$$

bulunur.

ÖRNEK 5: $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $y = \dfrac{1}{2}\left[\ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x)\right]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{1-\cos x} - \frac{-\sin x}{1+\cos x}\right] = \frac{1}{2} \cdot \sin x \left[\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right]$$

$$y' = \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\sin x}{2} \cdot \frac{2}{\sin^2 x} = \operatorname{Cosec} x$$

ÖRNEK 6: $y = \ln(x+1) \Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = ?$

Çözümü: $y' = \dfrac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} \Rightarrow y'' = -1 \cdot (x+1)^{-2}$

$\Rightarrow y''' = 1 \cdot 2 \cdot (x+1)^{-3} \Rightarrow y^{(4)} = -1.2.3.(x+1)^{-4}$

dür. Buna göre n. sıradan türev

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, 1.2.3.....(n-1)\,(x+1)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}\,.\,(n-1)!}{(x+1)^n}$$

olur.

ÖRNEK 7: $\ln(x^2 + y^2) = \text{Arctan}\,\frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = ?$

Çözümü: Her iki tarafın x e göre türevini alırsak

$$\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} = \frac{\dfrac{xy' - y}{x^2}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow 2x + 2yy' = xy' - y \Rightarrow 2x + y = (x - 2y)\,.\,y' \Rightarrow y' = \frac{2x + y}{x - 2y}$$

4.22. LOGARİTMİK TÜREV ALMA $y = f(x)$ fonksiyonu birkaç çarpandan oluşuyorsa veya u ile v , x e bağlı fonksiyonlar olmak üzere $y = u^v$ şeklindeyse her iki tarafın doğal logaritması alınarak y' türevi kolayca bulunabilir. Buna logaritmik türev alma denir.

ÖRNEK 1: $y = (x^3 + 2)^2\,(1 - x^2)^3 \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $\ln y = 2\ln(x^3 + 2) + 3\ln(1 - x^2)$

$$\frac{y'}{y} = 2\,.\,\frac{3x^2}{x^3 + 2} + 3\,.\,\frac{-2x}{1 - x^2}$$

$$y' = (x^3 + 2)^2\,(1 - x^2)^3\left[\frac{6x^2}{x^3 + 2} - \frac{6x}{1 - x^2}\right]$$

$$y' = 6x^2(x^3 + 2)(1 - x^2)^2 - 6x(x^3 + 2)^2(1 - x^2)^2$$

$$y' = 6x\,(x^3 + 2)(1 - x^2)^2\left[x(1 - x^2) - (x^3 + 2)\right]$$

$$y' = 6x\,(x^3 + 2)(1 - x^2)^2(-2x^3 + x - 2)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2: $y = x^x \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $\ln y = \ln x^x = x \cdot \ln x$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$y' = x^x (\ln x + 1)$$

ÖRNEK 3: $y = x^{\ln x} \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $\ln y = \ln x^{\ln x} = \ln x \cdot \ln x = (\ln x)^2$

$$\frac{y'}{y} = (2 \ln x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = 2 \cdot x^{(\ln x - 1)} \ln x$$

4.23. ÜSTEL FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

$y = a^x$ in Türevi : $y = a^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln a \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln a$

$y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

bulunur. Buna göre

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

dır. Buradan $u = f(x)$ olmak üzere $y = a^u$ nun türevi

$$y = a^u \Rightarrow y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$$

elde edilir. Tabanın e sayısı olma durumunda ise:

$$y = e^u \Rightarrow y' = e^u \cdot u'$$

$$y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

bulunur.

ÖRNEK 1: $y = 3^{x^2+3} \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $x^2 + 3 = u$ konursa $y = 3^u$ olur. Buradan

$y' = 3^u \cdot u' \cdot \ln 3 = 3^{x^2+3} \cdot 2x \cdot \ln 3 = 2x \cdot 3^{x^2+3} \cdot \ln 3$

elde edilir.

ÖRNEK 2: $y = x^2 \cdot e^x \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $y' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) e^x$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 3: $y = \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $y' = \dfrac{\left(2e^{2x} + 2e^{-2x}\right)\left(e^{2x} + e^{-2x}\right) - \left(2e^{2x} - 2e^{-2x}\right)\left(e^{2x} - e^{-2x}\right)}{\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2}$

$$y' = 2 \cdot \frac{\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2 - \left(e^{2x} - e^{-2x}\right)^2}{\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2} = 2 \cdot \frac{e^{4x} + 2 + e^{-4x} - e^{4x} + 2 - e^{-4x}}{\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2}$$

$$y' = \frac{8}{\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)^2}$$

ÖRNEK 4: $y = \text{Arctan } e^x \Rightarrow y' = ?$

Çözümü: $y' = \dfrac{e^x}{1 + \left(e^x\right)^2} = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$

ÖRNEK 5: $y = e^x \cdot \text{Sin } 2x \Rightarrow y'' = ?$

Çözümü: $y' = e^x \cdot \text{Sin } 2x + e^x \cdot 2 \text{ Cos } 2x = e^x (\text{Sin } 2x + 2 \text{ Cos } 2x)$

$y'' = e^x (\text{Sin } 2x + 2 \text{ Cos } 2x) + e^x (2 \text{ Cos } 2x - 4 \text{ Sin } 2x)$

$y'' = e^x (4 \text{ Cos } 2x - 3 \text{ Sin } 2x)$

ÖRNEK 6: $y = x \cdot e^x \Rightarrow y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = ?$

Çözümü: $y' = e^x + xe^x = (1 + x)\, e^x$

$y'' = e^x + (1 + x) \cdot e^x = (2 + x) \cdot e^x$

$y''' = e^x + (2 + x) \cdot e^x = (3 + x)\, e^x$ dir. Buna göre

$y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = (n + x) \cdot e^x$ olur.

ALIŞTIRMALAR

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki eşitliklerden x i bulunuz.

1) $\log_2 \sqrt[3]{4} = x$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

2) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ (4)

3) $\log_{27} x = -\frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

4) $\log(\ln x) = 2$ (e^{100})

5) $\log_2(\log_x 16) = 3$ $(\sqrt{2})$

6) $\log_x 10 = \log_{10x} \sqrt{10}$ $\left(\frac{1}{100}\right)$

7) $e^{\ln x} + a^{2\log_a x} = 6$ (2)

8) $\log 2 + \log 50 = x$ (2)

9) $\log_x 10 - \log_x 50 = -1$ (5)

10) $\log_2(x-2) + \log_2 x = 3$ (4)

11) $2 \ln(x+1) - \ln(x^2 - 5) = 2 \ln 2$ (3)

Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

12) $\log(x^2 + 4x - 2) > 1$ $x < -6 \vee x > 2$

13) $\frac{(x-4)(x+1)}{\log(x-2)} > 0$ $2 < x < 3 \vee x > 4$

Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulunuz.

14) $f(x) = 10^{2x-4}$ $f^{-1}(x) = \log \sqrt{x} + 2$

15) $f(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x}$ $f^{-1}(x) = 2\ln\frac{3}{x}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

16) $f(x) = \text{Arctan } e^{x}$ $\qquad f^{-1}(x) = \ln(\text{Tan } x)$

17) $f(x) = \text{Arccos } 2^{-x}$ $\qquad f^{-1}(x) = \log_2(\text{Sec } x)$

18) $f(x) = \ln(x + 1) - \ln(x - 1)$ $\qquad f^{-1}(x) = \dfrac{e^{x} + 1}{e^{x} - 1}$

19) $f(x) = \ln(\text{Sin } x)$ $\qquad f^{-1}(x) = \text{Arcsin } e^{x}$

Aşağıdaki fonksiyonların en geniş tanım kümelerini bulunuz.

20) $y = (x^{2} - 4)\, e^{-x}$ $\qquad R$

21) $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}\, e^{\frac{1}{x}}$ $\qquad R - \{0, 1\}$

22) $y = \ln \dfrac{x^{2} - 1}{x}$ $\qquad (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

23) $y = \ln \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^{2}}}$ $\qquad (0, 2)$

24) $y = \dfrac{x - \ln x}{\ln x}$ $\qquad R^{+} - \{1\}$

25) $y = \sqrt{\log(x^{2} + 4x - 4)}$ $\qquad (-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$

26) $y = \text{Arccos}\left(\log \dfrac{x}{2}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{1}{5}, 20\right]$

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

27) $y = \dfrac{1}{x} \cdot \ln x$ $\qquad y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^{2}}$

28) $y = \dfrac{x^{2}}{(3x + 2)^{3}}$ $\qquad y' = \dfrac{-3x^{2} + 4x}{(3x + 2)^{4}}$

29) $y = \log_5 \frac{2x}{x^2 + 1}$ $\quad y' = \frac{1 - x^2}{x(x^2 + 1)} \log_5 e$

30) $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ $\quad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

31) $y = \log\left[x(x + 2)^3\right]$ $\quad y' = \frac{4x + 2}{x(x + 2)} \log e$

32) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Sin} x}{1 - \operatorname{Sin} x}}$ $\quad y' = \operatorname{Sec} x$

33) $y = \ln \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3 + 1}}$ $\quad y' = \frac{-x^3 + 2}{3x(x^3 + 1)}$

34) $y = \operatorname{Arccos}(\ln x)$ $\quad y' = \frac{-1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$

35) $y = x \operatorname{Arctan} x - \ln \sqrt{x^2 + 1}$ $\quad y' = \operatorname{Arctan} x$

36) $y = x(\operatorname{Sin} \ln x - \operatorname{Cos} \ln x)$ $\quad y' = 2 \operatorname{Sin} \ln x$

37) $y = x \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ $\quad y' = 2\sqrt{x^2 + a^2}$

38) $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ $\quad y' = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

39) $y = e^{\sqrt{x}}$ $\quad y' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

40) $y = 10^{\operatorname{Sin}^2 x}$ $\quad y' = 10^{\operatorname{Sin}^2 x} \cdot \operatorname{Sin} 2x \cdot \ln 10$

41) $y = \frac{e^x}{x^n}$ $\quad y' = \frac{e^x (x - n)}{x^{n+1}}$

42) $y = e^{2x} \cdot \text{Cos } 2x$ $\quad y' = 2e^{2x}(\text{Cos } 2x - \text{Sin } 2x)$

43) $y = \ln \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1}$ $\quad y' = \dfrac{1}{e^{x} + 1}$

44) $y = e^{\text{Sinx}} + \ln(\text{Cosx})$ $\quad y' = \text{Cos } x \cdot e^{\text{Sinx}} - \text{Tan } x$

45) $y = \ln\left(e^{2x} \cdot \sqrt{\text{Sinx}}\right)$ $\quad y' = 2 + \dfrac{1}{2}\text{Cot } x$

46) $y = x^{x+2}$ $\quad y' = x^{x+1}(x \ln x + x + 2)$

47) $y = x^{(e^{x})}$ $\quad y' = x^{(e^{x})} \cdot \left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right) \cdot e^{x}$

48) $y = \sqrt[x]{x}$ $\quad y' = \sqrt[x]{x^{1-2x}}\ (1 - \ln x)$

49) $y = x^{\text{Sin } x}$ $\quad y' = x^{\text{Sin } x}\left(\text{Cos } x \cdot \ln x + \dfrac{\text{Sin } x}{x}\right)$

50) $x + y = e^{y}$ $\quad y' = \dfrac{1}{x + y - 1}$

51) $y = e^{1-x^2}$ eğrisine $y = 1$ doğrusu ile kesiştiği noktalardan çizilen teğetlerin denklemlerini bulunuz.

$$(y = 2x + 3 \quad , \quad y = -2x + 3)$$

52) $y = \ln\left(\text{Tan}\dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{\text{Cos } x}{\text{Sin}^{2} x}$, eğrisinin $x = \dfrac{\pi}{2}$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz

$$\left(y = 2x - \pi \quad , \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$$

4.24. HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tanım: $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ denklemiyle verilen fonksiyona **hiperbolik sinüs fonksiyonu** denir ve $y = \text{Sinh } x$ şeklinde yazılır.

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ denklemiyle verilen fonksiyona **hiperbolik kosinüs fonksiyonu** denir ve $y = \text{Cosh } x$ şeklinde yazılır.

$y = \frac{\text{Sinh } x}{\text{Cosh } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ denklemiyle verilen fonksiyona **hiperbolik tanjant fonksiyonu** denir ve $y = \text{Tanh } x$ şeklinde yazılır.

$y = \frac{1}{\text{Tanh } x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $(x \neq 0)$ ile verilen fonksiyona **hiperbolik kotanjant fonksiyonu** denir ve $y = \text{Coth } x$ şeklinde yazılır.

$y = \frac{1}{\text{Cosh } x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ ile verilen fonksiyona **hiperbolik sekant fonksiyonu** denir ve $y = \text{Sech } x$ şeklinde yazılır.

$y = \frac{1}{\text{Sinh } x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$ $(x \neq 0)$ ile verilen fonksiyona **hiperbolik kosekant fonksiyonu** denir ve $y = \text{Cosech } x$ şeklinde yazılır.

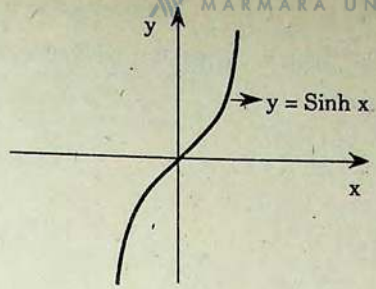
1°) $y = \text{Sinh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ fonksiyonu $\forall x \in R$ için tanımlı ve süreklidir. $\text{Sinh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{Sinh } x$ olduğundan tek fonksiyondur ve bu nedenle grafiği orijine göre simetriktir. $\lim_{x \to -\infty} y = -\infty$ ve $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$ dur. Türevi

$$y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{Cosh } x$$

olup $\forall x \in R$ için $y' > 0$ dır. Fonksiyonun değişim tablosu ve grafiği aşağıdadır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(52. şekil)

2°) $y = \text{Cosh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ fonksiyonu $\forall x \in R$ için tanımlı ve süreklidir. $\text{Cosh } (-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{Cosh } x$ olduğundan çift fonksiyondur. Bu nedenle grafiği y eksenine göre simetriktir.

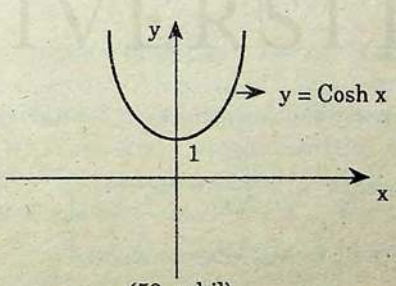
$$\lim_{x \to \pm\infty} y = +\infty$$

dur. Türevi

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{Sinh } x$$

olup $y' = 0$ için $x = 0$ dır. Tablo ve grafik aşağıdadır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	1 (min)	↗	$+\infty$



(53. şekil)

3°) $y = \text{Tanh } x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ fonksiyonu $\forall x \in R$ için tanımlı ve süreklidir. Tanh $(-x) = -$ Tanh x olduğundan tek fonksiyondur.

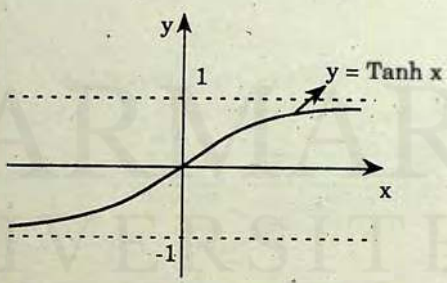
$$y = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

olup $\lim_{x \to -\infty} y = -1$ ve $\lim_{x \to +\infty} y = 1$ dir.

$$y' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{\text{Cosh}^2 x} = \text{Sech}^2 x$$

olup $\forall x \in R$ için $y' > 0$ dır.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		+	
y	-1	↗	0	↗	1



(54. şekil)

4°) Yukarıda incelediğimiz üç fonksiyonun çarpmaya göre tersleri

$$\frac{1}{\text{Sinh } x} = \text{Cosech } x \;,\; \frac{1}{\text{Cosh } x} = \text{Sech } x \;,\; \frac{1}{\text{Tanh } x} = \text{Coth } x$$

olarak tanımlanmıştı. Bu fonksiyonların türevleri:

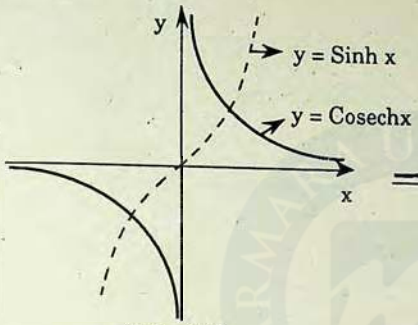
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y = \text{Cosech } x \Rightarrow y' = -\text{Cosech } x \,.\, \text{Coth } x$

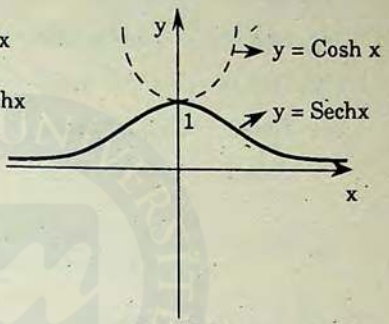
$y = \text{Sech } x \Rightarrow y' = -\text{Sech } x \,.\, \text{Tanh } x$

$y = \text{Coth } x \Rightarrow y' = -\text{Cosech}^2 x$

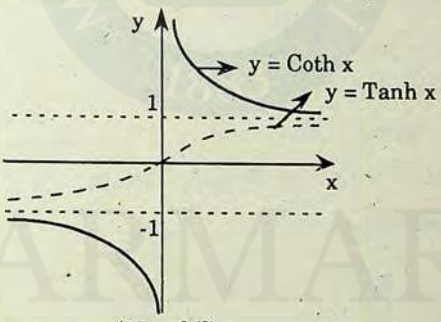
olup grafikleri aşağıdadır.



(55. şekil)



(56. şekil)



(57. şekil)

Hiperbolik fonksiyonlarla trigonometrik fonksiyonlar arasında büyük bir benzerlik vardır. Trigonometrik fonksiyonlara dairesel fonksiyonlar da denir. Çünkü $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerindeki bir N noktasının koordinatları N (Cost, Sint) olarak alınabilir. ($\text{Cos}^2 t + \text{Sin}^2 t = 1$ olduğunu düşününüz). Tıpkı bunun gibi $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolü üzerindeki bir N noktasının koordinatları da N (Cosht , Sinht) olarak alınabilir. Çünkü $\text{Cosh}^2 t - \text{Sinh}^2 t = 1$ dir. Bu nedenle $y = \text{Cosh } x$ ve $y = \text{Sinh } x$ fonksiyonlarına dairesel fonksiyonlara benzer olarak hiperbolik kosinüs ve hiperbolik sinüs fonksiyonları denir.

4.25. HİPERBOLİK FONKSİYONLARA AİT FORMÜLLER

$x , y \in R$ olmak üzere

1) $\text{Cosh } x + \text{Sinh } x = e^x$

2) $\text{Cosh } x - \text{Sinh } x = e^{-x}$

3) $\text{Cosh}^2 x - \text{Sinh}^2 x = 1$

4) $\text{Sinh } (x \pm y) = \text{Sinh } x \text{ Cosh} y \pm \text{Cosh} x \text{ Sinh} y$

5) $\text{Cosh } (x \pm y) = \text{Cosh } x \text{ Cosh} y \pm \text{Sinh } x \text{ Sinh} y$

6) $\text{Sinh} 2x = 2 \text{ Sinh} x \text{ Cosh} x$

7) $\text{Cosh } 2x = \text{Cosh}^2 x + \text{Sinh}^2 x = 2 \text{ Cosh}^2 x - 1 = 1 + 2 \text{ Sinh}^2 x$

8) $\text{Tanh } (x \pm y) = \dfrac{\text{Tanh} x \pm \text{Tanh} y}{1 \pm \text{Tanh} x \text{ Tanh} y}$

9) $\text{Tanh } 2x = \dfrac{2 \text{ Tanh } x}{1 + \text{Tanh}^2 x}$

10) $1 - \text{Tanh}^2 x = \text{Sech}^2 x$

11) $1 - \text{Coth}^2 x = - \text{Cosech}^2 x$

12) $(\text{Cosh} x + \text{Sinh} x)^n = \text{Cosh} nx + \text{Sinh} nx$

Formüllerin çıkarılışı:

1) $\text{Cosh } x + \text{Sinh } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^x$

2) $\text{Cosh } x - \text{Sinh } x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$

3) 1 ve 2 eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$(\text{Cosh } x + \text{Sinh } x)(\text{Cosh } x - \text{Sinh } x) = e^x . e^{-x}$

$\text{Cosh}^2 x - \text{Sinh}^2 x = 1$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4) $\text{Sinh}(x+y) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \dfrac{1}{2}(e^x e^y - e^{-x} e^{-y})$

şeklinde yazılabilir. Burada e^x, e^y, e^{-x}, e^{-y} yerlerine 1 ve 2 formüllerine göre eşitleri konur ve kısaltılırsa

$$\text{Sinh}(x + y) = \text{Sinh}x\ \text{Cosh}y + \text{Cosh}\,x\ \text{Sinh}y$$

bulunur.

Diğer formüller de benzer şekilde bulunabilir.

ÖRNEK 1: $\text{Sinh}\,x = 2$ denklemini çözünüz.

Çözümü: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 2 \Rightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} = 4$

$$\Rightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = 2 \pm \sqrt{5}$$

bulunur. $\forall x \in R$ için $e^x > 0$ olduğundan $e^x = 2 + \sqrt{5}$ alınır. Buradan da $x = \ln(2 + \sqrt{5})$ bulunur.

ÖRNEK 2: $\text{Cosh}\,3x = 4\,\text{Cosh}^3x - 3\,\text{Cosh}\,x$ olduğunu gösteriniz.

Çözümü:

$$\begin{aligned}
\text{Cosh}\,3x &= \text{Cosh}(2x + x) \\
&= \text{Cosh}\,2x\ \text{Cosh}x + \text{Sinh}2x\ \text{Sinh}x \\
&= (2\,\text{Cosh}^2x - 1)\,\text{Cosh}x + 2\,\text{Sinh}x\ \text{Cosh}x\ \text{Sinh}x \\
&= 2\,\text{Cosh}^3x - \text{Cosh}x + 2\,\text{Cosh}\,x\,(\text{Cosh}^2x - 1) \\
&= 4\,\text{Cosh}^3x - 3\,\text{Cosh}x
\end{aligned}$$

ÖRNEK 3: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \text{Sinh}\,2x$

b) $y = \text{Tanh}(x^2 - 1)$

c) $y = \ln \text{Sinh}\dfrac{x}{2}$

d) $y = \text{Arctan}(\text{Sinh}\,x)$

e) $y = \text{Sinh}\,x + \dfrac{1}{3}\text{Sinh}^3 x$

f) $y = \text{Cosh}x\ \text{Cos}\,x + \text{Sinh}\,x\ \text{Sin}x$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü:

a) $y = \text{Sinh } x$ in türevi $y' = \text{Cosh } x$ idi. Buradan $u = f(x)$ olmak üzere $y = \text{Sinh}u$ fonksiyonunun türevi, türevde zincir kuralına göre

$$y' = \frac{dy}{dx} = u' \cdot \text{Cosh}u$$

olur. Buna göre

$$y = \text{Sinh } 2x \Rightarrow y' = 2 \text{ Cosh } 2x$$

bulunur.

b) $y = \text{Tanh } x \Rightarrow y' = \text{Sech}^2 x$

idi. Buradan $u = f(x)$ olmak üzere

$$y = \text{Tanh } u \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = u' \cdot \text{Sech}^2 u$$

olur. Buna göre

$$y = \text{Tanh } (x^2 - 1) \Rightarrow y' = 2x \cdot \text{Sech}^2 (x^2 - 1)$$

bulunur.

c) $$y = \ln \text{Sin h} \frac{x}{2} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}\text{Cosh}\frac{x}{2}}{\text{Sin h}\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\text{Coth}\frac{x}{2}$$

d) $$y = \text{Arctan (Sinhx)} \Rightarrow y' = \frac{\text{Coshx}}{1 + \text{Sinh}^2 x} = \frac{\text{Coshx}}{\text{Cosh}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\text{Coshx}} = \text{Sechx}$$

e) $$y = \text{Sinh } x + \frac{1}{3}\text{Sinh}^3 x \Rightarrow y' = \text{Coshx} + \text{Sinh}^2 x \text{ Coshx}$$
$$= \text{Coshx}(1 + \text{Sinh}^2 x)$$
$$= \text{Cosh}^3 x$$

f) $y = \text{Coshx Cosx} + \text{Sinhx Sinx}$

$y' = \text{Sinhx Cosx} - \text{Coshx Sinx} + \text{Coshx Sinx} + \text{Sinhx Cosx}$

$y' = 2 \text{ Sinhx Cosx}$

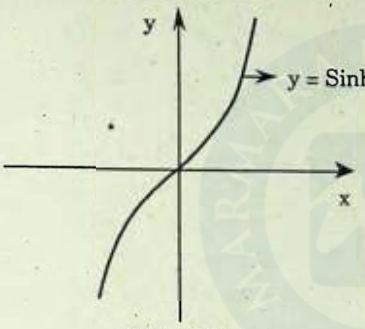
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4.26. TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

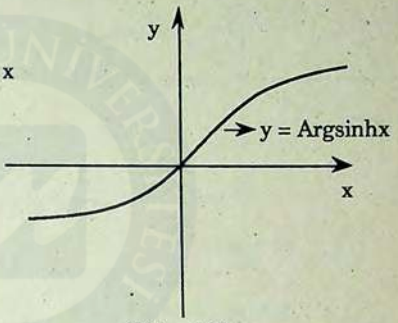
1°) $f(x) = \text{Sinh}x$ fonksiyonu $R \to R$, bire-bir ve örtendir. Bunun ters fonksiyonu

$$f^{-1} : R \to R \quad , \quad f^{-1}(x) = \text{Argsinh}x$$

(veya $f^{-1}(x) = \text{Sinh}^{-1}x$) olarak tanımlanır. $f^{-1}(x) = \text{Argsinh}x$ ters fonksiyonunun grafiği $f(x) = \text{Sinh}x$ grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetiği olur. (58. ve 59. şekiller)



(58. şekil)

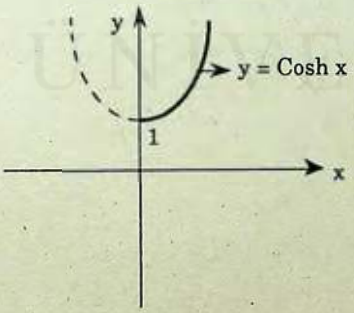


(59. şekil)

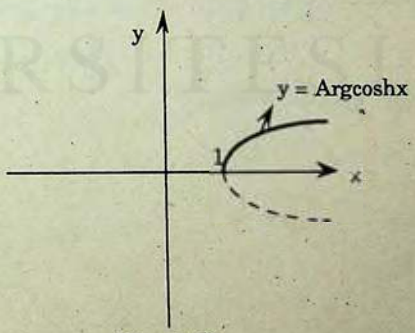
2°) $f(x) = \text{Cosh}x$ fonksiyonu $f : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ olarak alınırsa bire-bir ve örten olur. Bu durumda ters fonksiyonu

$$f : [1, +\infty) \to [0, +\infty) \quad , \quad f^{-1}(x) = \text{Argcosh}\,x$$

(veya $f^{-1}(x) = \text{Cosh}^{-1}x$) şeklinde tanımlanır.



(60. şekil)



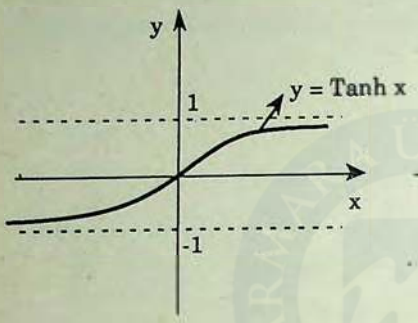
(61. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

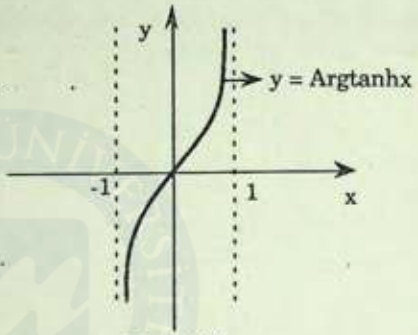
3°) $f(x) = \text{Tanh}x$ fonksiyonu $R \to (-1, 1)$, bire-bir örten fonksiyondur. Ters fonksiyonu

$$f^{-1} : (-1, 1) \to R \quad , \quad f^{-1}(x) = \text{Argtanh}x$$

şeklinde tanımlanır.



(62. şekil)



(63. şekil)

4°) Benzer şeklide:

$f : R - \{0\} \to R - [-1, 1]$, $f(x) = \text{Coth}x$,

$f : [0, +\infty) \to (0, 1]$, $f(x) = \text{Sech}x$,

$f : R - \{0\} \to R - \{0\}$, $f(x) = \text{Cosech}\ x$,

fonksiyonlarının ters fonksiyonları sırasıyla

$f^{-1} : R - [-1, 1] \to R - \{0\}$, $f^{-1}(x) = \text{Argcoth}x$

$f^{-1} : (0, 1] \to [0, +\infty)$, $f^{-1}(x) = \text{Argsech}\ x$

$f^{-1} : R - \{0\} \to R - \{0\}$, $f^{-1}(x) = \text{Argcosech}x$

şeklinde tanımlanır.

4.27. TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVLERİ

1°) $y = \text{Argsinh}x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

2°) $y = \text{Argcoshh}x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ $\quad (x > 1)$

3°) $y = \text{Argtanh}x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$ $\quad (-1 < x < 1)$

4°) $y = \text{Argcoth}x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - x^2}$ $\quad (x < -1 \vee x > 1)$

5°) $y = \text{Argsech}x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}$ $\quad (0 < x < 1)$

6°) $y = \text{Argcosech}x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$ $\quad (x \neq 0)$

Örnek olarak 1. ve 3. türev formüllerini çıkaralım.

1°) $y = \text{Argsinh}x \Rightarrow x = \text{Sinh}y$

dir. Her iki yanın x e göre türevini alırsak

$$1 = \text{Cosh}y \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{Cosh}y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Sinh}^2 y + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

bulunur.

3°) $y = \text{Argtanh}x \Rightarrow x = \text{Tanh}y$

dir. Her iki yanın x e göre türevi alınarak

$$1 = \text{Sech}^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{Sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \text{Tanh}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1: $\text{Argsinh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ olduğunu gösteriniz.

Çözümü: $\text{Argsinh}x = y \Rightarrow x = \text{Sinh}y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$ dir. Buradan

$$e^y - e^{-y} = 2x \quad \text{veya} \quad (e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$$

denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü ile

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

elde edilir. $\forall y \in R$ için $e^y > 0$ olduğundan $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ alınır. Buradan da

$$y = \text{Argsinh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

yazılabilir.

ÖRNEK 2: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\text{Argsinh}x - \ln x) = ?$

Çözümü: Örnek 1 den $\text{Argsinh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\lim_{x \to +\infty} (\text{Argsinh}x - \ln x) = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) - \ln x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}\right)$$

$$= \ln 2$$

bulunur.

ÖRNEK 3: Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \text{Argsinh}(e^x)$ b) $y = \text{Argcosh}(\ln x)$

c) $y = \text{Argtanh}\dfrac{2x}{x^2+1}$

Çözümü: a) $y = \text{Argsinh}x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ idi. $u = f(x)$ olmak üzere

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = \text{Argsinh}\, u \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$$

olur. Buna göre

$$y = \text{Argsinh}\,(e^x) \Rightarrow y' = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

bulunur.

$$\text{b)}\ y = \text{Argcosh}\, u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

dir. Buna göre

$$y = \text{Argcosh}\,(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln^2 x - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 x - 1}}$$

bulunur.

$$\text{c)}\ y = \text{Argtanh}\, u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1-u^2}$$

dir. Buna göre

$$y = \text{Argtanh}\,\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow y' = \frac{\dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}}{1 - \left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2 - 4x^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-2}{x^2-1}$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

1) $\dfrac{\text{Sinh } 2x}{1 + \text{Cosh}2x} = \text{Tanh } x$

2) $\text{Sinh}3x = 3\,\text{Sinh}x + 4\,\text{Sinh}^3 x$

3) $\text{Tanh}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{\text{Cosh}x - 1}{\text{Cosh}x + 1}$

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

4) $\text{Cosh}x = 2$ $\quad \left[x = \ln\,(2 \pm \sqrt{3}\,)\right]$

5) $2\,\text{Sinh}x + 3\,\text{Cosh}x = 3$ $\quad \left[x = 0\ ,\ x = -\ln 5\right]$

6) $\text{Sinh } x = \dfrac{3}{4}$ olduğuna göre diğer beş hiperbolik fonksiyonun değerlerini bulunuz.

$$\left(\text{Cosh } x = \frac{5}{4}\ ,\ \text{Tanh } x = \frac{3}{5}\ ,\ \text{Coth}x = \frac{5}{3}\ ,\ \text{Sech } x = \frac{4}{5}\ ,\ \text{Cosech } x = \frac{4}{3}\right)$$

7) $\text{Tanh}x = -\dfrac{7}{25}$ olduğuna göre Sinhx ve Coshx değerlerini bulunuz.

$$\left(\text{Sinh}x = -\frac{7}{24}\ ,\ \text{Cosh } x = \frac{25}{24}\right)$$

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

8) $y = \text{Sinh } (\ln x)$ $\quad y' = \dfrac{1}{x}\,\text{Cosh}(\ln x)$

9) $y = \text{Sinh}^2 3x$ $\quad y' = 3\,\text{Sinh } 6x$

10) $y = \ln (\text{Sinh}x^2)$ $\quad y' = 2x\,\text{Coth}x^2$

11) $y = \ln(\text{Tanh}2x)$ $\quad y' = 4\,\text{Cosech}\,4x$

12) $y = (\text{Cosh}x)^x$ $\quad y' = (\text{Cosh}x)^x[\ln \text{Cosh}x + x\,\text{Tanh}x]$

13) $y^2 + x\,\text{Cosh}y + \text{Sinh}^2 x = 25$ $\quad y' = -\dfrac{\text{Cosh}y + \text{Sinh}\,2x}{2y + x\,\text{Sinh}y}$

14) $x = \text{Cosh}(\ln y)$ $\quad y' = \dfrac{dy}{dx} = y\,\text{Cosech}(\ln y)$

15) $\text{Sinh}y = \text{Tan}x$ $\quad y' = \dfrac{dy}{dx} = \text{Sec}^2 x\,\text{Sech}y$

16) $\text{Arcsin}\,x = \text{Sech}y$ $\quad y' = -\dfrac{\text{Cosh}y\,\text{Coth}y}{\sqrt{1 - x^2}}$

Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

17) $\text{Argsinh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

18) $\text{Argcosh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $\quad (x \geq 1)$

19) $\text{Argtanh}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$ $\quad (|x| < 1)$

20) $\text{Argcoth}x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x + 1}{x - 1}$ $\quad (|x| > 1)$

21) $\text{Argsech}x = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$ $\quad (0 < x \leq 1)$

22) $\text{Argcosech}x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right)$ $\quad (x \neq 0)$

Aşağıdaki eşitliklerden x i bulunuz.

23) $\text{Argsinh}\dfrac{4}{3} = x$ $\quad (x = \ln 3)$

24) $\text{Argcoth}x = 1$ $\quad \left(x = \dfrac{e^2 + 1}{e^2 - 1}\right)$

25) $\lim_{x \to +\infty}$ (Argcoshx - lnx) limitini bulunuz.

(ln 2)

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

26) $y = \text{Argcosh } 3x$ $\quad y' = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2 - 1}}$

27) $y = \text{Argtanh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\quad y' = -\dfrac{1}{x^2 - 1}$

28) $y = \text{Argcoth}(\text{Sin } x)$ $\quad y' = \text{Secx}$

29) $y = \text{Argsinh}(\text{Tanx})$ $\quad y' = |\text{Secx}|$

30) $y = \text{Argtanh}(\text{Cosx})$ $\quad y' = -\text{Cosec x}$

31) $y = \dfrac{\text{Argcoth x}}{1 - x^2}$ $\quad y' = \dfrac{1 + 2x\ \text{Argcothx}}{(1 - x^2)^2}$

32) $y = \text{Argsech}(\text{Sin } 2x)$ $\quad y' = \begin{cases} -2\ \text{Cosec } 2x & , \ \text{Cos } 2x > 0 \ \text{ise} \\ 2\ \text{Cosec } 2x & , \ \text{Cos } 2x < 0 \ \text{ise} \end{cases}$

33) $y = 2\ \text{Argtanh}\left(\text{Tan}\dfrac{x}{2}\right)$ $\quad y' = \text{Secx}$

4.28 TÜREV FORMÜLLERİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Fonksiyon	Türevi
1) $y = c$ (c sabit)	$y' = 0$
2) $y = c \cdot u$ $u = f(x)$	$y' = c.u'$
3) $y = u \pm v \pm w \pm \ldots$	$y' = u' \pm v' \pm w' \pm \ldots$
4) $y = u \cdot v$	$y' = u' v + v' u$
5) $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' v - v' u}{v^2}$
6) $y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
7) $y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
8) $y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$
9) $y = \text{Sin } u$	$y' = \text{Cos } u \cdot u'$
10) $y = \text{Cos } u$	$y' = -\text{Sin } u \cdot u'$
11) $y = \text{Tan } u$	$y' = \text{Sec}^2 u \cdot u' = (1 + \text{Tan}^2 u) \cdot u'$
12) $y = \text{Cot } u$	$y' = -\text{Cosec}^2 u \cdot u' = -(1 + \text{Cot}^2 u) \cdot u'$
13) $y = \text{Sec } u$	$y' = \text{Sec } u \cdot \text{Tan } u \cdot u'$
14) $y = \text{Cosec } u$	$y' = -\text{Cosec } u \cdot \text{Cot } u \cdot u'$
15) $y = \text{Arcsin } u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
16) $y = \text{Arccos } u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
17) $y = \text{Arctan } u$	$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Fonksiyon	Türevi
18) $y = \text{Arccot } u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
19) $y = \text{Arcsec } u$	$y' = \frac{u'}{u.\sqrt{u^2-1}}$
20) $y = \text{Arccosec } u$	$y' = -\frac{u'}{u.\sqrt{u^2-1}}$
21) $y = a^u$	$y' = a^u . \ln a . u'$
22) $y = e^u$	$y' = e^u . u'$
23) $y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} . \log_a e$
24) $y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
25) $y = \text{Sin hu}$	$y' = \text{Cosh } u . u'$
26) $y = \text{Cosh } u$	$y' = \text{Sinhu} . u'$
27) $y = \text{Tanh } u$	$y' = \text{Sech}^2 u . u' = (1 - \text{Tanh}^2 u) u'$
28) $y = \text{Coth } u$	$y' = -\text{Cosech}^2 u . u' = (1 - \text{Coth}^2 u) . u'$
29) $y = \text{Sech } u$	$y' = -\text{Sech } u . \text{Tanhu} . u'$
30) $y = \text{Cosechu}$	$y' = -\text{Cosechu} . \text{Cothu} . u'$
31) $y = \text{Argsinhu}$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
32) $y = \text{Argcoshu}$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

33) $y = Argtanhu$	$y' = \frac{u'}{1 - u^2}$
34) $y = Argcothu$	$y' = \frac{u'}{1 - u^2}$
35) $y = Argsechu$	$y' = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1 - u^2}}$
36) $y = Argcosechu$	$y' = -\frac{u'}{\lvert u \rvert \cdot \sqrt{1 + u^2}}$

4.29 DİFERANSİYEL

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $f'(x)$ türevi ile değişkenin Δx artmasının çarpımına **bu fonksiyonun diferansiyeli** denir ve dy veya df(x) simgeleri ile gösterilir.

Bu tanıma göre

$dy = y' \cdot \Delta x$ veya $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$

dir. x bağımsız değişkeninin diferansiyeli

$$dx = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

olup x in artma miktarına eşittir. Buna göre

$dy = y' \cdot dx$ veya $df(x) = f'(x) \cdot dx$

olur. Görülüyor ki bir fonksiyonun diferansiyeli, bu fonksiyonun türevi ile değişkenin diferansiyelinin çarpımına eşittir. Bu eşitlikten, bir fonksiyonun türevi, değişkenin ve fonksiyonun diferansiyelleri cinsinden

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{veya} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

şeklinde yazılabilir.

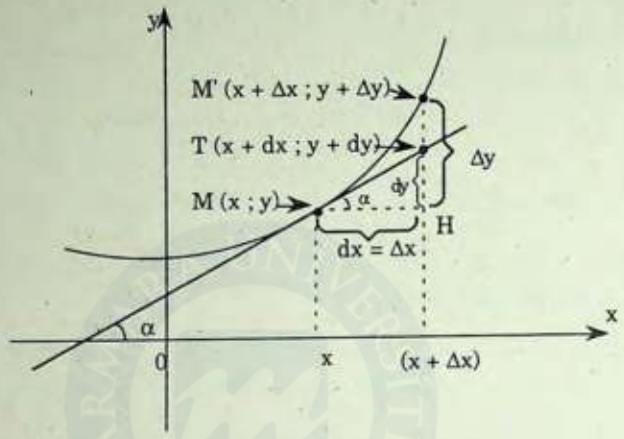
ÖRNEK 1: $y = x^3 - 2x + 5$ fonksiyonunda $y' = 3x^2 - 2$ olduğundan $dy = (3x^2 - 2)\,dx$ dir.

ÖRNEK 2: $y = Sin^2x$ fonksiyonunda $y' = 2\,Sinx \cdot Cos\,x = Sin2x$ olduğundan $dy = Sin\,2x \cdot dx$ dir.

4.30 DİFERANSİYELİN GEOMETRİK ANLAMI:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisi üzerinde $M(x ; y)$ ile $M'(x + \Delta x ; y + \Delta y)$ noktalarını alalım. (64. şekil)



(64. şekil)

Şekle göre

$|MH| = \Delta x = dx$ ve $|M'H| = \Delta y$ dir. Türevin geometrik anlamına göre

$$y' = m_{MT} = \text{Tan}\,\alpha = \frac{|TH|}{|MH|} = \frac{|TH|}{dx}$$

dir. Buradan

$$y' \cdot dx = |TH|$$

yazılabilir. Sol yan $y = f(x)$ fonksiyonunun dy diferansiyeli olduğundan

$$dy = |TH|$$

olur. Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonun diferansiyeli, x in Δx artmasına karşılık y ordinatının, $M(x ; y)$ noktasından eğriye çizilen teğet üzerindeki artma miktarıdır. Dikkat edilirse $\Delta x = dx$ ama $\Delta y \neq dy$ dir. Şekilden $\Delta y - dy = |M'T|$ yazılabilir. Δx in yeteri kadar küçük seçilmesi halinde $\Delta y \equiv dy$ alınabilir.

ÖRNEK 1: $y = f(x) = x^2 + 3x$ fonksiyonu için x in Δx artmasına karşılık Δy artmasını ve dy diferansiyelini bulunuz.

Çözümü: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) - (x^2 + 3x)$

$= (2x + 3)\,\Delta x + (\Delta x)^2$

dir. dy diferansiyeli ise

$$dy = y' \cdot dx = (2x + 3)\,dx = (2x + 3) \cdot \Delta x$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunda x , x = 2 den itibaren $\Delta x = 0{,}01$ kadar artırılıyor. y nin gerçek değişimi olan Δy yi ve dy diferansiyelini bulunuz.

Çözümü: $\Delta y = (2{,}01)^3 - (2)^3 = 8{,}120601 - 8 = 0{,}120601$ dir. y deki değişimin yaklaşık değeri diferansiyelle, x = 2 , dx = 0,01 alınarak

$$dy = y' \cdot dx = 3x^2\,dx = 3.2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}12$$

olarak bulunur. $\Delta y - dy = 0{,}000601$ olup çok küçüktür. Buradan da yaklaşık hesaplamalarda $\Delta y \cong dy$ alınabileceği görülebilir.

4.31 DİFERANSİYEL KURALLARI

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli, $dy = y' \cdot dx$ formülü ile kolayca bulunabilir. Diğer taraftan bu formülden, diferansiyel alma kuralların türev alma kuralları ile aynı olduğu da görülebilir. Örneğin

$$y = u \cdot v \Rightarrow dy = y' \cdot dx = (u'v + v'u)\,dx = u'v \cdot dx + v'u\,dx$$

dir. $u'\,dx = du$ ve $v'\,dx = dv$ olduğuna göre

$$y = u \cdot v \Rightarrow dy = v \cdot du + u \cdot dv$$

bulunur.

Bazı diferansiyel formülleri aşağıda verilmiştir.

Fonksiyon		Diferansiyeli
1°) $y = c$	(c sabit)	$dy = 0$
2°) $y = c \cdot u$		$dy = c \cdot du$
3°) $y = u \pm v \pm w \pm \ldots$		$dy = du \pm dv \pm dw \pm \ldots$
4°) $y = u \cdot v$		$dy = v \cdot du + u \cdot dv$

5°) $y = \frac{u}{v}$ $dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$

6°) $y = u^n$ $dy = nu^{n-1}\, du$

7°) $y = \text{Sin}u$ $dy = \text{Cos}\, u \,.\, du$

8°) $y = \text{Cos}\, u$ $dy = -\,\text{Sin}\, u \,.\, du$

9°) $y = e^u$ $dy = e^u \,.\, du$

10) $y = \ln u$ $dy = \frac{du}{u}$

ÖRNEK 1: Aşağıdaki fonksiyonların diferansiyellerini bulunuz.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ b) $y = (x^2 - 3)^{5/2}$ c) $y = \text{Cos}^3 2x$

Çözümü:

a) $dy = d(x^3) - d(2x^2) + d(3x) - d(5)$ (3. formül)

$= 3x^2\, dx - 4x \,.\, dx + 3dx$

$= (3x^2 - 4x + 3)\, dx$

b) $dy = d(x^2 - 3)^{5/2} = \frac{5}{2}(x^2 - 3)^{3/2}\, d(x^2 - 3)$ (6. formül)

$= \frac{5}{2}(x^2 - 3)^{3/2} \,.\, 2x \,.\, dx = 5x(x^2 - 3)^{3/2}\, dx$

c) $dy = d(\text{Cos}^3 2x) = 3\,\text{Cos}^2 2x \,.\, d(\text{Cos}2x)$

$= 3\,\text{Cos}^2 2x \,.\, (-2\,\text{Sin}\, 2x \,.\, dx)$

$= -6\,\text{Cos}^2 2x \,.\, \text{Sin}\, 2x \,.\, dx$

ÖRNEK 2: $x^3 + x^2y - 2y^2 = 3$ kapalı fonksiyonunda önce dy diferansiyelini, sonra bundan yararlanarak $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözümü: $d(x^3) + d(x^2y) - d(2y^2) = d(3)$

$3x^2 \,.\, dx + y \,.\, d(x^2) + x^2 \,.\, dy - 4y \,.\, dy = 0$

$3x^2\, dx + y \,.\, 2x \,.\, dx + x^2 dy - 4y \,.\, dy = 0$

$(x^2 - 4y)\, dy = -(3x^2 + 2xy)\, dx$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$dy = -\frac{(3x^2 + 2xy)}{x^2 - 4y}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 - 4y}$$

ÖRNEK 3: $y = e^{x/y}$ olduğuna göre dy ve $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

Çözümü: $y = e^{x/y} \Rightarrow \ln y = \frac{x}{y}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{ydx - x\,dy}{y^2}$$

$$\Rightarrow y\,dy = ydx - xdy$$

$$\Rightarrow (x + y) \cdot dy = y \cdot dx$$

$$\Rightarrow dy = \frac{y}{x + y}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y}$$

ÖRNEK 4: $x = 2 \operatorname{Sin} t + \operatorname{Cos} 2t$ ve $y = 2 \operatorname{Cost} + \operatorname{Sin} 2t$ olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

Çözümü: $dx = (2 \operatorname{Cost} - 2 \operatorname{Sin} 2t)\,dt$ ve

$dy = (-2\operatorname{Sin} t + 2 \operatorname{Cos} 2t)\,dt$ dir. Buradan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Cos} 2t - \operatorname{Sin} t}{\operatorname{Cost} - \operatorname{Sin} 2t}$$

bulunur.

4.32. DİFERANSİYEL YARDIMIYLA YAKLAŞIK HESAPLAMA

$y = f(x)$ fonksiyonunda x e verilen Δx artması için y nin Δy değişme miktarının $\Delta y \equiv dy$ olduğunu biliyoruz. Bu özellik, fonksiyon artışlarının yaklaşık olarak diferansiyelle bulunabilmesini sağlar ki bu da hesaplamayı kolaylaştırır. Çünkü dy yi bulmak, y nin gerçek artışı olan Δy yi bulmaktan daha kolaydır.

ÖRNEK 1: $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ fonksiyonunda x değişkeni $x = 3$ den $x = 3{,}02$ ye kadar artırılıyor. y deki değişimi diferansiyelle yaklaşık olarak bulunuz.

Çözümü: $x = 3$, $\Delta x = dx = 0{,}02$ alınarak

$$dy = y' \cdot dx = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{-8}{10^2} \cdot 0{,}02 = -0{,}0016$$

bulunur. Buna göre x, $x = 3$ den itibaren $\Delta x = 0{,}02$ kadar artırılırsa y, yaklaşık olarak $dy = -0{,}0016$ kadar değişir. (0,0016 azalır).

ÖRNEK 2: $\sqrt[3]{127}$ nin değerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

Çözümü: $y = \sqrt[3]{x}$ fonksiyonunda $x = 125$ için $y = \sqrt[3]{125} = 5$ dir. x e $\Delta x = 2$ artması verelim.

$$dy = y' \cdot dx = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}\, dx = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{125^2}} \cdot 2 = \frac{2}{75} = 0{,}02\overline{6}$$

bulunur. O halde

$$\sqrt[3]{127} = \sqrt[3]{125} + \Delta y \equiv \sqrt[3]{125} + dy = 5 + 0{,}02\overline{6} = 5{,}02\overline{6}$$

dır.

ÖRNEK 3: Yarıçapı $r = 10$ cm olan bir metal levha ısıtılınca genleşerek $r = 10{,}05$ cm olmaktadır. Alandaki yaklaşık artışı bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: Dairenin alanı $s = \pi r^2$ olup $r = 10$ cm ve $dr = 0{,}05$ cm. alınarak alandaki yaklaşık artış

$$ds = 2\pi r \,.\, dr = 20\,\pi \,.\, 0{,}05 = \pi = 3{,}14 \text{ cm}^2$$

bulunur.

4.33. ARDIŞIK DİFERANSİYELLER

$y = f(x)$ fonksiyonunun diferansiyelinin diferansiyeline bu fonksiyonun 2. sıradan diferansiyeli denir ve bu d^2y veya $d^2 f(x)$ simgeleriyle gösterilir.

Bu tanıma göre

$$d^2y = d(dy) = d(y' \,.\, dx) = (y' \,.\, dx)' \,.\, dx = (y'' \,.\, dx) \,.\, dx$$

$$d^2y = y'' \,.\, dx^2$$

dir. $y = f(x)$ in 3., 4., ..., n. sıradan diferansiyelleri benzer biçimde tanımlanır.

3. sıradan diferansiyel : $d^3y = y''' \,.\, dx^3$

4. sıradan diferansiyel : $d^4y = y^{(4)} \,.\, dx^4$

n. sıradan diferansiyel : $d^ny = y^{(n)} \,.\, dx^n$

şeklindedir. Bu formüllerden ardışık türev formülleri

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \quad , \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} \quad , \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

olarak yazılabilir.

ÖRNEK 1: $y = x^3 - 2x^2 + x - 3$ fonksiyonunun ilk üç sıradan ardışık diferansiyellerini bulunuz.

Çözümü: $dy = (3x^2 - 4x + 1)\,dx$

$$d^2y = (6x - 4)\,dx^2$$

$$d^3y = 6 \,.\, dx^3$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2: $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun ardışık diferansiyellerini bulunuz.

Çözümü:

$$dy = -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$d^2y = \frac{1 \cdot 2}{x^3}\,dx^2$$

$$d^3y = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}\,dx^3$$

.....

$$d^n y = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots n}{x^{n+1}}\,dx^n = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}\,dx^n$$

ÖRNEK 3: $z = x \cdot e^x \Rightarrow d^n z = ?$

Çözümü: $dz = (e^x + xe^x)\,dx = (x + 1)\,e^x\,dx$

$d^2z = [\,e^x + (x+1)\,e^x\,]\,dx^2 = (x + 2)\,e^x \cdot dx^2$

$d^3z = [e^x + (x + 2)\,e^x\,]\,dx^2 = (x + 3)\,e^x\,dx^3$

.....

$d^n z = (x + n)\,e^x\,dx^n$

ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki fonksiyonların dy diferansiyellerini bulunuz.

a) $y = (3 - 2x)^4$ $\qquad dy = -8\,(3 - 2x)^3 \cdot dx$

b) $y = \text{Sin } 3x^2$ $\qquad dy = 6x \text{ Cos } 3x^2 \cdot dx$

c) $y = \text{Arctan } \sqrt{x}$ $\qquad dy = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}\,dx$

d) $y = e^{1/x^2}$ $\qquad dy = -\frac{2}{x^3} e^{1/x^2} \cdot dx$

e) $y = \ln \text{Cos } x$ $\qquad dy = -\text{Tan } x \cdot dx$

2) Aşağıdaki bağıntılardan diferansiyel yardımıyla $\frac{dy}{dx}$ i bulunuz.

a) $3x^2 - 4y^2 = 12$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{4y}$

b) $2xy^2 - 3x^2 y = 5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y\,(y - 3x)}{x\,(4y - 3x)}$

c) $\text{Sin}\, y = e^x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\text{Cos}\, y}$

d) $xy = \ln (x + y)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + xy - 1}{x^2 + xy - 1}$

3) Δx in yeteri kadar küçük olması koşuluyla $\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$ olduğunu gösteriniz ve bu formülden yararlanarak $\sqrt{37}$ ve $\sqrt{117}$ nin yaklaşık değerlerini bulunuz.

$$\left(\sqrt{37} \cong 6{,}083 \quad ; \quad \sqrt{117} \cong 10{,}818\right)$$

4) $\sqrt[n]{x + \Delta x} \cong \sqrt[n]{x} + \frac{\Delta x}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ olduğunu gösteriniz ve bu formülden yararlanarak $\sqrt[3]{25}$, $\sqrt[3]{85}$ sayılarının yaklaşık değerlerini bulunuz.

$$\left(\sqrt[3]{25} \cong 2{,}926 \quad ; \quad \sqrt[4]{85} \cong 3{,}037\right)$$

5) $y = x^3 - 2x^2$ fonksiyonunda x , 4 den 4,01 e artırılıyor. y nin değişimini diferansiyelle bulunuz.

$$(dy = 0{,}32)$$

6) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ de x , 1 den 0,97 ye azaltılıyor. y nin değişimini diferansiyelle bulunuz.

$$(dy = 0{,}015)$$

7) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ fonksiyonunun $x = 2{,}03$ için yaklaşık değerini bulunuz.

(5,06)

8) Yarıçapı r = 10 cm olan dairesel bir levha ısıtılınca genleşerek yarıçapı 10,15 cm olmaktadır. Alandaki yaklaşık artmayı bulunuz.

($ds = 9{,}42\ cm^2$)

9) Bir öğrenci bir küpün ayrıt uzunluğunu 0,01 cm hata ile 9 cm olarak ölçmüştür. Bu durumda küpün hacminde yapılan hata ne olur?

($dv = 2{,}43\ cm^3$)

10) 5 cm yarıçaplı bir kürenin yarıçapı 4,8 cm. ye düşürüldüğünde:

a) Hacmindeki,

b) Yüzey alanındaki azalmayı bulunuz.

[a) $dv = -62{,}8\ cm^3$; b) $ds = -25{,}12\ cm^2$]

11) Aşağıdaki fonksiyonların istenen mertebeden diferansiyellerini bulunuz.

a) $y = x^2 e^x \Rightarrow d^2y = ?$ $\quad (x^2 + 4x + 2)\, e^x . dx^2$

b) $y = \ln x \Rightarrow d^3y = ?$ $\quad \frac{2}{x^3} . dx^3$

c) $y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow d^3y = ?$ $\quad \frac{11 - 6\ln x}{x^4} dx^3$

d) $y = x^n \Rightarrow d^n y = ?$ $\quad n!\, dx^n$

e) $y = x^2 . \ln x \Rightarrow d^n y = ?$ $\quad \frac{(-1)^{n-1} 2\,(n-3)!}{x^{n-2}} dx^n \quad (n \geq 3)$

f) $e^x + e^y = 1 \Rightarrow d^2y = ?$ $\quad -e^{x-2y} . dx^2$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BEŞİNCİ BÖLÜM

TÜREVİN UYGULAMALARI

5.1. TEĞET VE NORMAL DENKLEMLERİ

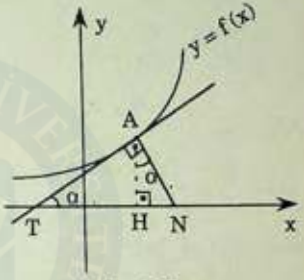
$y = f(x)$ eğrisinin bir $A(x_1 ; y_1)$ noktasındaki teğetinin denklemini

$$y - y_1 = f'(x_1)\,(x - x_1) \quad ,$$

normalinin denklemini ise

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}\,(x - x_1)$$

olarak bulmuştuk. (Bak: Sayfa 66)



(65. şekil)

5.2. TEĞET, NORMAL, TEĞETALTI, NORMALALTI UZUNLUKLARI

65. Şekilde $|AT| = t$ uzunluğuna **teğet uzunluğu**, $|AN| = n$ uzunluğuna **normal uzunluğu**, $|TH| = S_t$ ye **teğetaltı**, $|HN| = S_n$ ye de **normalaltı uzunluğu** denir.

$\operatorname{Tan}\alpha = m_t = f'(x_1) = y'_1$ olduğuna göre ATH ve ANH üçgenlerinden

$$t = \left|\frac{y_1}{\operatorname{Sin}\alpha}\right| = \left|\frac{y_1}{\frac{\operatorname{Tan}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2\alpha}}}\right| = \left|\frac{y_1\sqrt{1+(y'_1)^2}}{y'_1}\right|$$

$$n = \left|\frac{y_1}{\operatorname{Cos}\alpha}\right| = \left|\frac{y_1}{\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{Tan}^2\alpha}}}\right| = \left|y_1\sqrt{1+(y'_1)^2}\right|$$

$$S_t = \left| \frac{y_1}{\operatorname{Tan}\alpha} \right| = \left| \frac{y_1}{y'_1} \right| \quad , \quad S_n = |y_1 \cdot \operatorname{Tan}\alpha| = |y_1 \cdot y'_1|$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. (65. şekil)

ÖRNEK 1: $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ eğrisinin $x_1 = 3$ noktasındaki teğet ve normal denklemleri ile teğet, normal teğetaltı normalaltı uzunluklarını bulunuz.

Çözümü: $x_1 = 3$ için $y_1 = 4$ tür. $y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$, $y'_1 = \dfrac{-3}{(3-2)^2} = -3$ bulunur. Teğet denklemi

$$y - 4 = -3(x - 3) \Rightarrow y = -3x + 13$$

normal denklemi

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3$$

teğet, normal, teğetaltı normalaltı uzunlukları

$$t = \left| \frac{y_1}{y'_1} \sqrt{1 + (y'_1)^2} \right| = \left| \frac{4}{-3} \sqrt{1+9} \right| = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{3}$$

$$n = \left| y_1 \cdot \sqrt{1 + (y'_1)^2} \right| = 4\sqrt{10}$$

$$S_t = \left| \frac{y_1}{y'_1} \right| = \frac{4}{3}$$

$$S_n = |y_1 \cdot y'_1| = 12$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $y = x^2 - 5x + 3$ eğrisinin hangi noktasında teğet ve normal uzunlukları eşit olur?

Çözümü: $t = n \Rightarrow \dfrac{y_1}{y'_1} \sqrt{1 + (y'_1)^2} = \pm y_1 \sqrt{1 + (y'_1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{y'_1} = \pm 1 \Rightarrow y'_1 = \pm 1$$

olmalıdır. $y'_1 = 2x_1 - 5$ olduğundan $2x_1 - 5 = \pm 1$ den $x_1 = 2 \vee x_1 = 3$ bulunur. O halde eğrinin (2; - 3) ve (3; - 3) noktalarındaki teğet ve normal uzunlukları eşittir.

ÖRNEK 3: $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin P (3; + ?) noktasındaki teğeti ile koordinat eksenlerinin oluşturduğu üçgenin alanını bulunuz.

Çözümü: $x = 3 \Rightarrow 9 + y^2 = 25$

$$\Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$$

olup P (3; 4) dür.

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

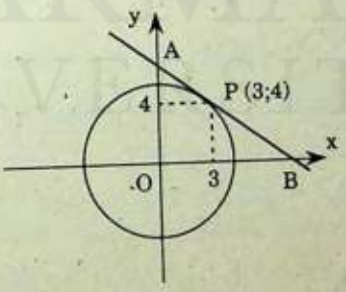
olup buradan P noktasındaki teğetin eğimi $m = -\frac{3}{4}$ bulunur. Teğetin denklemi

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 3x + 4y = 25$$

olur. Bu denklemde $x = 0$ için $y = \frac{25}{4}$, $y = 0$ için $x = \frac{25}{3}$ olduğundan teğetin eksenleri kestiği noktalar $A(0; \frac{25}{4})$ ve $B(\frac{25}{3}, 0)$ dır. Buradan

$$A(AOB) = \frac{1}{2}|OA| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot \frac{25}{3} = \frac{625}{24} \text{ br.}^2$$

bulunur. (66. şekil)



(66. şekil)

ALIŞTIRMALAR

1) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ eğrisinin x eksenini kestiği noktalardaki teğet denklemlerini bulunuz.

$$(y = 2x \quad , \quad y = -x + 1 \quad , \quad y = 2x - 4)$$

2) $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ eğrisinin eğim açısı 45° olan teğet denklemlerini bulunuz.

$$\left(y = x \quad , \quad y = x + \frac{4}{27}\right)$$

3) $y = \dfrac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ eğrisinin $x = 2a$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$$\left(\text{teğet} : y = -\frac{1}{2}x + 2a \quad , \quad \text{normal} : y = 2x - 3a\right)$$

4) $xy^2 - 2x - y = 0$ eğrisinin $x = 1$ apsisli noktalarındaki teğet denklemlerini bulunuz.

$$\left(y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \quad , \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}\right)$$

5) $(x - 1)^2 + y^2 = 10$ eğrisinin $x = 2$ apsisli noktalarındaki teğet denklemlerini bulunuz.

$$\left(y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \quad , \quad y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)$$

6) $y = \dfrac{2x^2 - 2x - 4}{ax^2}$ eğrisinin x eksenini kestiği noktalardaki teğetlerinin birbirine dik olması için a ne olmalıdır?

$$(a = \pm 3)$$

7) $xy + 2x - y = 5$ eğrisinin $(2 ; 1)$ noktasındaki teğet, normal, teğetaltı, normalaltı uzunluklarını bulunuz.

$$\left(t = \frac{\sqrt{10}}{3} \quad , \quad n = \sqrt{10} \quad , \quad S_t = \frac{1}{3} \quad , \quad S_n = 3\right)$$

8) $y = x^3 - 3x^2$ eğrisinin $y = 9x + 4$ doğrusuna paralel teğetlerinin değme noktalarını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$[\ (-1\ ;-4)$ ve $(3\ ;0)\ ]$

9) $y = x\ .\ \ln x$ eğrisinin $x = e$ noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$(2x - y = e\ ,\ \ x + 2y = 3e)$

10) $y = \text{Arcsin}\ \dfrac{x-1}{2}$ fonksiyonunun:

a) Tanım kümesini bulunuz. $(T = [-1\ ,\ 3]\ )$

b) x eksenini kestiği noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$(x - 2y = 1\ \ ,\ \ 2x + y = 2)$

11) $y^2 = 2x$ eğrisinin $x - 2y = 3$ doğrusuna dik olan teğet denklemini bulunuz.

$\left(y = -2x - \dfrac{1}{4}\right)$

12) $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ eğrisinin $y = 3$ ordinatlı noktasındaki teğet ve normal denklemlerini bulunuz.

$(5x + 6y - 13 = 0\ \ ,\ \ 6x - 5y + 21 = 0)$.

13) $y = x^2 + 2x + 2$ ile $y = -2x^2 - 3x$ eğrileri hangi açı altında kesişirler? [45° ve Arctan (- 9/7)]

14) $4x^2 + 9y^2 = 45$ elipsi ile $x^2 - 4y^2 = 5$ hiperbolünün dik olarak kesiştiklerini gösteriniz.

15) $2xy = a^2$ hiperbolünün herhangibir noktasındaki teğetinin eksenlerle teşkil ettiği üçgeninin alanının sabit ve a^2 ye eşit olduğunu gösteriniz.

16) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisinin herhangibir noktasındaki teğetinin eksenler arasında kalan parçasının sabit ve a ya eşit olduğunu gösteriniz.

17) $x^2 - xy + y^2 = 27$ eğrisinin x ve y eksenlerine paralel teğetlerinin değme noktalarını bulunuz.

$[\ (3\ ;6)\ ,\ (-3\ ;-6)$ ve $(6;3)\ ,\ (-6\ ;-3)\ ]$

5.3. ARTAN VE EKSİLEN FONKSİYONLAR

Tanım: $y = f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu bir aralıkta x artarken y de artıyorsa fonksiyon bu aralıkta **artandır** denir. Fonksiyonun sürekli olduğu aralıkta x artarken y azalıyorsa bu aralıkta fonksiyon **eksilendir** denir.

Teorem: $y = f(x)$ fonksiyonu bir (a, b) aralığında artan ve türevliyse bu aralığın bütün noktalarında $y' = f'(x) > 0$; eksilen ve türevliyse $y' = f'(x) < 0$ dır.

İspat: Değişkenin (a, b) aralığındaki iki değeri x ile $(x + \Delta x)$, bunlara karşılık gelen fonksiyon değerleri de y ile $(y + \Delta y)$ olsun. Fonksiyon (a, b) aralığında artan ise Δx ve Δy aynı işaretli olacağından $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ olur. Buradan $\Delta x \to 0$ için limite geçilerek

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$$

bulunur. Eğer fonksiyon (a, b) aralığında eksilen ise Δx ile Δy ters işaretli olacağından $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ olur. Buradan da

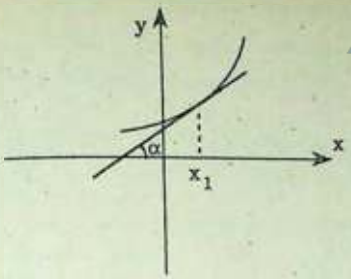
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) < 0$$

bulunur.

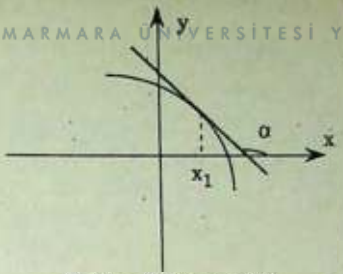
Yukarıdaki teoremin karşıtı da doğrudur. Yani $y = f(x)$ fonksiyonu, türevinin pozitif olduğu aralıkta artan, negatif olduğu aralıkta eksilendir.

Artan ve eksilen fonksiyon grafiklerine ait birer örnek 67. şekilde çizilmiştir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Artan fonks. grafiği
$(f'(x_1) = \text{Tan } \alpha > 0)$



Eksilen fonks. grafiği
$(f'(x_1) = \text{Tan } \alpha < 0)$

(67. şekil)

ÖRNEK : $y = x^3 - 2x^2 + x - 5$ fonksiyonunun artan ve eksilen olduğu aralıkları bulunuz.

Çözümü: $y' = 3x^2 - 4x + 1$ dir.

$$y' = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = 1$$

bulunur. Tablo ile türevin işaretini inceleyelim.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		↗		↘		↗	

Tabloya göre $(-\infty, \frac{1}{3})$ ile $(1, +\infty)$ aralıklarında fonksiyon artan, $(\frac{1}{3}, 1)$ aralığında eksilendir.

5.4. MAKSİMUM, MİNİMUM

1°) **Mutlak maksimum, mutlak minimum:**

[a, b] aralığında tanımlı bir $y = f(x)$ fonksiyonunun bu aralıkta aldığı en büyük değere **mutlak maksimum**, en küçük değere **mutlak minimum** denir. Eğer fonksiyon [a, b] aralığında sürekli ise mutlak maksimum ile mutlak minimum arasındaki her değeri en az bir kez alır.

ÖRNEK : $f : [-1, 2] \rightarrow$, $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

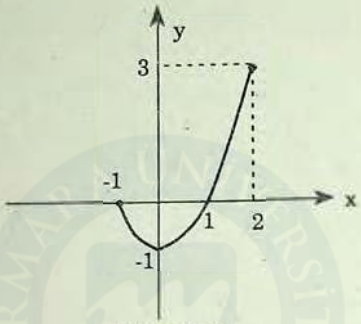
Çözümü: Fonksiyonun grafiği 68. şekilde çizilmiştir. Buna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

mutlak maks. $f(x) = f(2) = 3$

mutlak min. $f(x) = f(0) = -1$

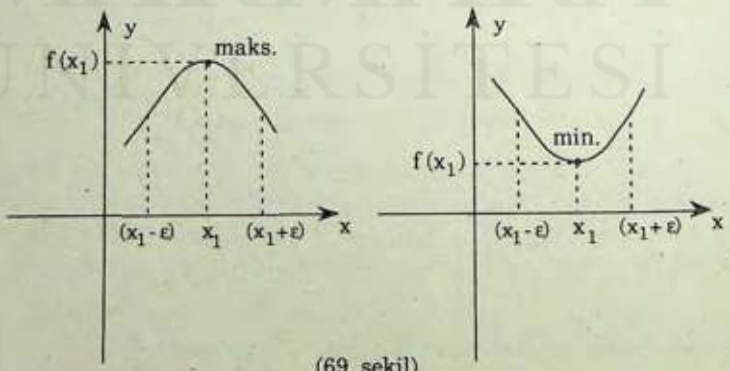
dir. Fonksiyon $[-1, 2]$ aralığında sürekli olduğundan -1 ile 3 arasındaki her değeri fonksiyonun en az bir kez alacağı grafikten kolayca görülebilir.



(68. şekil)

2°) Yerel maksimum, yerel minimum

$f : [a, b] \to R$ sürekli fonksiyonunu gözönüne alalım. $x_1 \in (a, b)$ olsun. Eğer x_1 in $N = (x_1 - \varepsilon\ ,\ x_1 + \varepsilon)$ olmak üzere $\forall x \in N$ için $f(x) \leq f(x_1)$ olacak şekilde bir N komşuluğu varsa x_1 noktasında fonksiyonun bir **yerel maksimumu** veya yalnızca **maksimumu** vardır denir. Eğer x_1 in $\forall x \in N$ için $f(x) \geq f(x_1)$ olacak şekilde bir N komşuluğu varsa x_1 noktasında fonksiyonun bir **yerel minimumu** veya yalnızca **minimumu** vardır denir. (69. şekil)



(69. şekil)

Bir fonksiyonun yerel maksimum ve minimum noktalarının hepsine birden **ekstremum noktalar** denir.

[a, b] aralığında sürekli olan f fonksiyonunun $x_1 \in (a, b)$ noktasında bir maksimumu varsa fonksiyon, $(x_1 - \varepsilon\ ,\ x_1 + \varepsilon)$ aralığında, x_1 in solunda artan sağında eksilen olacağından $x < x_1$ için $f'(x) > 0$, $x > x_1$ için $f'(x) < 0$ olur. Eğer x_1 noktasında bir minimumu varsa bu kez fonksiyon x_1 in solunda eksilen sağında artan olacağından $x < x_1$ için $f'(x) < 0$, $x > x_1$ için $f'(x) > 0$ olur.

Buna göre bir $y = f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulmak için türevin işaretinden yararlanılabilir.

ÖRNEK : Aşağıdaki fonksiyonların varsa ekstremum noktalarını bulunuz.

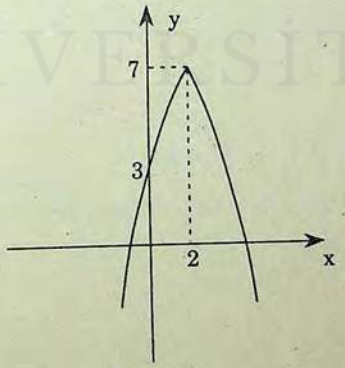
a) $y = -x^2 + 4x + 3$ b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 2$

c) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1$ d) $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

Çözümü: a) Fonksiyon R de süreklidir. $y' = -2x + 4$ olup $y' = 0 \Rightarrow x = 2$ dir.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		−	
y	$-\infty$	↗	7	↘	$-\infty$

maks.



(70. şekil)

(2; 7) noktasında fonksiyonun bir maksimumu vardır. (70. şekil)

b) Fonksiyon R de süreklidir. $y' = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x + 1)^2$ olup $y' = 0$ için $x = -1$ bulunur.

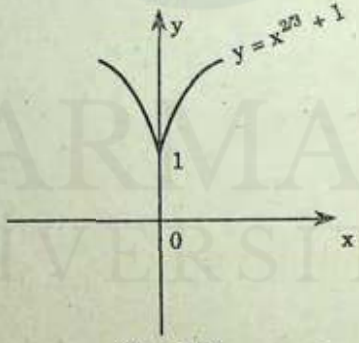
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	5	↗	$+\infty$

Tabloya göre fonksiyonun ekstremum noktası yoktur.

c) Fonksiyon R de süreklidir.

$$y = x^{2/3} + 1 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	‖	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



(71. şekil)

$x = 0$ noktasında fonksiyon türevsizdir. [$f'(0^+) = +\infty$, $f'(0^-) = -\infty$]

Buna rağmen (0; 1) noktası fonksiyonun minimum noktasıdır. (71. şekil)

d) Fonksiyon $R - \{2\}$ de süreklidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 4 \quad \text{bulunur.}$$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$

Fonksiyonun (0 ; 0) da maksimum, (4; 8) de minimumu vardır.

TEOREM [a, b] aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli bir $y = f(x)$ fonksiyonun $x_1 \in (a, b)$ noktasında bir ekstremumu varsa $f'(x_1) = 0$ dır.

İspat: $x_1 \in (a,b)$ noktasında fonksiyonun bir maksimumu olduğunu varsayalım. Bu durumda maksimum tanımına göre x_1 in en az bir $N = (x_1 - \varepsilon\ ,\ x_1 + \varepsilon)$ komşuluğunda $h \neq o$ için

$$f(x_1 + h) < f(x_1) \Rightarrow f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

olur. $h > 0$ ise

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} < 0$$

dır. $h \to 0^+$ için limite geçilirse

$$f'(x_1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq 0$$

bulunur. $h < 0$ ise

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} > 0$$

dır. $h \to 0^-$ için limite geçilirse

$$f'(x_1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \geq 0$$

bulunur. Fonksiyon x_1 noktasında türevli olduğundan bu noktadaki sağdan ve soldan türevleri eşittir. O halde yukarıda bulduğumuz

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$f'(x_1^+) \le 0$ ve $f'(x_1^-) \ge 0$

sonuçlarından $f'(x_1) = 0$ bulunur.

$x_1 \in (a, b)$ noktasında fonksiyonun minimumu olması halinde de $f'(x_1) = 0$ olacağı benzer şekilde gösterilebilir.

5.5. ROLLE TEOREMİ [a, b] aralığında sürekli, (a, b) de türevli bir $y = f(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer $f(a) = f(b)$ ise $\exists\, x_1 \in (a, b)$ için $f'(x_1) = 0$ olur.

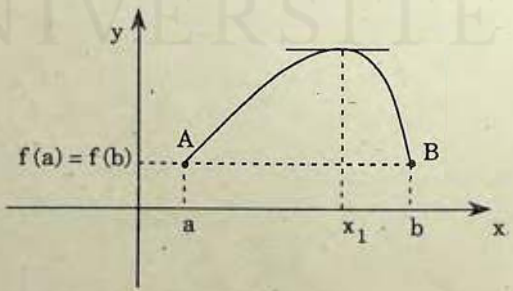
İspat: Fonksiyonun [a, b] aralığındaki mutlak maksimumu M, mutlak minimumu m olsun.

1°) Eğer $M = m = f(a) = f(b)$ ise bu durumda fonksiyon [a, b] aralığında sabit olacağından $\forall x_1 \in (a, b)$ için $f'(x_1) = 0$ olur.

2°) Eğer M ile m den en az biri $f(a) = f(b)$ den farklı, örneğin $M \neq f(a)$ ise, bu durumda bu mutlak maksimum aynı zamanda yerel maksimum olacağından, $f(x_1) = M$ alınırsa $f'(x_1) = 0$ olur.

5.6. ROLLE TEOREMİNİN GEOMETRİK ANLAMI

[a, b] aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevli $y = f(x)$ fonksiyonunda $f(a) = f(b)$ ise fonksiyonun $A(a, f(a))$ ile $B(b, f(b))$ noktaları arasındaki grafiği nasıl alınırsa alınsın bu grafiğin en az bir $x_1 \in (a, b)$ noktasındaki teğeti x eksenine paralel olacağından bu noktada $f'(x_1) = 0$ olur. (72. şekil)



(72. şekil)

ÖRNEK 1: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonuna $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ aralığında Rolle teoremi uygulanabilir mi, araştırınız.

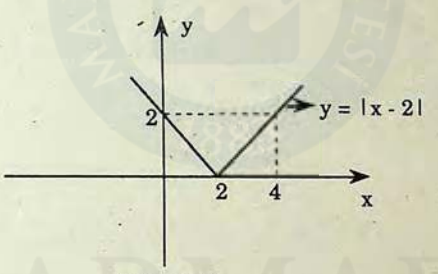
Çözümü: Fonksiyon $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ aralığında sürekli ve türevlidir. $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 2$ olduğundan Rolle teoremi uygulanabilir. Yani $\exists\, x_1 \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ için $f'(x_1) = 0$ olur. Gerçekten

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

bulunur. O halde $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ aralığında Rolle teoremini sağlayan iki nokta vardır.

ÖRNEK 2: $f(x) = |x - 2|$ fonksiyonuna $[0, 4]$ aralığında Rolle teoremi uygulanabilir mi?

Çözümü: Fonksiyon $[0, 4]$ aralığında sürekli ve $f(0) = f(4) = 2$ dir. Ancak $(0, 4)$ aralığında türevli değildir. ($f'(2)$ yoktur). Bu nedenle Rolle teoremi uygulanamaz. (73. şekil)



(73. şekil)

5.7. ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

$[a, b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevli bir $f(x)$ fonksiyonunda $\exists\, x_1 \in (a,b)$ için

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dır.

İspat: $A(a, f(a))$ ile $B(b, f(b))$ noktalarından geçen kirişin eğimi $m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olup denklemi

$$g(x) = m(x - a) + f(a)$$

dır. Şimdi $F(x) = f(x) - g(x)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. $F(a) = F(b) = 0$ olduğu kolayca görülebilir. (Şekil 74). O halde $F(x)$ fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanabilir. Buna göre $\exists\, x_1 \in (a, b)$ için $F'(x_1) = 0$ olacaktır.

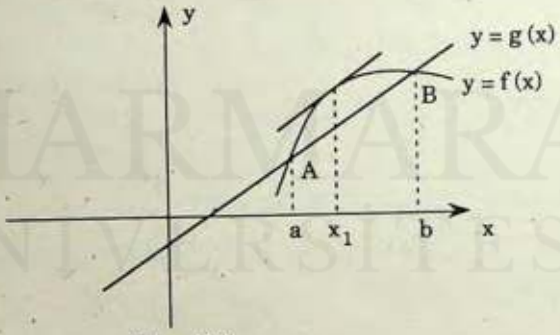
$$F'(x_1) = f'(x_1) - g'(x_1) = f'(x_1) - m = f'(x_1) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bulunur.

5.8. ORTALAMA DEĞER TEOREMİNİN GEOMETRİK ANLAMI

[a, b] aralığında sürekli, (a, b) aralığında türevli bir $y = f(x)$ fonksiyonunda $\exists x_1 \in (a, b)$ için $f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olması demek, bu fonksiyon eğrisinin A (a, f (a)) ile B (b, f (b)) noktaları arasındaki parçası üzerinde AB kesenine paralel en az bir teğetin bulunması demektir.



(74. şekil)

ÖRNEK: $f(x) = 2x^2 - x - 3$ fonksiyonunda [1, 4] aralığı için ortalama değer teoremini uygulayınız.

Çözümü: Fonksiyon R de sürekli ve türevli olduğundan her [a, b] aralığında ortalama değer teoremi uygulanabilir.

$f(4) = 25$ ve $f(1) = -2$ olduğundan

$$f'(x_1) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{25 - (-2)}{3} = 9$$

dur. $f'(x) = 4x - 1 = 9 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

bulunur. Buna göre $\frac{5}{2} \in (1, 4)$ noktası ortalama değer teoremini sağlar. Yani eğriye $x = \frac{5}{2}$ noktasından çizilen teğet, eğrinin (1; -2) ve (4; 25) noktalarından geçen kesene paralel olur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki fonksiyonların artan veya eksilen oldukları aralıkları bulunuz.

1) $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x$ [(-4, 1) de eksilen, $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ da artan]

2) $y = x^3 + 6x^2 + 15x - 5$ [R de artan]

3) $y = \frac{x + 1}{x - 2}$ [R - {2} de eksilen]

4) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ [$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ da artan, (0, 2) de eksilen]

5) $y = (x - 3)\sqrt{x}$ [(0, 1) de eksilen, $(1, +\infty)$ da artan]

6) $y = x \ln x$ [$(0, \frac{1}{e})$ de eksilen, $(\frac{1}{e}, +\infty)$ da artan]

7) $y = e^{x^2 - 2x}$ [$(-\infty, 1)$ de eksilen, $(1, +\infty)$ da artan]

Aşağıdaki fonksiyonların eğer varsa yerel maksimum ve minimum (ekstremum) noktalarını bulunuz.

8) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ ($x = -1$ de maks. , $x = 3$ de min.)

9) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}$ (Ekstremumu yok)

10) $y = x\sqrt{2 - x^2}$ ($x = -1$ de min. , $x = 1$ de maks.)

11) $y = (x - 1)^{2/3}$ ($x = 1$ de min.)

12) $y = x^2 - \dfrac{250}{x}$ ($x = -5$ de min.)

13) $y = \text{Sin } x + \text{Cos } x$ ($x = \dfrac{\pi}{4}$ de maks. , $x = \dfrac{5\pi}{4}$ de min.)
$[0 , 2\pi]$ de

14) $y = \dfrac{1}{2}\text{Tan } x + 4 \text{ Sin } x$ ($x = \dfrac{2\pi}{3}$ de maks. , $x = \dfrac{4\pi}{3}$ de min.)
$[0 , 2\pi]$ de

15) $y = x - \ln(x + 1)$ ($x = 0$ da min.)

16) $y = 2x^2 - ax - 1$ fonksiyonu $x = 3$ de minimum olduğuna göre a kaçtır?

($a = 12$)

17) $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ fonksiyonu $x = 3$ için minimum olduğuna ve $x = -1$ için $y = 7$ maksimum değerini aldığına göre a, b, c yi bulunuz.

($a = -3$, $b = -9$, $c = 2$)

Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen aralıklarda Rolle teoreminin uygulanıp uygulanamıyacağını araştırınız. Varsa teoremi gerçekleyen x değerlerini bulunuz.

18) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 5$ $[-1 , 2]$

$\left(x = \dfrac{-4 + \sqrt{37}}{3}\right)$

19) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 2}$ $[0, 2]$

$(x = 1)$

20) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ $[-1, 4]$

(Rolle teoremini gerçekleyen nokta yok)

21) $f(x)\ \sqrt{(x-2)^2}$ $[0, 4]$

(Rolle teoremini gerçekleyen nokta yok)

22) $f(x) = |x - 1| + 3$ $[0, 2]$

(Rolle teoremini gerçekleyen nokta yok)

23) $f(x) = 2\,\mathrm{Cos}\,x + 1$ $\left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$

$(x = \pi)$

24) $f(x) = e^{(x-2)^2}$ $[1, 3]$

$(x = 2)$

Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında verilen aralıklarda ortalama değer teoremini sağlayan noktaları bulunuz.

25) $f(x) = x^2 - 3x + 5$ $[1, 4]$

$\left(x = \dfrac{5}{2}\right)$

26) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$

$(x = 1)$

27) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x$ $[-1, 2]$

$\left(x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{1}{2},\ x_3 = 1\right)$

28) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 5}$ $[-2, 4]$

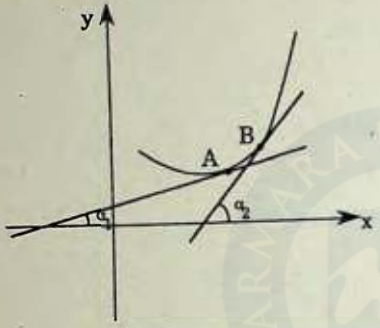
$(x = -5 + 3\sqrt{3})$

29) $f(x) = \mathrm{Sin}\,(\pi x) + \dfrac{1}{2}x$ $[-3, 2]$

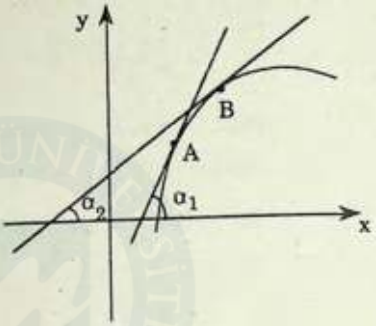
$\left(x_1 = -\dfrac{5}{2},\ x_{2,3} = \pm\dfrac{3}{2},\ x_{4,5} = \pm\dfrac{1}{2}\right)$

5.9. BİR EĞRİNİN BÜKÜLME YÖNÜ

$y = f(x)$, (a, b) aralığında türevli bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisinin (a, b) aralığındaki parçası, tümüyle bu aralıktaki teğetlerinin üstünde kalıyorsa bu eğri (a, b) aralığında **yukarıya bükümlü (konveks)**, aksi durumda yani eğri tümüyle teğetlerin altında kalıyorsa **aşağıya bükümlü (konkav)** dır denir.



(75. şekil)



(76. şekil)

Bu tanıma göre 75. şekildeki eğri yukarıya, 76. şekildeki eğri aşağıya bükümlüdür. Bu eğrilerin x_1 ve x_2 apsisli A ve B noktalarındaki teğetlerinin eğim açıları α_1 ve α_2 olsun. Eğer $x_1 < x_2$ ise

75. şekilde : $\text{Tan}\,\alpha_1 < \text{Tan}\,\alpha_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$

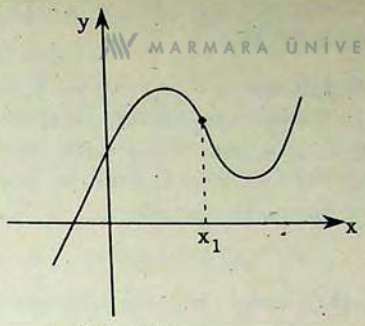
76. şekilde : $\text{Tan}\,\alpha_1 > \text{Tan}\,\alpha_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2)$

olduğu kolayca görülebilir. O halde $f'(x)$ türev fonksiyonu, eğri yukarıya bükümlüyse artan, aşağıya bükümlüyse eksilendir. Dolayısıyla yukarıya bükümlü eğrilerde $f''(x) > 0$, aşağıya bükümlü eğrilerde $f''(x) < 0$ olur. Karşıt olarak $f(x)$ fonksiyonunda $f''(x) > 0$ ise $f'(x)$ eğimi artan olacağından eğri yukarıya bükümlü, $f''(x) < 0$ ise $f'(x)$ eksilen olacağından aşağıya bükümlüdür.

5.10. DÖNÜM NOKTASI

Bir eğride bükülme yönünün değiştiği nokta veya noktalar varsa bunlara eğrinin dönüm noktaları denir. 77. şekilde x_1 in solunda eğri aşağıya, sağında yukarıya bükümlü olduğundan bu nokta eğrinin dönüm noktasıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(77. şekil)

ÖRNEK 1: $y = x^4 + 2x^3 + 3x + 2$ eğrisinin bükülme yönünü ve dönüm noktalarını bulunuz.

Çözümü: $y' = 4x^3 + 6x^2 + 3$

$$y'' = 12x^2 + 12x = 12x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = -1$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tabloya göre $(-\infty, -1)$ ile $(0, +\infty)$ aralıklarında eğri yukarıya, $(-1, 0)$ aralığında aşağıya bükümlüdür. $(-1; -2)$ ve $(0; 2)$ noktaları da dönüm noktalarıdır.

ÖRNEK 2: $y = (x + 2)^{1/3}$ eğrisinin bükülme yönü ile dönüm noktasını bulunuz.

Çözümü: $y' = \frac{1}{3}(x + 2)^{-2/3}$, $y'' = -\frac{2}{9}(x + 2)^{-5/3} = -\frac{2}{9(x + 2)^{5/3}}$

y'' nün işareti:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y''		$+$	‖	$-$	

Tabloya göre eğri $(-\infty, -2)$ aralığında yukarıya, $(-2, +\infty)$ aralığında aşağıya bükümlüdür. $(-2; 0)$ noktası da eğrinin dönüm noktasıdır.

5.11. MAKSİMUM VE MİNİMUM NOKTALARIN İKİNCİ TÜREVLE BELİRLENMESİ

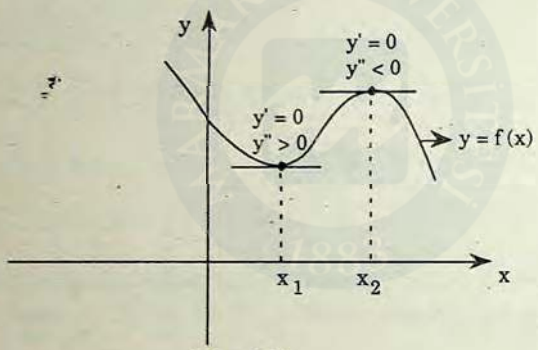
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y = f(x)$ fonksiyonunda $f'(x_1) = 0$ ve $f''(x_1) > 0$ olduğunu varsayalım. $f''(x_1) > 0$ olması x_1 noktasında eğrinin yukarıya bükümlü olduğunu, $f'(x_1) = 0$ olması da bu noktadaki teğetin x eksenine paralel olduğunu gösterir. Bu özellikler ise ancak x_1 noktasının bir minimum nokta olmasıyla mümkündür. O halde

$$f'(x_1) = 0 \quad \text{ve} \quad f''(x_1) > 0$$

olması halinde fonksiyonun x_1 noktasında bir minimumu vardır.

Benzer şekilde $f'(x_2) = 0$ ve $f''(x_2) < 0$ olması halinde x_2 noktasında fonksiyonun bir maksimumu olacağı gösterilebilir. (78. şekil)



(78. şekil)

Yukarıdaki açıklamayı kısaca özetlersek; $y = f(x)$ fonksiyonunda $y' = 0$ olan noktada $y'' > 0$ ise bir minimum, $y'' < 0$ ise bir maksimum vardır. Bunun karşıtı ise her zaman doğru değildir. Yani, minimum noktada $y' = 0$ ve $y'' > 0$; maksimum noktada $y' = 0$ ve $y'' < 0$ olmayabilir. (Bkz. 71. şekilde $x = 0$ da minimum olduğu halde bu noktada y' ve y'' türevleri yoktur.)

Eğer $y = f(x)$ eğrisinin $y' = 0$ olan bir x_1 noktasında y'' türevi de sıfır oluyorsa, ikinci türevden sonra gelen ardışık türevler alınır. Bu türevlerden x_1 için sıfır olmayan ilk türevin mertebesi çift ise bu noktada bir ekstremum, tek ise bir dönüm noktası vardır.

ÖRNEK: Aşağıdaki fonksiyonların ekstremum noktalarını ikinci türevden yararlanarak bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ b) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 3x$

c) $f(x) = 2\,\mathrm{Sin}^2 x - 5\,\mathrm{Sin}\,x + 3$, $x \in [0, 2\pi]$

Çözümü: a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) = 0$

dan $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ bulunur.

$f''(x) = 12x^2 - 4$ olup $f''(-1) = 8 > 0$, $f''(0) = -4 < 0$ ve $f''(1) = 8 > 0$ dır. Buna göre $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarında minimum, $x = 0$ noktasında maksimum vardır.

b) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - 3x = 2x^{3/2} - 3x$

$f'(x) = 3x^{1/2} - 3 = 3(\sqrt{x} - 1)$

$$f''(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$f''(1) = \frac{3}{2} > 0$$

(1; -1) noktası fonksiyonun minimum noktasıdır.

c) $f'(x) = 4\,\mathrm{Sin}\,x\,.\,\mathrm{Cos}\,x - 5\,\mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Cos}\,x\,(4\,\mathrm{Sin}\,x - 5)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \mathrm{Cos}\,x = 0 \vee \mathrm{Sin}\,x = \frac{5}{4}$$

dür. $x \in [0, 2\pi]$ olduğundan buradan $x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$ bulunur.

$f''(x) = -\mathrm{Sin}\,x\,(4\,\mathrm{Sin}x - 5) + 4\,\mathrm{Cos}\,x\,.\,\mathrm{Cos}\,x$

$= 4(\mathrm{Cos}^2 x - \mathrm{Sin}^2 x) + 5\,\mathrm{Sin}x = 4\,\mathrm{Cos}\,2x + 5\,\mathrm{Sin}\,x$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \quad \text{ve} \quad f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -9 < 0$$

olduğundan $x = \frac{\pi}{2}$ de minimum, $x = \frac{3\pi}{2}$ de maksimum vardır.

5.12. MAKSİMUM, MİNİMUM PROBLEMLERİ

ÖRNEK 1: Pozitif iki sayının toplamı 8 dir. Bu sayılardan birincisinin karesi ile ikincisinin kübü toplamının minimum olması için bu iki sayı nasıl seçilmelidir?

Çözümü: Sayılar x ile y olsun.

$$x + y = 8 \Rightarrow x = 8 - y \quad \text{dir.}$$

$$S = x^2 + y^3 = (8 - y)^2 + y^3$$

$$S' = \frac{dS}{dy} = -2(8 - y) + 3y^2 = 3y^2 + 2y - 16$$

dır. $S' = 0$ için $y = 2 \vee y = -\frac{8}{3}$ bulunur.

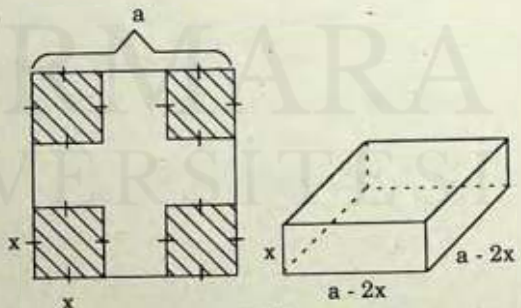
$S'' = 6y + 2$ dir. $y = 2$ için $S' = 0$ ve $S'' = 14 > 0$ olduğundan y nin bu değeri için S minimum olur. $y = 2 \Rightarrow x = 8 - 2 = 6$ dır. Buna göre istenen sayılardan birincisi $x = 6$, ikincisi $y = 2$ dir.

ÖRNEK 2: Kenar uzunluğu a olan kare şeklindeki bir metal levhanın köşelerinden yine kare şeklinde eşit parçalar kesildikten sonra kalan levha yanlarından kıvrılarak üstü açık bir kutu yapılıyor. Bu kutu hacminin maksimum olması için kesilen parçaların kenar uzunluğu ne olmalıdır?

Çözümü:

Kesilen parçaların bir kenar uzunluğu x olsun. buradan elde edilecek kutu, tabanının bir kenarı (a-2x), yüksekliği x uzunluğunda bir kare prizma olacaktır. Bu prizmanın hacmi

$$V = (a - 2x)^2 \cdot x$$



(79. şekil)

olup

$$V' = -4(a - 2x)x + (a - 2x)^2 = (a - 2x)(a - 6x)$$

dir. $V' = 0$ dan $x = \frac{a}{2} \vee x = \frac{a}{6}$ bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

x	0		a/6		a/2
V'		+	0	−	0
V	0	↗	$\frac{2}{27}a^3$	↘	0

Yukarıdaki tabloya göre $x = \frac{a}{6}$ için kutunun hacmi $V = \frac{2}{27}a^3$ maksimum değerini alır.

ÖRNEK 3: Üstü açık kare prizması şeklinde hacmi $V = 4\ m^3$ olan metal bir su deposu yapılacaktır. En az malzeme kullanılması için deponun boyutları ne olmalıdır?

Çözümü: Kullanılan malzeme miktarı kutunun alanına eşit olacağına göre en az malzeme için, alanın minimum olması gerekir. Üstü açık kare prizma şeklindeki bir kutunun tüm alanı, taban uzunluğu x, yüksekliği y ise

$$S = x^2 + 4xy$$

dir. Kutunun hacmi

$$V = x^2 . y = 4$$

olduğundan $y = \frac{4}{x^2}$ dir. O halde $S = x^2 + 4x . \frac{4}{x^2} = x^2 + \frac{16}{x}$.

bulunur. $S' = 2x - \frac{16}{x^2} = 0$ dan $x = 2$ elde edilir. $S'' = 2 + \frac{32}{x^3}$ olup

$x = 2$ için $S'' > 0$ olduğundan x in bu değeri için S minimum olur.

$$x = 2 \text{ için } y = \frac{4}{x^2} = \frac{4}{4} = 1$$

dir. O halde $x = 2m$, $y = 1$ m olursa, $S = 12\ m^2$ lik en az metal kullanımıyla $V = 4m^3$ hacminde depo yapılabilir.

ÖRNEK 4: R yarıçaplı bir küre içine yerleştirilen maksimum hacimli dik silindirin boyutlarını bulunuz.

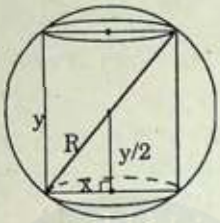
Çözümü: Silindirin taban yarıçapı x, yüksekliği y olsun. Bu durumda hacmi $V = \pi x^2 y$ olur. Şekil 80 den

$$x^2 = R^2 - \frac{y^2}{4}$$

yazılabilir. Buna göre

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{y^2}{4}\right)y = \pi\left(R^2 y - \frac{y^3}{4}\right)$$

bulunur.



(80. şekil)

$$V' = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}y^2\right)$$

olup $V' = 0$ için $y = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ bulunur.

$V'' = -\frac{3\pi}{2}y$ dir. $y = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ için $V'' < 0$ olduğundan yüksekliğin bu değeri için hacim maksimum olur. Bu durumda taban yarıçapı

$$x = \sqrt{R^2 - \frac{y^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki fonksiyonların ekstremum noktalarını ikinci türevle belirleyiniz.

1) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2$ ($x = -3$ da maks., $x = 1$ de min.)

2) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ ($x = 0$ da maks., $x = 2$ de min.)

3) $y = x + \sqrt{1 - x}$ ($x = \frac{3}{4}$ de maks.)

4) $y = x - \text{Sin } 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$ ($x = \frac{\pi}{6}$ da min., $x = -\frac{\pi}{6}$ da maks.)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5) $y = 2 \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} 2x$, $x \in [0 , 2\pi]$ ($x = \frac{\pi}{6}$ ve $x = \frac{5\pi}{6}$ da maks.

$x = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{3\pi}{2}$ de min.)

6) $y = xe^{\frac{1}{x-2}}$ ($x = 1$ de maks. , $x = 4$ de min.)

7) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2x$ ($x = \frac{26}{27}$ de maks.)

8) $y = (x + 2)^3$ (Ekstremum yok)

9) $y = e^{-x} . \sqrt{x - 1}$ ($x = \frac{3}{2}$ de maks.)

Aşağıdaki fonksiyonların büküm yönlerini ve varsa dönüm noktalarını bulunuz.

10) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

[$(-\infty , 1)$ aralığında aşağıya, $(1, +\infty)$ aralığında yukarıya bükümlü; $x = 1$ de dönüm noktası var.]

11) $y = \frac{x - 1}{x + 2}$

[$(-\infty , -2)$ de yukarıya, $(-2 , +\infty)$ da aşağıya bükümlü ; dönüm noktası yok.]

12) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x + 1$

[$(-\infty , 1)$ ile $(2 , +\infty)$ da yukarıya, $(1, 2)$ de aşağıya bükümlü; $x = 1$ ve $x = 2$ de dönüm noktası var.]

13) $y = 2x + (x - 2)^{3/5}$

[$(-\infty , 2)$ de yukarıya, $(2, +\infty)$ da aşağıya bükümlü; $x = 2$ de dönüm noktası var.]

14) $y = (x + 1) . \operatorname{Arctan} x$

[$(-\infty , 1)$ de yukarıya, $(1, +\infty)$ da aşağıya bükümlü ; $x = 1$ de dönüm noktası var.]

15) $y = e^{\frac{1}{1-x}}$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\left[(-\infty , 1) \text{ ve } (1 , \frac{3}{2}) \text{ de yukarıya, } (\frac{3}{2} , +\infty) \text{ da aşağıya bükümlü ; } x = \frac{3}{2} \text{ de dönüm noktası var.} \right]$$

16) Pozitif iki sayının çarpımı 54 tür. Bu sayılardan birincisi ile ikincisinin karesi toplamının minimum olması için sayılar nasıl seçilmelidir?

(18 ile 3)

17) Bir yamuğun üç kenarından herbiri 6 cm dir. Yamuk alanının maksimum olması için dördüncü kenarı kaç cm olmalıdır?

(12 cm)

18) $y = x^2 - 1$ eğrisinin orijine en yakın noktalarını bulunuz.

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{2} \right) \text{ ve } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} ; -\frac{1}{2} \right) \text{ nokt.} \right]$$

19) $x = y^2$ parabolünün (0 ; 3) noktasına en yakın noktasını bulunuz.

[(1 ; 1)]

20) r yarıçaplı metal bir daireden alanı en büyük olacak şekilde bir ikizkenar üçgen kesilecektir. Üçgenin tabanı ne olmalıdır?

($\sqrt{3}$ r)

21) Eksen uzunlukları 2a ve 2b olan bir elips içine kenarları eksenlere paralel olmak üzere çizilen dikdörtgenler içinde alanı maksimum olan dikdörtgeni bulunuz.

(kenar uz. $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$)

22) R yarıçaplı çember içine yerleştirilen maksimum alanlı dikdörtgeni bulunuz.

($x = y = R\sqrt{2}$)

23) Bir ABC üçgeninin içine çizilen, bir kenarı BC tabanı üzerine oturtulmuş maksimum alanlı dikdörtgenin boyutlarını bulunuz.

$$\left(\frac{a}{2} \text{ ve } \frac{h_a}{2} \right)$$

24) R yarıçaplı küre içine yerleştirilen maksimum hacimli koniyi bulunuz.

$$\left(\text{Tab. yarıçapı } x = \frac{2\sqrt{2}\ R}{3}\ ,\ \text{yüksekliği } y = \frac{4R}{3}\right)$$

25) R = 6 cm yarıçaplı bir küre içine yerleştirilen yanal yüzeyi maksimum olan koniyi bulunuz.

$$(x = 4\sqrt{3}\ \text{cm}\ ,\ y = 8\ \text{cm.})$$

26) 125 cm^3 hacminde silindir şeklinde üstü açık bir kutu yapılacaktır. En az metal kullanımı için silindirin taban yarıçapı ve yüksekliği ne olmalıdır?

$$\left(r = h = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)$$

27) R yarıçaplı bir kürenin dışına yerleştirilen minimum hacimli dik koninin boyutlarını bulunuz.

$$(r = R\sqrt{2}\ ,\ h = 4R)$$

28) Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan bir dönel koni içine yerleştirilen maksimum hacimli silindirin taban yarıçapını ve yüksekliğini bulunuz.

$$\left(x = \frac{2r}{3}\ ,\ y = \frac{h}{3}\right)$$

29) Silindir şeklinde üstü açık ve 16 dm^3 hacminde aliminyum bir kap yapılacaktır. en az materyal sarfı için boyutları ne olmalıdır?

$$\left(r = h = 2\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\right)$$

30) Bir volta pilinin gücü $P = \dfrac{E^2 R}{(r + R)^2}$ formülü ile verilmiştir.

(E : elektromotor kuvveti , r : iç direnç, R : dış direnç) P yi maksimum yapan R direncini bulunuz.

$$(R = r)$$

31) Bir kenarı 12 cm olan kare şeklindeki bir madeni levhadan köşelerinden eşit kareler kesildikten sonra kıvrılarak bir kutu yapılacaktır (üstü açık). Kutu hacminin maksimum olması için boyutları ne olmalıdır?

(a = 8 cm ve h = 2 cm)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

32) 80 cm genişliğinde, l uzunluğunda bir teneke yanlarından kıvrılarak dik kesiti dikdörtgen olan üstü açık bir su oluğu yapılacaktır. Kapasitenin en büyük olması için dik kesitinin boyutları ne olmalıdır?

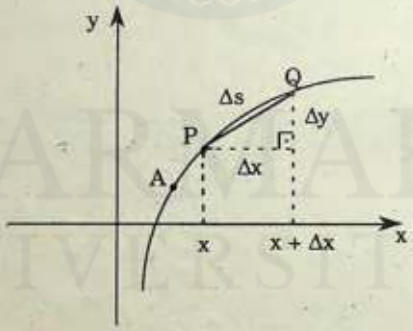
(40 x 20)

33) Alanı S olan metal bir levhadan üstü açık silindir şeklinde bir kap yapılacaktır. Hacminin maksimum olması için silindirin boyutları ne olmalıdır?

$$\left(r = h = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}\right)$$

5.13. EĞRİLİK

$y = f(x)$ fonksiyonu $y' = f'(x)$ türevi sürekli olan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun grafiği üzerinde sabit bir A başlangıç noktasıyla herhangi bir P (x,y) noktası arasındaki yay uzunluğunu s ile gösterelim. s, x in bir fonksiyonu olarak düşünülebilir. Eğri üzerinde P (x,y) ile buna yakın bir Q (x + Δx , y + Δy) noktası arasındaki yay uzunluğu Δs olsun (Şekil 81).



(81. şekil)

$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{|PQ|} \cdot \frac{|PQ|}{\Delta x}$ yazılabilir. Buradan her iki yanın karesi alınarak

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)^2 \cdot \left(\frac{|PQ|}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]$$

bulunur. $\Delta x \to 0$ için Q noktası eğri üzerinde P ye yaklaşır. Bu durumda Δs yay uzunluğu da $|PQ|$ kiriş uzunluğuna yaklaşacağından $\left(\frac{\Delta s}{|PQ|}\right) \to 1$ olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin her iki yanının $\Delta x \to 0$ için limiti alınırsa

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{veya} \quad \frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \pm\sqrt{1 + (y')^2}$$

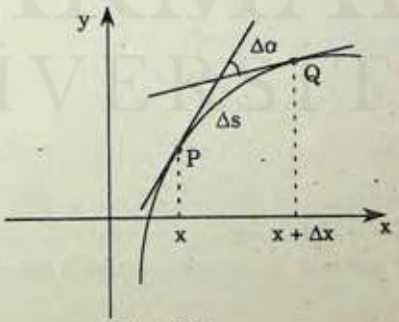
bulunur. Burada x ile s beraber artıyorlarsa işaret pozitif, x artarken s azalıyorsa negatif alınır. Benzer şekilde $\frac{ds}{dy} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ dir.

Eğri denkleminin $x = h(t)$, $y = g(t)$ parametrik şeklinde verilmesi halinde ise

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

olur. Biz eğri üzerindeki yönün, yay uzunluğu türevinin pozitif olacak şekilde belirlendiğini varsayacağız.

$y = f(x)$ eğrisinin birbirine yakın P ve Q noktalarındaki teğetler arasındaki açı $\Delta\alpha$, PQ yayının uzunluğu Δs olsun. (Şekil 82). $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ oranına PQ yayının **ortalama eğriliği**, bu oranın eğer varsa $\Delta s \to 0$ için limitine de eğrinin P noktasındaki **eğriliği** denir ve K ile gösterilir.



(82. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukarıdaki tanıma göre eğrilik

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

dir. $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha/dx}{ds/dx}$ şeklinde yazılabilir. $\frac{dy}{dx} = \text{Tan}\,\alpha$ olduğunu biliyoruz. Buradan her iki yanın x e göre türevi alınarak

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + \text{Tan}^2\alpha)\frac{d\alpha}{dx}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \text{Tan}^2\alpha} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

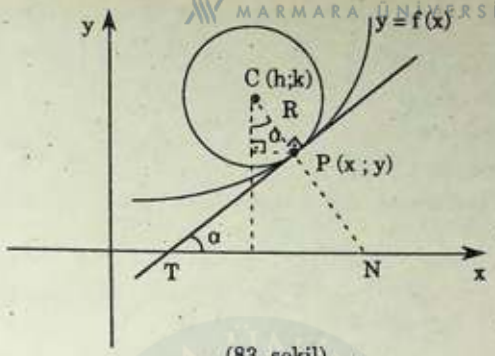
yazılır. Bu ve $\frac{ds}{dx}$ için daha önce bulduğumuz değerler yerlerine konarak eğrilik formülü olarak

$$K = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}$$

bulunur. Bu formüle göre K ile y" aynı işaretlidir. $y'' > 0$ yani eğri yukarıya bükümlüyse $K > 0$; $y'' < 0$ yani eğri aşağıya bükümlüyse $K < 0$ dır. $y'' = 0$ olan noktada (dönüm noktası) $K = 0$ dır.

$K \neq 0$ olmak üzere $\left|\frac{I}{K}\right| = R$ ye **eğrilik yarıçapı** denir. P (x;y) noktasındaki normal üzerinde eğrinin içbükey olduğu yönde P den itaberin $|PC| = R$ alınarak bulunan C noktasına P ye ait **eğrilik merkezi**, C merkezli R yarıçaplı çembere de **eğrilik çemberi** denir. (Şekil 83)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(83. şekil)

Eğrilik çemberinin merkezi C (h;k) ise

$h = x - R \cdot \text{Sin}\,\alpha$ ve $k = y + R \cdot \text{Cos}\,\alpha$ dır.

$$R = \frac{I}{K} = \frac{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}{y''}$$

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{\text{Tan}\,\alpha}{\sqrt{1 + \text{Tan}^2\,\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

$$\text{Cos}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Tan}^2\,\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

değerleri yerlerine konarak merkezin koordinatları

$$h = x - \frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} \quad , \quad k = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

bulunur. Eğrilik çemberinin denklemi

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

olur. P noktası $y = f(x)$ eğrisini çizerken C eğrilik merkezi de bir eğri çizer. Buna $y = f(x)$ eğrisinin **evolütü** denir. $y = f(x)$ eğrisine de C nin çizdiği eğrinin **involütü** denir.

ÖRNEK 1: $y = x^2 - 1$ eğrisinin $P(-1; 0)$ noktasındaki

a) Eğriliğini

b) Eğrilik yarıçapını

c) Eğrilik merkezini

d) Eğrilik çemberinin denklemini

e) Eğrinin evolütünün denklemini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü:

a) $y' = 2x$, $y'' = 2$ dir. $P(-1 ; 0)$ noktasında $y' = -2$ ve $y'' = 2$ olur. Buna göre P deki eğrilik

$$K = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} = \frac{2}{(1+4)^{3/2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}$$

bulunur.

b) $R = \left|\frac{1}{K}\right| = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ dir.

c) Eğrilik merkezi $C(h; k)$ ise

$$h = x - \frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} = -1 + \frac{2(1+4)}{2} = 4$$

$$k = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} = 0 + \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

dir. Buna göre $C\left(4 ; \frac{5}{2}\right)$ olur.

d) Eğrilik çemberinin denklemi

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2 \quad \text{den} \quad (x-4)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$$

bulunur.

e) Eğrinin herhangibir $(x ; y)$ noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatları

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$h = x - \frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} = x - \frac{2x\,(1 + 4x^2)}{2} = -4x^3$$

$$k = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} = x^2 - 1 + \frac{1 + 4x^2}{2} = \frac{6x^2 - 1}{2}$$

dir. h ve k arasında, bu iki eşitlikten x yokedilerek bulunacak bağıntı, C (h; k) eğrilik merkezinin geometrik yeri olan evolütün denklemini verir.

$$h = -4x^3 \text{ den } x^3 = -\frac{h}{4} \text{ veya } x^6 = \frac{h^2}{16}$$

$$k = \frac{6x^2 - 1}{2} \text{ den } x^2 = \frac{2k + 1}{6} \text{ veya } x^6 = \left(\frac{2k + 1}{6}\right)^3$$

Buradan da

$$\frac{(2k + 1)^3}{216} = \frac{h^2}{16} \quad \text{veya} \quad (2k + 1)^3 = \frac{27}{2} h^2$$

bulunur. h = X ve k = Y konarak bu denklem

$$(2Y + 1)^3 = \frac{27}{2} X^2$$

şeklinde de yazılabilir.

ÖRNEK 2: $2xy - y - x + 1 = 0$ eğrisinin (1; 0) noktasındaki eğrilik çemberinin denklemini bulunuz.

Çözümü: Kapalı fonksiyon türevine göre

$$2y + 2xy' - y' - 1 = 0$$

tekrar türev alınarak

$$4y' + 2xy'' - y'' = 0$$

bulunur. Birinci eşitlikten (1 ; 0) noktasında $y' = 1$, ikinci eşitlikten $y'' = -4$ bulunur.

$$K = \frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} = \frac{-4}{(1+1)^{3/2}} = \frac{-4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$R = \left|\frac{I}{K}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dir. Eğrilik merkezinin koordinatları

$$h = x - \frac{y'\left[1 + (y')^2\right]}{y''} = 1 - \frac{1(1+1)}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$k = y + \frac{1 + (y')^2}{y''} = 0 + \frac{1+1}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Eğrilik çemberinin denklemi

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

bulunur.

ÖRNEK 3: $y = \ln x$ eğrisinin eğrilik yarıçapının en küçük olduğu noktasını bulunuz.

Çözüm: $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$,

$$R = \left|\frac{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}{y''}\right| = \frac{(1 + x^2)^{3/2}}{x}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{(1 + x^2)^{1/2}\,(2x^2 - 1)}{x^2}$$

dir. $\frac{dR}{dx} = 0$ dan $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur. $\frac{dR}{dx}$ türevi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nin solunda negatif sağında pozitif olduğundan $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; -\frac{1}{2}\ln 2\right)$ noktası

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$y = \ln x$ eğrisinin R eğrilik yarıçapının minimum olduğu noktadır.

ÖRNEK 4: $x = t^2 - t$, $y = \ln t$ parametrik denklemiyle verilen eğrinin $t = 1$ noktasındaki

a) Eğriliğini b) Eğrilik çemberinin denklemini bulunuz.

Çözümü: $\frac{dx}{dt} = 2t - 1$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$

dir. Buradan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{t(2t-1)}$ bulunur.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t(2t-1)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1-4t}{t^2(2t-1)^2} \cdot \frac{1}{2t-1} = \frac{1-4t}{t^2(2t-1)^3}$$

dir. $t = 1$ için $\frac{dy}{dx} = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -3$ olur.

$$K = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{-3}{(1+1)^{3/2}} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

bulunur.

b) $t = 1$ için $x = 0$ ve $y = 0$ dır. $C(h ; k)$ eğrilik merkezinin koordinatları

$$h = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0 - \frac{1(1+1)}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$k = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = 0 + \frac{1+1}{-3} = -\frac{2}{3}$$

bulunur. Eğrilik yarıçapı $R = \left|\frac{1}{K}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ tür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buradan eğrilik çemberinin denklemi

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemlerden $\frac{ds}{dx}$ yay uzunluğu türevlerini bulunuz.

1) $y = x^3$ $\qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 9x^4}$

2) $x^2 + 4y^2 = 8$ $\qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}}$

3) $6xy = x^4 + 3$ $\qquad \frac{ds}{dx} = \frac{x^4 + 1}{2x^2}$

Aşağıdaki fonksiyonlar için $\frac{ds}{dt}$ türevlerini bulunuz.

4) $x = t^3$, $y = 3t^2 - 1$ $\qquad \frac{ds}{dt} = |3t| \cdot \sqrt{t^2 + 4}$

5) $x = \text{Sin } t$, $y = 2\,\text{Cost}$ $\qquad \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\,\text{Sin}^2 t}$

Aşağıdaki eğrilerin yanlarında verilen noktalarındaki eğriliklerini bulunuz.

6) $y = 2x^2$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = \frac{1}{4}$ $\qquad (K_1 = 4$ ve $K_2 = \sqrt{2})$

7) $y = \text{Sin } x$, $x = \frac{\pi}{2}$ $\qquad (K = -1)$

8) $y^2 = 12x$, $(3\,;\,6)$ $\qquad \left(K = -\frac{\sqrt{2}}{24}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9) $y^2(2-x) = x^3$ $(1;1)$ $\left(K = \frac{3\sqrt{5}}{25}\right)$

10) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, $t = 1$ de $\left(K = -\frac{1}{6}\right)$

11) $x = \text{Cost} + t\ \text{Sint}$, $y = \text{Sint} - t\,\text{Cost}$, $t = \pi$ de

$$\left(K = -\frac{1}{\pi}\right)$$

Aşağıdaki eğrilerin yanlarında verilen noktalarındaki eğrilik yarıçaplarını bulunuz.

12) $y = e^x$, $x = 0$ $(R = 2\sqrt{2})$

13) $xy = 4$, $x = 1$ $\left(R = \frac{17\sqrt{17}}{8}\right)$

14) $y = \text{Cos}\,x$, $x = \frac{\pi}{3}$ $\left(R = \frac{7\sqrt{7}}{4}\right)$

15) $x^3 + xy^2 - 6y^2 = 0$ $(3;3)$ $(R = 5\sqrt{5})$

16) $x = t - \text{Sin}\,t$, $y = 1 - \text{Cost}$, $t = \pi$ de $(R = 4)$

Aşağıdaki eğrilerin yanlarında verilen noktalarındaki eğrilik çemberlerinin denklemlerini bulunuz.

17) $y^2 = 12x$, $\left(\frac{3}{4};3\right)$ $\left[\left(x - \frac{33}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{243}{16}\right]$

18) $y = \frac{4 - x}{2x + 1}$, $x = 1$ $\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\right]$

19) $ay^2 = x^3$, $(a;a)$ $\left[\left(x + \frac{11a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{16a}{3}\right)^2 = 61a^2\right]$

Aşağıdaki eğrilerin evolüt denklemlerini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

20) $y^2 = 12x$ $\left[81\,y^2 = 4\,(x-6)^3\right]$

21) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\left[(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}\right]$

22) $x = \text{Cost} + t\,\text{Sint}$, $y = \text{Sint} - t\,\text{Cost}$ $\left[x^2 + y^2 = 1\right]$

5.14. L'HOSPİTAL KURALI

İspatsız vereceğimiz aşağıdaki kural 1661 - 1704 yılları arasında yaşamış Fransız matematikçi L'Hospital tarafından bulunmuş olup, birçok limit hesabının kolayca çözümünü sağlar.

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limiti $\left(\frac{0}{0}\right)$ veya $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ belirsiz şekillerinden birini alıyorsa

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dir. Bu kural $(0 . \infty)$ ve $(\infty - \infty)$ belirsiz şekilerinde de, bu belirsiz şekiller $\left(\frac{0}{0}\right)$ veya $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ şekillerine çevrildikten sonra uygulanabilir.

ÖRNEK 1: $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = ?$

Çözümü: Limit $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsiz şeklinde olduğundan L'Hospital kuralı uygulanabilir.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2}{2x - 3} = \frac{12}{4 - 3} = 12$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2: $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}} = \frac{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}} = \frac{10}{3}$$

ÖRNEK 3: $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{Sin} x}{1 - \operatorname{Cos} x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sin} x + x \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Cos} x + \operatorname{Cos} x - x \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{1 + 1 - 0}{1} = 2$$

ÖRNEK 4: $\lim_{x \to -2^-} \dfrac{\operatorname{Arcsin}(x+2)}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - (x+2)^2}}}{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}}} = \lim_{x \to -2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x\sqrt{1 - (x+2)^2}} = \frac{0}{-2} = 0$$

ÖRNEK 5: $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\ln \operatorname{Sin} x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{Tan} x}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + \operatorname{Tan}^2 x}{1} = 1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 6: $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^3} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{3x^2} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{6} = \frac{\infty}{6} = \infty$$

ÖRNEK 7: $\lim_{x \to 0^+} (x \cdot \ln x) \quad [0 \cdot (-\infty)]$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

5.15. $(0^\circ , 1^\infty , \infty^\circ)$ BELİRSİZ ŞEKİLLERİ

Bu belirsiz şekillere $\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ şeklindeki limitlerde karşılaşılır. Eğer bu tür bir limitte yukarıdaki belirsizliklerden biri varsa $y = [f(x)]^{g(x)}$ yazılır. Sonra her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = g(x) \cdot \ln f(x)$$

bulunur. Burada $\lim_{x \to a} (\ln y)$ limiti $(0 \cdot \infty)$ belirsiz şeklindedir. Bu limit

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x \to a} (\ln y) = \lim_{x \to a} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

şeklinde yazılarak $\left(\frac{0}{0}\right)$ veya $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ belirsiz şekline çevrilir. Sonra L'Hospital kuralı ile çözülür.

Eğer $\lim_{x \to a} (\ln y) = m$ ise $\lim_{x \to a} (\ln y) = \ln (\lim_{x \to a} y) = m$

olduğu düşünülerek buradan sonuç olarak

$$\lim_{x \to a} y = e^{m}$$

bulunur.

ÖRNEK 1: $\lim_{x \to 0^+} \left(x^{\text{Tan } x}\right) = ?$

Çözümü: (0^0) belirsiz şeklindedir.

$y = x^{\text{Tanx}} \Rightarrow \ln y = \ln (x^{\text{Tanx}}) = \text{Tan } x \,.\, \ln x$

dir. Limite geçilerek

$$\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = \lim_{x \to 0^+} (\text{Tan } x \,.\, \ln x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\text{Cot } x} \qquad \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\text{Sin}^2 x}} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{\text{Sin}^2 x}{x}\right) \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 \text{ Sin } x \,.\, \text{Cos } x}{1} = 0$$

bulunur. Buna göre $\lim_{x \to 0^+} (\ln y) = \ln (\lim_{x \to 0^+} y) = 0$ dan

$$\lim_{x \to 0^+} y = e^0 = 1$$

elde edilir.

ÖRNEK 2: $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = ?$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: (1^∞) belirsiz şeklindedir.

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to \infty} (\ln y) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1 + 1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + 1/x} = 1$$

bulunur. Buna göre

$$\lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

dir. (Bkz. e sayısı, sayfa 111)

ÖRNEK 3: $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\operatorname{Tan} x)^{\operatorname{Tan} 2x} = ?$

Çözümü: (∞^0) belirsiz şeklindedir.

$$y = (\operatorname{Tan} x)^{\operatorname{Tan} 2x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{Tan} 2x \, (\ln \operatorname{Tan} x)$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (\ln y) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\ln(\operatorname{Tan} x)}{\operatorname{Cot} 2x} \qquad \left(\frac{\infty}{-\infty}\right)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\frac{1/\cos^2 x}{\tan x}}{\frac{-2}{\sin^2 2x}} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\frac{1}{\sin x \cdot \cos x}}{\frac{-2}{\sin^2 2x}} = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sin^2 2x}{-2 \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (-\sin 2x) = 0$$

dır. Buradan $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} y = e^0 = 1$ bulunur.

• **ÖRNEK 4:** $\lim_{x \to e} (\ln^2 x)^{\frac{1}{1 - \ln x}} = ?$

Çözümü: (1^∞) belirsiz şeklindedir.

$$y = (\ln^2 x)^{\frac{1}{1 - \ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln (\ln^2 x)}{1 - \ln x}$$

$$\lim_{x \to e} (\ln y) = \lim_{x \to e} \frac{\ln (\ln^2 x)}{1 - \ln x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to e} \frac{\frac{2 (\ln x) \, 1/x}{\ln^2 x}}{-1/x} = \lim_{x \to e} \left(-\frac{2}{\ln x}\right) = -2$$

ve buradan:

$$\lim_{x \to e} y = e^{-2}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki limitleri L'Hospital Kuralı ile bulunuz.

1°) $\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^2 - 1}$ $\left(\frac{n}{2}\right)$

2°) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{2x + 6} - 2}{x - 1}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$

3°) $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$ $\left(\frac{n}{m} \cdot \sqrt[mn]{a^{n-m}}\right)$

4°) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Sin } x}{e^x - 1}$ (1)

5°) $\lim_{x \to \pi} \frac{\text{Sin } x + \text{Cos } x + 1}{1 - \text{Sin } x + \text{Cos } x}$ (-1)

6°) $\lim_{x \to 0} \frac{x + \text{Sin } 3x}{e^{2x} - \text{Cos } x}$ (2)

7°) $\lim_{x \to \pi} \frac{1 - \text{Cos } 2x}{1 + \text{Cos } x}$ (4)

8°) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Cos } ax - \text{Cos } bx}{x^2}$ $\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right)$

9°) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \text{Cos } 2x}{1 - \text{Tan } \frac{x}{2}}$ (0)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

10°) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arcsin } x}{\text{Tan } x}$ (1)

11°) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2}{e^x \text{ Sin } x - x}$ (2)

12°) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln (\text{Sin } x)}{(\pi - 2x)^2}$ $\left(-\frac{1}{8}\right)$

13°) $\lim_{x \to 0} \frac{x (\text{Cos } x - 1)}{\text{Sin } x - x}$ (3)

14°) $\lim_{x \to 0} \frac{x e^{mx} - x}{1 - \text{Cos } mx}$ $\left(\frac{2}{m}\right)$

15°) $\lim_{x \to \infty} (x^2 e^{-x})$ (0)

16°) $\lim_{x \to 0} (x \,.\, \text{Cot } 2x)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

17°) $\lim_{x \to 1^+} [\ln x \,.\, \ln (x - 1)]$ (0)

18°) $\lim_{x \to 2} \left[(2 - x) \,.\, \text{Tan } \frac{\pi x}{4}\right]$ $\left(\frac{4}{\pi}\right)$

19°) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right)$ $\left(\frac{3}{2}\right)$

20°) $\lim_{x \to 0^+} (x^x)$ (1)

21°) $\lim_{x \to 0^+} (x^{\text{Tan } 3x})$ (1)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

22°) $\lim_{x \to 1} \left(x^{\frac{1}{1-x}}\right)$ $\left(\frac{1}{e}\right)$

23°) $\lim_{x \to 0} (x^2 + 1)^{1/x}$ (1)

24°) $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{Tan} x}$ (1)

25°) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{p}{x}\right)^x$ (e^p)

26°) $\lim_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$ (e^{-1})

27°) $\lim_{x \to 0^+} (1 + \operatorname{Tan} \sqrt[2]{x})^{1/2x}$ $(\sqrt{e})$

28°) $\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{Cot} x)^{1/\ln x}$ $\left(\frac{1}{e}\right)$

29°) $\lim_{x \to \infty} \left(\operatorname{Cos} \frac{2}{x}\right)^{x^3}$ (e^{-2})

30°) $\lim_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{Tan} \frac{\pi x}{2}}$ $\left(e^{2/\pi}\right)$

31°) $\lim_{x \to \infty} \left(e^x + x\right)^{1/x}$ (e)

32°) $\lim_{x \to 0} \frac{x - x \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arcsin} x}$ (-1)

33°) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{Sin} x - \operatorname{Arctan} x}{x^2 . \ln (x + 1)}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$

34°) $\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \operatorname{Cos} x)^3}{(x - \operatorname{Sin} x)^2}$ $\left(\frac{9}{2}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

35°) $\lim_{x \to \infty} \frac{x \ln^2 x}{e^{2x}}$ (0)

36°) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ (e^2)

37°) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}\right]$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

38°) $\lim_{x \to 0^+} (\text{Sinh}x)^{\text{Tan}x}$ (1)

39°) $\lim_{x \to 0} (\text{Cosh}x - 1)^{\text{Sinh}\,x}$ (1)

40°) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\text{Tan}\,x}{x}\right)^{1/x^2}$ $\left(e^{1/3}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ALTINCI BÖLÜM

GRAFİK ÇİZİMİ

6.1. KARTEZYEN DENKLEMİYLE VERİLEN EĞRİLERİN ÇİZİMİ

$y = f(x)$ kartezyen denklemiyle verilen bir fonksiyonun değişimini inceleyerek grafiğini çizmek için genel olarak aşağıdaki işlemler yapılır.

1°) Eğer verilmemişse fonksiyonun tanım kümesi bulunur. (Trigonometrik fonksiyonlarda ayrıca periyot bulunur.)

2°) Eğer varsa $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ hesaplanır.

3°) Varsa asimtotlar bulunur.

4°) Grafiğin eksenleri kestiği noktalar araştırılır. Bunun için $x = 0$ için y, $y = 0$ için x hesaplanır.

5°) $f'(x)$ türevi bulunur. $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri ve bu köklere karşılık $f(x)$ değerleri hesaplanır.

6°) Gerekiyorsa bükülme yönünü ve dönüm noktalarını belirlemek için $f''(x)$ türevi ve bu türevin kökleri bulunur.

7°) Değişim tablosu düzenlenir. Bu tabloda x in aldığı değerlere göre $f'(x)$ in işareti incelenir. Bu işaretlere göre fonksiyonun değişim yönü oklarla gösterilir; maksimum, minimum noktalarla fonksiyonun tanımsız olduğu nokta veya aralıklar belirtilir.

8°) Tabloya göre grafik çizilir.

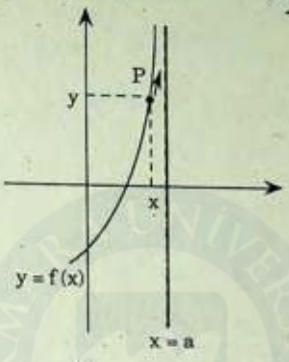
6.2. ASİMTOT BULUNUŞU

Bir $y = f(x)$ eğrisinin sonsuza uzanan bir kolu üzerinde hareketli bir nokta P olsun. P noktası bu kol üzerinde sonsuza giderken, bir doğruya (veya eğriye) olan uzaklığı sıfıra yaklaşıyorsa bu doğruya (veya eğriye) $y = f(x)$ eğrisinin **asimtotu** denir. Buna göre asimtot, değme noktası sonsuzda olan teğet demektir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1°) Düşey Asimtot

$y = f(x)$ fonksiyonunda $x \to a^+$ veya $x \to a^-$ $(a \in R)$ için $y \to +\infty$ veya $y \to -\infty$ oluyorsa $x = a$ doğrusu $y = f(x)$ eğrisinin düşey asimtotu olur. (84. şekil)



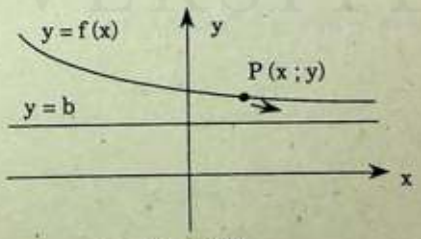
(84. şekil)

ÖRNEK: $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ fonksiyonunda $x \to 2^+$ için $y \to +\infty$, $x \to 2^-$ için $y \to -\infty$ olur. Buna göre $x = 2$ doğrusu düşey asimtottur.

Genel olarak $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki kesirli fonksiyonlarda paydanın kökleri, eğer payı sıfır yapmıyorlarsa düşey asimtot denklemlerini verirler.

2°) Yatay Asimtot

$y = f(x)$ fonksiyonunda $x \to +\infty$ (veya $x \to -\infty$) için $y \to b \in R$ oluyorsa yani $\lim\limits_{x \to +\infty} y = b$ (veya $\lim\limits_{x \to -\infty} y = b$) ise $y = b$ doğrusu bu fonksiyon eğrisinin yatay asimtotu olur. (85. şekil)



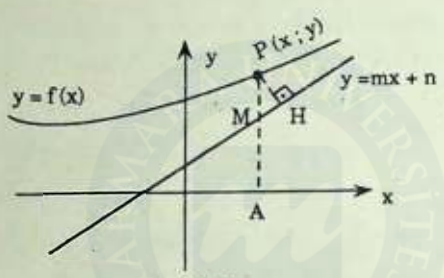
(85. şekil)

ÖRNEK $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 - 3/x + 2/x^2)}{x^2(1 + 1/x^2)} = 1$$

olduğundan $y = 1$ doğrusu yatay asimtottur.

3°) Eğik Asimtot



(86. şekil)

$y = mx + n$ doğrusunun $y = f(x)$ eğrisinin asimtotu olduğunu varsayalım. (86. şekil) Bu durumda $y = f(x)$ eğrisi üzerinde alınan $P(x, y)$ noktasının asimtota olan $|PH|$ uzaklığı $x \to +\infty$ için sıfıra yaklaşır. $|PH|$ ile birlikte $|PM| = ||PA| - |MA|| = |f(x) - (mx + n)|$ uzunluğu da sıfıra yaklaşacağından

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - (mx + n)| = 0$$

veya

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right| = 0$$

olur. Buradan $x \to +\infty$ için $\dfrac{n}{x} \to 0$ olduğundan

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - mx - n| = 0$$

eşitliğinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n$$

bulunur. Aynı durum $x \to -\infty$ için de geçerlidir. O halde $y = f(x)$ eğrisinin $y = mx + n$ şeklinde bir eğik asimtotu varsa

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

limitleri ile hesaplanır. Bir $y = f(x)$ fonksiyonunda ancak $x \to \pm\infty$ için $y \to \pm\infty$ olması durumunda eğik asimtot olabileceği açıktır. Bu durumda

a) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ ise eğik asimtot vardır.

b) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ise eğrinin 0x doğrultusunda,

c) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ise 0y doğrultusunda parabolik kolu vardır.

ÖRNEK 1: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ fonksiyonunda

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x} = 1 = m$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = -4 = n$$

olduğundan $y = x - 4$ doğrusu eğik asimtottur.

Payın derecesi paydanın derecesinden bir büyük olan $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ şeklindeki rasyonel cebirsel fonksiyonların bir eğik asimtotları vardır. Bu eğik asimtotun denklemi yukarıda anlatılan şekilde bulunabileceği gibi payın paydaya bölünmesiyle de bulunabilir. Gerçekten bu bölmeden bulunan bölüm $mx + n$, kalan $k(x)$ ise

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = mx + n + \frac{k(x)}{h(x)}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(x) - (mx + n) = \frac{k(x)}{h(x)}$$

yazılabilir. Buradan da $x \to \pm\infty$ için limite geçilirse $k(x)$ in derecesi $h(x)$ in derecesinden daha küçük olduğundan

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx + n)\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{k(x)}{h(x)} = 0$$

bulunur. Bu da $y = mx + n$ doğrusunun eğik asimtot olduğunu gösterir.

Eğer $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ kesrinde pay paydadan iki veya daha çok derece büyük ise fonksiyonun eğri asimtotu vardır. Eğri asimtot denklemi de payın paydaya bölümü ile bulunabilir.

ÖRNEK 2: $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$ fonksiyonunda pay paydaya bölünerek

$$y = x + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $y = x$ doğrusu eğik asimtottur.

ÖRNEK 3: $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x}$ fonksiyonu $y = x^2 - 4x + \frac{3}{x}$

şeklinde yazılabilir.

$$y - (x^2 - 4x) = \frac{3}{x} \quad \text{olup}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[y - (x^2 - 4x)\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x} = 0$$

bulunur. Buna göre $y = x^2 - 4x$ eğrisi $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x}$ eğrisinin eğri asimtotudur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1: $y = x^3 - 3x^2$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çiziniz.

Çözümü: 1°) Fonksiyon $\forall x \in R$ için tanımlıdır.

2°) $\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x}\right) = \pm\infty$

3°) $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = x^2 (x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 3$

4°) $y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 3x (x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$

$x = 0$ için $y = 0$; $x = 2$ için $y = -4$ tür.

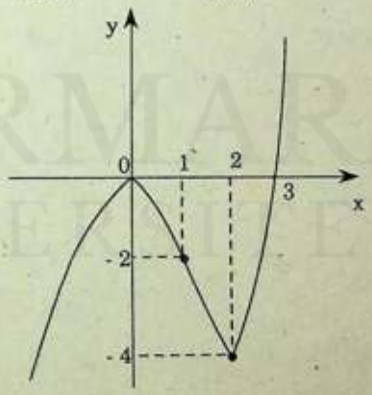
5°) $y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1$ için $y = -2$ olup $(1; -2)$ eğrinin dönüm noktasıdır.

6°)

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y'		+	0	−		−	0	+		+	
y	$-\infty$	↗	0 (maks.)	↘	-2	↘	-4 (min.)	↗	0	↗	$+\infty$

7°) grafik:



(87. şekil)

ÖRNEK 2: $y = (x + 2)\ (1 - x)^3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: 1°) Fonksiyon $\forall x \in R$ için tanımlıdır.

2°) $\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x^4 \left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x} - 1\right)^3 \right] = (\pm\infty)^4 . 1 . (-1) = -\infty$

3°) $x = 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \vee x = 1$

4°) $y' = (1 - x)^3 - 3(1 - x)^2 (x + 2) = (1 - x)^2 (-4x - 5)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \vee x = -5/4$

$x = 1$ için $y = 0$; $x = -5/4$ için $y = \frac{2187}{256} = 8\frac{139}{256}$

5°) $y'' = -2(1 - x)(-4x - 5) - 4(1 - x)^2 = 6(1 - x)(2x + 1)$

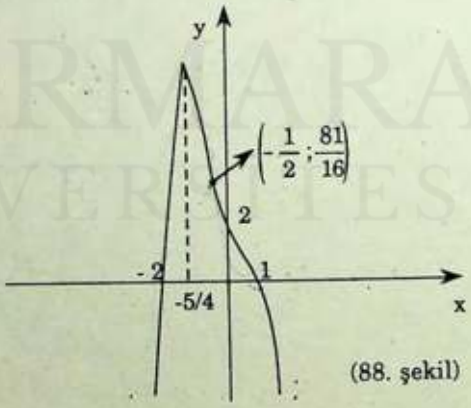
$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \vee x = -1/2$

$(1 ; 0)$ ve $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{81}{16}\right)$ dönüm noktalarıdır.

6)

x	$-\infty$		-2		$-5/4$		$-1/2$		0		1		$+\infty$
y''		+		+		−		−		−		−	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$8\frac{139}{256}$ maks.	↘	$5\frac{1}{16}$	↘	2	↘	0	↘	$-\infty$

7°) Grafik:



(88. şekil)

ÖRNEK 3: $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x - 3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözümü: 1°) $x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 1$ olduğundan fonksiyon $R - \{-3, 1\}$ kümesinde tanımlıdır.

2°) $$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(1 - 4/x^2\right)}{x^2\left(1 + 2/x - 3/x^2\right)} = 1$$

olduğundan $y = 1$ yatay asimtottur.

$x = -3$ ve $x = 1$ doğruları düşey asimtotlardır.

3°) $x = 0 \Rightarrow y = 4/3$

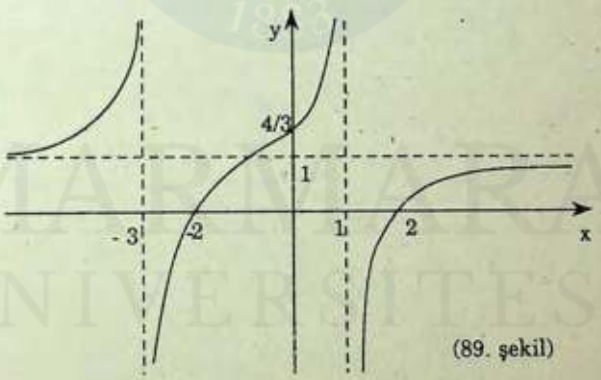
$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

4°) $y' = \dfrac{2(x^2 + x + 4)}{(x^2 + 2x - 3)^2}$ olup $y' = 0$ için $x \notin R$ dir.

5°)

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		2		$+\infty$
y'	+		‖	+	+	+	‖	+	+				
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	4/3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	1

6°)



(89. şekil)

ÖRNEK 4: $y = \dfrac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözümü: 1°) Fonksiyon $R - \{3\}$ kümesinde tanımlıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2°) $\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{10}{x^2}\right)}{x\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)} = \pm\infty$

dur. Payın derecesi paydadan bir büyük olduğundan eğik asimtot vardır. Pay paydaya bölünerek eğik asimtot denklemi $y = x - 2$ bulunur. $x = 3$ doğrusu da düşey asimtottur.

3°) $x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{10}{3}$

$y = 0 \Rightarrow x \notin R$ dir.

4°) $y' = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \ \text{V} \ x = 5$

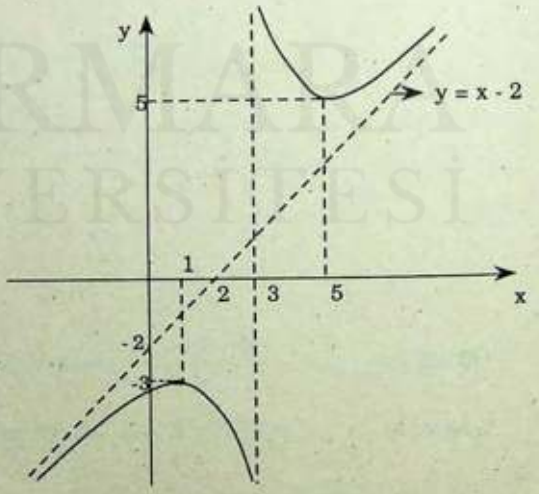
$x = 1$ için $y = -3$

$x = 5$ için $y = 5$

5°)

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
y'		+		+	0	−		−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$-\frac{10}{3}$	↗	−3 (maks.)	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	5 (min.)	↗	$+\infty$

6°)



(90. şekil)

ÖRNEK 5: $y = x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözümü: 1°) Fonksiyon $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ için tanımlıdır. Buna göre fonksiyonun en geniş tanım kümesi

$$T = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

olur.

$$2°)\ \lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}\right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[x - 2 + |x - 1|\right]$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 2 + x - 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (x - 2 - x + 1) = -1 \end{cases}$$

dir.

3°) $x \to -\infty$ için $y \to -1$ olduğundan $y = -1$ yatay asimtottur. $x \to +\infty$ için $y \to +\infty$ olduğundan eğrinin birinci bölgede uzanan bir eğik asimtotu olabilir. Şimdi onu arayalım.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2 + |x - 1|}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2 + x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{x} = 2$$

Bu sonuca göre eğik asimtot vardır.

$$n = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left[x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 2x\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - 2x - 3} - x - 2\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[|x - 1| - x - 2\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x - 1 - x - 2\right] = -3$$

bulunur. $y = 2x - 3$ eğik asimtottur.

4°) Fonksiyon $x = 0$ için tanımsızdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$y = 0 \Rightarrow x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 2 - x$$

olur. Her iki yanın karesi alınırsa:

$$x^2 - 2x - 3 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

bulunur. Ancak bu sayı denklemin kare almadan önceki şeklini sağlamaz. Buna göre $y = 0$ yapan x yoktur.

5°) $x = -1$ için $y = -3$

$x = 3$ için $y = 1$ dir.

6°) $$y' = 1 + \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} + x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

dir. $$y' = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} + x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 - x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 1 - 2x + x^2$$

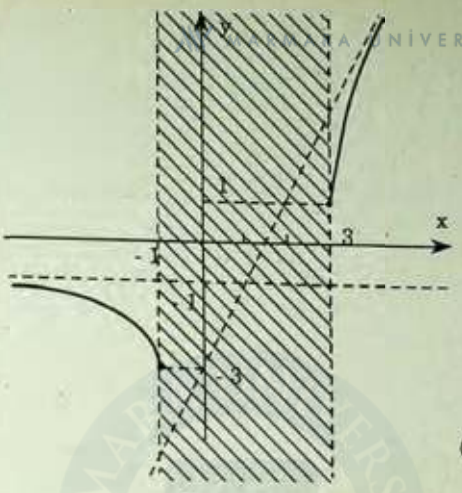
$$\Rightarrow -3 = 1$$

elde edilir. Bu bir çelişki olduğundan $y' = 0$ denkleminin kökü yoktur.

7°)

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$				$+$	
y	-1	↘	-3		1	↗	$+\infty$

8°)



(91. şekil)

ÖRNEK 6: $y^2 = \dfrac{-x^3 + 2x}{x + 2}$ eğrisini çiziniz.

Çözümü: Denklem $y^2 = \dfrac{x^2(-x+2)}{x+2}$ veya $y = \pm x\sqrt{\dfrac{-x+2}{x+2}}$

şeklinde yazılabilir. Eğer $y = x.\sqrt{\dfrac{-x+2}{x+2}}$ fonksiyonunun grafiği çizilip bunun y eksenine göre simetriği de alınırsa eğri tamamlanmış olur.

1°) $y = x.\sqrt{\dfrac{-x+2}{x+2}}$ fonksiyonu $\dfrac{-x+2}{x+2} \geq 0$ için tanımlıdır. Buna göre en geniş tanım kümesi

$$T = (-2, 2]$$

dir.

2°) $x \to \pm\infty$ için fonksiyon tanımlı değildir. Bu nedenle yatay ve eğik asimtot yoktur. $x = -2$ düşey asimtottur.

3°) $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$$y = 0 \Rightarrow x\sqrt{\frac{-x+2}{x+2}} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee \frac{-x+2}{x+2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4°) $y' = \sqrt{\frac{-x+2}{x+2}} + \frac{\frac{-4}{(x+2)^2}}{2\sqrt{\frac{-x+2}{x+2}}} \cdot x = \frac{-x^2-2x+4}{(x+2)^2\sqrt{\frac{-x+2}{x+2}}}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{5}$ bulunur. $-1-\sqrt{5} \notin T$ olduğundan türevin kökü olarak alınamaz.

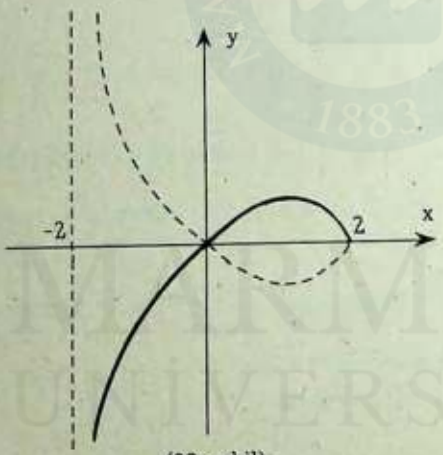
$x = -1+\sqrt{5}$ için $y = (\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2} \cong 0{,}6$

bulunur.

5°)

x	-2		0		$-1+\sqrt{5}$		2
y'	||	+		+	0	-	
y	|| $-\infty$	↗	0	↗	$(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}$ maks.	↘	0

6°)



(92. şekil)

92. şekilde devamlı çizgiyle çizilen eğri

$$y = x\sqrt{\frac{-x+2}{x+2}}$$

nin kesik çizgilerle çizilen eğri ise

$$y = -x\sqrt{\frac{-x+2}{x+2}}$$

grafiğidir. İkisi beraber

$$y^2 = \frac{x^2(-x+2)}{x+2}$$

nin grafiği olur.

ÖRNEK 7: $y = \frac{\text{Sin } x - 1}{2, \text{ Sin } x + 1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözümü: Fonksiyon periyodik olup periyodu $T = 2\pi$ dir. O halde grafiğin $[0, 2\pi]$ aralığında çizilmesi yeterlidir. Çünkü bu aralığın dışındaki grafik $[0, 2\pi]$ aralığındaki grafiğin 2π aralıklarla tekrarlanan kopyası olacaktır.

2°) $2 \operatorname{Sin} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Sin} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \vee x = \frac{11\pi}{6}$

olduğundan $x = \frac{7\pi}{6}$ ile $x = \frac{11\pi}{6}$ doğruları düşey asimtottur.

3°) $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = 2\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -1$

$y = 0 \Rightarrow \operatorname{Sin} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Sin} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

4°) $y' = \frac{3 \cdot \operatorname{Cos} x}{(2 \cdot \operatorname{Sin} x + 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow \operatorname{Cos} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2}$

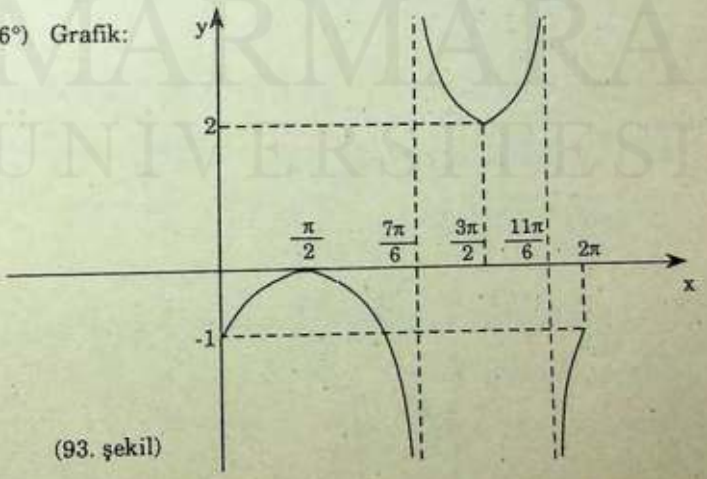
$x = \frac{\pi}{2}$ için $y = 0$,

$x = \frac{3\pi}{2}$ için $y = 2$ dir.

5°)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
y	-1	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1
			maks.				min.				

6°) Grafik:



(93. şekil)

ÖRNEK 8: $y = \frac{x-2}{x} e^{1/x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1°) Fonksiyon $R - \{0\}$ kümesinde tanımlıdır.

2°) $\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{1/x} \right] = 1 \cdot e^{0} = 1$

3°) $y = 1$ yatay asimtottur.

$\lim_{x \to \pm\infty} y = 1$ olduğundan eğik asimtot yoktur.

$\lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x-2}{x}\right) e^{1/x} = -\infty \cdot e^{\infty} = -\infty$

olduğundan $x = 0$ doğrusu düşey asimtottur.

$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-2}{x} e^{1/x} = \infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0$

olup belirsizdir. L' Hospital kuralı ile

$$\lim_{x \to 0^-} y = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{x-2}{x}}{e^{-1/x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - \frac{2}{x}}{e^{-1/x}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x^2} \cdot e^{-1/x}} = \lim_{x \to 0^-} \left(2 \cdot e^{1/x}\right) = 2 \cdot e^{-\infty} = 2 \cdot 0 = 0$$

bulunur.

4°) $x = 0$ için fonksiyon tanımsızdır.

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} e^{1/x} = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

5°) $y' = \frac{2}{x^2} e^{1/x} - \frac{1}{x^2} e^{1/x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{x+2}{x^3} e^{1/x}$

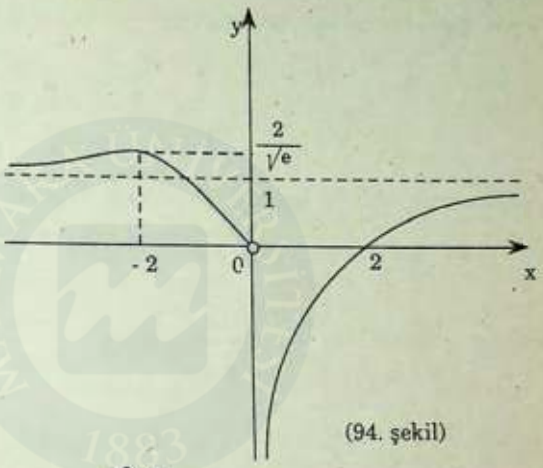
$y' = 0 \Rightarrow x = -2$

$x = -2$ için $y = \frac{2}{\sqrt{e}}$ dir.

6°)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'	+		0	−	‖	+		+	
y	1	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$ maks.	↘	0	$-\infty$ ↗		0 ↗	1

7°) grafik:



(94. şekil)

ÖRNEK 9: $y = \ln \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözümü: 1°) Fonksiyon $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} > 0$ için tanımlıdır.

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$x^2 - 4$	+		0	−	‖	−	0	+		+	
$x^2 - 3x - 4$	+			+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x-4}$	+		0	−	$+\infty$ ‖	+	0	−	$+\infty$ ‖	+	

Tabloya göre fonksiyonun en geniş tanım kümesi:

$$T = (-\infty, -2) \cup (-1, 2) \cup (4, +\infty)$$

dur.

2°) $\lim_{f(x)\to 0^+} [\ln f(x)] = -\infty$ ve $\lim_{f(x)\to +\infty} [\ln f(x)] = +\infty$

olduğu düşünülerek yukarıdaki tablodan $\lim_{x\to -2^-} y = \lim_{x\to 2^-} = -\infty$ ve

$\lim_{x\to -1^+} y = \lim_{x\to 4^+} y = +\infty$ bulunur. Buna göre $x = -2$, $x = 2$, $x = -1$, $x = 4$ doğruları düşey asimtotlardır.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\ln \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}\right] = \ln 1 = 0$$

olduğundan $y = 0$ doğrusu da yatay asimtottur.

3°) $x = 0 \Rightarrow y = \ln 1 = 0$

$$y = 0 \Rightarrow \ln \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = x^2 - 3x - 4 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

bulunur.

4°) $y = \text{Ln } f(x) \to y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ türev formülüne göre

$$y' = \frac{-3(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)(x^2 - 3x - 4)}$$

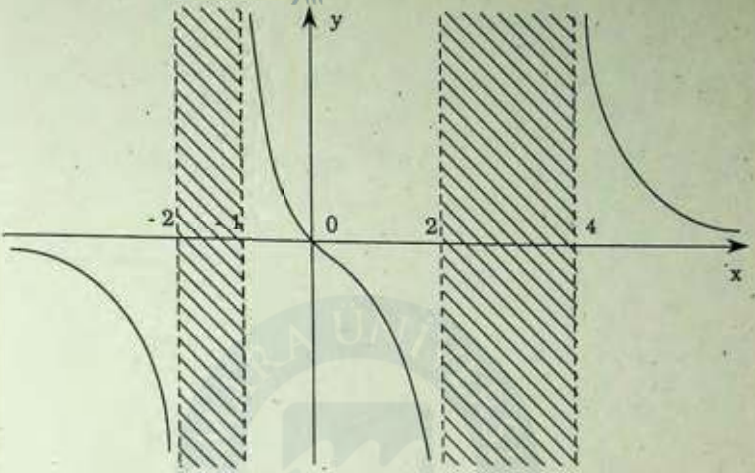
bulunur. $\forall x \in T$ için $y' < 0$ dır.

5°)

x	$-\infty$	-2	-1	0	2	4	$+\infty$
y'		−	−	−		−	
y	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6°) Grafik:



(95. şekil)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki fonksiyonların değişimlerini inceleyip grafiklerini çiziniz.

1°) $y = -x^2 + 6x - 5$

2°) $y = x^3 - x^2 - x - 2$

3°) $y = -x^3 + x^2 + 4$

4°) $y = x^4 - x^2 - 2$

5°) $y = x^2 (x - 2)^2$

6°) $y = (x - 1)(x + 1)^3$

7°) $y = (x - 1)^3 (x + 2)^2$

8°) $y = \frac{1}{6}(x + 1)(x - 1)^2 (x + 3)^3$

9°) $y = \frac{x - 4}{x + 2}$

10°) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

11°) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

12°) $y = \frac{2x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1}$

13°) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$

14°) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

15°) $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

16°) $y = \dfrac{x^3 + 9x^2}{x^2 - 1}$

17°) $y = x + \dfrac{4}{(x+1)^2}$

18°) $y = \dfrac{x^3}{x + 1}$

19°) $y = \dfrac{-x^3 + 1}{x}$

20°) $y = \pm\sqrt{x^2 + 4x}$

21°) $y = \pm\sqrt{-x^2 + 5x - 4}$

22°) $y = \pm\sqrt{-2x^2 + 5x + 3}$

23°) $y = \pm(x - 1)\sqrt{x + 2}$

24°) $y = \pm(x - 2)\sqrt{16 - x^2}$

25°) $y = \pm\sqrt{\dfrac{2x + 8}{x - 1}}$

26°) $y = x - 2 \pm\sqrt{x^2 - 7x + 10}$

27°) $y = \pm\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$

28°) $y^2 = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4}$

29°) $y = \text{Sin } x - \text{Cos } x$

30°) $y = 2 \text{ Sin } x + \text{Cos } 2x$

31°) $y = 3 + 5 \text{ Sin } x - 2 \text{ Sin}^2 x$

32°) $y = \dfrac{3 + \text{Sin } x}{1 - 2 \text{ Sin } x}$

33°) $y = \dfrac{\text{Cos } 2x}{2 \text{ Cos } 2x - 1}$

34°) $y = \dfrac{\text{Sin } 2x}{\text{Cos } x + \text{Sin } x}$

35°) $y = \text{Cos } (3 \text{ arcsin } x)$

36°) $y = e^{-x^2}$

37°) $y = e^{1/x}$

38°) $y = \dfrac{e^x}{x - 1}$

39°) $y = (8 - x^2)\, e^{-x}$

40°) $y = (x^2 - 15)\, e^x$

41°) $y = (2x - 4)\, e^{-1/x}$

42°) $y = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

43°) $y = \ln \dfrac{x-3}{x+2}$

44°) $y = x \cdot \ln x$

45°) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

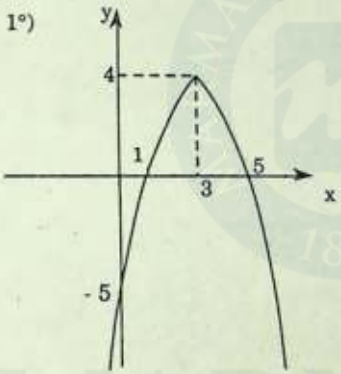
46°) $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$

47°) $y = \ln \dfrac{x^2 - 6}{x^2 - x - 6}$

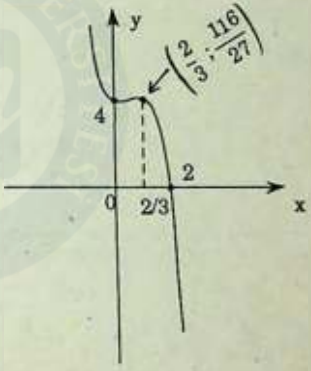
48°) $y = x^x$

Tek numaralı soruların grafikleri:

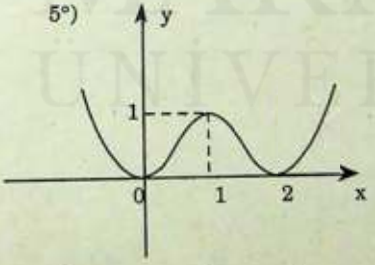
1°)



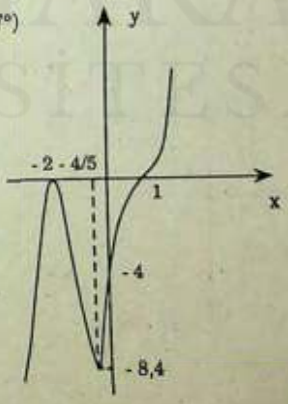
3°)



5°)

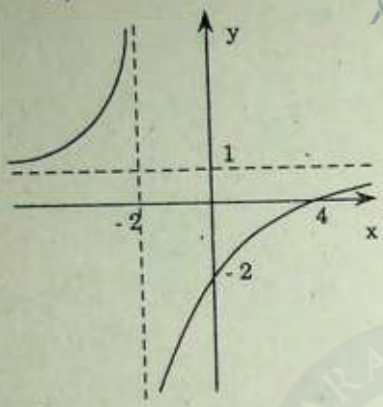


7°)

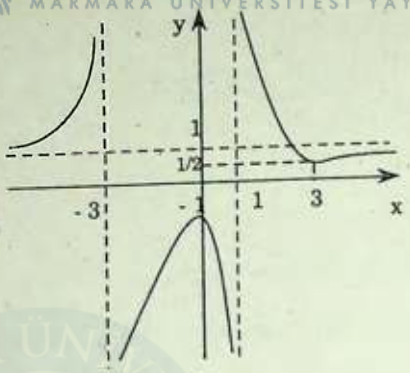


MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

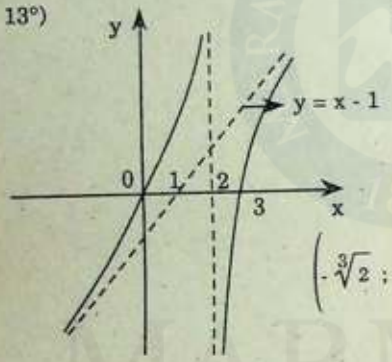
9°)



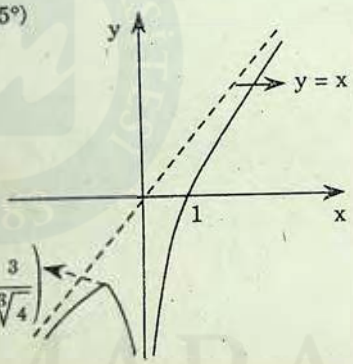
11°)



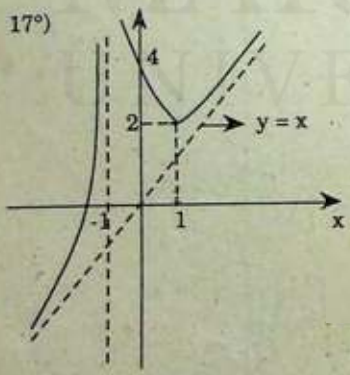
13°)



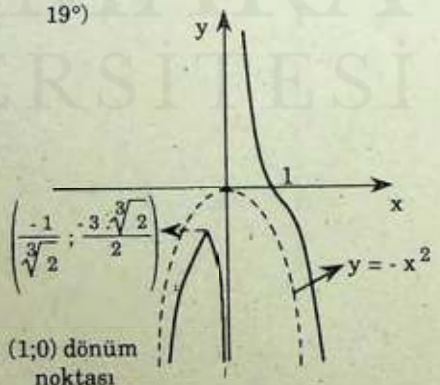
15°)



17°)



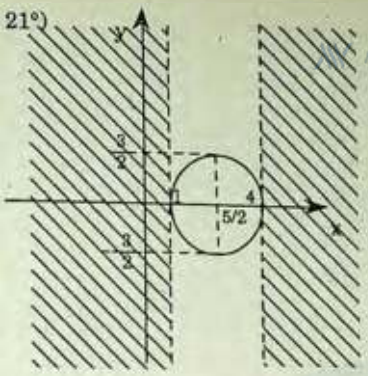
19°)



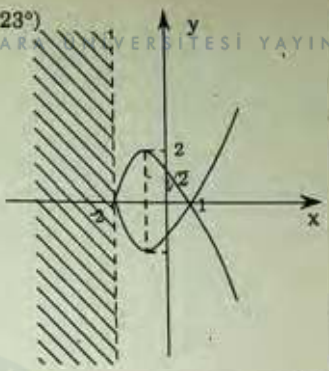
(1;0) dönüm noktası

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

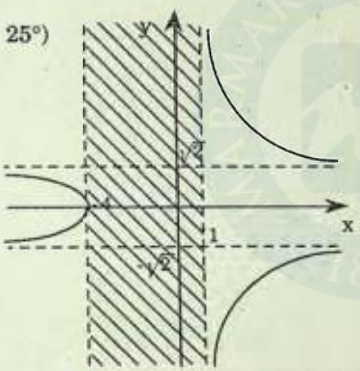
21°)



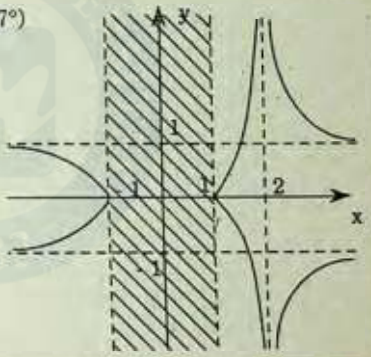
23°)



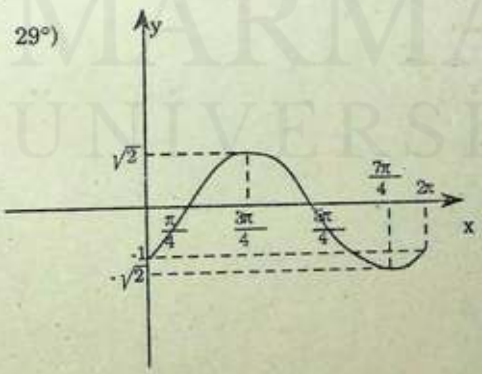
25°)



27°)

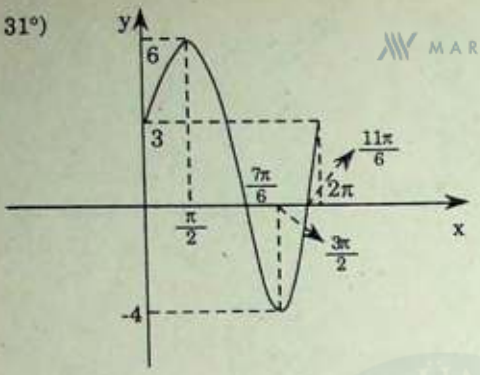


29°)

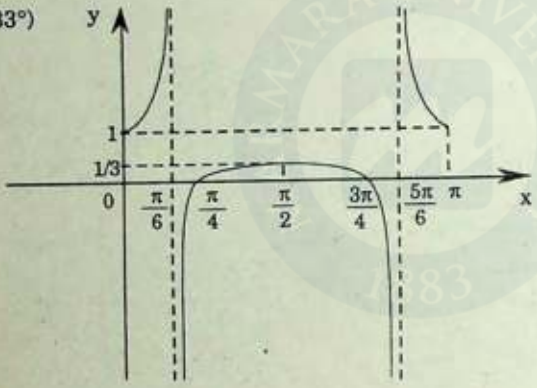


MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

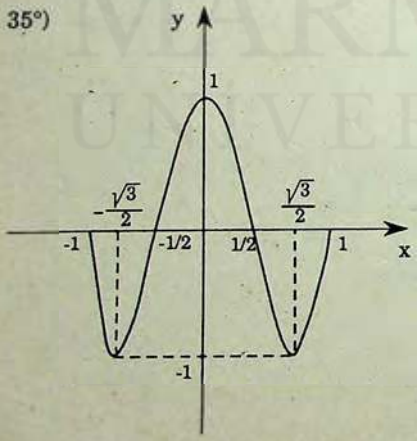
31°)



33°)

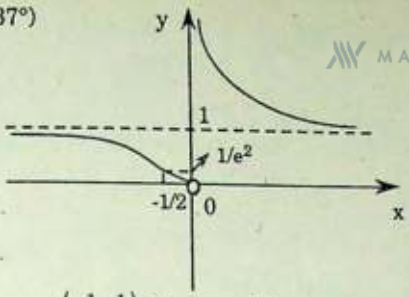


35°)



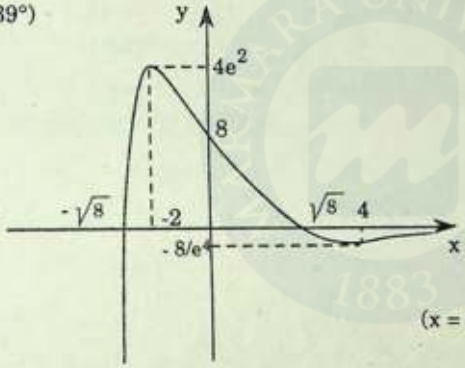
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

37°)



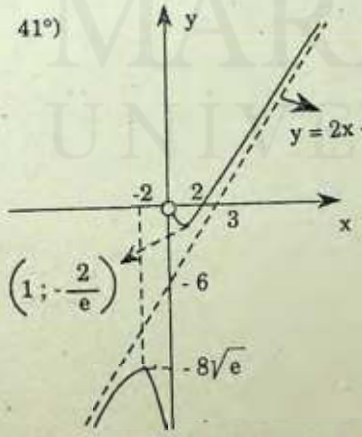
$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{e^2}\right)$ dönüm noktası

39°)



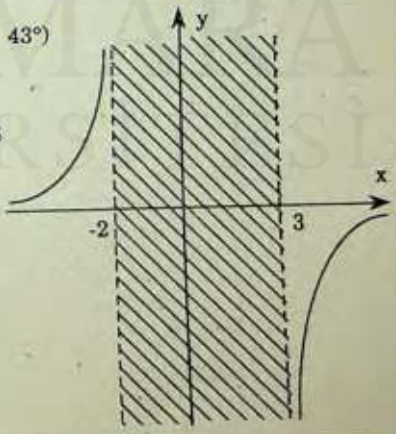
($x = 2 - \sqrt{10}$ ve $x = 2 + \sqrt{10}$ da dönüm noktaları var.)

41°)



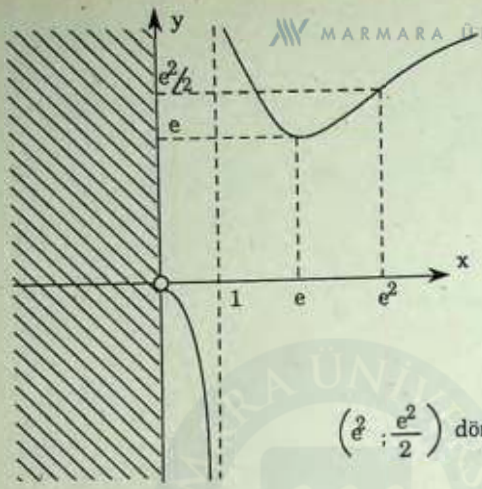
$\left(1; -\frac{2}{e}\right)$

43°)



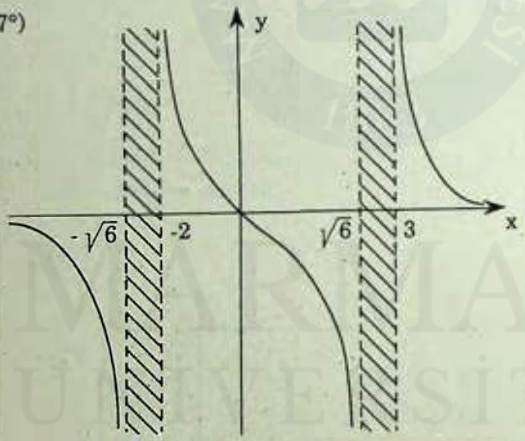
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

45°)



$\left(e^2 ; \frac{e^2}{2}\right)$ dönüm noktası

47°)



6.4. PARAMETRİK DENKLEMLERİYLE VERİLEN EĞRİLERİN ÇİZİMİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$x = f(t)$, $y = g(t)$ şeklinde parametrik denklemleriyle verilen bir eğrinin çizimi için genel olarak aşağıdaki yol izlenir.

1°) f ve g fonksiyonlarının tanım aralıkları bulunur.

2°) $t \to \pm\infty$ için varsa x ve y değerleri hesaplanır.

3°) Asimtotlar araştırılır.

a) Eğer $t \to t_0$ için $x = f(t) \to a \in R$ ve $y = g(t) \to \pm\infty$ oluyorsa $x = a$ düşey asimtottur.

b) Eğer $t \to t_0$ için $x = f(t) \to \pm\infty$ ve $y = g(t) \to b \in R$ oluyorsa $y = b$ yatay asimtottur.

c) Eğer $t \to t_0$ için hem $x \to \pm\infty$ ve hem de $y \to \pm\infty$ oluyorsa eğik asimtot olabilir. Bu durumda:

$\frac{y}{x} \to \pm\infty$ ise eğrinin Oy doğrultusunda, $\frac{y}{x} \to 0$ ise Ox doğrultusunda parabolik kolu vardır. $\frac{y}{x} \to m \in R - \{0\}$ ve $(y - mx) \to n \in R$ olması halinde ise $y = mx + n$ şeklinde eğik asimtotu vardır.

4°) $x = 0$ ve $y = 0$ için t değerleri hesaplanır.

5°) $x'_t = \frac{dx}{dt}$ ve $y'_t = \frac{dy}{dt}$ türevleri ve bu türevlerin kökleri bulunur. Bu köklere karşılık x ve y değerleri hesaplanır.

6°) Tablo düzenlenir. Tabloda t nin aldığı değerlere göre x'_t ve y'_t türevlerinin işaretleri ve bu işaretlere göre x ve y nin değişim yönleri gösterilir.

7°) Tabloya göre grafik çizilir.

ÖRNEK 1: Parametrik denklemleri $x = t^3 + 2t^2$, $y = t^3 - t$ olan eğriyi çiziniz.

Çözümü: 1°) $\forall t \in R$ için x ve y tanımlıdır.

2°) $t \to \pm\infty$ için $x \to \pm\infty$ ve $y \to \pm\infty$ olur.

3°) Asimtot yoktur.

4°) $x = 0$ için $t^3 + 2t^2 = t^2(t+2) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = -2$

$y = 0$ için $t^3 - t = t(t-1)(t+1) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 1 \vee t = -1$

5°) $x'_t = 3t^2 + 4t = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = -\frac{4}{3}$

$t = 0$ için $x = 0$, $y = 0$

$t = -\frac{4}{3}$ için $x = \frac{32}{27} \cong 1{,}19$, $y = -\frac{28}{27} \cong -1{,}04$

$y'_t = 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

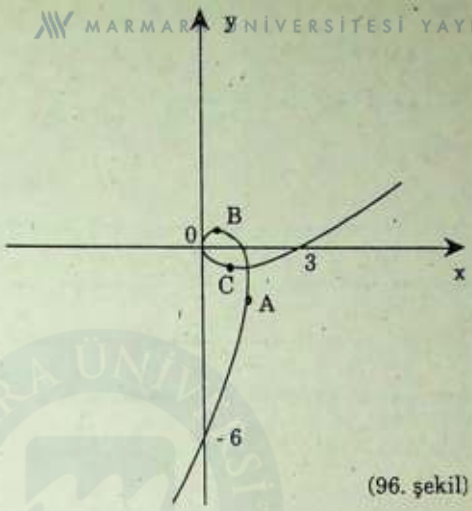
$t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ için $x = \frac{\sqrt{3}+6}{9} \cong 0{,}86$, $y = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \cong -0{,}38$

$t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ için $x = \frac{-\sqrt{3}+6}{9} \cong 0{,}47$, $y = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0{,}38$

6°)

t	$-\infty$		-2		$-\frac{4}{3}$		-1		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$+\infty$
x'_t		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
y'_t		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x	$-\infty$	↗	0	↗	$1{,}19$	↘	1	↘	$0{,}47$	↘	0	↗	$0{,}86$	↗	3	↗	$+\infty$
y	$-\infty$	↗	-6	↗	$-1{,}04$	↗	0	↗	$0{,}38$	↘	0	↘	$-0{,}38$	↗	0	↗	$+\infty$
					(A)				(B)				(C)				

7°) grafik:



(96. şekil)

ÖRNEK 2: $x = \dfrac{2t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{4}{t+1}$ parametrik denklemleriyle verilen eğriyi çiziniz.

Çözümü: 1°) İlk fonksiyon $t = 1$, ikinci fonksiyon $t = -1$ için tanımsızdır.

2°) $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x = \pm\infty$ ve $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y = 0$,

$\lim\limits_{t \to 1^-} x = -\infty$, $\lim\limits_{t \to 1^+} x = +\infty$ ve $\lim\limits_{t \to 1} y = 2$,

$\lim\limits_{t \to -1} x = -1$, $\lim\limits_{t \to -1^-} y = -\infty$ ve $\lim\limits_{t \to -1^+} y = +\infty$

olduğundan $y = 0$ ve $y = 2$ yatay asimtot, $x = -1$ düşey asimtottur.

3°) $x = 0 \Rightarrow t = 0$ ve $y = 4$

4°) $x'_t = \dfrac{2t(t-2)}{(t-1)^2}$ ve $y'_t = \dfrac{-4}{(t+1)^2}$ dir.

$x'_t = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = 2$

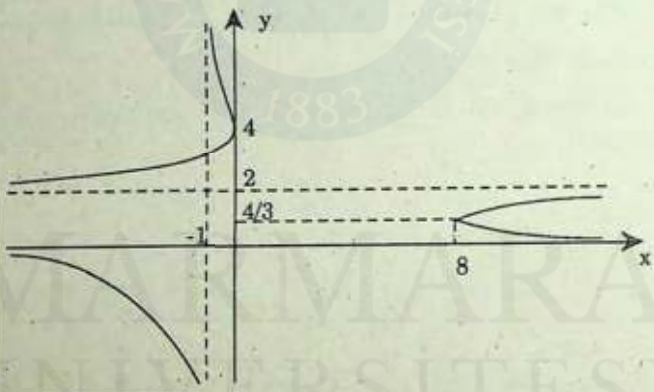
$t = 0$ için $x = 0$ ve $y = 4$

$t = 2$ için $x = 8$ ve $y = \frac{4}{3}$

5°)

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x'_t	+		+		0	-	‖	-	0	+	
y'_t	-		-		-		-		-		
x	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	8	↗	$+\infty$
y	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↘	2	↘	$\frac{4}{3}$	↘	0

grafik:



(97. şekil)

ÖRNEK 3: $x = \frac{3t}{t^3 + 1}$, $y = \frac{3t^2}{t^3 + 1}$ parametrik denklemleriyle verilen eğriyi çiziniz.

Çözümü: 1°) Fonksiyonlar $t \neq -1$ için tanımlıdırlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2°) $\lim_{t\to\pm\infty} x = 0$ ve $\lim_{t\to\pm\infty} y = 0$

3°) $\lim_{t\to -1^-} x = +\infty$, $\lim_{t\to -1^-} y = -\infty$, $\lim_{t\to -1^+} x = -\infty$, $\lim_{t\to -1^+} x = +\infty$

olur. Eğik asimtotu araştıralım.

$$\frac{y}{x} = t \quad \text{ve} \quad \lim_{t\to -1} \frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} t = -1 = m ,$$

$$\lim_{t\to -1} (y - mx) = \lim_{t\to -1} (y + x) = \lim_{t\to -1} \left(\frac{3t^2}{t^3+1} + \frac{3t}{t^3+1} \right) = \lim_{t\to -1} \frac{3t^2+3t}{t^3+1}$$

$$= \lim_{t\to -1} \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \lim_{t\to -1} \frac{3t}{t^2-t+1} = -1$$

bulunur. Buna göre $y = -x - 1$ eğik asimtottur.

4°) $x = 0$ ve $y = 0$ için $t = 0$ dır.

5°) $x'_t = \dfrac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$ ve $y'_t = \dfrac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$

$$x'_t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} , \quad y'_t = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \sqrt[3]{2}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{4} \quad \text{ve} \quad y = \sqrt[3]{2}$$

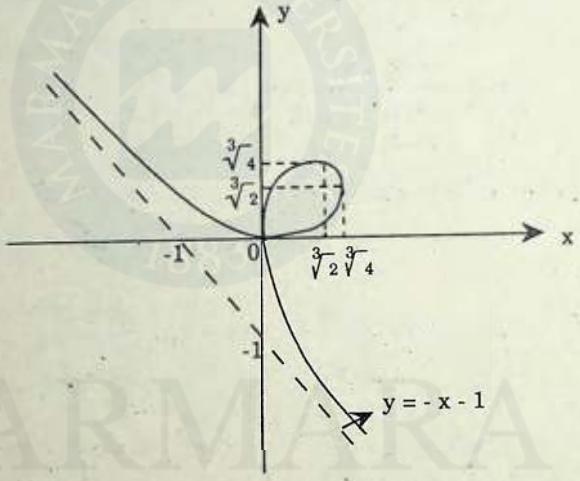
$$t = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \quad \text{ve} \quad y = \sqrt[3]{4}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6°) Tablo:

t	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'_t		$+$		$+$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
y'_t		$-$	$\|\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty \; \|\| \; -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty \; \|\| \; +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0

7°) Grafik:



(98. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğrileri çiziniz.

1°) $x = t^2$, $y = 4t - t^3$

2°) $x = \dfrac{t}{t-2}$, $y = \dfrac{t-1}{t-2}$

3°) $x = \dfrac{t^2}{t+1}$, $y = \dfrac{1}{t^2 - t - 2}$

4°) $x = \dfrac{t}{t^2 - 1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$

5°) $x = a(\theta - \operatorname{Sin}\theta)$, $y = a(1 - \operatorname{Cos}\theta)$

6°) $x = \operatorname{Sin}\theta$, $y = \operatorname{Cos} 2\theta$

7°) $x = \operatorname{Sin} t$, $y = \dfrac{\operatorname{Sin} t}{2 + \operatorname{Cos} t}$

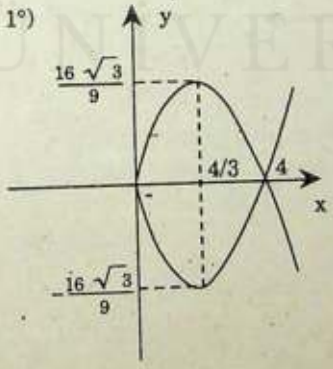
8°) $x = a \cdot \operatorname{Sin} 2t$, $y = a \cdot \operatorname{Sin} 3t$

9°) $x = t(t-1)$, $y = \ln t$

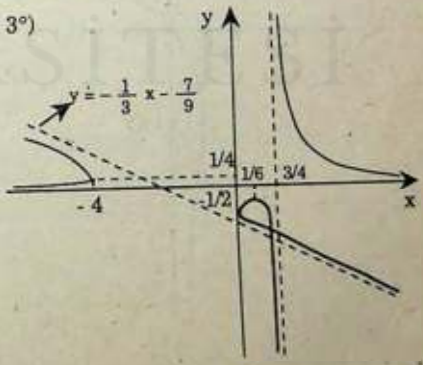
10°) $x = \ln t$, $y = e^t$

Tek numaralı soruların grafikleri:

1°)

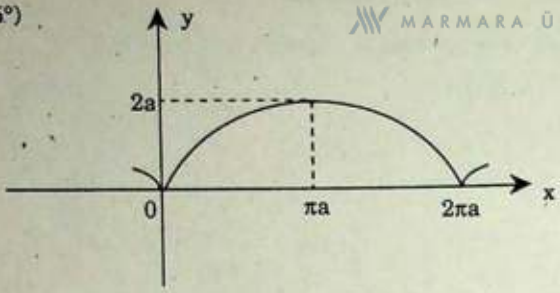


3°)

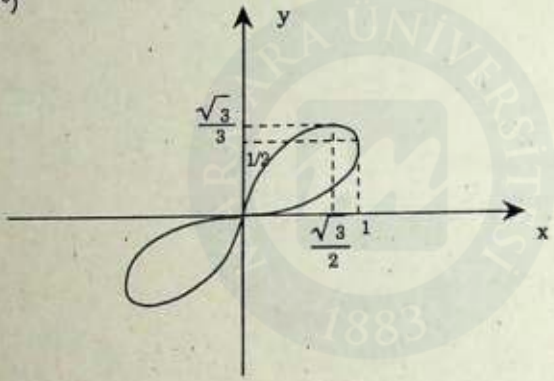


MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

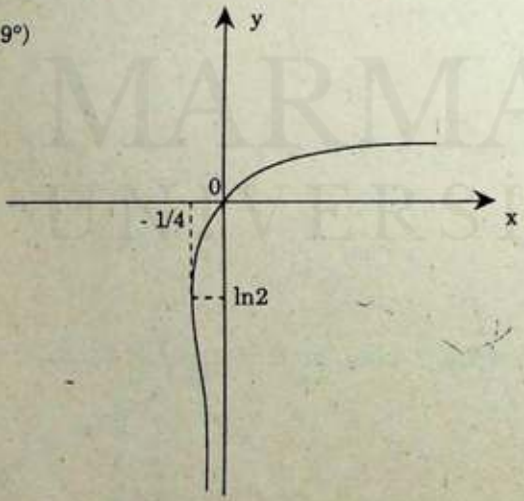
5°)



7°)

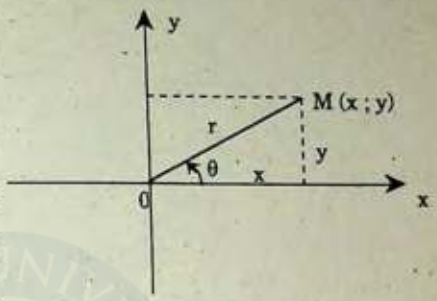


9°)



6.5. KUTUPSAL KOORDİNATLAR

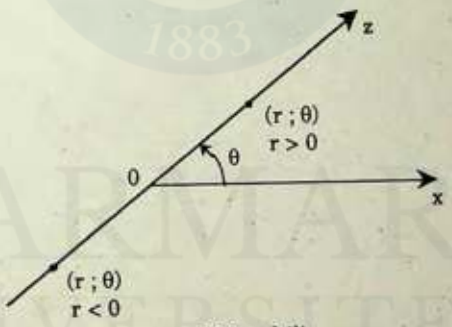
Bir xoy kartezyen koordinat sisteminde M (x ; y) noktasını gözönüne alalım. M nin O ya olan uzaklığının yönlü ölçüsü r, OM nin Ox ekseniyle yaptığı yönlü açının ölçüsü θ olsun.



(99. şekil)

(r ; θ) sayı ikilisine M nin kutupsal koordinatları denir. Bu ikilinin verilmesiyle M noktasının düzlemdeki yeri tamamen belirlenmiş olur. O noktasına başlangıç veya kutup noktası , Ox eksenine de kutup ekseni denir.

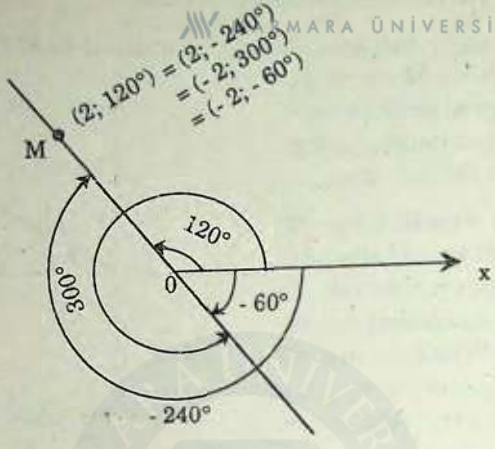
Kutupsal koordinatları (r ; θ) olarak verilen noktayı bulmak için ölçüsü θ olan xoz yönlü açısı çizildikten sonra r > 0 ise [Oz ışını , r < 0 ise [Oz nin zıt ışını üzerinde |r| uzaklığındaki nokta işaretlenir (100. şekil)



(100. şekil)

Yukarıdaki tanımlamaya göre düzlemin bir noktasına birden çok kutupsal koordinat karşı getirilebilir. Örneğin (2;120°) , (2; - 240°) , (-2; 300°) , (-2 ; - 60°) koordinatları aynı M noktasını gösterirler (Şekil: 101)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(101. şekil)

6.6. KUTUPSAL KOORDİNATLARLA KARTEZYEN KOORDİNATLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR

Bir M noktasının kartezyen koordinatları (x;y) , kutupsal koordinatları (r ; θ) olsun. 99. şekilden

$$\left.\begin{aligned} x &= r \operatorname{Cos} \theta \\ y &= r \operatorname{Sin} \theta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ve

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{Tan} \theta &= \frac{y}{x} \quad \text{veya} \quad \theta = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

bağıntıları yazılabilir. (1) bağıntılarıyla kartezyen koordinatlardan kutupsal koordinatlara, (2) bağıntılarıyla da kutupsal koordinatlardan kartezyen koordinatlara geçilebilir.

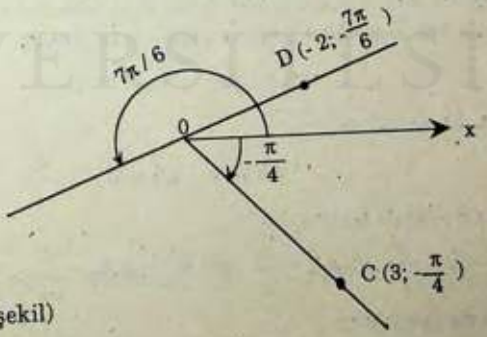
ÖRNEK 1: A $(1 ; \sqrt{3})$ ve B $(-2\sqrt{3} ; 2)$ noktalarını kutupsal koordinatlarıyla yazınız.

Çözümü: A $(1 ; \sqrt{3})$ noktasında $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ olduğundan $r = \sqrt{1 + 3} = 2$, $\text{Tan}\,\theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$ ve nokta 1. bölgede olduğundan $\theta = \frac{\pi}{3}$ tür. Buna göre A nın kutupsal koordinatları $A(2; \frac{\pi}{3})$ olur.

B $(-2\sqrt{3} ; 2)$ noktasında $x = -2\sqrt{3}$, $y = 2$ olduğundan $r = \sqrt{12 + 4} = 4$ ve $\text{Tan}\,\theta = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ve nokta 2. bölgede olduğundan $\theta = \frac{5\pi}{6}$ dır. Buna göre B nin kutupsal koordinatları da $B(4; \frac{5\pi}{6})$ olur.

ÖRNEK 2: $C(3; -\frac{\pi}{4})$ ve $D(-2; \frac{7\pi}{6})$ noktalarını düzlemde gösteriniz ve kartezyen kordinatlarını bulunuz.

Çözümü: Noktalar 102. şekilde gösterilmiştir. C noktasında $r = 3$, $\theta = -\frac{\pi}{4}$ olduğundan $x = r\,\text{Cos}\,\theta$ dan $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $y = r\,\text{Sin}\,\theta$ dan $y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ bulunur. Buna göre C nin kartezyen koordinatları $C(\frac{3\sqrt{2}}{2} , -\frac{3\sqrt{2}}{2})$ dir. D noktasında $r = -2$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$ olduğundan $x = r\,\text{Cos}\,\theta = \sqrt{3}$ ve $y = r\,\text{Sin}\,\theta = 1$ bulunur. Buradan da D nin kartezyen koordinatları $D(\sqrt{3} ; 1)$ olur.



(102. şekil)

ÖRNEK 3: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ çemberinin kutupsal denklemini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: Denklemde $x = r \cos\theta$ ve $y = r \sin\theta$ konursa

$$r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta - 2r \cos\theta = 0$$

$$r^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2r \cos\theta = 0$$

$$r^2 = 2r \cos\theta \quad \text{veya} \quad r = 2 \cos\theta$$

bulunur.

ÖRNEK 4: Kutupsal denklemi $r^2 = 4 \cos 2\theta$ olan eğrinin kartezyen denklemini bulunuz.

Çözümü: $r^2 = 4 \cos 2\theta = 4 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ dır. $r^2 = x^2 + y^2$,

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ olduğu düşünülerek

$r^2 = 4 (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$ dan

$$x^2 + y^2 = 4 \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 4 (x^2 - y^2)$$

bulunur.

6.7. DOĞRUNUN KUTUPSAL DENKLEMİ

Kartezyen koordinatlarda doğrunun genel denklemi $ax + by + c = 0$ dır. Bu denklemde $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ konursa doğrunun kutupsal denkleminin genel şekli olarak

$$r (a \cos\theta + b \sin\theta) + c = 0$$

bulunur. Bu denklem

$$a \cos\theta + b \sin\theta = -\frac{c}{r}$$

veya $c \neq 0$ olmak koşuluyla

$$\frac{1}{r} = -\frac{a}{c} \cos\theta - \frac{b}{c} \sin\theta \quad \text{ya da} \quad \frac{1}{r} = A \cos\theta + B \sin\theta$$

şeklinde de yazılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Özel haller.

1°) $a = 0$ ise doğru x eksenine paraleldir. Bu durumda kutupsal denklemi

$$r\,b\,\mathrm{Sin}\,\theta + c = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{1}{r} = B\,\mathrm{Sin}\,\theta$$

olur.

2°) $b = 0$ ise doğru y eksenine paraleldir. Bu durumda kutupsal denklemi

$$r\,a\,\mathrm{Cos}\,\theta + c = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{1}{r} = A\,\mathrm{Cos}\,\theta$$

olur.

3°) $c = 0$ ise doğru başlangıç noktasından geçer. Bu durumda kutupsal denklemi

$$r\,(a\,\mathrm{Cos}\,\theta + b\,\mathrm{Sin}\,\theta) = 0 \Rightarrow a\,\mathrm{Cos}\,\theta + b\,\mathrm{Sin}\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tan}\,\theta = -\frac{a}{b} \Rightarrow \theta = \mathrm{Arctan}\left(-\frac{a}{b}\right) = \alpha \Rightarrow \theta = \alpha$$

olur.

6.8. ÇEMBERİN KUTUPSAL DENKLEMİ

Kartezyen koordinatlarda genel çember denklemi

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

idi. Bu denklemde $x = r\,\mathrm{Cos}\,\theta$, $y = r\,\mathrm{Sin}\,\theta$ konulmasıyla çemberin kutupsal denkleminin genel şekli olarak

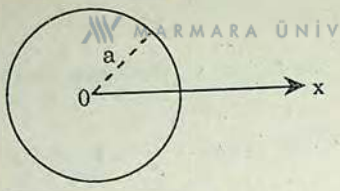
$$r^2 + r\,(D\,\mathrm{Cos}\,\theta + E\,\mathrm{Sin}\,\theta) + F = 0$$

bulunur.

Özel haller.

1°) Çemberin merkezi başlangıç noktasında ise kartezyen denklemi $x^2 + y^2 = a^2$, kutupsal denklemi ise $r = a$ olur. (103. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(103. şekil)

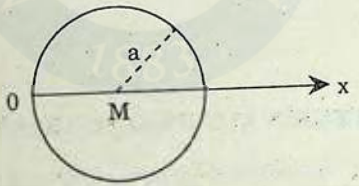
2°) Çember kutuptan geçiyorsa kartezyen denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$ dır. Buradan kutupsal denklemi

$r^2 + r(D \cos\theta + E \sin\theta) = 0$ veya $r = A \cos\theta + B \sin\theta$ şeklinde olur.

3°) Çember kutuptan geçiyor ve merkezi kutup ekseni üzerinde bulunuyorsa kartezyen denklemi

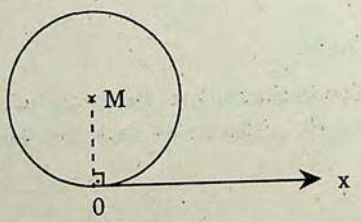
$(x - a)^2 + y^2 = a^2$ veya $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, kutupsal denklemi ise

$r^2 - 2a\, r \cos\theta = 0$ veya $r = 2a \cos\theta$ dır. (104. şekil)



(104. şekil)

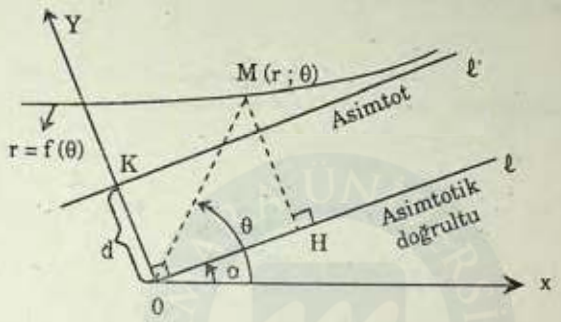
4°) Çember kutuptan geçiyor ve merkezi $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusu (Oy ekseni) üzerinde bulunuyorsa kartezyen denklemi $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ veya $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, kutupsal denklemi $r^2 - 2ar \sin\theta = 0$ veya $r = 2a \sin\theta$ dır. (105. şekil)



(105. şekil)

6.9. KUTUPSAL DENKLEMDEN ASİMTOT BULUNUŞU

$r = f(\theta)$ kutupsal denklemiyle verilen eğride $\theta \to \alpha$ için $r \to \infty$ oluyorsa bu eğri $\theta = \alpha$ doğrusunu asimtotik doğrultu olarak kabul eder. (106. şekil)



(106. şekil)

$r = f(\theta)$ eğrisinin asimtotu ℓ' doğrusu olsun. Eğrinin sonsuza giden kolu üzerinde bir $M(r ; \theta)$ noktasını alalım. O dan ℓ asimtotik doğrultusuna dik olan $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ekseni ℓ' nü K da kessin. $\overline{OK} = d$ yönlü uzunluğuna asimtot altı denir. $MH \perp \ell$ çizelim.

$$\overline{HM} = r \operatorname{Sin}(\theta - \alpha)$$

dır. ℓ' asimtot olduğundan

$$\lim_{M \to -} \overline{HM} = \lim_{\theta \to \alpha} r \operatorname{Sin}(\theta - \alpha) = d$$

olur. Buna göre $r = f(\theta)$ eğrisinin asimtotunu çizmek için önce $\theta = \alpha$ asimtotik doğrultu ve d asimtot altı bulunur. Başlangıç noktasından $\theta = \alpha$ doğrusu ile buna dik $\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ekseni çizilir. Bu eksen üzerinde $\overline{OK} = d$ asimtot altı yönlü olarak işaretlendikten sonra K dan asimtotik doğrultuya paralel çizilir.

ÖRNEK 1: $r = \frac{1}{\theta}$ eğrisinin asimtotlarını bulunuz.

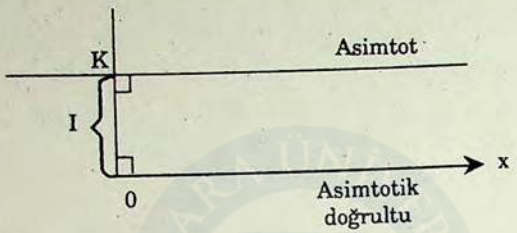
Çözümü: $\theta \to 0$ için $r \to \infty$ olduğundan $\theta = 0$ doğrusu (kutup ekseni) asimtotik doğrultudur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Asimtot altı:

$$d = \lim_{\theta \to 0} (r \operatorname{Sin} \theta) = \lim_{\theta \to \alpha} \left(\frac{\operatorname{Sin} \theta}{\theta} \right) = 1$$

dir. Asimtot 107. şekilde çizilmiştir.



(107. şekil)

ÖRNEK 2: $r = \dfrac{3}{2 \operatorname{Cos} \theta - 1}$ eğrisinin asimtotlarını bulunuz.

Çözümü: Fonksiyon periyodik olup periyodu 2π dir.

$2 \operatorname{Cos} \theta - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Cos} \theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pi/3 \vee \theta = 5\pi/3$,

$\theta \to \pi/3$ ve $\theta \to 5\pi/3$ için $r \to \infty$ olduğundan $\theta = \pi/3$ ve $\theta = 5\pi/3$ asimtotik doğrultulardır. Asimtot altları

1) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ için asimtot altı:

$$d_1 = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} r \operatorname{Sin} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \left(\frac{3 \operatorname{Sin} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)}{2 \operatorname{Cos} \theta - 1} \right) \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \frac{3 \operatorname{Cos} \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)}{-2 \operatorname{Sin} \theta} \qquad \text{(L'Hospital kuralı)}$$

$$= \frac{3}{-2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

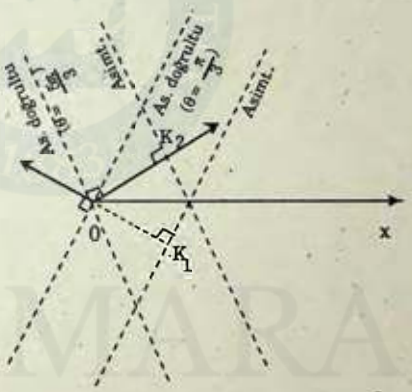
2) $\theta = \frac{5\pi}{3}$ için asimtot altı:

$$d_2 = \lim_{\theta \to \frac{5\pi}{3}} r \operatorname{Sin}\left(\theta - \frac{5\pi}{3}\right) = \lim_{\theta \to \frac{5\pi}{3}} \left(\frac{3 \operatorname{Sin}\left(\theta - \frac{5\pi}{3}\right)}{2 \operatorname{Cos}\theta - 1} \right) \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{5\pi}{3}} \frac{3 \operatorname{Cos}\left(\theta - \frac{5\pi}{3}\right)}{-2 \operatorname{Sin}\theta} = \frac{3}{-2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

bulunur.

Asimtotları çizmek için önce $\theta = \frac{\pi}{3}$ ve $\theta = \frac{5\pi}{3}$ asimtotik doğrultuları, sonra bu doğrulara dik $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ ve $\theta = \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$ eksenleri çizilir. Bu eksenler üzerinde $OK_1 = -\sqrt{3}$ ve $OK_2 = \sqrt{3}$ asimtot altları alınarak K_1 ve K_2 den asimtotik doğrultulara paraleller çizilir. (108. şekil)



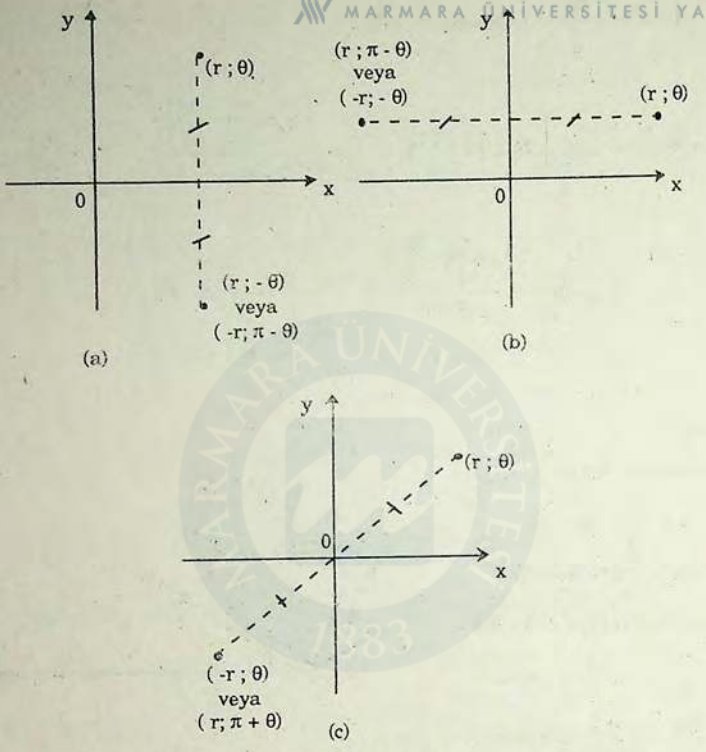
(108. şekil)

6.10. SİMETRİ ÖZELLİKLERİ

$F(r, \theta)$ bağıntısıyla veya $r = f(\theta)$ fonksiyonuyla verilen bir eğri denkleminde:

a) θ yerine $-\theta$ veya $(r; \theta)$ yerine $(-r, \pi - \theta)$ konduğunda denklem değişmiyorsa eğri kutup eksenine göre simetriktir. (109. şekil a)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(109. şekil)

b) θ yerine π - θ veya (r , θ) yerine (- r , - θ) konduğunda denklem değişmiyorsa eğri $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna (Oy ekseni) göre simetriktir. (109. şekil b)

c) r yerine - r veya θ yerine π + θ konduğunda denklem değişmiyorsa eğri kutup noktasına göre simetriktir. (109. şekil c)

Yukarıda anlatılan simetri özelliklerinden herhangi birini taşıyan bir eğri çizilirken, bu eğrinin o eksen veya noktaya göre simetrik olmayan yarı parçası çizilir. Sonra bu parçanın simetriği de çizilerek eğri tamamlanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6.11. KUTUPSAL DENKLEMİYLE VERİLEN BİR EĞRİNİN ÇİZİMİ

$r = f(\theta)$ kutupsal denklemiyle verilen bir eğriyi çizmek için genel olarak aşağıdaki işlemler yapılır.

1°) fonksiyonunu tanımlı olduğu aralık bulunur.

2°) f nin periyodu araştırılır. Eğer $f(\theta + T) = f(\theta)$ olacak şekilde T reel sayıları varsa fonksiyon periyodiktir ve T sayılarından pozitif ve en küçüğü periyottur. Bu durumda grafiği [0 , T] aralığında çizmek yeterli olur.

3°) Eğride simetri özelliğinin olup olmadığına bakılır.

4°) $r' = f'(\theta)$ türevi bulunur ve kökleri hesaplanır.

5°) Eğer varsa asimtotlar bulunur.

6°) Türevein işaretinden de yararlanarak değişim tablosu düzenlenir ve tabloya göre grafik çizilir.

ÖRNEK 1: $r = \text{Sin } 2\theta$ eğrisini çiziniz.

1°) Fonksiyon $\forall \theta \in R$ için tanımlıdır.

2°) Fonksiyon periyodiktir ve periyodu $T = \pi$ dir. Buna göre grafiğin $[0 , \pi]$ aralığında çizilmesi yeterlidir.

3°) $f(-\theta) = \text{Sin}(-2\theta) = -\text{Sin } 2\theta = -f(\theta) = -r$ dir. buna göre eğri denkleminde (r , θ) yerine $(-r , -\theta)$ konulmasıyla denklem değişmez. Bu nedenle eğri Oy eksenine göre simetriktir.

$f(\pi - \theta) = \text{Sin}(2\pi - 2\theta) = -\text{Sin } 2\theta = -f(\theta) = -r$ olduğundan eğri denkleminde (r , θ) yerine $(-r , \pi - \theta)$ konulmasıyla denklem değişmez. Bu nedenle eğri Ox eksenine göre de simetriktir.

$f(\pi + \theta) = \text{Sin}(2\pi + 2\theta) = \text{Sin } 2\theta = f(\theta) = r$ olduğundan eğri başlangıç noktasına göre de simetriktir.

Yukarıda bulduğumuz simetri özelliklerine göre eğrinin $[0 , \pi/2]$ aralığındaki parçası çizilip bunun Ox ve Oy eksenleri ve O başlangıç noktasına göre simetrikleri de alınırsa eğri tamamlanmış olur.

4°) $r' = 2 . \text{Cos } 2\theta$ dır.

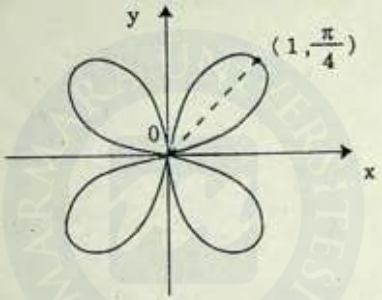
$r' = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ ve $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ için $r = 1$ bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5°) Değişim tablosu:

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r'		+	0	−	
r	0	↗	1	↘	0

6°) Grafik:



(110. şekil)

ÖRNEK 2: $r = a\,(1 + \text{Cos}\,\frac{\theta}{2})$ eğrisini çiziniz.

Çözümü: 1°) Fonksiyon $\forall\, \theta \in R$ için tanımlıdır.

2°) Periyodiktir ve periyodu $T = 4\pi$ dir.

3°) $f(-\theta) = f(\theta)$ olduğundan eğri Ox eksenine göre simetriktir. Bu nedenle incelemeyi $[0\,,\,2\pi]$ aralığında yapmak yeterlidir.

4°) $r' = -\frac{a}{2}\,\text{Sin}\,\frac{\theta}{2}$

$r' = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad \vee \quad \theta = 2\pi$

$\theta = 0$ için $r = 2a$, $\theta = 2\pi$ için $r = 0$

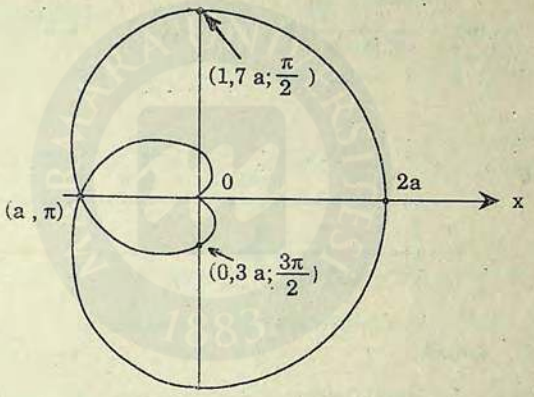
$\theta = \frac{\pi}{2}$ için $r = a\,(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \cong 1{,}7a$, $x = \frac{3\pi}{2}$ için $r = a\,(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cong 0{,}3a$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5°) Değişim tablosu:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r'	-	-	-	-	
r	$2a \searrow$	$1{,}7\,a \searrow$	$a \searrow$	$0{,}3\,a \searrow$	0

6°) Grafik çizilirken tabloya göre $[0\ ,\ 2\pi]$ aralığındaki parçası çizildikten sonra bunun Ox eksenine göre simetriği alınır.



(111. şekil)

ÖRNEK 3: $r = \dfrac{3}{2\,\mathrm{Cos}\,\theta - 1}$ eğrisini çiziniz.

1°) Fonksiyon $\mathrm{Cos}\,\theta = \dfrac{1}{2}$, $\theta = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ $(k \in Z)$ için tanımsızdır.

2°) Periyot $T = 2\pi$ dir.

3°) $f(-\theta) = f(\theta)$ olduğundan eğri Ox eksenine göre simetriktir . O halde $[\,0\ ,\ \pi\,]$ aralığındaki parçası çizilip simetriği alınarak tamamlanabilir.

4°) $r' = \dfrac{6\,\mathrm{Sin}\,\theta}{(2\,\mathrm{Cos}\,\theta - 1)^2}$ olup $r' = 0$ için $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ dir.

$\theta_1 = 0$ için $r_1 = 3$

$\theta_2 = \pi$ için $r_2 = -1$ dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5°) $\theta \to \frac{\pi}{3}$ için $r \to \infty$ olduğundan $\theta = \frac{\pi}{3}$ asimtotik doğrultudur. Asimtot altı:

$$d = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} r \operatorname{Sin}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \frac{3 \operatorname{Sin}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}{2 \operatorname{Cos}\theta - 1} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

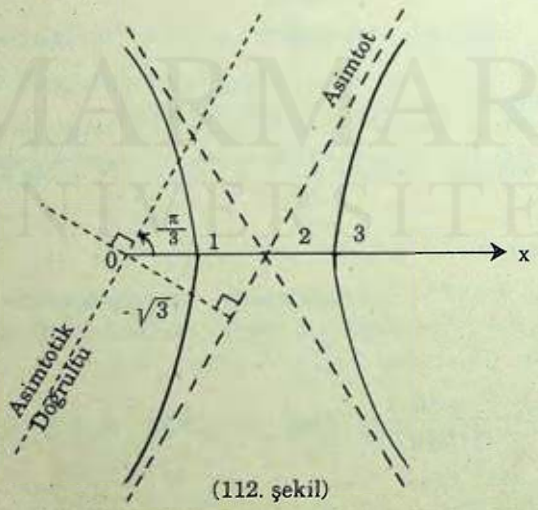
$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \frac{3 \operatorname{Cos}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}{-2 \operatorname{Sin}\theta} = -\sqrt{3} \qquad \text{(L'Hospital Kuralı)}$$

bulunur.

6°)

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$		π
r'	+		‖	+		+	
r	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↗	-1

7°) Grafik:



(112. şekil)

ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıda kutupsal koordinatları ile verilen noktaları düzlemde gösteriniz.

$A(3;\frac{\pi}{4})$ $B(-2;\frac{2\pi}{3})$ $C(4;\pi)$

$D(2;-\frac{\pi}{6})$ $E(-3;-\frac{\pi}{3})$ $F(-3;\frac{3\pi}{2})$

2) Aşağıda kartezyen koordinatları verilen noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

$A(1;\sqrt{3})$ $B(-2\sqrt{3};2)$ $C(0;-4)$ $D(\sqrt{2};-\sqrt{2})$

[Cev. $A(2;\frac{\pi}{3})$ $B(4;\frac{5\pi}{6})$ $C(4;\frac{3\pi}{2})$ $D(\sqrt{2};\frac{7\pi}{4})$]

3) $A(2;\frac{\pi}{9})$ ve $B(3;\frac{4\pi}{9})$ kutupsal koordinatları ile verilen A ve B noktalarını düzlemde gösteriniz ve $|AB|$ uzunluğunu bulunuz. ($|AB| = \sqrt{7}$)

4) Aşağıda kartezyen denklemleri verilen eğrilerin kutupsal denklemlerini bulunuz.

a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $2xy = 3$ c) $x^2 - y^2 = a^2$

d) $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$ e) $x - y = 0$ f) $y^2 = 4x$

[a) $r = 3$ b) $r = \sqrt{\frac{3}{\text{Sin } 2\theta}}$ c) $r = \frac{a}{\sqrt{\text{Cos } 2\theta}}$

d) $r = 2\text{ Cos }\theta - \text{Sin }\theta$ e) $\theta = \frac{\pi}{4}$ f) $r = 4\text{ Cot }\theta\text{ Cosec }\theta$]

5) Aşağıda kutupsal denklemleri verilen eğrilerin kartezyen denklemlerini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) $r(\cos\theta + \sin\theta) = 1$ b) $\dfrac{2}{\sin\theta - 3\cos\theta}$

c) $r = 4\cos\theta$ d) $r = 2\tan\theta\sec\theta$ e) $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

f) $r = \sin 2\theta$ g) $r = 4(1 - 2\sin\theta)$

a) $x + y = 1$ b) $y - 3x = 2$ c) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

d) $x^2 = 2y$ e) $x + \sqrt{3}\,y = 2$ f) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

g) $16(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 8y)^2$

6) Aşağıda verilen kümelerin düzlemdeki karşılıklarını bulunuz.

a) $A = \{(r;\theta) : r = 2, \theta \in R\}$

b) $B = \{(r;\theta) : r \geq 1, \theta \in R\}$

c) $C = \{(r;\theta) : \theta = \dfrac{\pi}{3},\ r \in R\}$

d) $D = \{(r;\theta) : \theta = \dfrac{3\pi}{3},\ -1 < r \leq 2\}$

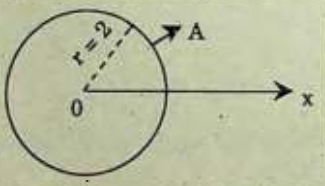
e) $E = \{(r;\theta) : 1 \leq r < 3, \theta \in R\}$

f) $F = \{(r;\theta) : r\sin\theta = 2, \theta \in R\}$

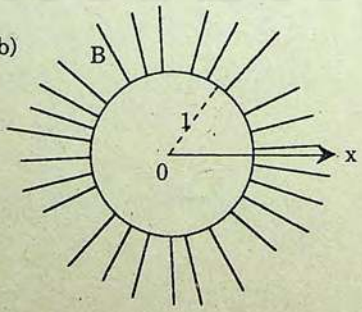
g) $G = \{(r;\theta) : r\cos(60° - \theta) = 1,\ \theta \in R\}$

Cevapları:

a)

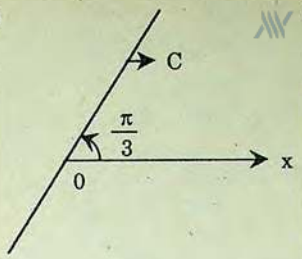


b)

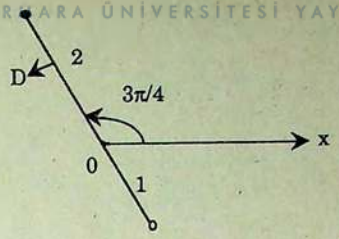


MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

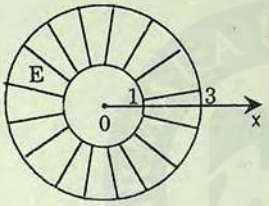
c)



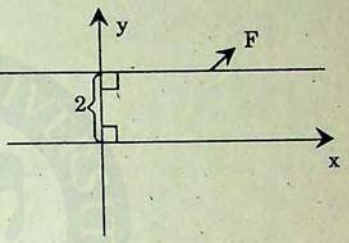
d)



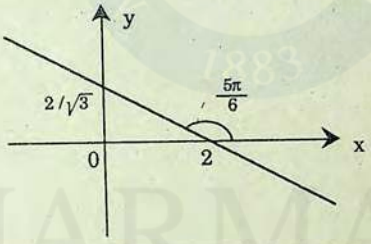
e)



f)



g)



7) Aşağıda kutupsal denklemleri verilen eğrileri çiziniz.

a) $r = 2(1 + \cos\theta)$

b) $r = 4(1 - \cos\theta)$

c) $r = 8(1 - 2\cos\theta)$

d) $r = a \sin 2\theta$

e) $r = a \cos 2\theta$

f) $r = a \cos \frac{\theta}{2}$

g) $r = \sin 3\theta$

h) $r = \cos 3\theta$

ı) $r = \theta$

i) $r = a\theta$

j) $r = \frac{a}{\theta}$

k) $r^2 = 8 \cos 2\theta$

l) $r = 2a \cos 2\theta$

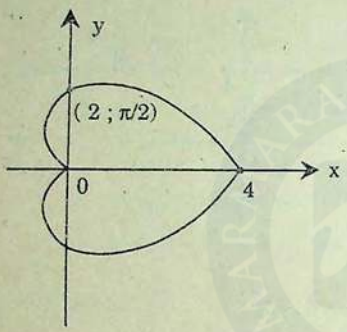
m) $r = \dfrac{\sin \theta}{\cos 2\theta}$

n) $r = a \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$

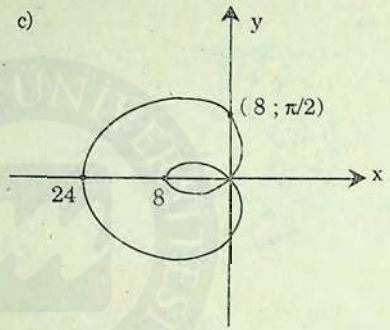
o) $r = \dfrac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}$

ö) $r = \dfrac{1}{1 + 2\cos \dfrac{\theta}{2}}$

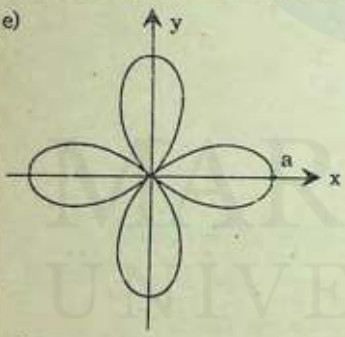
p) $r = \dfrac{4(1 + \sin 2\theta)}{\cos 2\theta}$



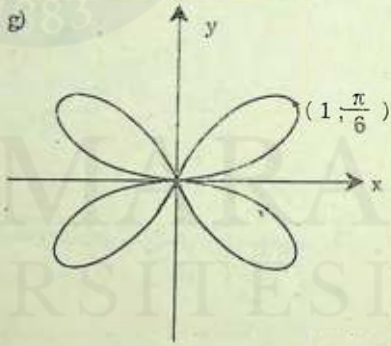
c)



e)

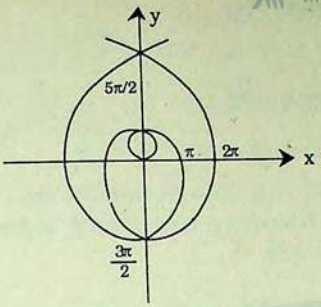


g)

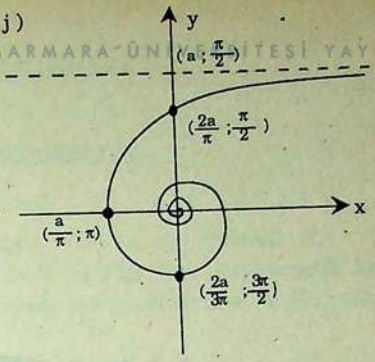


MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

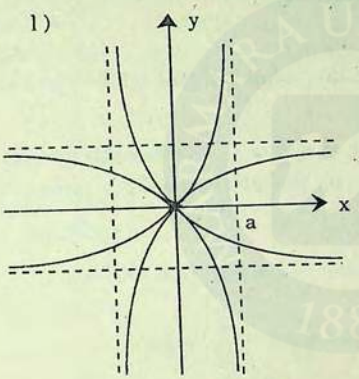
ı)



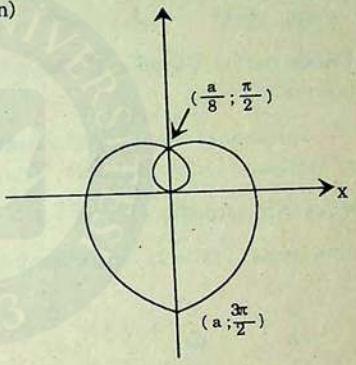
j)



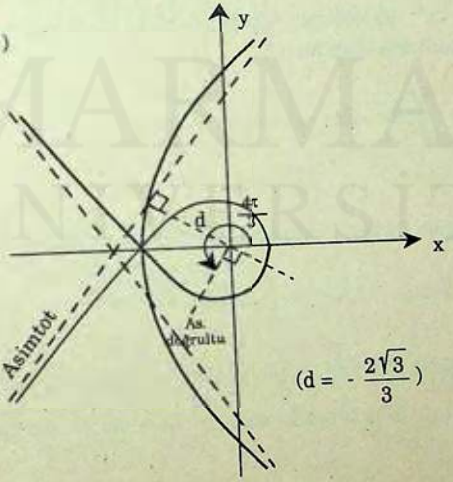
l)



n)



o)



$(d = -\frac{2\sqrt{3}}{3})$

YEDİNCİ BÖLÜM

ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BELİRSİZ İNTEGRAL

7.1. TANIM Bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Türevi $f(x)$ veya diferansiyeli $f(x) . dx$ olan $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ in **ilkel fonksiyonu** veya **belirsiz integrali** denir ve bu

$$\int f(x) . dx = F(x) + C$$

şeklinde yazılır. Burada C keyfi bir sabit olup integral sabiti diye adlandırılır.

Yukarıdaki tanıma göre integral, türevi veya diferansiyeli verilen bir fonksiyonu bulma işlemidir. Verilen bir fonksiyonun belirsiz integrali tek değildir. Örneğin x^2 , $x^2 + 1$, $x^2 - 3$, $x^2 + \frac{5}{2}$, ... fonksiyonlarının hepsi $f(x) = 2x$ fonksiyonunun belirsiz integralleridir. Çünkü

$$\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = \frac{d}{dx}(x^2 - 3) = \frac{d}{dx}(x^2 + \frac{5}{2}) = 2x$$

dir. Buna göre $f(x) = 2x$ in belirsiz integralleri, C keyfi bir sabiti göstermek üzere $x^2 + C$ şeklinde olup bu

$$\int 2x . dx = x^2 + C$$

olarak yazılır.

Diferansiyel ve integral birbirlerinin ters işlemleri olduğundan

$$d \int f(x) . dx = f(x) . dx \quad \text{ve} \quad \int df(x) = f(x) + C$$

yazılabilir. Yani ardarda gelen d ve $\int$ işaretleri birbirlerini yokederler. Ancak $\int$ işareti d nin solunda ise son işlem olarak integral

alınacağı için f(x) e C sabitini eklemek gerekir. Örneğin

$$d\int 2x\,.\,dx = d(x^2 + C) = 2x\,.\,dx$$

$$\int d(2x) = \int 2dx = 2x + C$$

dir.

7.2. TEMEL İNTEGRAL FORMÜLLERİ: Aşağıdaki integral formülleri 4. bölümde sayfa 137 - 139 da verilen türev alma formüllerinden kolayca çıkarılabilirler.

1°) $\int a\,.\,dx = ax + C$ (a sabit)

2°) $\int (u \pm v \pm ....)\,dx = \int u\,.\,dx \pm \int v\,.\,dx \pm ...$

3°) $\int a\,.\,u\,.\,dx = a\int u\,dx$

4°) $\int u^n\,.\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1$ ise)

5°) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

6°) $\int \text{Sin}\,u\,.\,du = -\text{Cos}\,u + C$

7°) $\int \text{Cos}\,u\,.\,du = \text{Sin}\,u + C$

8°) $\int \text{Tan}\,u\,.\,du = -\ln|\text{Cos}\,u| + C = \ln|\text{Sec}\,u| + C$

9°) $\int \text{Cot}\,u\,.\,du = \ln|\text{Sin}\,u| + C$

10°) $\int \text{Sec } u \,.\, du = \ln |\text{Sec } u + \text{Tan } u| + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11°) $\int \text{Cosec } u \,.\, du = \ln |\text{Cosec } u - \text{Cot } u| + C$

12°) $\int \text{Sec}^2 u \,.\, du = \text{Tan } u + C$

13°) $\int \text{Cosec}^2 u \,.\, du = -\text{Cot } u + C$

14°) $\int \text{Sec } u \,.\, \text{Tan } u \,.\, du = \text{Sec } u + C$

15°) $\int \text{Cosec } u \,.\, \text{Cot } u \,.\, du = -\text{Cosec } u + C$

16°) $\int a^u \,.\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

17°) $\int e^u \,.\, du = e^u + C$

18°) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{Arctan } \frac{u}{a} + C$

19°) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C$

20°) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C$

21°) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C$

22°) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C$

23°) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{Arcsin}\frac{u}{a} + C$

24°) $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2} u \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2} a^2 \cdot \text{Arcsin}\frac{u}{a} + C$

25°) $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

26°) $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

1.5. Formülleriyle ilgili örnekler

1°) $\int 2dx = 2x + C$

2°) $\int 3x^4\, dx = 3\int x^4\, dx = 3\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{3}{5}x^5 + C$

3°) $\int 4 \cdot \sqrt[3]{z^2} \cdot dz = 4\int z^{2/3} dz = 4 \cdot \frac{z^{5/3}}{5/3} + C = \frac{12}{5}\sqrt[3]{z^5} + C$

4°) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

5°) $\int \frac{-2\, ds}{\sqrt[4]{s}} = -2\int s^{-\frac{1}{4}} \cdot ds = -2 \cdot \frac{s^{3/4}}{3/4} + C = -\frac{8}{3}\sqrt[4]{s^3} + C$

6°) $\int (3x^2 - 4x + 1)\, dx = 3\int x^2 dx - 4\int x\, dx + \int dx$

$= 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + x + C = x^3 - 2x^2 + x + C$

7°) $\int (x^2 - 2x)^2 \, dx = \int (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \, dx = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} + C$

8°) $\int \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2} \, dx = \int \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx$

$= 2x - 5 \ln |x| + \int 3x^{-2} \, dx = 2x - 5 \ln |x| + \frac{3x^{-1}}{-1} + C$

$= 2x - 5 \ln |x| - \frac{3}{x} + C$

9°) $\int \left(3\sqrt{t} - \frac{1}{4\sqrt[3]{t^2}}\right) dt = \int \left(3t^{1/2} - \frac{1}{4} t^{-2/3}\right) dt$

$= 3 \frac{t^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{4} \frac{t^{1/3}}{1/3} + C = 2\sqrt{t^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{t} + C$

7.3. DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

Bazı integralleri doğrudan bulmak çok zor, hatta imkansız olabilir. Bu tür integrallerde integrali alınacak fonksiyonun bir kısmı başka bir değişken, örneğin u ile gösterildikten sonra tüm integral u ya bağlı olarak yazılabiliyorsa bu değişken değişimi ile integral bazan kolayca bulunabilir. Bu yöntemle yapılan çözümde integral fonksiyonu u değişkenine bağlı olacağından sonunda u yerine değerini koymak gerekir.

ÖRNEK 1: $\int 2x (x^2 + 1)^3 \, dx = ?$

Çözümü: $x^2 + 1 = u$ konursa $2x \, . \, dx = du$ olur.

$\int 2x (x^2 + 1)^3 \, dx = \int u^3 \, du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2: $\int 3x^2 . \sqrt{x^3 - 5}\, dx = ?$

Çözümü: $x^3 - 5 = u$ konursa $3x^2 dx = du$ ve

$x^2 dx = \frac{1}{3} du$ olur. Buradan verilen integral

$$I = \int \frac{1}{3} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3} \int u^{1/2} du = \frac{1}{3} . \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9} \sqrt{(x^3 - 5)^3} + C$$

bulunur.

ÖRNEK 3: $\int \frac{e^{2x} . dx}{e^{2x} + 1} = ?$

Çözümü: $e^{2x} + 1 = u \Rightarrow 2e^{2x} . dx = du \Rightarrow e^{2x} . dx = \frac{1}{2} du$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln \left| e^{2x} + 1 \right| + C = \ln \sqrt{e^{2x} + 1} + C$$

ÖRNEK 4: $\int \frac{dx}{x . \ln^2 x} = ?$

Çözümü: $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$$I = \int \frac{du}{u^2} = - \frac{1}{u} + C = - \frac{1}{\ln x} + C$$

ÖRNEK 5: $\int \frac{x . dx}{\sqrt[3]{x + 4}} = ?$

Çözümü: $\sqrt[3]{x+4} = u \Rightarrow x + 4 = u^3 \Rightarrow x = u^3 - 4$

ve $dx = 3u^2\,du$ olur.

$$I = \int \frac{(u^3 - 4)\,3u^2\,du}{u} = \int (3u^4 - 12u)\,du = \frac{3}{5}u^5 - 6u^2 + C$$

$$= \frac{3}{5}u^2(u^3 - 10) + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+4)^2}\,(x - 6) + C.$$

7.4. $\int (ax + b)^n dx$ ŞEKLİNDEKİ İNTEGRALLER

$ax + b = u$ konursa $a \cdot dx = du$ ve $dx = \frac{1}{a}\,du$ olur. Verilen integral

$$I = \frac{1}{a}\int u^n\,du$$

şeklini alır. Buradan da

$$I = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \frac{u^{n+1}}{n+1} + C & , \quad n \neq -1 \text{ ise} \\ \frac{1}{a} \cdot \ln|u| + C & , \quad n = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. O halde

$$\int (ax + b)^n dx = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C & , \quad n \neq -1 \text{ ise} \\ \frac{1}{a} \cdot \ln|ax + b| + C & , \quad n = -1 \text{ ise} \end{cases}$$

dir. (İntegral formülü olarak ezberlenmesi iyi olur)

ÖRNEK 1: $\int \sqrt{2x - 3}\,dx = \int (2x - 3)^{1/2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{3/2}}{3/2} + C$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(2x - 3)^3} + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2: $\int \frac{dx}{5x+2} = \int (5x+2)^{-1} \cdot dx = \frac{1}{5} \ln |5x+2| + C$

ÖRNEK 3: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = \int (3-4x)^{-2/3} dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(3-4x)^{1/3}}{1/3} + C$

$$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(3-4x)} + C$$

ÖRNEK 4: $\int \frac{x^2}{x-2} dx = ?$

Pay paydaya bölünürse bölüm $(x+2)$, kalan 4 çıkar.

$$\int \frac{x^2}{x-2} dx = \int \left(x+2+\frac{4}{x-2}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 4\ln|x-2| + C$$

ÖRNEK 5: $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-3} = ?$

$\sqrt{x+2} = u \Rightarrow x+2 = u^2 \Rightarrow x = u^2 - 2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$$I = \int \frac{2u \cdot du}{u-3} = \int \left(2+\frac{6}{u-3}\right) du = 2u + 6\ln|u-3| + C$$

$$= 2\sqrt{x+2} + 6\ln\left|\sqrt{x+2}-3\right| + C$$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri çözerek karşılarında verilen integral fonksiyonlarını bulunuz.

1°) $\int (8x^3 - 2x + 3)\,dx = 2x^4 - x^2 + 3x + C$

2°) $\int (x^2 - 3)^2 dx = \frac{x^5}{5} - 2x^3 + 9x + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3°) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$

4°) $\int \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2} dx = x^2 + x - 3 \ln |x| - \frac{4}{x} + C$

5°) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + 6x^{1/2} + C$

6°) $\int x^2(1 - x^3)^2 dx = -\frac{1}{9}(1 - x^3)^3 + C$

7°) $\int 6x\sqrt{1 + 2x^2} dx = \sqrt{(1 + 2x^2)^3} + C$

8°) $\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 3| + C$

9°) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1 - 4x^2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + C$

10°) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x - 3}} = 2\sqrt{e^x - 3} + C$

11°) $\int x\sqrt{2 + x} dx = \frac{2}{15}(3x - 4)\sqrt{(2 + x)^3} + C$

12°) $\int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx = \frac{2}{3}(x - 2)\sqrt{x + 1} + C$

13°) $\int 5\sqrt{(2x + 1)^2} dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(2x + 1)^5} + C$

14°) $\int \frac{dx}{(1 - x)^4} = \frac{1}{3(1 - x)^3} + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

15°) $\int \frac{x^3 - 8}{x + 2} dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 16 \ln |x+2| + C$

16°) $\int \frac{x^3 - x^2 - x + 3}{(x - 1)^2} dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + C$

17°) $\int \frac{6x - 3}{2x + 1} dx = 3x - 3 \ln |2x + 1| + C$

18°) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x - 7)^2}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2x - 7)} + C$

19°) $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

20°) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{1 + \ln x}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(1 + \ln x)^2} + C$

21°) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1) \operatorname{Arctan} x} = \ln |\operatorname{Arctan} x| + C$

22°) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \ln \left(\sqrt[3]{x^2} + 1\right) + C$

23°) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + 1} + 5} = 2\sqrt{x + 1} - 10 \ln |\sqrt{x + 1} + 5| + C$

7.5. BASİT TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ (6-16 FORMÜLLERİ)

Trigonometri için gerekli integral formülleri sayfa 249 daki "Temel İntegral Formülleri" içinde 6 - 16 arasında verilmiştir.Bu formüllerden, daha genel olan aşağıdaki formüller kolayca bulunabilir. Örneğin

$\int$ Sin ax . dx integralinde $ax = u$ konursa $a \cdot dx = du$ ve $dx = \frac{1}{a} du$

olur. Buradan

$$\int \text{Sin } ax \,.\, dx = \frac{1}{a}\int \text{Sin } u \,.\, du = \frac{1}{a}(-\text{Cos } u) + C = -\frac{1}{a}\text{Cos } ax + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur.

FORMÜLLER

1°) $\int \text{Sin } ax \,.\, dx = -\frac{1}{a}\text{Cos } ax + C$

2°) $\int \text{Cos } ax \,.\, dx = \frac{1}{a}\text{Sin } ax + C$

3°) $\int \text{Tan } ax \,.\, dx = -\frac{1}{a}\ln|\text{Cos } ax| + C$

4°) $\int \text{Cot } ax \,.\, dx = \frac{1}{a}\ln|\text{Sin } ax| + C$

5°) $\int \text{Sec } ax \,.\, dx = \frac{1}{a}\ln|\text{Sec } ax + \text{Tan } ax| + C$

6°) $\int \text{Cosec } ax \,.\, dx = \frac{1}{a}\ln|\text{Cosec } ax - \text{Cot } ax| + C$

7°) $\int \text{Sec}^2 ax \,.\, dx = \frac{1}{a}\text{Tan } ax + C$

8°) $\int \text{Cosec}^2 ax \,.\, dx = -\frac{1}{a}\text{Cot } ax + C$

9°) $\int \text{Sec } ax \,.\, \text{Tan } ax \,.\, dx = \frac{1}{a}\text{Sec } ax + C$

10°) $\int \text{Cosec } ax \,.\, \text{Cot } ax\, dx = -\frac{1}{a}\text{Cosec } ax + C$

Bu bölümdeki integraller için aşağıdaki trigonometrik bağıntılardan yararlanılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \qquad 1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

ÖRNEK 1: $\int \sin 3x \, . \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$

ÖRNEK 2: $\int \left(\cos \frac{x}{2} - \cos 5x\right) dx = 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{1}{5} \sin 5x + C$

ÖRNEK 3: $\int \tan x \, . \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln |\sec x| + C$ formülünün bulunuşu:

$\cos x = u$ konursa $\sin x \, . \, dx = -du$ olur.

$$\int \tan x \, . \, dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C = \ln \left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$$

$$= \ln |\sec x| + C$$

ÖRNEK 4: $\int \left(\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}\right) dx = -2 \ln \left|\cos \frac{x}{2}\right| + 2 \ln \left|\sin \frac{x}{2}\right| + C$

$$= 2 \ln \left| \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| + C = 2 \ln \left|\tan \frac{x}{2}\right| + C = \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2}\right) + C$$

ÖRNEK 5: $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$

ÖRNEK 6: $\int \cos^2 2x \, . \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$

ÖRNEK 8: $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}\int \sec^2 x\, dx = \frac{1}{2}\tan x + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 9: $\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx = \int \cos 2x \,.\, dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

ÖRNEK 10: $\int (\sec 2x - 1)^2\, dx = \int (\sec^2 2x - 2\sec 2x + 1)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\tan 2x - \ln|\sec 2x + \tan 2x| + x + C$$

ÖRNEK 11: $\int x \,.\, \tan^2 x^2 \,.\, dx = ?$

$x^2 = u$ konursa $2x\,dx = du$ ve $x\,dx = \frac{1}{2}\,du$ olur.

$$I = \int \frac{1}{2}\tan^2 u\, du = \frac{1}{2}\int (\sec^2 u - 1)\, du = \frac{1}{2}(\tan u - u) + C$$

$$= \frac{1}{2}(\tan x^2 - x^2) + C$$

ÖRNEK 12: $\int \frac{\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}\, dx = ?$

$$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = u \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) dx = du$$

$$\Rightarrow \left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) dx = 2\,du \quad \text{olur.}$$

$$I = \int \frac{2\,du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln\left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right| + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 13: $\int \frac{\text{Tan } x + \text{Cot } x}{\text{Cos } x}\, dx = \int (\text{Sec } x \,.\, \text{Tan } x + \text{Cosec } x)\, dx$

$= \text{Sec } x + \ln |\text{Cosec } x - \text{Cot } x| + C$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri çözerek karşılarında verilen integral fonksiyonlarını bulunuz.

1°) $\int \text{Cos } 2x \,.\, dx = \frac{1}{2} \text{Sin } 2x + C$

2°) $\int (\text{Sin } x - \text{Cos } x)^2\, dx = x + \frac{1}{2} \text{Cos } 2x + C$

3°) $\int \text{Tan}^2 \frac{x}{2}\, dx = 2 \text{Tan } \frac{x}{2} - x + C$

4°) $\int \frac{\text{Sin } x + \text{Cos } x}{\text{Sin } x}\, dx = x + \ln |\text{Sin } x| + C$

5°) $\int \text{Sin}^2 \frac{x}{2} \,.\, dx = \frac{1}{2}(x - \text{Sin } x) + C$

6°) $\int \sqrt{1 - \text{Cos } x}\, dx = -2\sqrt{2}\, \text{Cos } \frac{x}{2} + C$

7°) $\int \frac{1}{1 + \text{Cos } x}\, dx = \text{Tan } \frac{x}{2} + C$

8°) $\int \frac{dx}{\text{Sin } x \,.\, \text{Cos } x} = \ln |\text{Cosec } 2x - \text{Cot } 2x| + C$

9°) $\int \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos}^3 x}\, dx = \frac{1}{2 \text{Cos}^2 x} + C$

10°) $\int \frac{\text{Sin } x}{1 + \text{Cos } x}\, dx = -\ln |1 + \text{Cos } x| + C$

11°) $\int \frac{1 - \operatorname{Sin} x}{x + \operatorname{Cos} x}\, dx = \ln |x + \operatorname{Cos} x| + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

12°) $\int x \cdot \operatorname{Sin}(1 - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Cos}(1 - x^2) + C$

13°) $\int x \cdot \operatorname{Sec}^2 x^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \operatorname{Tan} x^2 + C$

14°) $\int \operatorname{Tan}^3 x \cdot \operatorname{Sec}^2 x \cdot dx = \frac{1}{4} \operatorname{Tan}^4 x + C$

15°) $\int (1 + \operatorname{Tan} x)^2\, dx = \operatorname{Tan} x + 2 \ln |\operatorname{Sec} x| + C$

16°) $\int \frac{\operatorname{Cos} x}{1 + \operatorname{Cos} x}\, dx = x - \operatorname{Tan} \frac{x}{2} + C$

17°) $\int \frac{\operatorname{Sin} 2x \cdot dx}{\sqrt{\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x}} = -\sqrt{\operatorname{Cos} 2x} + C$

18°) $\int \frac{1 - \operatorname{Cos} 2x}{1 + \operatorname{Cos} 2x}\, dx = \operatorname{Tan} x - x + C$

19°) $\int \frac{1 + \operatorname{Tan} x}{1 - \operatorname{Tan} x}\, dx = -\ln |\operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x| + C$

20°) $\int \operatorname{Sec} 2x \cdot \operatorname{Tan} 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \operatorname{Sec} 2x + C$

21°) $\int \frac{\operatorname{Tan} 2x - \operatorname{Cot} 2x}{\operatorname{Sin} 2x}\, dx = \frac{1}{2}\left[\ln |\operatorname{Sec} 2x + \operatorname{Tan} 2x| + \operatorname{Cosec} 2x\right] + C$

22°) $\int \operatorname{Tan} x \cdot \ln \operatorname{Cos} x \cdot dx = -\frac{1}{2} \ln^2 \operatorname{Cos} x + C$

23°) $\int \frac{\operatorname{Sin} x \cdot \operatorname{Cos} x}{1 - \operatorname{Sin} x}\, dx = -\operatorname{Sin} x - \ln (1 - \operatorname{Sin} x) + C$

7.6. ÜSTEL FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki formüller 250. sayfada verilen 16 ve 17 formüllerinden kolayca bulunabilirler. Örneğin $\int a^{mx+n}.dx$ integralinde $(a > 0\ ,\ a \neq 1$ ve $m \neq 0)$ $mx + n = u$ konursa $m\,.\,dx = du$ ve $dx = \frac{1}{m}\,du$ olur. Buradan

$$\int a^{mx+n}\,.\,dx = \frac{1}{m}\int a^{u}\,.\,du = \frac{1}{m}\,.\,\frac{a^{u}}{\ln a} + C = \frac{1}{m}\,.\,\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$$

bulunur.

FORMÜLLER

1°) $\int a^{mx+n}\,.\,dx = \frac{1}{m}\,.\,\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C \qquad (a > 0\ ,\ a \neq 1\ ,\ m \neq 0)$

2°) $\int e^{mx+n}\,.\,dx = \frac{1}{m}\,.\,e^{mx+n} + C \qquad (m \neq 0)$

ÖRNEKLER

ÖRNEK 1: $\int 3^{2x}\,.\,dx = \frac{1}{2}\,.\,\frac{3^{2x}}{\ln 3} + C$

ÖRNEK 2: $\int \sqrt{e^{x}}\,dx = \int e^{x/2}\,.\,dx = 2e^{x/2} + C = 2\,.\,\sqrt{e^{x}} + C$

ÖRNEK 3: $\int (e^{x} + 2)^{2}\,.\,dx = \int (e^{2x} + 4e^{x} + 4)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 4e^{x} + 4x + C$

ÖRNEK 4: $\int e^{\operatorname{Sin} 2x}\,.\,\operatorname{Cos} 2x\,.\,dx = ?$

$\operatorname{Sin} 2x = u$ konursa $\operatorname{Cos} 2x\,.\,dx = \frac{1}{2}\,.\,du$ olur.

$$I = \frac{1}{2}\int e^{u}\,.\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{\operatorname{Sin} 2x} + C$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 5: $\int \frac{2^{\ln x}}{x} dx = ?$

$\ln x = u$ konursa $\frac{1}{x} dx = du$ olur.

$$I = \int 2^u . du = \frac{2^u}{\ln 2} + C = \frac{2^{\ln x}}{\ln 2} + C$$

bulunur.

ÖRNEK 6: $\int (e^x - 1)^3 . e^x . dx = ?$

$e^x - 1 = u$ konursa $e^x . dx = du$ olur.

$$I = \int u^3 . du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} (e^x - 1)^4 + C$$

ÖRNEK 7: $\int \frac{e^x}{3 + 4e^x} dx = ?$

$3 + 4e^x = u$ konursa $4e^x . dx = du$ ve $e^x . dx = \frac{1}{4} du$

olur.

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{4} \ln |u| + C = \frac{1}{4} \ln (3 + 4e^x) + C$$

bulunur. ($\forall x \in R$ için $3 + 4e^x > 0$ olduğundan $|3 + 4e^x| = 3 + 4e^x$ dir)

ÖRNEK 8: $\int \frac{1}{1 + e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1 + e^x}\right) dx$

$$= x - \ln (1 + e^x) + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1) $\int e^{4x} . dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$

2) $\int (e^{x/2} + e^{-x/3}) dx = 2e^{x/2} - 3e^{-x/3} + C$

3) $\int 5.3^{7x} . dx = \frac{5}{7} \cdot \frac{3^{7x}}{\ln 3} + C$

4) $\int 2^x . e^x . dx = \frac{2^x e^x}{\ln 2 + 1} + C$

5) $\int (e^{3x} - 1)^2 dx = \frac{1}{6} e^{6x} - \frac{2}{3} e^{3x} + x + C$

6) $\int \frac{e^x + 4}{e^x} dx = x - \frac{4}{e^x} + C$

7) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

8) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -e^{1/x} + C$

9) $\int \text{Sec}^2 x . 2^{\text{Tan } x} . dx = \frac{2^{\text{Tan } x}}{\ln 2} + C$

10) $\int e^x . \text{Cos } e^x . dx = \text{Sin } e^x + C$

11) $\int \frac{e^x}{a . e^x + b} dx = \frac{1}{a} \ln |a e^x + b| + C$

12) $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} dx = -\frac{1}{e^x - 1} + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

13) $\int \frac{e^x . dx}{(5 + e^x)\sqrt{e^x + 1}} = \text{Arctan} \frac{\sqrt{e^x + 1}}{2} + C$

7.7. $\int \frac{du}{u^2 \pm a^2}$ VEYA $\int \frac{du}{a^2 \pm u^2}$ ŞEKLİNDEKİ İNTEGRALLER (18 - 20 FORMÜLLERİ)

ÖRNEK 1: $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{Arctan } x + C$

ÖRNEK 2: $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C$

ÖRNEK 3: $\int \frac{dx}{9 - x^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3 + x}{3 - x} \right| + C$

ÖRNEK 4: $\int \frac{dx}{4x^2 + 3} = \int \frac{dx}{(2x)^2 + (\sqrt{3})^2}$

$2x = u$ konursa $dx = \frac{1}{2} du$ olur.

$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arctan} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{Arctan} \frac{2x}{\sqrt{3}} + C$

ÖRNEK 5: $\int \frac{x^2 dx}{x^6 - 2} = ?$

$x^3 = u$ konursa $3x^2 dx = du$ ve $x^2 dx = \frac{1}{3} du$ olur.

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 - 2} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ln\left|\frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}}\right| + C = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\ln\left|\frac{x^3 - \sqrt{2}}{x^3 + \sqrt{2}}\right| + C$$

ÖRNEK 6: $\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 9} = ?$

$e^x = u$ konursa $e^x \cdot dx = du$ olur.

$$I = \int \frac{du}{u^2 + 9} = \frac{1}{3}\,\text{Arctan}\,\frac{u}{3} + C = \frac{1}{3}\,\text{Arctan}\,\frac{e^x}{3} + C$$

ÖRNEK 7: $\int \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x^2 - 1}\,dx = \int \left(x - 2 + \frac{3}{x^2 - 1}\right)dx$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + C$$

ÖRNEK 8: $\int \frac{dx}{(4x - 3)^2 + 1} = ?$

$4x - 3 = u$ konursa $4 \cdot dx = du$ ve $dx = \frac{1}{4}\,du$ olur.

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{4}\,\text{Arctan}\,u + C = \frac{1}{4}\,\text{Arctan}\,(4x - 3) + C$$

ÖRNEK 9: $\int \frac{dx}{\text{Sin}^2 x - 4\text{Cos}^2 x} = ?$

Pay ve payda $\text{Cos}^2 x$ ile bölünürse

$$I = \int \frac{\frac{1}{\text{Cos}^2 x} \cdot dx}{\frac{\text{Sin}^2 x}{\text{Cos}^2 x} - 4} = \int \frac{\text{Sec}^2 x \cdot dx}{\text{Tan}^2 x - 4}$$

elde edilir. Tan x = u konursa $\text{Sec}^2 x \, . \, dx = du$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I = \int \frac{du}{u^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\text{Tan } x - 2}{\text{Tan } x + 2} \right| + C =$$

7.8. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ ŞEKLİNDEKİ İNTEGRALLER

Bu tür integrallerde önce payda aşağıda gösterildiği gibi iki kare toplamı veya farkı olarak düzenlenir. Sonra 18 - 20 formülleri ile integral alınır. (Sayfa 250)

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Son formüldeki büyük parantezin içi, $4ac - b^2 > 0$ ise iki kare toplamı, $4ac - b^2 < 0$ ise iki kare farkı şeklindedir. Birinci durumda 18., ikinci durumda ise 19. formül uygulanarak integral alınır.

ÖRNEK 1: $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} = \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9 - 9 + 5} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 4}$

$x - 3 = u$ konursa $dx = du$ olur.

$$I = \int \frac{du}{u^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C$$

ÖRNEK 2: $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}}$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3/2} \text{ Arctan } \frac{x + \frac{1}{2}}{3/2} + C = \frac{1}{3} \text{Arctan } \frac{2x+1}{3} + C$$

ÖRNEK 3: $\int \frac{\text{Cos x . dx}}{\text{Sin}^2\text{x} + 2\,\text{Cos}^2\text{x} + \text{Sin x}} = \int \frac{\text{Cos x . dx}}{\text{Sin}^2\text{x} + 2\,(1 - \text{Sin}^2\text{x}) + \text{Sin x}}$

$$= \int \frac{\text{Cos x . dx}}{-\text{Sin}^2\text{x} + \text{Sin x} + 2}$$

Sin x = u konursa Cos x . dx = du olur.

$$I = \int \frac{du}{-u^2 + u + 2} = \int \frac{du}{-(u^2 - u - 2)} = \int \frac{du}{-\left[(u - 1/2)^2 - 9/4\right]}$$

$$= \int \frac{du}{9/4 - (u - 1/2)^2} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3/2 + (u - 1/2)}{3/2 - (u - 1/2)} \right| + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1 + \text{Sin x}}{2 - \text{Sin x}} \right| + C$$

7.9. $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}\,dx$ ŞEKLİNDEKİ İNTEGRALLER

Bu tür integrallerde önce kesrin payında, paydanın türevi olan (2ax + b) ifadesi elde edilmeye çalışılır. Bunun için eğer 2a = m değilse önce kesir $\left(\frac{2a}{m}\right)$ ile çarpılıp bölünür. Sonra paya b sabiti eklenip çıkarılır. Bu işlemlerden sonra verilen integral, birinin payı (2ax + b) olan iki ayrı kesir toplamı şeklinde yazılarak çözülür.

İşlemler aşağıda yapılmıştır.

$$\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{m}{2a} \int \frac{\frac{2a}{m}(mx + n)}{ax^2 + bx + c}\,dx$$

$$= \frac{m}{2a} \int \frac{2ax + \frac{2an}{m}}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{m}{2a} \int \left(\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \frac{-b + \frac{2an}{m}}{ax^2 + bx + c} \right) dx$$

$$= \frac{m}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2an - bm}{2a} \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buradaki son integral bir önceki bölümde anlatıldığı şekilde bulunur.

(Yukarıda anlatılan yöntemin, yalnız paydanın diskriminantının $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olması halinde uygulanması yerinde olur. $\Delta > 0$ olması halinde kesri basit kesirlere ayırarak integralini almak daha uygundur. Bu konu ileride görülecektir.)

ÖRNEK 1: $\int \frac{x - 3}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x - 6}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x}{x^2 + 3} - \frac{6}{x^2 + 3} \right) dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 3} dx - \int \frac{3}{x^2 + 3} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 3) - \sqrt{3} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

ÖRNEK 2: $\int \frac{4x + 1}{x^2 - 6x + 10} dx = 2 \int \frac{2x + 1/2}{x^2 - 6x + 10} dx$

$$= 2 \int \left(\frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10} + \frac{6 + 1/2}{x^2 - 6x + 10} \right) dx = 2 \int \frac{2x - 6}{x^2 - 6x + 10} dx + 13 \int \frac{dx}{(x - 3)^2 + 1}$$

$$= 2 \ln |x^2 - 6x + 10| + 13 \operatorname{Arctan} (x - 3) + C$$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1°) $\int \frac{x \, . \, dx}{2x^4 + 6} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C$

2°) $\int \frac{dx}{(3x - 1)^2 - 1} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{3x - 2}{3x} \right| + C$

3°) $\int \frac{dx}{9 - 4x^2} = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{3 + 2x}{3 - 2x} \right| + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4°) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{x+1}{2} + C$

5°) $\int \frac{dt}{t^2 - t - 6} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{t-3}{t+2} \right| + C$

6°) $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 2} = \frac{1}{2} \text{Arctan} (2x + 1) + C$

7°) $\int \frac{dx}{3 + 2x - x^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{3-x} \right| + C$

8°) $\int \frac{2x^3 + x^2 + 8x + 3}{x^2 + 4} dx = x^2 + x - \frac{1}{2} \text{Arctan} \frac{x}{2} + C$

9°) $\int \frac{x^3}{x^2 + 4x + 5} dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{11}{2} \ln (x^2 + 4x + 5) - 2.\text{Arctan} (x + 2) + C$

10°) $\int \frac{x \, . \, dx}{x^2 + 6x + 10} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 6x + 10) - 3 \text{ Arctan} (x + 3) + C$

11°) $\int \frac{2x^2 + 4x + 13}{x^2 + 2x + 5} dx = 2x + \frac{3}{2} \text{Arctan} \frac{x+1}{2} + C$

12°) $\int \frac{\text{Cos } 3x}{4 - \text{Sin}^2 3x} dx = \frac{1}{12} \ln \frac{2 + \text{Sin } 3x}{2 - \text{Sin } 3x}$

13°) $\int \frac{dx}{4 \text{ Sin}^2 x + 9 \text{Cos}^2 x} = \frac{1}{6} \text{Arctan} \left(\frac{2 \text{ Tan } x}{3} \right) + C$

14°) $\int \frac{\text{Sin } x \, . \, dx}{\text{Cos}^2 x + 2\text{Cos } x + 5} = -\frac{1}{2} \text{ Arctan} \left(\frac{\text{Cos } x + 1}{2} \right) + C$

15°) $\int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} - 2e^x - 3} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x - 3}{e^x + 1} \right| + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

16°) $\int \frac{9x^2 + 14x + 11}{9x^2 + 12x + 8} dx = x + \frac{1}{9} \ln (9x^2 + 12x + 8) + \frac{5}{18} \operatorname{Arctan} \frac{3x + 2}{2} + C$

17°) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{e^x - 1} + C$

18°) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} \right| + C$

7.10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}$ VEYA $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 \pm u^2}}$ ŞEKLİNDEKİ İNTEGRALLER

Bu tür integraller için 21 - 23 formülleri kullanılır. (Sayfa 250)

ÖRNEK 1: $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + C$

ÖRNEK 2: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$

ÖRNEK 3: $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^4 + 4}} = ?$

$x^2 = u$ konursa $x\,dx = \frac{1}{2} du$ olur.

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + 4}| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + \sqrt{x^4 + 4}| + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 4: $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - (4x - 1)^2}} = ?$

$4x - 1 = u$ konursa $dx = \frac{1}{4} du$ olur.

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{9 - u^2}} = \frac{1}{4} \text{Arcsin} \frac{u}{3} + C = \frac{1}{4} \text{Arcsin} \frac{4x - 1}{3} + C$$

ÖRNEK 5: $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}} = ?$

$2^x = u$ konursa $2^x . \ln 2 . dx = du$ ve $2^x dx = \frac{du}{\ln 2}$ olur.

$$I = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{\ln 2} \text{Arcsin } u + C = \frac{1}{\ln 2} \text{Arcsin} 2^x + C$$

7.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ VE $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ŞEKLİNDEKİ İNTEGRALLER

ÖRNEK 1: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x - 4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x - 1)^2 - 5}} = \ln \left| x - 1 + \sqrt{(x - 1)^2 - 5} \right| + C$

$$= \ln \left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x - 4} \right| + C$$

ÖRNEK 2: $\int \frac{dt}{\sqrt{12 + 4t - t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-(t^2 - 4t - 12)}}$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{-\left[(t - 2)^2 - 16\right]}} = \int \frac{dt}{\sqrt{16 - (t - 2)^2}} = \text{Arcsin} \frac{t - 2}{4} + C$$

ÖRNEK 3: $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2+4x}} = ?$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Önce kesrin payında $(x^2 + 4x)' = 2x + 4$ ifadesini elde etmemiz gerekir.

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2+4x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x}} + \frac{-6}{\sqrt{x^2+4x}}\right) dx$$

$$= \int \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}\,dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}}$$

İlk integralde $x^2 + 4x = u$ konursa $(2x + 4)\,dx = du$ olur.

$d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ olduğu düşünülürse

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C$$

dir. Buna göre $\int \frac{(2x+4)\,dx}{2\sqrt{x^2+4x}} = \sqrt{x^2+4x} + C$ olur. Buradan

$$I = \sqrt{x^2+4x} - 3\ln\left|x + 2 + \sqrt{x^2+4x}\right| + C$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \text{Arcsin}\,\frac{x}{4} + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{16x^2-25}} = \frac{1}{4}\ln\left|4x + \sqrt{16x^2-25}\right| + C$

3) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-9}} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4-9}\right| + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x-1)^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}\frac{2x+1}{2} + C$

5) $\int \frac{\operatorname{Sec}^2 x \, . \, dx}{\sqrt{9-\operatorname{Tan}^2 x}} = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\operatorname{Tan} x}{3}\right) + C$

6) $\int \frac{e^x \, . \, dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \operatorname{Arcsin} e^x + C$

7) $\int \frac{10^x \, . \, dx}{\sqrt{25+100^x}} = \frac{1}{\ln 10} \, . \, \ln\left|10^x + \sqrt{25+100^x}\right| + C$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right| + C$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x}} = \operatorname{Arcsin}(x-1) + C$

10) $\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+t+2}} = \operatorname{Arcsin}\frac{2t-1}{3} + C$

11) $\int \frac{e^x \, . \, dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+2}} = \ln\left|e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{e^{2x}+e^x+2}\right| + C$

12) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = 2\sqrt{x^2-4} + 3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

13) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx = \sqrt{x^2-2x} - 2\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right| + C$

14) $\int \frac{x \, . \, dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} = -\sqrt{3+2x-x^2} + 2\operatorname{Arcsin}\frac{x-1}{2} + C$

7.12. $\int \sqrt{a^2 \pm u^2}\,du$ VE $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du$ ŞEKLİNDEKİ İNTEGRALLER (24 - 26 FORMÜLLERİ)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1: $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \text{ Arcsin } \frac{x}{3} + C$

ÖRNEK 2: $\int \sqrt{x^2 + 2}\,dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 2} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 + 2}\right| + C$

ÖRNEK 3: $\int \sqrt{4x^2 - 3}\,dx = \int \sqrt{(2x)^2 - 3}\,dx$

$2x = u$ konursa $dx = \frac{1}{2} du$ olur.

$$I = \int \frac{1}{2}\sqrt{u^2 - 3}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2 - 3} - \frac{3}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 3}\right|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2} x . \sqrt{4x^2 - 3} - \frac{3}{4}\ln\left|2x + \sqrt{4x^2 - 3}\right| + C$$

ÖRNEK 4: $\int \sqrt{4x - x^2}\,dx = \int \sqrt{4 - (x - 2)^2}\,dx$

$$= \frac{1}{2}(x - 2)\sqrt{4x - x^2} + 2 \text{ Arcsin } \frac{x - 2}{2} + C$$

ÖRNEK 5: $\int \sqrt{2x^2 + 2x - 3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{4x^2 + 4x - 6}\,dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{(2x + 1)^2 - 7}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \sqrt{u^2 - 7}\,du \qquad (2x + 1 = u)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} u \sqrt{u^2 - 7} - \frac{7}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - 7}\right|\right) + C$$

$$= \frac{2x + 1}{4\sqrt{2}}\sqrt{4x^2 + 4x - 6} - \frac{7}{4\sqrt{2}}\ln\left|2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x - 6}\right| + C$$

1°) $\int \sqrt{25 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \text{Arcsin } \frac{x}{5} + C$

2°) $\int \sqrt{x^2 - 16}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 16} - 8 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 16} \right| + C$

3°) $\int \sqrt{9x^2 + 4}\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{9x^2 + 4} + \frac{2}{3} \ln \left| 3x + \sqrt{9x^2 + 4} \right| + C$

4°) $\int \sqrt{x^2 - 2x + 5}\, dx = \frac{x - 1}{2} \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2 \ln \left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right| + C$

5°) $\int \sqrt{-x^2 + 4x + 12}\, dx = \frac{x - 2}{2} \sqrt{-x^2 + 4x + 12} + 8 \text{Arcsin } \frac{x - 2}{4} + C$

6°) $\int \sqrt{9x^2 + 6x + 5}\, dx = \frac{3x - 1}{6} \sqrt{9x^2 - 6x + 5} + \frac{2}{3} \ln \left| 3x + 1 + \sqrt{9x^2 - 6x + 5} \right| + C$

7.13. KISIMLARA AYIRARAK İNTEGRAL ALMA (KISMİ İNTEGRASYON)

u ve v, x in fonksiyonları olmak üzere (u . v) çarpımının diferansiyeli

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$$

idi. Buradan $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$ ve her iki yanın integrali alınarak

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

bulunur. Buna **kısmi integrasyon formülü** denir. Bu formülle integral almak için önce verilen integral iki kısma ayrılır. Birinci kısım u ile, dx i de kapsayacak şekilde alınan ikinci kısım ise dv ile gösterilir. Formülün sonuç vermesi için:

1) dv olarak seçilen kısımdan integral alınarak kolayca v bulunabilmelidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2) $\int v \, du$ integrali $\int u \, dv$ integralinden daha kolay olmalıdır.

ÖRNEK 1: $\int x \cos x \, dx = ?$

$u = x$, $dv = \cos x \, dx$ olarak alınırsa $du = dx$,

$v = \int \cos x \, dx = \sin x$ olur. Buna göre

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

bulunur.

Uyarı: Eğer $u = \cos x$, $dv = x \, dx$ olarak alınsaydı $du = -\sin x \, dx$, $v = \frac{1}{2} x^2$ olup

$$I = \frac{1}{2} x^2 \cos x - \int \frac{1}{2} x^2 \sin x \, dx$$

olacaktı. Buradaki integral ise başlangıçtakinden daha zor olduğu için bu seçimle sonuç bulunamayacaktı.

ÖRNEK 2: $\int x^2 \ln x \, dx = ?$

$u = \ln x$, $dv = x^2 \, dx$ alınırsa $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{1}{3} x^3$ olur. Kısmi integral formülüne göre

$$I = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C = = \frac{1}{3} x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 3: $\int x e^{3x} dx = ?$

$u = x$, $dv = e^{3x} dx$ alınırsa $du = dx$, $v = \frac{1}{3} e^{3x}$ olur.

$$I = \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

bulunur.

ÖRNEK 4: $\int (2x^2 - 3) e^x dx = ?$

$u = 2x^2 - 3$, $dv = e^x dx$ alınırsa $du = 4x\,dx$, $v = e^x$ olur. Buradan

$$I = (2x^2 - 3) e^x - 4 \int x e^x dx$$

elde edilir. Son integralde bir kez daha kısmi integrasyon formülünü uygulamak gerekir. Bunun için $u = x$, $dv = e^x dx$ alınırsa $du = dx$, $v = e^x$ olup

$$I = (2x^2 - 3) e^x - 4 \left[x e^x - \int e^x dx \right]$$

$$= (2x^2 - 3) e^x - 4x e^x + 4e^x + C$$

$$= (2x^2 - 4x + 1) e^x + C$$

bulunur.

ÖRNEK 5: $\int x \operatorname{Arctan} x\, dx = ?$

$u = \operatorname{Arctan} x$, $dv = x\,dx$ alınırsa $du = \frac{1}{1 + x^2} dx$, $v = \frac{1}{2} x^2$

olur.

$$I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}x + C$$

bulunur.

ÖRNEK 6: $\int x\sqrt{x+3}\,dx = ?$

$u = x$, $dv = \sqrt{x+3}\,dx = (x+3)^{1/2}dx$ alınırsa

$du = dx$, $v = \frac{2}{3}(x+3)^{3/2}$ olur.

$$I = \frac{2}{3}x(x+3)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+3)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+3)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+3)^{5/2} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x+3)^{3/2}(x-2) + C$$

bulunur.

ÖRNEK 7: $\int \ln(2x+1)\,dx = ?$

$u = \ln(2x+1)$, $dv = dx$ alınırsa $du = \frac{2}{2x+1}dx$,

$v = x$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I = x \ln(2x+1) - \int \frac{2x}{2x+1}\,dx$$

$$= x \ln(2x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx$$

$$= x \ln(2x+1) - x + \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(2x+1) - x + C$$

bulunur.

ÖRNEK 8: $\int e^x \operatorname{Sin} x\,dx = ?$

$u = e^x$, $dv = \operatorname{Sin} x\,dx$ alınırsa $du = e^x\,dx$, $v = -\operatorname{Cos} x$ olur. kısmi integrasyon formülü uygulanarak

$$\int e^x \operatorname{Sin} x\,dx = -e^x \operatorname{Cos} x + \int e^x \operatorname{Cos} x\,dx$$

bulunur. Son integralde $u = e^x$, $dv = \operatorname{Cos} x\,.\,dx$ alınarak formül bir kez daha uygulanırsa

$$\int e^x \operatorname{Sin} x\,dx = -e^x \operatorname{Cos} x + e^x \operatorname{Sin} x - \int e^x \operatorname{Sin} x\,dx$$

$$2 \int e^x \operatorname{Sin} x\,dx = e^x (\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x)$$

$$\int e^x \operatorname{Sin} x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{Sin} x - \operatorname{Cos} x) + C$$

elde edilir.

ÖRNEK 9: $\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = ?$

$u = \sqrt{x^2 - a^2}$, $dv = dx$ alınırsa $du = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$, $v = x$ olur.

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx - a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$$

$$2\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right|$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1°) $\int x e^x\, dx = e^x (x - 1) + C$

2°) $\int x \operatorname{Sin} x\, dx = - x \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x + C$

3°) $\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C$

4°) $\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5°) $\int x^2 e^{x/2}\,dx = 2e^{x/2}(x^2 - 4x + 8) + C$

6°) $\int x \operatorname{Cos} 2x\,dx = \frac{1}{2} x \operatorname{Sin} 2x + \frac{1}{4} \operatorname{Cos} 2x + C$

7°) $\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C \qquad (n \neq -1)$

8°) $\int \operatorname{Arctan} x\,dx = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + C$

9°) $\int (x^2 - 1) e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x + 1)^2 + C$

10°) $\int e^{2x} \operatorname{Sin} 3x\,dx = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \operatorname{Sin} 3x - 3 \operatorname{Cos} 3x) + C$

11°) $\int x\sqrt{x - 2}\,dx = \frac{2}{15}(x - 2)^{3/2}(3x + 4) + C$

12°) $\int x \ln (x + 1)\,dx = \frac{x^2 - 1}{2} \ln (x + 1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$

13°) $\int x \operatorname{Sec}^2 x\,dx = x \tan x + \ln |\operatorname{Cos} x| + C$

14°) $\int x^2 \operatorname{Sin} x\,dx = -x^2 \operatorname{Cos} x + 2x \operatorname{Sin} x + 2 \operatorname{Cos} x + C$

15°) $\int \operatorname{Arccos} x\,dx = x \operatorname{Arccos} x - \sqrt{1 - x^2} + C$

16°) $\int \ln^2 x\,dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$

17°) $\int \ln (2x^2 + 4)\,dx = x \ln (2x^2 + 4) - 2x + 2\sqrt{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$

18°) $\int \text{Cos}(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\left[\text{Cos}(\ln x) + \text{Sin}(\ln x)\right] + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

19°) $\int \text{Sec}^3 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\left[\text{Sec}\,x\,\text{Tan}\,x + \ln\left|\text{Sec}\,x + \text{Tan}\,x\right|\right] + C$

20°) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2\,\text{Arcsin}\,\frac{x}{a} + C$

21°) $\int x\,\text{Tan}^2 x\,dx = x\,\text{Tan}\,x - \frac{x^2}{2} + \ln\left|\text{Cos}\,x\right| + C$

22°) $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)dx = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$

23°) $\int \text{Cos}\,x\,.\,\ln(1 + \text{Cos}\,x)\,dx = \text{Sin}\,x\,.\,\ln(1 + \text{Cos}\,x) + x - \text{Sin}\,x + C$

24°) $\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{e^x}{x+1} + C$

7.14. RASYONEL KESİRLERİN İNTEGRASYONU

P (x) ve Q (x) , ortak çarpanı olmayan iki polinom olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki fonksiyonlara **rasyonel kesirli fonksiyonlar** denir. Böyle bir kesrin integrasyonu aşağıdaki işlemlerle yapılabilir.

1°) P (x) in derecesi Q (x) den büyükse önce P (x) , Q (x) e bölünür. Bölüm B (x) , kalan K (x) ise rasyonel kesir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

şeklinde yazılır.

2°) $\frac{K(x)}{Q(x)}$ bir basit kesir değilse, basit kesirlere ayrılır

3°) Bu işlemler sonunda rasyonel kesrin eşiti olarak bulunan cebirsel toplamın integrali alınır.

Tanım: $\frac{A}{(ax+b)^n}$ şeklindeki kesirlere **birinci türden**, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olmak üzere $\frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$ şeklindeki kesirlere de **ikinci türden basit kesirler** denir. $(a \neq 0 ; a, b, c, A, B, C \in R ; n \in N^+)$

Örnek olarak

$\frac{1}{2x-3}$, $\frac{-3}{x^2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2(x+1)^3}$ birinci türden;

$\frac{x}{x^2+1}$, $\frac{1}{2x^2-x+3}$, $\frac{3x-2}{(x^2+5)^2}$ ikinci türden basit kesirlerdir.

7.15. BASİT KESİRLERE AYIRMA İŞLEMİ

$\frac{K(x)}{Q(x)}$ kesri bir bileşik kesir ise bu kesir yukarıda tanımlanan birinci ve ikinci türden basit kesirlerin toplamı olarak yazılabilir. Bunun için önce kesrin paydası birinci ve ikinci türden basit çarpanlarına ayrılır. Bu çarpanlara göre $\frac{K(x)}{Q(x)}$ in eşiti olan basit kesirler toplamında aşağıdaki basit kesirler olabilir.

1°) Paydadaki her $(ax + b)$ çarpanı için $\frac{A}{ax+b}$ basit kesri,

2°) Paydadaki her $(ax + b)^n$ şeklindeki çarpan için n tane

$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$ basit kesir toplamı;

3°) Paydadaki negatif diskriminantlı her $(ax^2 + bx + c)$ çarpanı için bir $\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ basit kesri;

4°) Paydadaki negatif diskriminantlı her $(ax^2 + bx + c)^n$ çarpanı için n tane

$$\frac{B_1 x + C_1}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{B_2 x + C_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots\ldots + \frac{B_n x + C_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

şeklinde basit kesir toplamı.

ÖRNEK 1: $\frac{4x - 2}{x^3 - x}$ kesrini basit kesirlere ayırınız ve sonra integralini alınız.

Çözümü: $\frac{4x - 2}{x^3 - x} = \frac{4x - 2}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$

$$4x - 2 = A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$$

Sağ yan açılır düzenlenirse

$$4x - 2 = (A + B + C)x^2 + (B - C)x - A$$

bulunur. Belirsiz katsayılar teoremine göre karşılıklı katsayılar eşitlenerek

$$A + B + C = 0 \quad ; \quad B - C = 4 \quad ; \quad -A = -2$$

sistemi, bu sistemin çözümü ile de $A = 2$; $B = 1$; $C = -3$ elde edilir. O halde verilen rasyonel kesir

$$\frac{4x - 2}{x^3 - x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x + 1}$$

şeklinde üç basit kesrin toplamı olarak yazılabilir.

Not: Yukarıdaki $4x - 2 = A(x - 1)(x + 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$ eşitliğinden sonra her iki yanda x yerine paydanın kökleri olan 0 , 1 , -1 değerleri (veya herhangi üç sayı) konularak da A, B, C bulunabilir.

$x = 0$ için $-2 = A(-1)(+1) \Rightarrow A = 2$

$x = 1$ " $4 - 2 = B(1 + 1) \Rightarrow B = 1$

$x = -1$ " $-4 - 2 = C(-1)(-1 - 1) \Rightarrow C = -3$

elde edilir. Şimdi verilen kesrin integrasyonuna geçelim.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\int \frac{4x-2}{x^3-x}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{3}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| + \ln|x-1| - 3\ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^3}\right| + C$$

ÖRNEK 2: $\int \frac{x^4-3x^3+4}{x(x-2)^2}\,dx = ?$

Pay paydaya bölünürse bölüm $(x+1)$, kalan $(-4x+4)$ bulunur. Buna göre

$$\frac{x^4-3x^3+4}{x(x-2)^2} = x+1+\frac{-4x+4}{x(x-2)^2} = x+1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

yazılabilir. Buradan da

$$-4x+4 = A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx$$

yazılır.

$x = 0$ için $4 = 4A \Rightarrow A = 1$

$x = 2$ " $-4 = 2C \Rightarrow C = -2$

$x = 1$ " $0 = A - B + C = 1 - B - 2 \Rightarrow B = -1$

elde edilir. İstenen integral

$$\int \frac{x^4-3x^3+4}{x(x-2)^2}\,dx = \int \left(x+1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \ln|x-2| + \frac{2}{x-2} + C = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|\frac{x}{x-2}\right| + \frac{2}{x-2} + C$$

bulunur.

ÖRNEK 3: $\int \frac{2x-8}{x^3+8}\,dx = ?$

$$\frac{2x-8}{x^3+8} = \frac{2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

$$2x-8 = A(x^2-2x+4) + (Bx+C)(x+2)$$

$$2x-8 = (A+B)x^2 + (-2A+2B+C)x + 4A+2C$$

Buradan $A+B=0$; $-2A+2B+C=2$; $4A+2C=-8$ sistemi, bu sistemin çözümüyle de $A=-1$; $B=1$; $C=-2$ bulunur. İstenen integral

$$I = \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x-2}{x^2-2x+4} \right) dx = -\ln|x+2| + \int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-2x+4}$$

$$= -\ln|x+2| + \frac{1}{2}\int \left(\frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{-2}{x^2-2x+4} \right) dx$$

$$= -\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+4| - \int \frac{dx}{(x-1)^2+3}$$

$$= \ln \frac{\sqrt{x^2-2x+4}}{|x+2|} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

elde edilir.

ÖRNEK 4: $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx = ?$

$$\frac{x^4+1}{x^4-1} = 1 + \frac{2}{x^4-1} = 1 + \frac{2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$2 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$x = 1$ için $2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x = -1$ " $2 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

$x = i$ " $2 = (Ci + D)(-1 - 1) = -2(Ci + D)$

$Ci + D = -1 \Rightarrow C = 0$ ve $D = -1$ bulunur.

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1/2}{x - 1} - \frac{1/2}{x + 1} - \frac{1}{x^2 + 1}\right)dx$$

$$= x + \frac{1}{2}\ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln|x + 1| - \operatorname{Arctan} x + C$$

$$= x + \ln\sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} - \operatorname{Arctan} x + C$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1°) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}\,dx = \ln\left|\frac{(x - 2)^3}{x - 1}\right| + C$

2°) $\int \frac{x + 1}{x(x - 1)^2}\,dx = \ln\left|\frac{x}{x - 1}\right| - \frac{2}{x - 1} + C$

3°) $\int \frac{x^2}{(x - 1)(x - 3)}\,dx = x - \frac{1}{2}\ln|x - 1| + \frac{9}{2}\ln|x - 3| + C$

4°) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}\,dx = \ln\left|\frac{x^2 - 1}{x}\right| + C$

5°) $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\,dx = x + 3\ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + C$

6°) $\int \frac{7x^2 - 23x + 10}{(x+2)(x-1)3x-1)}\,dx = \ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x-1)(3x-1)^{2/3}}\right| + C$

7°) $\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{(x-1)^{3/2}}{(x+1)^{1/2}}\right| + C$

8°) $\int \frac{x^3}{(x-2)^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 4x + 12\ln|x| - \frac{8}{x-2} + C$

9°) $\int \frac{x^2+2x-1}{(x+2)^3}\,dx = \ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2(x+2)^2} + C$

10°) $\int \frac{x^4}{(x-1)^3}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 4\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

11°) $\int \frac{3x^2 - 11x + 10}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}\,dx = \ln\left|(x-3)(x-1)^2\right| + \frac{1}{x-1} + C$

12°) $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$

13°) $\int \frac{4x^3 \cdot dx}{(x-1)(x^2+3)} = 4x + \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+3) - 3\sqrt{3}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C$

14°) $\int \frac{x^2 - 5x - 1}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx = \ln|x-1| + 3\,\text{Arctan}\,(x+1) + C$

15°) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-8}\,dx = \ln|x-2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Arctan}\,\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

16°) $\int \frac{x^5 + x^4 + x^3 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right| + \frac{1}{x} + C$

17°) $\int \frac{x^4 + 11x - 6}{x^3 + 8}\,dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x + 2| + \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x + 4) + C$

18°) $\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C$

19°) $\int \frac{x^3 + x^2 + x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx = \operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C$

20°) $\int \frac{(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}\,dx = \operatorname{Arctan} x + \frac{1}{x^2 + 1}$

21°) $\int \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 2}\right)^2 dx = \operatorname{Arctan}(x - 1) - \frac{1}{x^2 - 2x + 2} + C$

22°) $\int \frac{4 - 2x}{(x - 1)^2(x^2 + 1)}\,dx = \ln\frac{x^2 + 1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x - 1} + \operatorname{Arctan} x + C$

23°) $\int \frac{x^2}{1 - x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x + C$

24°) $\int \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x\,(1 + \operatorname{Sin}^2 x)}\,dx = \ln\left|\frac{\operatorname{Sin} x}{\sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x}}\right| + C$

25°) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x}} = \ln\left|\frac{\sqrt{1 - x} - 1}{\sqrt{1 - x} + 1}\right| + C$

7.16. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

I. Farklı iki açının sinüs veya kosinüsleri çarpımının integrali.

Bu tür integraller için aşağıdaki ters dönüşüm formüllerinden yararlanılır.

$$\text{Sin } x \cdot \text{Cos } y = \frac{1}{2}[\text{Sin } (x + y) + \text{Sin } (x - y)]$$

$$\text{Cos } x \cdot \text{Cos } y = \frac{1}{2}[\text{Cos } (x + y) + \text{Cos } (x - y)]$$

$$\text{Sin } x \cdot \text{Sin } y = -\frac{1}{2}[\text{Cos } (x + y) - \text{Cos}(x - y)]$$

ÖRNEK 1: $\int \text{Sin } 3x \cdot \text{Cos}2x \cdot dx = \int \frac{1}{2}[\text{Sin } (3x + 2x) + \text{Sin } (3x - 2x)]\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{Sin } 5x + \text{Sin } x)\, dx = -\frac{1}{10}\text{Cos } 5x - \frac{1}{2}\text{Cos } x + C$$

ÖRNEK 2: $\int \text{Cos}x \cdot \text{Cos}\frac{x}{3} \cdot dx = \frac{1}{2}\int \left[\text{Cos}\frac{4x}{3} + \text{Cos}\frac{2x}{3}\right] dx$

$$= \frac{3}{8}\text{Sin}\frac{4x}{3} + \frac{3}{4}\text{Sin}\frac{2x}{3} + C$$

ÖRNEK 3: $\int \text{Sin}x \cdot \text{Cos}3x \cdot \text{Sin } 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int [\text{Sin } 4x + \text{Sin } (-2x)] \text{ Sin } 5x \cdot dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\text{Sin } 4x - \text{Sin } 2x) \cdot \text{Sin } 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int (\text{Sin } 5x \cdot \text{Sin } 4x - \text{Sin } 5x \cdot \text{Sin } 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int -\frac{1}{2}[(\text{Cos } 9x - \text{Cos } x) - (\text{Cos } 7x - \text{Cos } 3x)]\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int (\text{Cos}9x - \text{Cos } 7x + \text{Cos } 3x - \text{Cos } x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{36}\text{Sin } 9x + \frac{1}{28}\text{Sin } 7x - \frac{1}{12}\text{Sin } 3x + \frac{1}{4}\text{Sin } x + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

II. $\int \text{Sin}^m x \cdot \text{Cos}^n x \cdot dx$ şeklindeki integraller

Bu tür integrallerde m ve n nin tek veya çift oluşuna göre aşağıdaki yollardan biri izlenir.

a) m ve n den en az biri pozitif tek sayı ise:

m tek ise Cos x = u

n tek ise Sin x = u

değişken değişimi yapılır.

ÖRNEK 1: $\int \text{Sin } x \cdot \text{Cos}^4 x \cdot dx = ?$

Cos x = u konursa Sin x . dx = - du olur.

$$I = \int u^4 \cdot (-du) = -\int u^4 \cdot du = -\frac{1}{5}u^5 + C = -\frac{1}{5}\text{Cos}^5 x + C$$

ÖRNEK 2: $\int \text{Sin}^2 x \cdot \text{Cos}^3 x \cdot dx = \int \text{Sin}^2 x \cdot \text{Cos}^2 x \cdot \text{Cos } x \cdot dx$

$$= \int \text{Sin}^2 x \cdot (1 - \text{Sin}^2 x) \cdot \text{Cos } x \cdot dx = \int u^2 (1 - u^2) \cdot du \qquad (\text{Sin } x = u)$$

$$= \int (u^2 - u^4)\, du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{3}\text{Sin}^3 x - \frac{1}{5}\text{Sin}^5 x + C$$

ÖRNEK 3: $\int \text{Sin}^3 x \cdot \text{Cos}^5 x \cdot dx = \int \text{Sin}^2 x \cdot \text{Cos}^5 x \cdot \text{Sin} x \cdot dx$

$$= \int (1 - \text{Cos}^2 x) \cdot \text{Cos}^5 x \cdot \text{Sin } x\, dx = \int (1 - u^2) \cdot u^5 \cdot (-du) \qquad (\text{Cos } x = u)$$

$$= \int (u^7 - u^5)\, du = \frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{8}\text{Cos}^8 x - \frac{1}{6}\text{Cos}^6 x + C$$

ÖRNEK 4: $\int \frac{\text{Cos x}}{\sqrt[3]{\text{Sin x}}}\,dx = \int (\text{Sin x})^{-\frac{1}{3}} . \text{Cos x} . dx = \int u^{-\frac{1}{3}} . du$

$= \frac{3}{2} u^{2/3} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\text{Sin}^2 x} + C$

ÖRNEK 5: $\int \text{Sin}^3 2x . dx = \int \text{Sin}^2 2x . \text{Sin} 2x . dx = \int (1 - \text{Cos}^2 2x) . \text{Sin} 2x . dx$

$\text{Cos} 2x = u$ konursa $-2 \text{Sin} 2x . dx = du$; $\text{Sin} 2x . dx = -\frac{du}{2}$ olur.

$$I = \int -\frac{1}{2}(1 - u^2)\,du = -\frac{1}{2}(u - \frac{1}{3}u^3) + C = -\frac{1}{2}\text{Cos} 2x + \frac{1}{6}\text{Cos}^3 2x + C$$

bulunur.

ÖRNEK 6: $\int \text{Cos}^5 x . dx = \int \text{Cos}^4 x . \text{Cos} x . dx = \int (1 - \text{Sin}^2 x)^2 . \text{Cos} x . dx$

$$= \int (1 - u^2)^2 . du = \int (1 - 2u^2 + u^4)\,du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \text{Sin} x - \frac{2}{3}\text{Sin}^3 x + \frac{1}{5}\text{Sin}^5 x + C$$

b) m ve n ikisi de pozitif çift sayı ise:

$\text{Cos}^2\alpha = 1/2\ (1 + \text{Cos} 2\alpha)$

$\text{Sin}^2\alpha = 1/2\ (1 - \text{Cos} 2\alpha)$

formülleri ardarda uygulanarak (Cos) ve (Sin) fonksiyonlarının dereceleri birinci dereceye kadar küçültülür. Sonra integral alınır.

ÖRNEK 1: $\int \text{Cos}^4 x . dx = \int . (\text{Cos}^2 x)^2\ dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + \text{Cos} 2x)\right]^2 . dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\,\text{Cos} 2x + \text{Cos}^2 2x) . dx = \frac{1}{4}\int \left[1 + 2\,\text{Cos} 2x + \frac{1}{2}(1 + \text{Cos} 4x)\right] dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2\,\text{Cos}\,2x + \frac{1}{2}\,\text{Cos}\,4x\right) dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + \text{Sin}\,2x + \frac{1}{8}\,\text{Sin}\,4x\right) + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\,\text{Sin}\,2x + \frac{1}{32}\,\text{Sin}\,4x + C$$

ÖRNEK 2: $\int \text{Sin}^2 2x \,.\, \text{Cos}^2 2x \,.\, dx = \int (\text{Sin}\,2x \,.\, \text{Cos}\,2x)^2 \,.\, dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\,\text{Sin}\,4x\right)^2 . dx = \frac{1}{4}\int \text{Sin}^2 4x \,.\, dx = \frac{1}{8}\int (1 - \text{Cos}\,8x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{8}\,\text{Sin}\,8x\right) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{64}\,\text{Sin}\,8x + C$$

ÖRNEK 3: $\int \text{Sin}^4 \frac{x}{2}\,\text{Cos}^2 \frac{2x}{2} \,.\, dx = \int \left(\text{Sin}\,\frac{x}{2} \,.\, \text{Cos}\,\frac{x}{2}\right)^2 \text{Sin}^2 \frac{x}{2} \,.\, dx$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\,\text{Sin}\,x\right)^2 . \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}\,x) \,.\, dx = \frac{1}{8}\int \text{Sin}^2 x\,(1 - \text{Cos}x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \text{Sin}^2 x \,.\, dx - \frac{1}{8}\int \text{Sin}^2 x \,.\, \text{Cos}\,x \,.\, dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - \text{Cos}2x)\, dx - \frac{1}{8}\int \text{Sin}^2 x \,.\, d\,(\text{Sin}x)$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{32}\,\text{Sin}\,2x - \frac{1}{24}\,\text{Sin}^3 x + C$$

III. $\int \text{Tan}^m x \,.\, \text{Sec}^n x \,.\, dx$ **veya** $\int \text{Cot}^m x \,.\, \text{Cosec}^n x \,.\, dx$ **şeklindeki integraller**

Bu tür integraller $1 + \text{Tan}^2 x = \text{Sec}^2 x$ veya $1 + \text{Cot}^2 x = \text{Cosec}^2 x$ formüllerinden yararlanılarak ve değişken değişimi yapılarak çözülebilir.

ÖRNEK 1: $\int \text{Tan}^3 x \,.\, \text{Sec}^2 x \,.\, dx = ?$

$\text{Tan}\, x = u$ konursa $\text{Sec}^2 x \,.\, dx = du$ olur.

$$I = \int u^3 \,.\, du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} \text{Tan}^4 x + C \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK 2: $\int \text{Sec}^4 2x \,.\, dx = \int \text{Sec}^2 2x \,.\, \text{Sec}^2 2x \,.\, dx = \int (1 + \text{Tan}^2 2x)\, \text{Sec}^2 2x \,.\, dx$

şeklinde yazılabilir. $\text{Tan}\, 2x = u$ konursa $2\text{Sec}^2 2x \,.\, dx = du$,

$\text{Sec}^2 2x \,.\, dx = \frac{du}{2}$ olur.

$$I = \frac{1}{2} \int (1 + u^2)\, du = \frac{1}{2} (u + \frac{1}{3} u^3) + C = \frac{1}{2} \text{Tan}\, 2x + \frac{1}{6} \text{Tan}^3 2x + C$$

bulunur.

ÖRNEK 3: $\int \text{Cot}^3 x \,.\, dx = \int \text{Cotx} \,.\, \text{Cot}^2 x \,.\, dx = \int \text{Cot}\, x\, (\text{Cosec}^2 x - 1)\, dx$

$$= \int \text{Cot}\, x \,.\, \text{Cosec}^2 x \,.\, dx - \int \text{Cot}\, x \,.\, dx = - \int \text{Cot}\, x \,.\, d\,(\text{Cot}\, x) - \int \text{Cot}\, x \,.\, dx$$

$$= - \frac{1}{2} \text{Cot}^2 x - \ln |\text{Sin}\, x| + C$$

ÖRNEK 4: $\int \text{Tan}^4 x \,.\, dx = \int \text{Tan}^2 x \,.\, \text{Tan}^2 x \,.\, dx = \int \text{Tan}^2 x\, (\text{Sec}^2 x - 1)\, dx$

$$= \int \text{Tan}^2 x \,.\, \text{Sec}^2 x \,.\, dx - \int \text{Tan}^2 x \,.\, dx = \frac{1}{3} \text{Tan}^3 x - \int (\text{Sec}^2 x - 1)\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \text{Tan}^3 x - \text{Tan}\, x + x + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 5: $\int \frac{\text{Sin}^3 x}{\text{Cos}^6 x}\,dx = \int \frac{\text{Sin}^3 x}{\text{Cos}^3 x} \cdot \frac{1}{\text{Cos}^3 x}\,dx$

$$= \int \text{Tan}^3 x \,.\, \text{Sec}^3 x \,.\, dx = \int \text{Tan}^2 x \,.\, \text{Sec}^2 x \,.\, \text{Sec}\, x \,.\, \text{Tan}\, x \,.\, dx$$

$$= \int (\text{Sec}^2 x - 1) \,.\, \text{Sec}^2 x \,.\, \text{Sec}\, x \,.\, \text{Tan}\, x \,.\, dx$$

Sec x = u konursa Sec x . Tan x . dx = du olur.

$$I = \int (u^2 - 1) \,.\, u^2 \,.\, du = \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{5} \text{Sec}^5 x - \frac{1}{3} \text{Sec}^3 x + C \qquad \text{bulunur.}$$

IV. $\int$ **f (Sin x, Cos x) . dx şeklindeki integraller**

Bu tür integrallerde genel olarak $\text{Tan} \frac{x}{2} = t$ değişken değiştirmesi yapılır. Buna göre

$$\text{Sin}\, x = \frac{2 \text{Tan} \frac{x}{2}}{1 + \text{Tan}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\text{Cos}\, x = \frac{1 - \text{Tan}^2 \frac{x}{2}}{1 + \text{Tan}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

olur. Ayrıca $\text{Tan} \frac{x}{2} = t$ den $\frac{1}{2}(1 + \text{Tan}^2 \frac{x}{2})\, dx = dt$, buradan da

$$dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

bulunur. Bu değişken değiştirme sonucunda verilen integral $\int F(t)\, dt$ şeklinde cebirsel bir integrale dönüştürülerek hesaplanır. Sonra $t = \text{Tan} \frac{x}{2}$ konarak istenen integral bulunmuş olur.

ÖRNEK 1: $\int \frac{dx}{\text{Cos } x + 3} = ?$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\text{Tan}\frac{x}{2} = t$ olmak üzere $\text{Cos } x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ ve $dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$

konursa

$$\int \frac{dx}{\text{Cos } x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2} + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Arctan} \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{Tan}\frac{x}{2}\right) + C$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $\int \frac{dx}{\text{Sin } x - \text{Cos } x - 1} = \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2} - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} - 1} = \int \frac{dt}{t - 1}$

$$= \ln |t - 1| + C = \ln \left|\text{Tan}\frac{x}{2} - 1\right| + C$$

ÖRNEK 3: $\int \frac{2 + \text{Sin } x}{\text{Sin } x (1 + \text{Cos } x)}\, dx = \int \frac{2 + \frac{2t}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}\left(1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right)} \cdot \frac{2\,dt}{1 + t^2}$

$$= \int \frac{t^2 + t + 1}{t}\, dt = \int (t + 1 + \frac{1}{t})\, dt = \frac{1}{2} t^2 + t + \ln |t| + C$$

$$= \frac{1}{2} \text{Tan}^2 \frac{x}{2} + \text{Tan}\frac{x}{2} + \ln \left|\text{Tan}\frac{x}{2}\right| + C$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1°) $\int \text{Sin } 3x \,.\, \text{Cos } 5x \,.\, dx = \frac{1}{4} \text{Cos } 2x - \frac{1}{16} \text{Cos } 8x + C$

2°) $\int \text{Cos } 3x \,.\, \text{Cos } 2x \,.\, dx = \frac{1}{10} \text{Sin } 5x + \frac{1}{2} \text{Sin} x + C$

3°) $\int \text{Sin } 4x \,.\, \text{Sin } x \,.\, dx = \frac{1}{16} \text{Sin } 3x - \frac{1}{10} \text{Sin } 5x + C$

4°) $\int \text{Cos } \frac{x}{2} \,.\, \text{Cos } \frac{x}{3} \,.\, dx = \frac{3}{5} \text{Sin } \frac{5x}{6} + 3 \text{ Sin } \frac{x}{6} + C$

5°) $\int \text{Sin } (ax + b) \,.\, \text{Cos } (ax - b)\, dx = -\frac{1}{4a} \text{Cos } 2ax + \frac{1}{2} x \,.\, \text{Sin } 2b + C$

6°) $\int \text{Sin } x \,.\, \text{Sin } 2x \,.\, \text{Sin } 3x \,.\, dx = \frac{1}{24} \text{Cos } 6x - \frac{1}{16} \text{Cos } 4x - \frac{1}{8} \text{Cos } 2x + C$

7°) $\int \text{Sin}^4 x \,.\, \text{Cos } x \,.\, dx = \frac{1}{5} \text{Sin}^5 x + C$

8°) $\int \text{Sin}^3 x \,.\, \text{Cos}^2 x \,.\, dx = -\frac{1}{3} \text{Cos}^3 x + \frac{1}{5} \text{Cos}^5 x + C$

9°) $\int \text{Sin}^4 x \,.\, \text{Cos}^3 x \,.\, dx = \frac{1}{5} \text{Sin}^5 x - \frac{1}{7} \text{Sin}^7 x + C$

10°) $\int \text{Cos}^3 6x \,.\, dx = \frac{1}{6} \text{Sin } 6x - \frac{1}{18} \text{Sin}^3 6x + C$

11°) $\int \text{Sin}^3 \frac{x}{2} \,.\, dx = -2 \text{Cos } \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \text{Cos}^3 \frac{x}{2} + C$

12°) $\int \sqrt{\text{Cos } x}\, \text{Sin}^3 x \,.\, dx = -\frac{2}{3} \sqrt{\text{Cos}^3 x} + \frac{2}{7} \sqrt{\text{Cos}^7 x} + C$

13°) $\int \frac{\text{Cos}^3 x}{\text{Sin}^2 x}\,dx = -\frac{1}{\text{Sin } x} - \text{Sin } x + C$

14°) $\int \text{Cos}^2 \frac{x}{2}\,.\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{Sin } x + C$

15°) $\int \text{Sin}^2 x\,.\,\text{Cos}^2 x\,.\,dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\text{Sin } 4x + C$

16°) $\int \text{Sin}^2 x\,.\,\text{Cos}^4 x\,.\,dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\text{Sin } 4x + \frac{1}{48}\text{Sin}^3 2x + C$

17°) $\int \text{Tan}^3 x\,.\,dx = \frac{1}{2}\text{Tan}^2 x + \ln|\text{Cos } x| + C$

18°) $\int \text{Cot}^4 x\,.\,dx = -\frac{1}{3}\text{Cot}^3 x + \text{Cot } x + x + C$

19°) $\int \text{Sec}^6 x\,.\,dx = \text{Tan } x + \frac{2}{3}\text{Tan}^3 x + \frac{1}{5}\text{Tan}^5 x + C$

20°) $\int \text{Tan}^2 x\,.\,\text{Sec}^2 x\,.\,dx = \frac{1}{3}\text{Tan}^3 x + C$

21°) $\int \text{Cot}^3 x\,.\,\text{Cosec } x\,.\,dx = \text{Cosec} x - \frac{1}{3}\text{Cosec}^3 x + C$

22°) $\int \frac{\text{Sin}^2 x}{\text{Cos}^6 x}\,dx = \frac{1}{3}\text{Tan}^3 x + \frac{1}{5}\text{Tan}^5 x + C$

23°) $\int \frac{dx}{1 + \text{Sin } x + \text{Cos } x} = \ln\left|\text{Tan}\frac{x}{2} + 1\right| + C$

24°) $\int \frac{dx}{4 + 5\text{Cos } x} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3 + \text{Tan}\frac{x}{2}}{3 - \text{Tan}\frac{x}{2}}\right| + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

25°) $\int \frac{\text{Cos } x}{5 - 3\text{Cos } x}\,dx = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}\text{Arctan}\left(2\,\text{Tan}\frac{x}{2}\right) + C$

26°) $\int \frac{dx}{\text{Sin}^2 x - 2\,\text{Sin } x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\text{Tan } x - 2}{\text{Tan } x}\right| + C$

7.17. TRİGONOMETRİK DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

Bir integralde $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$, $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ (a ve b sabit) köklü ifadelerinden yalnız biri bulunuyor, başka köklü ifade bulunmuyorsa, aşağıdaki trigonometrik değişken değiştirmeler yapılarak integral alınabilir.

1) $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$ için $u = \frac{a}{b}\,\text{Sint}$ konur. Bu durumda

$\sqrt{a^2 - b^2u^2} = \sqrt{a^2 - a^2\,\text{Sin}^2 t} = a\sqrt{1 - \text{Sin}^2 t} = a\,.\,\text{Cost}$ olur.

2) $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$ için $u = \frac{a}{b}\,\text{Tan t}$ konur. Bu durumda

$\sqrt{a^2 + b^2u^2} = \sqrt{a^2 + a^2\,\text{Tan}^2 t} = a\sqrt{1 + \text{Tan}^2 t} = a\,.\,\text{Sect}$ olur.

3) $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$ için $u = \frac{a}{b}\,\text{Sect}$ konur. Bu durumda da

$\sqrt{b^2u^2 - a^2} = \sqrt{a^2\,\text{Sec}^2 t - a^2} = a\sqrt{\text{Sec}^2 t - 1} = a\,.\,\text{Tant}$ olur.

ÖRNEK 1: $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = ?$

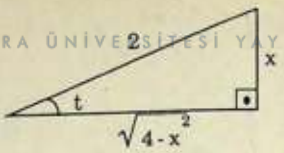
$x = 2\,\text{Sint}$ konursa $dx = 2\,\text{Cost}\,.\,dt$, $\sqrt{4 - x^2} = 2\,\text{Cost}$ olur. İntegralde yerlerine konursa

$$I = \int \frac{2\,\text{Cost}\,.\,dt}{4\,\text{Sin}^2 t\,.\,2\,\text{Cost}} = \frac{1}{4}\int \text{Cosec}^2 t\,.\,dt = -\frac{1}{4}\text{Cott} + C$$

bulunur. $\text{Sint} = \frac{x}{2}$ olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\text{Cot } t = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$ dir.



Yerine konursa

$$I = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $\int \dfrac{dx}{x \cdot \sqrt{9x^2 + 4}} = ?$

$x = \dfrac{2}{3}\text{Tan } t$ konursa $dx = \dfrac{2}{3}\text{Sec}^2 t \cdot dt$ ve

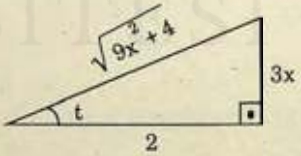
$\sqrt{9x^2 + 4} = 2 \cdot \text{Sect}$ olur. Yerlerine konarak

$$I = \int \frac{\frac{2}{3}\text{Sec}^2 t \cdot dt}{\frac{2}{3} \cdot \text{Tan } t \cdot 2\,\text{Sect}} = \frac{1}{2}\int \frac{\text{Sect}}{\text{Tant}}\,dt = \frac{1}{2}\int \text{Cosect} \cdot dt$$

$= \dfrac{1}{2}\ln|\text{Cosect} - \text{Cot } t| + C$ bulunur.

$x = \dfrac{2}{3}\text{Tan } t$ den $\text{Tan } t = \dfrac{3x}{2}$

olduğuna göre $\text{Cosect} = \dfrac{\sqrt{9x^2 + 4}}{3x}$



ve $\text{Cott} = \dfrac{2}{3x}$ dir. Buna göre

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{9x^2 + 4} - 2}{3x}\right| + C$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 3: $\int \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x^2} dx = ?$

$x = \frac{1}{2}\,\text{Sect}$ konursa $dx = \frac{1}{2}\,\text{Sect} \cdot \text{Tant} \cdot dt$ ve

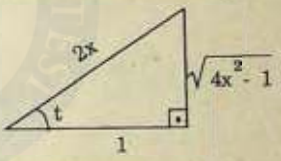
$\sqrt{4x^2 - 1} = \text{Tan}\,t$ olur.

$$I = \int \frac{\text{Tant}}{(1/4) \cdot \text{Sec}^2 t} \cdot \frac{1}{2}\,\text{Sect} \cdot \text{Tant} \cdot dt = 2 \int \frac{\text{Tan}^2 t}{\text{Sect}}\, dt$$

$$= 2 \int \frac{\text{Sec}^2 t - 1}{\text{Sect}}\, dt = 2 \int (\text{Sect} - \text{Cost})\, dt$$

$$= 2\ln |\text{Sect} + \text{Tant}| - 2\,\text{Sint} + C$$

$$= 2\ln \left|2x + \sqrt{4x^2 - 1}\right| - \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x} + C$$



bulunur.

ÖRNEK 4: $\int \frac{x^2 \cdot dx}{(3 - x^2)^{3/2}} = ?$

$x = \sqrt{3}\,\text{Sint}$ konursa $dx = \sqrt{3}\,\text{Cost} \cdot dt$ ve

$(3 - x^2)^{3/2} = (3 - 3\text{Sin}^2 t)^{3/2} = (3\,\text{Cos}^2 t)^{3/2} = 3\sqrt{3}\,\text{Cos}^3 t$

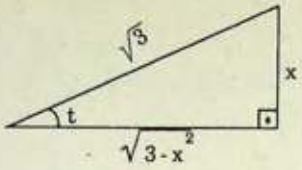
olur.

$$I = \int \frac{3\,\mathrm{Sin}^2 t}{3\sqrt{3}\,\mathrm{Cos}^3 t}\sqrt{3}\,\mathrm{Cost}\,.\,dt = \int \mathrm{Tan}^2 t\,.\,dt = \int (\mathrm{Sec}^2 t - 1)\,dt$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \mathrm{Tant} - t + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{3 - x^2}} - \mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$



bulunur. $(\mathrm{Sint} = \frac{x}{\sqrt{3}}$ den $t = \mathrm{Arc\,sin}\,\frac{x}{\sqrt{3}}$ tür)

ÖRNEK 5: $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\left[(x-1)^2 + 4\right]^{3/2}}$

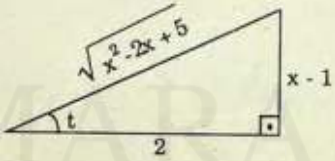
$x - 1 = 2\,\mathrm{Tant}$ konursa $dx = 2\,\mathrm{Sec}^2 t\,dt$ ve

$(x-1)^2 + 4 = 4\,\mathrm{Tan}^2 t + 4 = 4\,(\mathrm{Tan}^2 t + 1) = 4\,\mathrm{Sec}^2 t$ olur.

$$I = \int \frac{2\,\mathrm{Sec}^2 t\,dt}{(4\,\mathrm{Sec}^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\mathrm{Sect}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{Cost}\,.\,dt = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sint} + C$$

$$= \frac{x-1}{4\sqrt{x^2 - 2x + 5}} + C$$



bulunur. $(\mathrm{Tant} = \frac{x-1}{2}$ den)

ÖRNEK 6: $\int \frac{x^2}{\sqrt{6x - x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{9 - (x-3)^2}}\,dx$

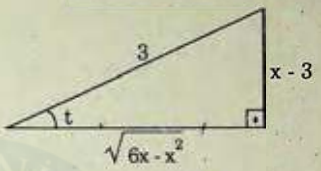
$x - 3 = 3\,\mathrm{Sint}$ konursa $dx = 3\,\mathrm{Cost}\,.\,dt$ ve

$\sqrt{9 - (x-3)^2} = 3\,\mathrm{Cost}$ olur.

$$I = \int \frac{(3 + 3\,\text{Sint})^2}{3\,\text{Cost}} 3\,\text{Cost}\,.\,dt = 9\int (1 + 2\,\text{Sint} + \text{Sin}^2 t)\,dt$$

$$= 9\int \left[1 + 2\,\text{Sint} + \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}\,2t)\right] dt = 9\int \left(\frac{3}{2} + 2\,\text{Sint} - \frac{1}{2}\,\text{Cos}\,2t\right) dt$$

$$= \frac{27}{2}t - 18\,\text{Cost} - \frac{9}{4}\,\text{Sin}\,2t + C$$



$$= \frac{27}{2}t - 18\,\text{Cost} - \frac{9}{2}\,\text{Sint}\,.\,\text{Cost} + C$$

$$= \frac{27}{2}\,\text{Arcsin}\,\frac{x-3}{3} - 6\sqrt{6x - x^2} - \frac{x-3}{2}\sqrt{6x - x^2} + C \quad \left(\text{Sint} = \frac{x-3}{3}\ \text{den}\right)$$

$$= \frac{27}{2}\,\text{Arcsin}\,\frac{x-3}{3} - \frac{x+9}{2}\sqrt{6x - x^2} + C$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri bulunuz.

1°) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\,.\,\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + C$

2°) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}} = \ln\left|\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}\right| + C$

3°) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2 + 9} - 3}{2x}\right| + C$

4°) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\,.\,\sqrt{x^2 + 25}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 25}}{25x} + C$

5°) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}\frac{2}{x} + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

6°) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\operatorname{Arccos}\frac{a}{x} + C$

7°) $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx = 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{2x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C$

8°) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

9°) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\cdot\sqrt{x^2+a^2}} + C$

10°) $\int \frac{x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = 2\operatorname{Arctan} x + \frac{x}{x^2+1} + C$

11°) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin}(x-1) - \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + C$

12°) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+10}} = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+10}\right| + C$

13°) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^5}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{x^3}{\sqrt{(4-x^2)^3}} + C$

14°) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+13)^{3/2}} = \frac{x-2}{9\sqrt{x^2-4x+13}} + C$

15°) $\int x\cdot\operatorname{Arcsin} x\cdot dx = \frac{1}{4}(2x^2-1)\operatorname{Arcsin} x + \frac{1}{4}x\cdot\sqrt{1-x^2} + C$

(Kısmi int.)

7.18. HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN İNTEGRALLERİ

Bölüm 4.28 deki (s.137-139) hiperbolik fonksiyonlara ait türev formüllerinden aşağıdaki integral formülleri kolayca yazılabilir.

1) $\int \text{Sin hu} \, . \, du = \text{Coshu} + C$

2) $\int \text{Coshu} \, . \, du = \text{Sinhu} + C$

3) $\int \text{Tanhu} \, . \, du = \ln \text{Coshu} + C$

4) $\int \text{Cothu} \, . \, du = \ln |\text{Sinhu}| + C$

5) $\int \text{Sech}^2 u \, . \, du = \text{Tanhu} + C$

6) $\int \text{Cosech}^2 u \, . \, du = - \text{Cothu} + C$

7) $\int \text{Sechu} \, . \, \text{Tanhu} \, . \, du = - \text{Sechu} + C$

8) $\int \text{Cosechu} \, . \, \text{Cothu} \, . \, du = - \text{Cosechu} + C$

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \text{Argsinh} \frac{u}{a} + C$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \text{Argcosh} \frac{u}{a} + C \qquad (u > a > o)$

11) $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{a} \text{Argtanh} \frac{u}{a} + C \qquad (u^2 < a^2)$

12) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \text{Argcoth} \frac{u}{a} + C \qquad (u^2 > a^2)$

ÇÖZÜLMÜŞ ÖRNEKLER

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1) $\int \text{Sinh}4x \, . \, dx = \frac{1}{4} \int \text{Sinh}4x \, d(4x) = \frac{1}{4} \text{Cosh}4x + C \qquad (4x = u)$

2) $\int \text{Cosh}^2 x \, . \, dx = \frac{1}{2} \int (\text{Cosh}2x + 1) \, dx = \frac{1}{4} \text{Sinh}2x + \frac{1}{2} x + C$

3) $\int \text{Tanh}^2 \frac{x}{2} \, . \, dx = \int (1 - \text{Sech}^2 \frac{x}{2}) \, dx = x - 2 \, \text{Tanh} \frac{x}{2} + C$

4) $\int \text{Sinh}^3 x. \, dx = \int \text{Sinh}^2 x \, . \, \text{Sinh}x \, . \, dx = \int (\text{Cosh}^2 x - 1) \, . \, d(\text{Cosh}x)$

$$= \frac{1}{3} \text{Cosh}^3 x - \text{Cosh}x + C \qquad (\text{Cosh}x = u)$$

5) $\int e^{2x} \text{Cosh}x. \, dx = \int e^{2x} \, . \, \frac{e^x + e^{-x}}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (e^{3x} + e^x) \, dx$

$$= \frac{1}{6} e^{3x} + \frac{1}{2} e^x + C$$

6) $\int x \, \text{Sinh}2x \, . \, dx = ?$

$u = x$, $dv = \text{Sinh}2x \, dx$ alınırsa $du = dx$, $v = \frac{1}{2} \text{Cosh}2x$ olur. Kısmi integral ile

$$\int x \, \text{Sinh}2x \, . \, dx = \frac{1}{2} x \, \text{Cosh}2x - \frac{1}{2} \int \text{Cosh}2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x \, \text{Cosh}2x - \frac{1}{4} \text{Sinh}2x + C$$

bulunur.

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 - 25}} = \frac{1}{2} \text{Argcosh} \frac{2x}{5} + C$

8) $\int \frac{dx}{-x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{9 - (x - 2)^2} = \frac{1}{3} \text{Argtan h} \frac{x - 2}{3} + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9) $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx = ?$

$x = 2\,\text{Sinh}t$ konursa $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4(\text{Sinh}^2 t + 1)} = 2\,\text{Cosh}t$
ve $dx = 2\,\text{Cosh}t\,.\,dt$ olur.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx = \int \frac{2\,\text{Cosh}t}{4\,\text{Sinh}^2 t}\,2\,\text{Cosh}t\,dt = \int \text{Coth}^2 t\,.\,dt$$

$$= \int (1 + \text{Cosech}^2 t)\,dt = t - \text{Coth}t + C$$

bulunur. $x = 2\,\text{Sinh}t$ den $t = \text{Argsinh}\frac{x}{2}$ ve

$$\text{Coth}t = \frac{\text{Cosh}t}{\text{Sinh}t} = \frac{\sqrt{\text{Sinh}^2 t + 1}}{\text{Sinh}t} = \frac{\sqrt{x^2/4 + 1}}{x/2} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$$

yazılır. Bu değerlerin integralde yerlerine konmasıyla

$$I = \text{Argsinh}\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + C$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki integralleri çözerek karşılarındaki integral fonksiyonlarını bulunuz.

1) $\int \text{Cosh}3x\,dx = \frac{1}{3}\text{Sinh}3x + C$

2) $\int \text{Sinh}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\text{Sinh}2x - \frac{1}{2}x + C$

3) $\int \text{Coth}\frac{3}{4}x\,dx = \frac{4}{3}\ln\left|\text{Sinh}\frac{3}{4}x\right| + C$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4) $\int \text{Tanh}^2 2x\,dx = x - \frac{1}{2}\text{Tanh}2x + C$

5) $\int \text{Sinh}^3 x \,.\, \text{Cosh}^2 x\,dx = \frac{1}{5}\text{Cosh}^5 x - \frac{1}{3}\text{Cosh}^3 x + C$

6) $\int x\,\text{Coshx}\,dx = x\,\text{Sinhx} - \text{Coshx} + C$

7) $\int x^2\,\text{Sinhx}\,dx = (x^2 + 2)\,\text{Coshx} - 2x\,\text{Sinhx} + C$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = \text{Argsinh}\frac{x}{2} + C$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}} = \frac{1}{2}\text{Argcosh}\frac{2x}{5} + C$

10) $\int \frac{dx}{9 - 4x^2} = \frac{1}{6}\text{Argtanh}\frac{2x}{3} + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \text{Argsinh}\frac{x+1}{2} + C$

12) $\int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 5} = -\frac{1}{4}\text{Argtanh}\,(x + \frac{3}{2}) + C$

13) $\int \sqrt{x^2 + 4}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\,\text{Argsinh}\frac{x}{2} + C$

14) $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^{3/2}}\,dx = \text{Argsinh}\frac{x}{2} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$

15) $\int 2x\,\text{Argtanhx}\,.\,dx = x^2\,\text{Argtanhx} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

7.19. BELİRSİZ İNTEGRAL UYGULAMALARI

I. Bir $y = f(x)$ eğrisinin $P(x ; y)$ noktasındaki eğimi $m = f'(x)$ idi. (Türevin geometrik anlamı). Karşıt olarak $P(x ; y)$ noktasındaki $m = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ eğimi verilen eğrilerin denklemi integral ile

$$y = \int f'(x) \, . \, dx = f(x) + C$$

şeklinde bulunabilir. Keyfi C sabitinden dolayı buna eğri ailesi denir. Bu aileden belirli bir eğriyi bulmak için C ye bir değer verilmesi veya bu eğriye ait verilen bir özellikten (örneğin eğrinin geçtiği bir noktanın verilmesiyle) C nin hesaplanması gerekir.

ÖRNEK 1: Herhangi bir $P(x ; y)$ noktasındaki eğimi $m = 4x - 5$ olan eğri ailesinin denklemini bulunuz. Bu aile içinde (2;0) noktasından geçen eğri hangisidir?

Çözümü: $m = \frac{dy}{dx} = 4x - 5$ olduğuna göre $dy = (4x - 5)\,dx$ dir. Buradan her iki yanın integralini alarak

$$y = \int (4x - 5)\,dx = 2x^2 - 5x + C$$

bulunur. Bu bir parabol ailesinin denklemidir. $x = 2$ ve $y = 0$ konursa $0 = 8 - 10 + C$ den $C = 2$ bulunur. Buna göre bu ailenin (2 ; 0) noktasından geçen eğrisinin denklemi $y = 2x^2 - 5x + 2$ dir.

ÖRNEK 2: Herhangi bir $(x ; y)$ noktasındaki eğimi $m = 4x^3y$ olan eğri ailesinin denklemini ve bu ailenin (0 ; 5) noktasından geçen eğrisinin denklemini bulunuz.

Çözümü: $m = \frac{dy}{dx} = 4x^3 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 4x^3\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 4x^3\,dx$

$$\ln|y| = x^4 + C = \ln e^{(x^4)} + \ln C_1 = \ln\left(C_1 e^{(x^4)}\right) \Rightarrow |y| = C_1 e^{(x^4)}$$

$y = \pm C_1 e^{(x^4)}$ bulunur. Bu çözüm daha basit olarak $y = k \, . \, e^{(x^4)}$ şeklinde yazılabilir. Bu eğri ailesinin denklemidir. $x = 0$, $y = 5$ için $5 = k \, . \, e^0 = k$ olduğundan istenen eğrinin denklemi $y = 5\,e^{(x^4)}$ olur.

ÖRNEK 3: Bir $y = f(x)$ eğrisi için $y'' = 6x + 2$ dir. Bu eğrinin $(1 ; -2)$ noktasındaki teğeti $y = 5x - 3$ doğrusuna paralel olduğuna göre eğri denklemini bulunuz.

Çözümü: $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = 6x + 2 \Rightarrow dy' = (6x + 2)\,dx$

$y' = \int (6x + 2)\,dx = 3x^2 + 2x + C_1$ dir. Eğrinin $(1 ; -2)$ deki eğimi $m = 5$ olduğundan $5 = 3 + 2 + C_1$ den $C_1 = 0$ bulunur. O halde

$$y' = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x \Rightarrow dy = (3x^2 + 2x)\,dx \Rightarrow y = \int (3x^2 + 2x)\,dx$$

$$y = x^3 + x^2 + C_2$$

dir. Eğri $(1 ; -2)$ noktasından geçtiğine göre $-2 = 1 + 1 + C_2$ den $C_2 = -4$ tür. Buradan istenen eğrinin denklemi

$$y = x^3 + x^2 - 4$$

bulunur.

II. Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin, bu doğru üzerindeki sabit bir noktadan (başlangıç noktası) t anındaki uzaklığı s ise $s = f(t)$ dir. bu cismin hızı v, ivmesi a ise

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \quad \text{ve} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$$

ile bellidir. Yani bir hareketli cisim için yolun zamana göre türevi hızı, hızın zamana göre türevi ivmeyi verir. Karşıt olarak bu formüllerden

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt \Rightarrow s = \int v\,dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a\,dt \Rightarrow v = \int a\,dt$$

elde edilir.

ÖRNEK 1: Bir gemi 6m/sn lik hızla gitmekte iken motoru stop ediliyor. Sürtünmeden dolayı hız, saniyede 0,5 m/sn azalıyor. Gemi, motor stop edildikten sonra hangi uzaklığa kadar gider?

Çözümü: $a = \frac{dv}{dt} = -0,5 \Rightarrow v = \int -0,5\,dt = -0,5t + C_1$

dir. $t = 0$ için $v = 6$ olduğundan $C_1 = 6$ bulunur. Buna göre hız denklemi

$$v = -0,5t + 6$$

dır. $v = \frac{ds}{dt} = -0,5t + 6 \Rightarrow s = \int (-0,5t + 6)\,dt = -0,25t^2 + 6t + C_2$

bulunur. $t = 0$ için $s = 0$ olduğundan buradan $C_2 = 0$ elde edilir. Buna göre yol denklemi

$$s = -0,25\,t^2 + 6t$$

dir. $v = 0$ olduğunda $-0,5t + 6 = 0 \Rightarrow t = 12$ sn dir. Yani gemi, motoru stop edildikten sonra 12 sn daha gider. Bu 12 sn içinde aldığı yol ise

$$s = -0,25 \cdot 144 + 6.12 = 36 \text{ m}$$

olur.

ÖRNEK 2: Yerden 2000 m. yükseklikte hareketsiz duran bir balondan bir taş 8 m/sn lik hızla aşağıya doğru atılıyor. Taşın 10 sn sonraki konumunu ve hızını bulunuz. (Yerden yukarıya doğru düşey doğrultuyu pozitif, yerçekimi ivmesini $-10 m/sn^2$ alınız ve havanın sürtünme etkisini yok sayınız.)

Çözümü: $v = \int a\,dt = \int -10\,dt = -10t + C_1$ dir

$t = 0$ için $v = -8$ (ilk hız) olduğundan $C_1 = -8$ dir. Hız denklemi $v = -10t - 8$ olur.

$$s = \int v \cdot dt = \int (-10t - 8)\,dt = -5t^2 - 8t + C_2$$

dir. $t = 0$ için $s = 2000$ olduğundan yol denklemi

$s = -5t^2 - 8t + 2000$ bulunur. $t = 10$ olduğunda

$s = -5 \cdot 10^2 - 8 \cdot 10 + 2000 = 1420$ ve $v = -10 \cdot 10 - 8 = -108$

dir. Yani fırlatıldıktan 10 sn sonra taş yerden 1420 m yükseklikte olup hızı aşağıya doğru 108 m/sn dir.

ÖRNEK 3: 10 m/sn lik hızla yükselmekte olan bir balondan, 600 m yükseklikte iken bir cisim bırakılıyor.

a) Cismin ulaştığı maksimum yüksekliği,

b) Havada kaldığı süreyi,

c) Yere düştüğü andaki hızını bulunuz.

Çözümü: $v = \int a \cdot dt = \int -10dt = -10t + C_1$

dir. $t = 0$ için, $v = 10$ (balonun hızı) olduğundan $C_1 = 10$ ve $v = -10t + 10$ olur.

$$s = \int v \cdot dt = \int (-10t + 10)\, dt = -5t^2 + 10t + C_2$$

dir. $t = 0$ için $s = 600$ olduğundan $C_2 = 600$ ve $s = -5t^2 + 10t + 600$ bulunur.

a) $v = 0$ için $-10t + 10 = 0 \Rightarrow t = 1$

dir. Yani cisim bırakıldıktan sonra 1 sn daha yükselmeye devam eder ve bu 1 sn sonunda ulaştığı maksimum yükseklik

$$s = -5 \cdot 1^2 + 10.1 + 600 = 605 \text{ m}$$

olur.

b) $s = 0$ için $-5t^2 + 10t + 600 = 0 \Rightarrow -5(t^2 - 2t - 120) = 0$
$\Rightarrow t = 12 \vee t = -10$

bulunur. Buna göre cisim havada 12 sn kalır.

c) $t = 12$ için $v = -10.12 + 10 = -110$

bulunur. Buna göre de cisim yere 110 m/sn lik hızla çarpar.

ANKARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1) Aşağıda eğimi verilen eğri ailelerinin ve bu ailelerin verilen noktadan geçen eğrilerinin denklemlerini bulunuz.

a) $m = 4x$; $(2 ; 1)$ $\qquad (y = 2x^2 + C$ ve $y = 2x^2 - 7)$

b) $m = -\frac{1}{x^2}$; $(1 ; 3)$ $\qquad \left(y = \frac{Cx + 1}{x} \text{ ve } y = \frac{2x + 1}{x}\right)$

c) $m = \frac{xy}{x^2 + 4}$; $(0 ; 2)$ $\qquad \left(y^2 = C(x^2 + 4) \text{ ve } y^2 = x^2 + 4\right)$

2) Bir $y = f(x)$ eğrisi için $y'' = 2$ dir. Bu eğri $(1 ; 0)$ noktasından $m = 5$ eğimi ile geçtiğine göre denklemini bulunuz.

$(y = x^2 + 3x - 4)$

3) Bir cisim $v_0 = 4$ ilk hızı ve $a = 6$ ivmesiyle bir doğru üzerinde hareket etmektedir. $t = 0$ anında hareketin başladağı noktayı başlangıç alarak yol - zaman denklemini bulunuz.

$(s = 3t^2 + 4t)$

4) $a = 2t - 2$ ivmesiyle ve $v_0 = 3$ ilk hızıyla hareket eden bir cismin hız denklemini ve $[0 , 3]$ zaman aralığında aldığı yolu bulunuz.

$(v = t^2 - 2t + 3 \ , \ s = 9)$

5) Düzgün bir zeminde 12 m/sn lik hızla fırlatılan bir bilyanın hızı sürtünmeden dolayı saniyede 2 m/sn azalıyor. Bilya hangi uzaklığa kadar yuvarlanır.

(36m)

6) Yerden 60 m. yükseklikten bir cisim 20 m/sn lik hızla düşey doğrultuda yukarıya doğru atılıyor.

a) Cismin ulaştığı maksimum yüksekliği,

b) Kaç saniye sonra yere düştüğünü,

c) Yere düştüğü andaki hızını bulunuz.

(Yerden yukarıya doğru düşey doğrultu pozitif yön ve yerçekimi ivmesi -10 m/sn^2 alınacak, havanın sürtünme etkisi dikkate alınmayacak)

[a) 180 m. b) 10 sn c) -60 m/sn]

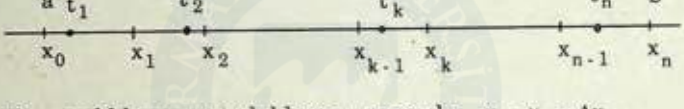
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

SEKİZİNCİ BÖLÜM

BELİRLİ İNTEGRAL

8.1. Tanım

$y = f(x)$, $[a, b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu aralığı $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olmak üzere $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}$ noktaları ile n tane alt aralığına bölelim.



Bu aralıkların uzunluklarını sırasıyla $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ... , $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ ile gösterelim. k(yıncı) alt aralık $[x_{k-1}, x_k]$ ve $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ olmak üzere

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k = f(t_1) \cdot \Delta x_1 + f(t_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots\ldots + f(t_n) \cdot \Delta x_n$$

toplamını oluşturalım. Şimdi alt aralıkların sayısını sonsuz sayıda artıralım. (Alt aralıkları her seferinde örneğin ikiye bölmekle ve bu işlemi sınırsız olarak devam ettirmekle bu yapılabilir.) [a, b] aralığını bölme kuralı ne olursa olsun ve alt aralıklara ait t_k noktalarını nasıl seçersek seçelim.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k = S$$

limiti varsa bu limite **f(x) fonksiyonunun [a , b] aralığında x = a dan x = b ye kadar belirli integrali** denir ve bu

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

şeklinde yazılır. a ve b ye integralin alt ve üst sınırları denir. Bu tanıma göre

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta x_k$$

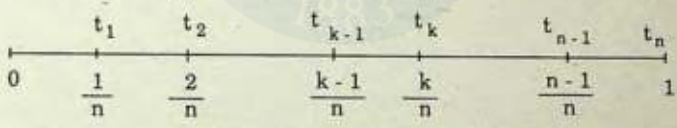
dır.

f fonksiyonu [a , b] aralığında sınırlı değilse bu aralıkta integrali alınamaz. f , [a, b] aralığında sınırlı olduğunda eğer bu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktası varsa integrali alınabilir, sonsuz sayıda süreksizlik noktası varsa integrali alınamaz.

ÖRNEK : $\int_0^1 x\,.\,dx = ?$

Çözümü: Burada $f(x) = x$, $x_0 = a = 0$ ve $x_n = b = 1$ dir. [0, 1] aralığını uzunluğu $\Delta x = \frac{1}{n}$ olan n eşit alt aralığa bölelim. t_k noktalarını değişik iki şekilde seçerek her ikisinde de aynı sonucun bulunacağını gösterelim.

A) İlk olarak t_k noktalarını alt aralıkların sağ uç noktalarında alalım. Yani $t_1 = \frac{1}{n}$, $t_2 = \frac{2}{n}$, ... , $t_n = \frac{n}{n} = 1$ olsun.



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \ldots\ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n}$$

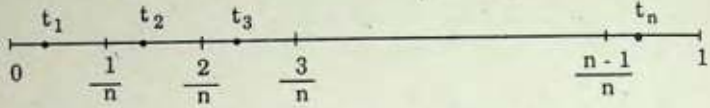
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{n}{n}\cdot\frac{1}{n} = \left[\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots\ldots + \frac{n}{n}\right]\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1 + 2 + \ldots\ldots + n}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\int_0^1 x\,.\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

bulunur.

B) Bu kez t_k noktalarını alt aralıkların sol uçlarından itibaren $\frac{1}{3}$ leri olan noktalarda alalım. $t_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}$, $t_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n}$, $t_3 = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{n}$, ... , $t_n = \frac{3n-2}{3}\cdot\frac{1}{n}$ olur.



$$S_n = f(t_1)\cdot\frac{1}{n} + f(t_2)\cdot\frac{1}{n} + f(t_3)\cdot\frac{1}{n} + \ldots\ldots + f(t_n)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n} + \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{3n-2}{3}\cdot\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1+4+7+\ldots\ldots+3n-2}{3n^2} = \frac{1}{3n^2}\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{1}{3n^2}\left(3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}2\right)$$

$$= \frac{1}{3n^2}\left(3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 2n\right) = \frac{1}{3n^2}\cdot\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n-1}{6n}$$

ve buradan

$$\int_0^1 x\,.\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{6n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6n}\right) = \frac{1}{2}$$

bulunur. t_k noktalarını alt aralıkların başka noktalarında da alsak sonuç değişmez.

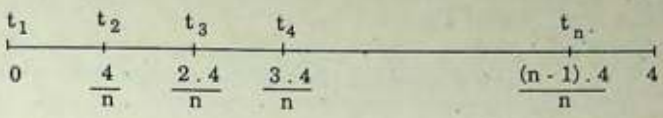
ÖRNEK : $\int_0^4 x^2\,.\,dx = ?$

Çözümü: $[0\,,\,4]$ aralığını uzunluğu $\Delta x = \frac{4}{n}$ olan n eşit aralığa bölelim ve t_k noktalarını alt aralıkların sol uç noktalarında alalım. Yani

$$t_1 = 0 \quad , \quad t_2 = \frac{4}{n} \quad , \quad t_3 = \frac{2\,.\,4}{n} \quad , \quad \ldots\ldots \quad , \quad t_n = \frac{(n-1)\,4}{n}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olsun.



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k = f(0).\frac{4}{n} + f\left(\frac{4}{n}\right).\frac{4}{n} + f\left(\frac{2.4}{n}\right).\frac{4}{n} + \ldots + f\left(\frac{(n-1)4}{n}\right)\frac{4}{n}$$

$$= \left[0^2 + \left(\frac{4}{n}\right)^2 + \left(\frac{2.4}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{(n-1).4}{n}\right)^2\right]\frac{4}{n} = \frac{4^2[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2]}{n^2} \cdot \frac{4}{n}$$

$$= \frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{64}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{32(2n^2 - 3n + 1)}{3n^2}$$

bulunur. Buradan da limite geçilerek

$$\int_0^4 x^2 . dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{32(2n^2 - 3n + 1)}{3n^2} = \frac{32}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{64}{3}$$

elde edilir.

8.2. BELİRLİ İNTEGRAL ÖZELLİKLERİ

f(x) ve g(x) fonksiyonları [a , b] aralığında integrallenebilen fonksiyonlar iseler aşağıdaki özellikler vardır.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ (c sabit)

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (a < c < b)$

Bu özellikler belirli integral tanımından yararlanılarak ispatlanabilir. Örnek olarak ilk ikisini ispatlayalım.

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ ın ispatı:

Burada integral aralığı $a - a = 0$ olduğundan $\Delta x = 0$ ve $S_n = 0$ dır. Buna göre (Belirli integral tanımından)

$$\int_a^a f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n = 0$$

bulunur.

2) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ in ispatı:

[a , b] aralığını n tane alt aralığa bölüp bu aralıklarda uygun t_k noktalarını alırsak

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c \cdot f(t_k) \cdot \Delta x_k = c \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$

olur. Buradan

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n = c \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k = c \int_a^b f(x)\,dx$$

bulunur.

8.3. ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

f (x) fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ise en az bir $x_0 \in [a , b]$ için $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)\,f(x_0)$ dır.

İspatı: $f(x)$ in $[a, b]$ aralığındaki en küçük değeri m, en büyük değeri M olsun. $\forall x \in [a, b]$ için $m \le f(x) \le M$ dir. $[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ noktalarıyla n tane alt aralığa ayırıp bu alt aralıklara ait herhangi t_k noktalarını $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ alalım. $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizlik

$$m \cdot \Delta x_k \le f(t_k) \cdot \Delta x_k \le M \cdot \Delta x_k$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizlik k nın $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ değerlerinin hepsi için yazılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{k=1}^{n} m \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M \cdot \Delta x_k$$

bulunur.

$$\sum_{k=1}^{n} m \cdot \Delta x_k = m \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = m(x_n - x_0) = m(b - a)$$

ve benzer şekilde

$$\sum_{k=1}^{n} M \cdot \Delta x_k = M(b - a)$$

olduğundan eşitsizlik

$$m(b - a) \le \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k \le M(b - a)$$

şeklini alır. Buradan $n \to \infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

olduğu düşünülerek

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x) \cdot dx \le M(b - a) \quad \text{veya} \quad m \le \frac{\int_a^b f(x) \cdot dx}{b - a} \le M$$

elde edilir. $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan m ile M arasındaki her değeri en az bir kez alır. Yani en az bir $x_0 \in [a, b]$ için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f(x_0) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

olur. Buradan da

$$\int_a^b f(x)\,.\,dx = (b-a)\,.\,f(x_0)$$

bulunur.

8.4. İNTEGRAL HESABIN I. TEMEL TEOREMİ

f fonksiyonu [a , b] aralığında sürekli ve bu aralıkta

$F(x) = \int_a^x f(t)\,.\,dt$ ise $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ dir.

İspatı: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow f(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \qquad \text{(3. özellik)}$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \qquad \text{(5. özellik)}$$

bulunur. Ortalama değer teoremine göre en az bir $x_0 \in (x, x+\Delta x)$ için

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta x\,.\,f(x_0)$$

yazılabilir. Buradan

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \Delta x\,.\,f(x_0)$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x_0)$$

bulunur. $\Delta x \to 0$ için $x_0 \to x$ olacağından

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{x_0 \to x} f(x_0) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

bulunur. Bu sonuca göre $F(x)$, $f(x)$ fonksiyonun bir belirsiz integralidir.

8.5. İNTEGRAL HESABIN 2. TEMEL TEOREMİ

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $F(x)$, $f(x)$ in bir ilkeli yani $F'(x) = f(x)$ ise

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

dır.

İspatı: $F'(x) = f(x)$ olduğundan I. temel teoremin sonucuna göre

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$$

yazılabilir. İntegralin üst sınırı $x = a$ alınırsa

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(a) + C = 0$$

dan $C = -F(a)$ bulunur. Buna göre

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$$

dır. İntegralin üst sınırı $x = b$ alınırsa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

bulunur. Bu sonuca göre $f(x)$ fonksiyonunun ilkel fonksiyonu olan $F(x)$ bulunabilirse bundan yararlanılarak belirli integrali kolayca hesaplanabilir.

Aşağıdaki belirli integraller 2. temel teoreme göre bulunmuştur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1: $\int_0^3 (x^2 - 2x + 3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \Big]_0^3 = (9 - 9 + 9) - (0) = 9$

ÖRNEK 2: $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} \Big]_{-2}^{-1} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{1}\right) - \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{-3}{2} + \frac{5}{8} = -\frac{7}{8}$$

ÖRNEK 3: $\int_8^1 \sqrt{3t+1}\,dt = \int_8^1 (3t+1)^{1/2}\,dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(3t+1)^{3/2} \Big]_8^1$

$$= \frac{2}{9}\sqrt{(3t+1)^3} \Big]_8^1 = \frac{2}{9}\left[\sqrt{4^3} - \sqrt{25^3}\right] = \frac{2}{9}(2^3 - 5^3) = -26$$

ÖRNEK 4: $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big]_{-1}^{3} = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

ÖRNEK 5: $\int_0^{\pi/2} \text{Sin } 2\theta \ \text{Sin } \theta\, d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [\text{Cos}(2\theta + \theta) - \text{Cos}(2\theta - \theta)]\, d\theta$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\text{Cos } 3\theta - \text{Cos}\theta)\, d\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\text{Sin } 3\theta - \text{Sin } \theta\right) \Big]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\text{Sin}\frac{3\pi}{2} - \text{Sin}\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\text{Sin } 0 - \text{Sin } 0\right)\right] = -\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - 0\right] = \frac{2}{3}$$

ÖRNEK 6: $\int_{-1}^{2} x\sqrt{x+2}\,dx = ?$

$\sqrt{x+2} = u$ konursa $x + 2 = u^2$, $x = u^2 - 2$ ve $dx = 2u\,du$ olur. $x = -1$ için $u = \sqrt{-1+2} = 1$ ve $x = 2$ için $u = \sqrt{2+2} = 2$ dir. Bu değerler yerlerine konursa

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I = \int_1^2 (u^2 - 2) \cdot u \cdot 2u\,du = \int_1^2 (2u^4 - 4u^2)\,du = \left(\frac{2}{5}u^5 - \frac{4}{3}u^3\right)\Big]_1^2$$

$$= \left(\frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{3}\right) = \frac{32}{15} + \frac{14}{15} = \frac{46}{15}$$

ÖRNEK 7: $\int_0^{\pi/3} \text{Cos}^2 x \cdot \text{Sin}\, x\,dx = -\int_0^{\pi/3} \text{Cos}^2 x \cdot d(\text{Cos}\, x)$

$$= -\frac{1}{3}\text{Cos}^3 x\Big]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{3}\left((\text{Cos}^3\frac{\pi}{3} - \text{Cos}^3 0\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{7}{24}$$

ÖRNEK 8: $\int_{\pi/6}^{\pi} \text{Sin}^2 x \cdot dx + \int_{\pi/6}^{\pi} \text{Cos}^2 x \cdot dx = \int_{\pi/6}^{\pi} (\text{Sin}^2 x + \text{Cos}^2 x) \cdot dx$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi} 1 \cdot dx = x\Big]_{\pi/6}^{\pi} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

ÖRNEK 9: $\int_0^4 |x - 1|\,dx = ?$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & , x-1 \geq 0 \text{ ise} \\ -(x-1) & , x-1 < 0 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} x-1 & , x \geq 1 \text{ ise} \\ -x+1 & , x < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre integral, 5. özellikten yararlanılarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\int_0^4 |x-1|\,dx = \int_0^1 |x-1|\,dx + \int_1^4 |x-1|\,dx = \int_0^1 (-x+1)\,dx + \int_1^4 (x-1)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} + x\right)\Big]_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big]_1^4 = \left[\left(-\frac{1}{2} + 1\right) - (0)\right] + \left[(8-4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\right] + \left[4 + \frac{1}{2}\right] = 5$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 10: $\int_{-\pi/6}^{\pi} |\text{Cos } x|\, dx = ?$

$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ise $\text{Cos } x \ge 0$ olduğundan $|\text{Cos}x| = \text{Cos } x$,

$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ ise $\text{Cos } x \le 0$ olduğundan $|\text{Cos}x| = -\text{Cos } x$

dir. Buna göre

$$\int_{-\pi/6}^{\pi} |\text{Cos}x|\, dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} |\text{Cos}x|\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\text{Cos}x|\, dx = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \text{Cos}x\, .\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\text{Cos}x\, dx$$

$$= \text{Sin } x \Big]_{-\pi/6}^{\pi/2} - \text{Sin } x \Big]_{\pi/2}^{\pi} = \left[\text{Sin}\frac{\pi}{2} - \text{Sin}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] - \left[\text{Sin}\,\pi - \text{Sin}\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] - [0 - 1] = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

ÖRNEK 11: $\int_{-1}^{2} \text{Sgn}(1 - x^2)\, .\, dx = ?$

x	-1		1	
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	0 $-$

Çizelgeye göre

$-1 < x < 1$ ise $\text{Sgn}(1 - x^2) = 1$

$1 < x < 2$ ise $\text{Sgn}(1 - x^2) = -1$

dir.

$$\int_{-1}^{2} \text{Sgn}(1 - x^2)\, .\, dx = \int_{-1}^{1} \text{Sgn}(1 - x^2)\, dx + \int_{1}^{2} \text{Sgn}(1 - x^2)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 1\, .\, dx + \int_{1}^{2} (-1)\, dx = x\Big]_{-1}^{1} - x\Big]_{1}^{2} = (1 + 1) - (2 - 1) = 2 - 1 = 1$$

ÖRNEK 12: $\int_{1}^{4} (x + [\![x - 1]\!])\, .\, dx = \int_{1}^{2} (x + 0)\, dx + \int_{2}^{3} (x + 1)\, dx + \int_{3}^{4} (x + 2)\, dx$

$$= \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big]_2^3 + \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big]_3^4 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{15}{2} - 4\right) + \left(16 - \frac{21}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2} = \frac{21}{2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 13: $\int_{-3}^{3} \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3}\text{Arctan}\frac{x}{3}\Big]_{-3}^{3} = \frac{1}{3}.[\text{Arctan}(1) - \text{Arctan}(-1)]$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{6}$$

ÖRNEK 14: $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \int_{-2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+1}} = \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|\Big]_{-2}^{1}$

$$= \ln|3+\sqrt{10}| - \ln|0+\sqrt{1}| = \ln(3+\sqrt{10})$$

ÖRNEK 15: $\int_0^1 x e^x dx = ?$

$u = x$, $dv = e^x . dx$ alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x - e^x\Big]_0^1 = (e-e) - (0-e^0)$$

$$= e^0 = 1$$

ÖRNEK 16: $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = ?$

$x = 2\,\text{Sin}\,t$ konursa $\sqrt{4-x^2} = 2\,\text{Cost}$ ve $dx = 2\,\text{Cost}\,dt$ olur.

$x = 1$ için $t = \frac{\pi}{6}$, $x = \sqrt{2}$ için $t = \frac{\pi}{4}$ tür.

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{2\,\text{Cost}\,dt}{4\,\text{Sin}^2 t . 2\,\text{Cost}} = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \text{Cosec}^2 t . dt = -\frac{1}{4}\text{Cot}\,t\Big]_{\pi/6}^{\pi/4}$$

$$I = -\frac{1}{4}\left(\text{Cot}\frac{\pi}{4} - \text{Cot}\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}(1-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

ÖRNEK 17: $F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t)\,dt$ olduğuna göre $F'(x) = ?$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: İntegralin 1. temel teoremine göre

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_1^x (t^2 - 2t)\,dt = x^2 - 2x$$

dir.

ÖRNEK 18: $F(x) = \int_0^{4x} \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{4}\,dt \Rightarrow F''(x) = ?$

Çözümü: $4x = u$ koyalım. Türevde zincir kuralına göre

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\int_0^u \operatorname{Sin}^2 \frac{t}{4}\,dt\right)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$= \left(\operatorname{Sin}^2 \frac{u}{4}\right)\cdot 4 = 4\operatorname{Sin}^2 x$$

bulunur. Buradan da $F''(x) = 8 \operatorname{Sin} x \cdot \operatorname{Cos} x = 4 \operatorname{Sin} 2x$ olur.

ÖRNEK 19: $f(x) = 3x^2 - 2$ fonksiyonunun $[0, 2]$ aralığındaki ortalama değerini ve bu değeri hangi x_0 noktasında aldığını bulunuz.

Çözümü: İntegralde ortalama değer teoremine göre en az bir $x_0 \in [0, 2]$ için

$$f(x_0) = \frac{\int_0^2 f(x)\,dx}{2 - 0} = \frac{\int_0^2 (3x^2 - 2)\,dx}{2}$$

dir. Buradan

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(x^3 - 2x)\Big]_0^2 = \frac{1}{2}[(8 - 4) - (0)] = 2$$

bulunur. Buna göre $f(x)$ in $[0, 2]$ aralığında ortalama değeri 2 dir. Ayrıca $f(x_0) = 3x_0^2 - 2 = 2$ den $x_0^2 = \frac{4}{3}$ ve $x_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ bulunur. $-\frac{2}{\sqrt{3}} \notin [0, 2]$ olduğundan $f(x)$ fonksiyonu $[0, 2]$ aralığındaki orta-

lama değerini $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ noktasında alır.

ÖRNEK 20: $f(x) = 4 - 3 \operatorname{Sin} x$ fonksiyonunun $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz.

Çözümü: $f(x_0) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 - 3 \operatorname{Sin} x)\, dx = \frac{1}{\pi} (4x + 3 \operatorname{Cos} x) \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{\pi}\left[(2\pi + 0) - (-2\pi + 0)\right] = \frac{1}{\pi} \cdot 4\pi = 4$

bulunur.

ÖRNEK 21: $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x}\, dx$ integralinin hangi değerler arasında olduğunu bulunuz. (Ortalama değer teoreminden yararlanınız)

Çözümü: $\forall x \in [0, \pi]$ için $0 \le \operatorname{Sin}^2 x \le 1$ olduğundan

$1 \le 1 + \operatorname{Sin}^2 x \le 2$ ve $1 \le \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x} \le \sqrt{2}$ dir. Buna göre fonksiyonun $[0, \pi]$ aralığındaki en küçük değeri $m = 1$, en büyük değeri $M = \sqrt{2}$ dir.

$$m(b - a) \le \int_a^b f(x) \cdot dx \le M(b - a)$$

formülüne göre

$$1(\pi - 0) \le \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x}\, dx \le \sqrt{2}(\pi - 0)$$

$$\pi \le \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \operatorname{Sin}^2 x}\, dx \le \sqrt{2}\,\pi$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aşağıdaki belirli integralleri bulunuz.

1) $\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x)\,.\,dx = 0$

2) $\int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{9}{2}$

3) $\int_{0}^{1} \frac{2x^2 + x}{x+1}\,dx = \ln 2$

4) $\int_{4}^{8} \sqrt{3x - 8}\,dx = \frac{112}{9}$

5) $\int_{4}^{5} x\sqrt{x^2 - 16}\,dx = 9$

6) $\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 1}}\,dx = \frac{4}{3}$

7) $\int_{0}^{3} (x - 2)\sqrt{x+1}\,dx = -\frac{8}{5}$

8) $\int_{1}^{6} \frac{x\,.\,dx}{\sqrt{x+3}} = \frac{20}{3}$

9) $\int_{0}^{\pi/4} \text{Cos}^2 2x\,.\,dx = \frac{\pi}{8}$

10) $\int_{0}^{\pi/3} \text{Sin}^2 \frac{x}{2}\,dx = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

11) $\int_{0}^{\pi/2} \text{Sin } 2x \text{ Cos } x\,.\,dx = \frac{2}{3}$

12) $\int_{0}^{\pi} \text{Cos}\frac{2x}{3}\,.\,\text{Cos}\frac{x}{3}\,dx = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

13) $\int_{0}^{\pi/3} \text{Cos}^2 x\,.\,\text{Sin } x\,.\,dx = \frac{7}{24}$

14) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \text{Cot } x\,.\,dx = \ln 2$

15) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1 - \text{Cos } 2x}{1 + \text{Cos } 2x}\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}$

16) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \text{Tan}^2 x\,.\,\text{Sec}^2 x\,.\,dx = \frac{26\sqrt{3}}{27}$

17) $\int_{0}^{3} (1 + |x - 2|)\,dx = \frac{11}{2}$

18) $\int_{0}^{3} (|x - 2| + |x - 1|)\,dx = 5$

19) $\int_{1}^{3} |x^2 - 4|\,dx = 4$

20) $\int_{0}^{2} x^2\,.\,\text{sgn}(x - 1)\,dx = 2$

21) $\int_{0}^{5} \text{sgn}(x^2 + 2x - 3)\,dx = 3$

22) $\int_{0}^{\pi} [\![\text{Cos } x]\!]\,\text{Cos } x\,.\,dx = 1$

23) $\int_{-3}^{1} [\![x + 1]\!]\,dx = -2$

24) $\int_{-1}^{1} e^{[\![x+1]\!]}\,.\,dx = e + 1$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

25) $\int_{-1}^{3} [\![x]\!]^{\operatorname{sgn} x} \, . \, dx = 2$

26) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1} \, . \, dx = \frac{15}{\ln 2}$

27) $\int_{1}^{e} \ln x \, . \, dx = 1$

28) $\int_{0}^{\pi} x \, . \, \operatorname{Cos} x \, . \, dx = -2$

29) $\int_{1}^{\ln 3} x \, . \, e^{x} \, . \, dx = \ln 27 - 3$

30) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{\pi}{4}$

31) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \frac{\pi}{6}$

32) $\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{4} \pi r^2$

33) $F(x) = \int_{-1}^{x} (t^2 - 2) \, dt \Rightarrow F'(x) = ?$ $\left[F'(x) = x^2 - 2 \right]$

34) $F(x) = \int_{0}^{x} \operatorname{Cos}^2 t \, . \, dt \Rightarrow F''(x) = ?$ $\left[F''(x) = \frac{d^2F}{dx^2} = -\operatorname{Sin} 2x \right]$

35) $F(x) = \int_{2}^{x^3} \sqrt{x^2 + 1} \, dx \Rightarrow F'(x) = ?$ $\left[F'(x) = 2x \sqrt{x^4 + 1} \right]$

36) $F(x) = \int_1^{\ln x} e^{x^2} dx \Rightarrow F'(e) = ?$ $[F'(e) = 1]$

37) $\int_3^9 \left[\frac{d}{dx}\left(\int_2^x \frac{dt}{t-1}\right)\right] dx = ?$ $[\ln 4]$

38) $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{0} \frac{dt}{t+4} = ?$ $\left[\frac{\sin x}{\cos x + 4}\right]$

39) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^2} e^{-t^2} dt = ?$ $\left[2xe^{-x^4} - \cos x \cdot e^{-\sin^2 x}\right]$

40) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x} \int_0^{x \cdot \frac{\pi}{2}} \frac{t}{t^2+1} dt = ?$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

41) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt = ?$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

42) Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında verilen aralıklardaki ortalama değerini ve bu değeri hangi noktada aldığını bulunuz.

a) $y = x^2 + 1$, $[1, 4]$

b) $y = \frac{1}{x+1}$, $[0, 1]$

c) $y = \sin x$, $[0, \frac{\pi}{2}]$

-(Cev: a) Ort. değ. = 8 , $x_0 = \sqrt{7}$ noktasında

b) Ort. değ. = ln2 , $x_0 = \frac{1}{\ln 2} - 1$ noktasında

c) Ort. değ. = $\frac{1}{\pi}$, $x_0 = \text{Arcsin}\frac{1}{\pi}$ noktasında)

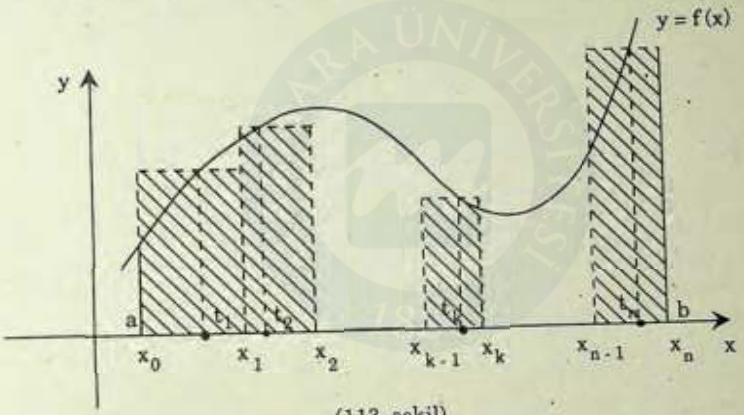
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

DOKUZUNCU BÖLÜM

BELİRLİ İNTEGRAL UYGULAMALARI

9.1. ALAN HESABI

A. Bir Eğri İle Sınırlanan Alan



(113. şekil)

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve pozitif olduğunu varsayalım. $[a, b]$ aralığını $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olmak üzere $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ noktaları ile n tane alt aralığa böldükten sonra $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots., n)$ olmak üzere t_k noktalarını işaretliyelim (113. şekil). $y = f(x)$ eğrisinin t_k noktalarına ait ordinatlarını çizerek bir kenar uzunluğu $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, diğeri $f(t_k)$ olan yaklaşım dikdörtgenlerini elde edelim. (Şekildeki taralı dikdörtgenler) Bu dikdörtgenlerin alanları toplamını S_n ile gösterelim.

$$S_n = f(t_1) \cdot \Delta x_1 + f(t_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots\ldots + f(t_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$

dır. Bu toplamın $n \to \infty$ için limitinin, $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı alana eşit olacağı açıktır. Bu alan S ise

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$

dır. Diğer taraftan

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

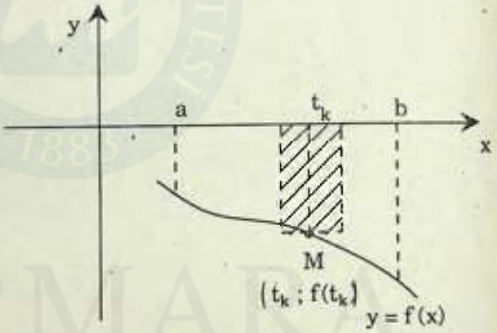
olduğunu biliyoruz. Buna göre $y = f(x)$ eğrisinin [a, b] aralığında x ekseniyle sınırladığı alan

$$S = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

dir.

UYARI I : $y = f(x)$ fonksiyonu [a , b] aralığında sürekli ve negatif ise (yani S alanı x ekseninin altında oluşuyorsa)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k$$



(114. şekil)

toplamındaki bütün $f(t_k)$ ordinatları negatif olacağından $n \to \infty$ için buradan bulunacak limit de $(-S)$ ye eşit olur. (114. şekil) Bu durumda

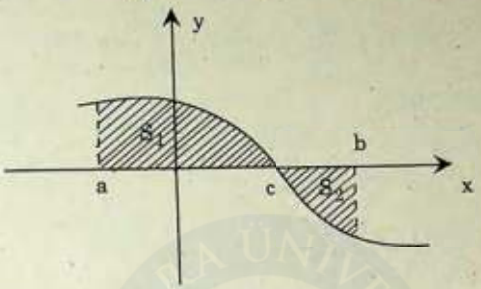
$$S = -\int_a^b f(x) \cdot dx$$

olur.

II: Eğri [a , b] aralığında bir $x = c$ noktasında x eksenini kesiyorsa (yani S alanının bir kısmı x ekseninin üstünde, diğer kısmı

altında oluşuyorsa) 115. şekildeki alan

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x) \, . \, dx - \int_c^b f(x) \, . \, dx$$

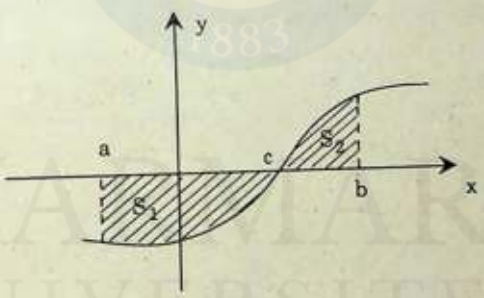


(115. şekil)

116. şekildeki alan

$$S = S_1 + S_2 = -\int_a^c f(x) \, . \, dx + \int_c^b f(x) \, . \, dx$$

dir.



(116. şekil)

Genel olarak [a , b] aralığında sürekli bir $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseniyle sınırladığı alan için (Bu alan x ekseninin ister aynı, ister değişik taraflarında olsun)

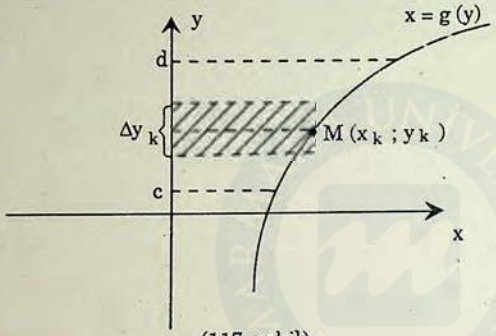
$$S = \int_a^b |f(x)| \, . \, dx = \int_a^b |y| \, . \, dx$$

yazılabilir.

III: $x = g(y)$ eğrisi $c \leq y \leq d$ aralığında sürekli ise bu eğrinin $y = c$, $y = d$ doğruları ve y ekseniyle sınırladığı alan bulunurken yaklaşım dikdörtgeni yatay olarak alınarak

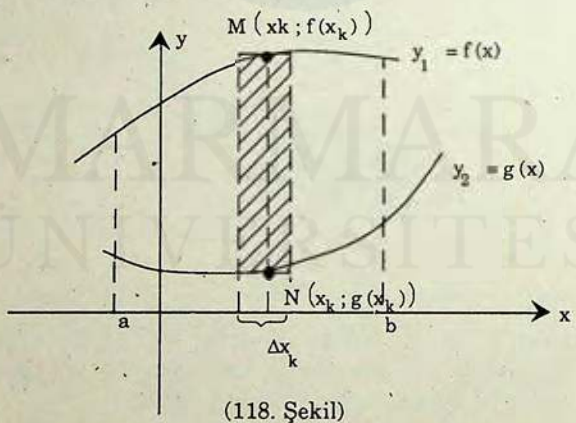
$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k| . \Delta y_k = \int_c^d |x| . dy$$

elde edilir. (117. şekil)



(117. şekil)

B. İki Eğri Arasındaki Alan



(118. Şekil)

$y = f(x)$ ve $y = g(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli iki fonksiyon olsunlar. Bunların eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğrularının sınırladığı alanı bulmak istiyoruz. Bir $x_k \in (a, b)$ noktasındaki yaklaşım dikdörtgeninin (118. şekildeki taralı dikdörtgen) bir kenarı Δx_k, diğer

kenarı $|f(x_k) - g(x_k)|$ uzunluğunda olup aradığımız alan

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - g(x_k)| \Delta x_k = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, . \, dx$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

veya kısaca

$$S = \int_a^b |y_1 - y_2| \, dx$$

formülü ile bulunur. Burada

1) Eğer $[a, b]$ aralığında $f(x) \geq g(x)$ ise

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx ,$$

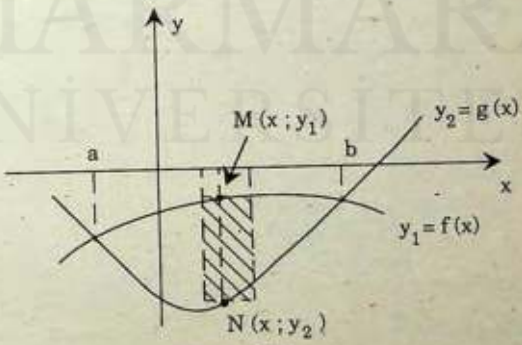
2) Eğer $[a, b]$ aralığında $f(x) \leq g(x)$ ise

$$S = - \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx$$

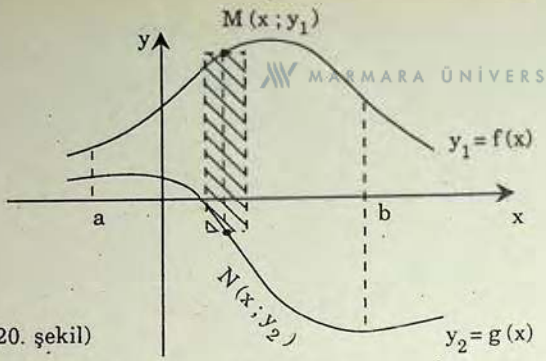
dir.

3) Eğer $[a, b]$ aralığında $f(x)$ ile $g(x)$ eğrileri kesişiyorlarsa S alanı iki veya daha fazla belirli integral toplamıyla bulunur.

UYARI: İki eğri arasındaki alanın bir kısmının (veya tamamının) x ekseninin altında olması halinde de formül değişmez. Çünkü bu durumlarda da yaklaşım dikdörtgeninin uzunluğu $|MN| = |y_1 - y_1|$ dir. (119 ve 120. şekiller)

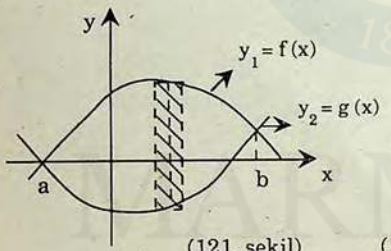


(119. şekil)



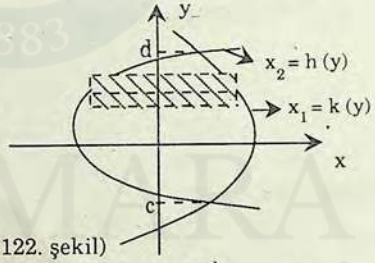
(120. şekil)

UYARI: İki eğri arasındaki alan bulunurken yaklaşım dikdörtgeni düşey olarak alınabildiği gibi bazan yatay olarak da alınabilir.Ancak hangi seçimde, yaklaşım dikdörtgeni, bulunacak alanı tarayacak şekilde kendine paralel kalarak hareket ettirildiğinde, M ve N noktaları daima değişik eğriler üzerinde kalıyorsa, sonucun daha kolay bulunması açısından o seçim tercih edilmelidir. Buna göre aşağıdaki 121. şekilde düşey, 122. şekilde yatay yaklaşım dikdörtgeninin alınması uygundur. 123. şekilde ise her ikisi de



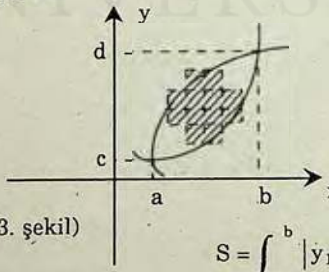
(121. şekil)

$$S = \int_a^b |y_1 - y_2| \, dx$$



(122. şekil)

$$S = \int_c^d |x_1 - x_2| \, dy$$



(123. şekil)

$$S = \int_a^b |y_1 - y_2| \, dx = \int_c^d |x_1 - x_2| \, dy$$

alınabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 1: $x - y + 2 = 0$ doğrusu, x ekseni, $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları ile sınırlanan alanı bulunuz.

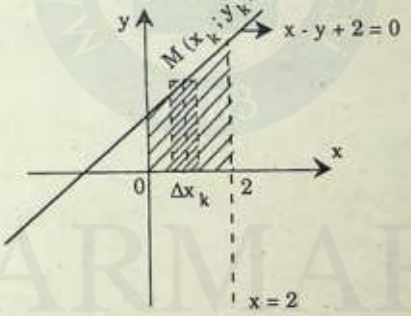
$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |y_k| . \Delta x_k$$

$$= \int_0^2 |y| \, dx$$

$$= \int_0^2 (x + 2) \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x \Big]_0^2 = (2 + 4) - (0) = 6 \text{ br}^2$$

Çözüm: Yaklaşım dikdörtgenini düşey olarak alalım (124. şekil).



(124. şekil)

bulunur.

ÖRNEK 2: $y = x^2 - 2x - 3$ eğrisi ile x ekseni arasındaki alanı bulunuz.

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |y_k| . \Delta x_k$$

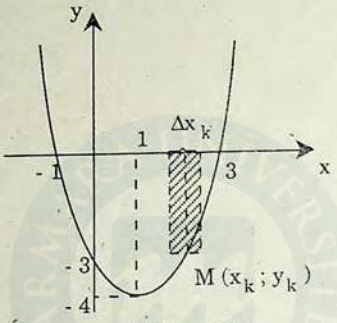
$$= \int_{-1}^{3} |y| \, dx = -\int_{-1}^{3} y . \, dx$$

$$= \int_{3}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \Big]_{3}^{-1}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - (9 - 9 - 9) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3}\ br^2$$

Çözüm: Eğri x eksenini $x = -1$ ve $x = 3$ de keser (125. şekil) bulunur.



(125. şekil)

ÖRNEK 3: $y = \text{Sin } 2x$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$, $y = 0$ ile sınırlı alanı bulunuz.

Çözüm: Eğri $[0, \frac{2\pi}{3}]$ aralığında x eksenini $x = \frac{\pi}{2}$ de kestiği için istenen alan iki parçalıdır. (Şekil 126)

$$S = \int_{0}^{2\pi/3} y\,dx = \int_{0}^{2\pi/3} \text{Sin } 2x\,dx$$

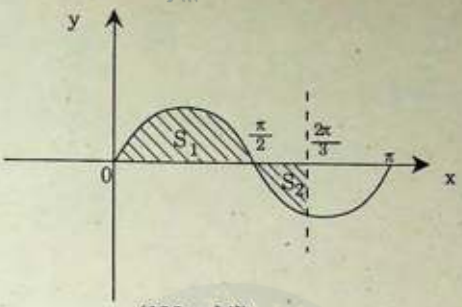
$$= \int_{0}^{\pi/2} \text{Sin } 2x\,dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \text{Sin } 2x\,dx$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \text{Sin } 2x\,.\,dx + \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-\text{Sin } 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\text{Cos } 2x\Big]_{0}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\text{Cos } 2x\Big]_{\pi/2}^{2\pi/3}$$

$$= -\frac{1}{2}(\text{Cos } \pi - \text{Cos } 0) + \frac{1}{2}(\text{Cos } \frac{4\pi}{3} - \text{Cos } \pi) = -\frac{1}{2}(-1 - 1) + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + 1) = \frac{5}{4}\ br^2$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(126. şekil)

ÖRNEK 4: $y = \text{Tan } x$, $x = 0$, $y = 1$ ile sınırlı alanı bulunuz.

Çözüm: İstenen alan y ekseniyle sınırlı olduğundan yaklaşım dikdörtgenini yatay olarak alalım. (127. Şekil).

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \Delta y_k$$

$$= \int_0^1 |x| \, dy = \int_0^1 \text{Arctany} \, dy$$

Buradan kısmi integral ile

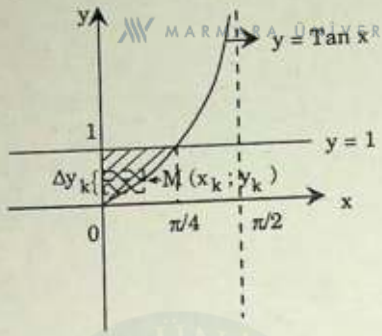
$$S = y \text{ Arctan } y \Big]_0^1 - \int_0^1 y \frac{1}{1+y^2} dy$$

$$= y \text{ Arctany} - \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) \Big]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(127. şekil)

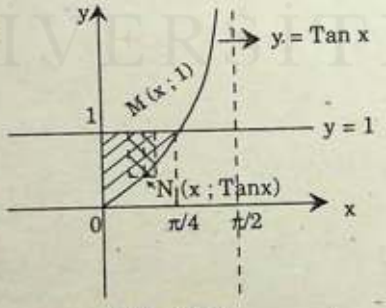
Not: Aynı alan, yaklaşım dikdörtgeni düşey alınarak (128. şekil)

$$S = \int_0^{\pi/4} |y_1 - y_2| \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} (1 - \operatorname{Tan} x) \, dx$$

$$= x + \ln |\operatorname{Cos} x| \Big]_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{4} + \ln \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (0) = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$$

şeklinde de bulunabilir.



(128. şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 5: $y = x^2 - 3x + 2$ ile $y = -x^2 + 2x$ eğrileri arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm: Önce denklemlerin ortak çözümü ile eğrilerin kesim noktalarının apsislerini bulalım. (129. şekil)

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 - 3x + 2 \\ y &= -x^2 + 2x \end{aligned}\right\}$$

$$x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 2x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

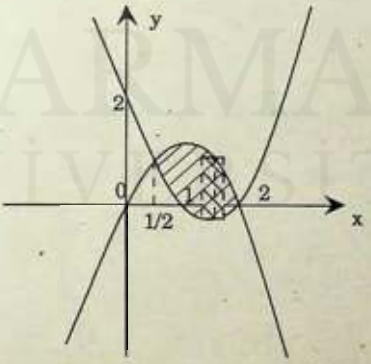
bulunur. Buna göre

$$S = \int_{1/2}^{2} |y_1 - y_2|\,dx = \int_{1/2}^{2} \left[(-x^2 + 2x) - (x^2 - 3x + 2)\right] dx = \int_{1/2}^{2} (-2x^2 + 5x - 2)\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x\Big]_{1/2}^{2} = \left(-\frac{16}{3} + 10 - 4\right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{5}{8} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{11}{24} = \frac{9}{8}\ br^2$$

bulunur.



(129. şekil)

ÖRNEK 6: $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $x = 1$ ile sınırlı alanı bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

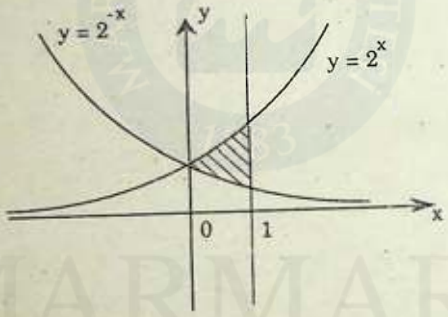
Çözüm: $S = \int_0^1 |y_1 - y_2| \, dx$

$$S = \int_0^1 (2^x - 2^{-x}) \, dx$$

$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[(2 + 2^{-1}) - (2^0 + 2^0)\right]$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\left[2 + \frac{1}{2} - 2\right] = \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{\ln 4}$$



(130. şekil)

ÖRNEK 7: $x^2 + y^2 = 16$ çemberi ile $y^2 = 12\,(x - 1)$ parabolü arasındaki alanı bulunuz.

Çözüm: $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 16 \\ y^2 = 12\,(x - 1) \end{array}\right\}$

ortak çözümünden

$$x^2 + 12\,(x - 1) = 16$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$x = 2 \ \vee \ x = -14$$

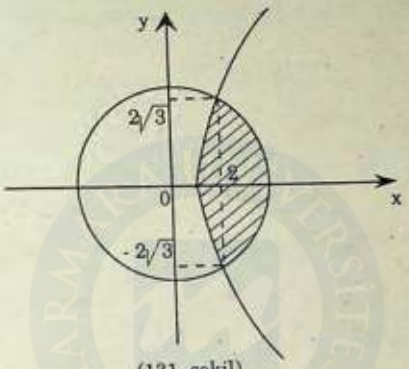
bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$x = 2$ için $y^2 = 12$ ve $y = \pm 2\sqrt{3}$

$x = -14$ için $y^2 = -180$ ve $y \notin R$

dir. Buna göre çemberle parabol $(2\,;2\sqrt{3})$ ve $(2;-2\sqrt{3})$ noktalarında kesişirler (131. şekil).



(131. şekil)

İstenen alanın x eksenine göre simetrik olduğu da gözönüne alınarak:

$$S = 2\int_0^{2\sqrt{3}} |x_1 - x_2| \, . \, dy = 2\int_0^{2\sqrt{3}} \left[\sqrt{16 - y^2} - \left(\frac{1}{12}y^2 + 1\right)\right] dy$$

$$= 2\left[\frac{y}{2}\sqrt{16 - y^2} + 8 \operatorname{Arcsin}\frac{y}{4} - \frac{1}{36}y^3 - y\right]_0^{2\sqrt{3}}$$

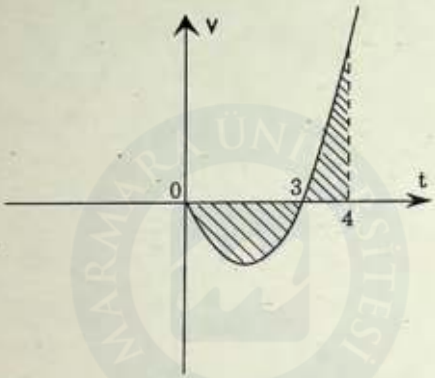
$$= 2\left[\left(\sqrt{3} \, . \, \sqrt{4} + 8 \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} - 2\sqrt{3}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{16\pi}{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$$

bulunur.

ÖRNEK 8: Hareketli bir cismin hız denklemi $v = t^2 - 3t$ dir. Cismin $[0, 4]$ zaman aralığında aldığı toplam yolu bulunuz.

Çözüm: Hız - zaman grafiği 132. şekilde çizilmiştir. Buna göre cismin hızı $(0, 3)$ zaman aralığında negatif, $(3, 4)$ zaman aralığında pozitiftir. Bu nedenle cisim $(0, 3)$ zaman aralığında negatif yönde (geriye doğru), $(3, 4)$ zaman aralığında pozitif yönde (ileriye doğru) gider.



(132. şekil)

Cismin aldığı toplam yol ise şekildeki taralı alanlar toplamı kadar olur. Buna göre

$$S = \int_0^4 |v| \, . \, dt = -\int_0^3 (t^2 - 3t) \, . \, dt + \int_3^4 (t^2 - 3t) \, dt$$

$$= -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg]_0^3 + \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg]_3^4$$

$$= -\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0) + \left(\frac{64}{3} - 24\right) - \left(9 - \frac{27}{2}\right) = \frac{19}{3}$$

bulunur.

ÖRNEK 9: Parametrik denklemi $x = t - Sint$ $y = 1 - Cost$ olan sikloidin ilk kemerinin x ekseni ile yaptığı alanı bulunuz.

Çözüm: t parametresi $[0 , 2\pi]$ aralığında değiştiği zaman eğrinin bir kemeri çizilmiş olur.

$t_1 = 0$ için $x_1 = 0$

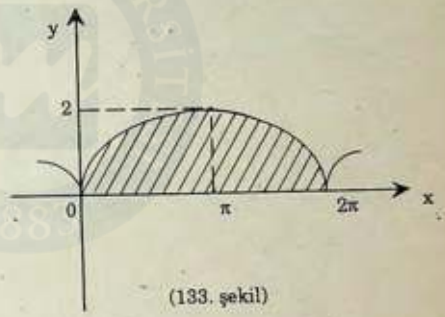
$t_2 = 2\pi$ için $x_2 = 2\pi$ dir.

$x' = 1 - Cost = 0 \Rightarrow Cost = 1 \Rightarrow t = 0 \vee t = 2\pi$

$y' = Sint = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = \pi \vee t = 2\pi$

bulunur. Buna göre fonksiyonunun değişim çizelgesi ve grafiği aşağıdadır.

t	0		π		2π
x'	0	+		+	0
y'	0	+	0	−	0
x	0	↗	π	↗	2π
y	0	↗	2	↘	0



(133. şekil)

İstenen alan:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y \, . \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - Cost)\,(1 - Cost)\,dt = \int_0^{2\pi} (1 - Cost)^2\,dt$$

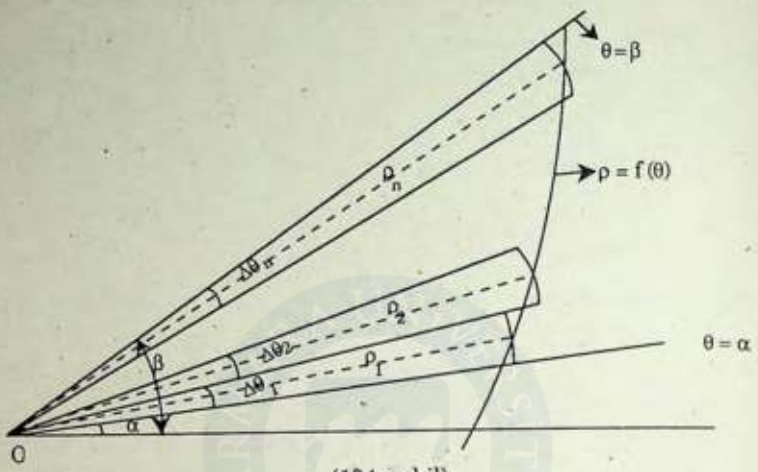
$$= \int_0^{2\pi} (1 - 2\,Cost + Cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\,Cost + \frac{1}{2}(1 + Cost\,2t)\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\,Cost + \frac{1}{2}\,Cost\,2t\right) dt = \frac{3}{2}t - 2\,Sin\,t + \frac{1}{4}\,Sin\,2t \Big]_0^{2\pi}$$

$$= (3\pi) - (0) = 3\pi$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(134. şekil)

$\rho = f(\theta)$ eğrisi ile $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ kutup ışınları arasındaki S alanını bulmak istiyoruz. Bu alan içinde 134. şekilde görüldüğü gibi O merkezli n tane daire kesmesi çizelim. Bu daire kesmelerinin alanları toplamı

$$S_n = \frac{1}{2}\rho_1^2 \cdot \Delta\theta_1 + \frac{1}{2}\rho_2^2 \cdot \Delta\theta_2 + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\rho_n^2 \cdot \Delta\theta_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\rho_k^2 \cdot \Delta\theta_k$$

dır. $n \to \infty$ için limite geçilerek

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho_k^2 \cdot \Delta\theta_k$$

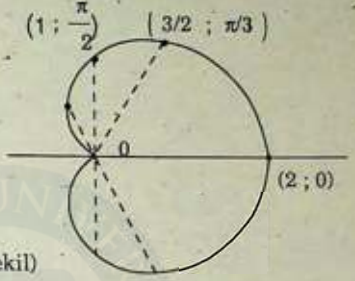
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \cdot d\theta$$

bulunur.

ÖRNEK : $\rho = 1 + \text{Cos}\,\theta$ kardioid eğrisinin alanını bulunuz.

Çözüm: Denklemde (θ) yerine $(-\theta)$ konduğunda değişiklik olmadığından grafik kutup eksenine göre simetriktir. Değişim çizelgesi ve grafik aşağıda verilmiştir.

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
ρ'		−	−	−	−
ρ	2	↘ 3/2	↘ 1	↘ 1/2	↘ 0



(135. şekil)

İstenen alan:

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\rho^2 \cdot d\theta = \int_0^{\pi} \rho^2 \cdot d\theta = \int_0^{\pi} (1 + \text{Cos}\,\theta)^2\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} (1 + 2\,\text{Cos}\,\theta + \text{Cos}^2\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\,\text{Cos}\,\theta + \frac{1}{2}\,\text{Cos}\,2\theta\right) d\theta$$

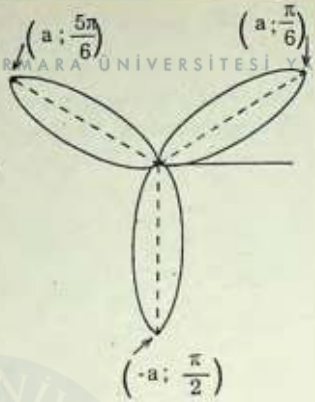
$$= \left(\frac{3}{2}\,\theta + 2\,\text{Sin}\,\theta + \frac{1}{4}\,\text{Sin}\,2\theta\right)\Bigg]_0^{\pi} = \left[\left(\frac{3\pi}{2}\right) - (0)\right] = \frac{3\pi}{2}$$

dir.

ÖRNEK : $\rho = a\,\text{Sin}\,3\theta$ eğrisinin sınırladığı alanı bulunuz.

Çözüm: Denklemde θ yerine $(\pi - \theta)$ konduğunda değişiklik olmadığından grafik $\theta = \frac{\pi}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. Değişim çizelgesi ve grafik aşağıda verilmiştir.

θ	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π
ρ'	+	0	−	−	0	+	+ 0 −
ρ	0 ↗	a	↘ 0	↘ -a	↗ 0	↗	a ↘ 0



(136. şekil)

İstenen alan:

$$S = 3\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\,\rho^2 \cdot d\theta = 3\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\,a^2 \operatorname{Sin}^2 3\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{3a^2}{4}\int_0^{\pi/3} (1 - \operatorname{Cos} 6\theta)\, d\theta = \frac{3a^2}{4}\left(\theta - \frac{1}{6}\operatorname{Sin} 6\theta\right)\Big]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{3a^2}{4} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi a^2}{4} \quad \text{tür.}$$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki eğrilerin sınırladığı alanları bulunuz.

1) $y = x^2 + 2x + 3$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 0$ $\left(\frac{7}{3}\right)$

2) $y = x^2 + 3x - 4$, $y = 0$ $\left(\frac{125}{6}\right)$

3) $y = -x^2 + 2x$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ $\left(\frac{8}{3}\right)$

4) $y = x(x - 1)(x - 2)$, $y = 0$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

5) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$, $y = 0$ $\left(\frac{71}{6}\right)$

6) $y = 2x^3 + 3x^2 + 2$, max. ve min. noktalarının ordinatları ve x ekseniyle sınırlı alan (2,5)

7) $y = 2 \operatorname{Cos} \frac{x}{2}$, $x = 0$, $y = 0$ arasındaki birinci dörttebirdeki alan (4)

8) $y = \operatorname{Sin}^2 x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

9) $y = 2 \operatorname{Sin} x + 1$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $y = 0$ $\left(4\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$

10) $y = \operatorname{Tan} x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ $(\ln 2)$

11) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$ (1)

12) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ $\left(e^2 - 3\right)$

13) $xy = 6$, $x = 1$, $x = e^2$ (12)

14) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ (12)

15) $y = x^2 + 2$, $y = 2x + 2$ $\left(\frac{4}{3}\right)$

16) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 8$ $\left(\frac{17}{4}\right)$

17) $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 6x$ $\left(\frac{64}{3}\right)$

18) $y = x^2 + 2x$, $y = 3$ $\left(\frac{32}{3}\right)$

19) $y = -x^2 + 4x - 3$, $y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ $\left(\frac{4}{3}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

20) $y = x(x-2)^2$, $y = x$ $\left(\frac{37}{12}\right)$

21) $y = \frac{1}{(2x+1)^2}$, $x = 1$, $x = 2$ $\left(\frac{1}{15}\right)$

22) $y = \sqrt{1-x}$, $x = 0$, $y = 0$ $\left(\frac{2}{3}\right)$

23) $y = \text{Sin } 2x$, $y = \text{Cos } 2x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ $\left(\sqrt{2}\right)$

24) $y = x^2$, $x = y^2$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

25) $y = x^3$, $y = x^2 + 2x$ $\left(\frac{37}{12}\right)$

26) $y^2 = 9x$, $y = 3x$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

27) $y^2 = 2x$, $x - y - 4 = 0$ (18)

28) $y = x^3$, $y = -x$, $x = -2$ (6)

29) $x = y^2$, $x = 18 - y^2$ (72)

30) $y = \frac{2}{x^2+1}$, $y = x^2$ $\left(\pi - \frac{2}{3}\right)$

31) $y = x^2(x^2 - 2)$, $y = 2x^2$ $\left(\frac{128}{15}\right)$

32) $x = 3y - y^2$, $x + y = 3$ $\left(\frac{4}{3}\right)$

33) $y = (x-1)^2$ eğrisi , $x = 4$ noktasındaki teğeti, x ekseni $\left(\frac{9}{4}\right)$

34) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4x$ $\left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)$

35) $y = x^3$, $x = 0$, $y = a$ ile sınırlı alanın $3\ br^2$ olması için a ne olmalıdır? $\left(2\sqrt{2}\right)$

36) $y^2 = x$ parabolü ile $x = 4$ doğrusunun sınırladığı alanın $x = b$ doğrusu tarafından iki eşit parçaya bölünmesi için b ne olmalıdır? $\left(\sqrt[3]{16}\right)$

Aşağıda parametrik veya kutupsal denklemleriyle verilen eğrilerin sınırladığı alanları bulunuz.

37) $x = t^2$, $y = 9t - t^3$ $\left(\frac{648}{5}\right)$

38) $x = a\ Cost$, $y = b\ Sint$ (πab)

39) $\rho = 2 + Cos\ \theta$ $\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

40) $\rho = a\ Cos\ 3\theta$ $\left(\frac{\pi a^2}{4}\right)$

41) $\rho = 2\ Sin\ 3\theta$ (π)

42) $\rho = a\theta$ Arşimet spiralinin bir devri ile elde edilen alan. $\left(\frac{4}{3}\pi^3 a^2\right)$

43) $\rho = a$ dairesinin dışında kalan, $\rho = 2a\ Cos\ 3\theta$ eğrisi ile sınırlı alan $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

9.3. DÖNEL CİSİMLERİN HACİMLERİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Düzlemsel bir alanın bir eksen etrafında dönmesiyle elde edilen cisme dönel cisim denir. Böyle bir cismin hacmini bulmak için iki yöntem göreceğiz.

A. DİSKLER YÖNTEMİ

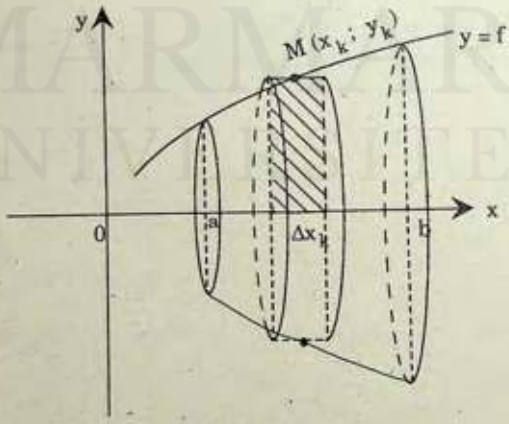
Bu yöntemde düzlemsel alan içinde dönme eksenine dik n tane yaklaşım dikdörtgeni alınır. Bu dikdörtgenlerin eksen ertafında dönmesiyle elde edilen disklerin hacimleri toplamının $n \to \infty$ için limiti aradığımız hacim olur.

1. [a, b] aralığında sürekli $y = f(x)$ eğrisi; $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı düzlem parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulalım. (137. şekil)

Alan içinde x eksenine dik olarak alacağımız yaklaşım dikdörtgenlerinden (k) ıncısı, eğrinin $M(x_k ; y_k)$ noktasından geçen taralı dikdörtgen olsun. Bu dikdörtgenin boyu y_k, eni Δx_k olduğundan x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen diskin (hacim elemanının) hacmi

$$\Delta v_k = \pi \cdot y_k^2 \cdot \Delta x_k$$

dır.



(137. şekil)

[a , b] aralığında tüm alan içinde alınacak n tane dikdörtgenin hepsinin dönmesiyle oluşan hacimler toplamı $\sum_{k=1}^{n} \pi . y_k^2 . \Delta x_k$ olur. Bunun $n \to \infty$ için limiti aradağımız v hacmi olup belirli integral tanımına göre

$$v = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \pi . y_k^2 . \Delta x_k = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx$$

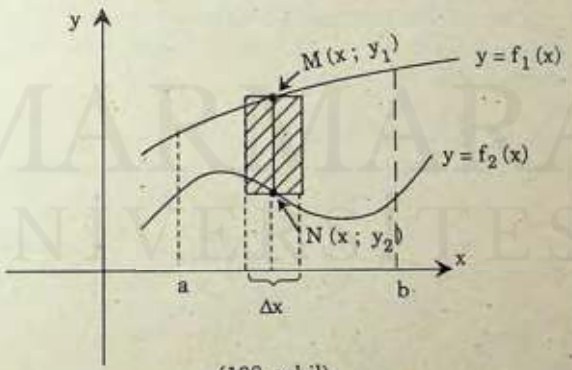
bulunur.

2. $x = g(y)$ eğrisi ; $y = c$, $y = d$ doğruları ve y ekseni ile sınırlı düzlem parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi bir öncekine benzer şekilde:

$$v = \int_c^d \pi x^2 \, dy = \int_c^d \pi [g(y)]^2 \, dy$$

bulunur.

3. [a, b] aralığında sürekli $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğrularının sınırladığı düzlem parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmini bulalım.



(138. şekil)

Şekil 138 de taralı yaklaşım dikdörtgeninin x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanının hacmi

$$\Delta v = \pi y_1^2 \cdot \Delta x - \pi y_2^2 \cdot \Delta x$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \pi \left(y_1^2 - y_2^2 \right) \Delta x$$

dir. n tane dikdörtgenin dönmesiyle elde edilen toplam hacim ise

$\sum_a^b \pi \left[y_1^2(x) - y_2^2(x) \right] \Delta x$ olup buradan aradağımız hacim

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \pi \left[y_1^2(x) - y_2^2(x) \right] \Delta x$$

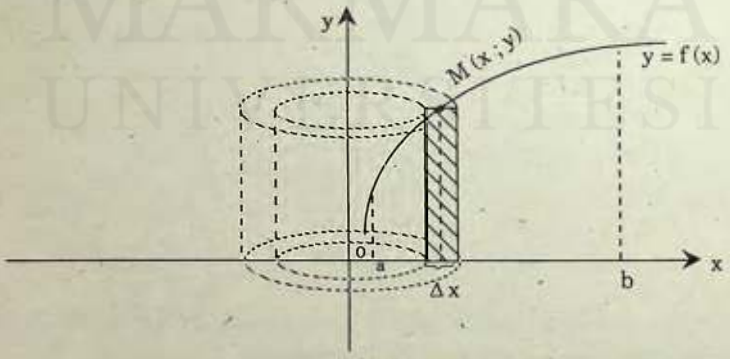
$$\int_a^b \pi \left[y_1^2(x) - y_2^2(x) \right] dx = \int_a^b \pi \left[(f_1(x))^2 - (f_2(x))^2 \right] dx$$

bulunur.

B. SİLİNDİRİK KABUKLAR YÖNTEMİ

Bu yöntemde düzlemsel alan içinde dönme eksenine paralel n tane yaklaşım dikdörtgeni alınır. Bu dikdörtgenlerin eksen etrafında dönmesiyle elde edilen içi boş silindirlerin (silindirik kabuklar) hacimleri toplamının $n \to \infty$ için limiti aradığımız hacmi verir.

1. [a, b] aralığında sürekli $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı alanın y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacmi bulalım. $0 \notin (a, b)$ olsun.



(139. Şeki)

139. şekilde taralı yaklaşım dikdörtgenini, eğrinin M (x , y) noktası kenarın ortasında olacak şekilde alalım. Bu dikdörtgenin y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen silindirik kabuğun iç taban yarıçapı $\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)$, dış taban yarıçapı $\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ olup hacmi

$$\Delta v = \pi \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)^2 y - \pi \left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)^2 y = 2\pi xy\,\Delta x$$

dir. (Burada x yaklaşım dikdörtgeninin dönme ekseninden olan ortalama uzaklığı, y dikdörtgenin boyu, Δx ise genişliğidir.) Tüm alan içinde alınacak n tane dikdörtgeninin dönmesiyle oluşacak hacimler toplamı $\sum_{a}^{b} 2\pi\, x\, y\, \Delta x$ olup buradan aradığımız hacim

$$v = \int_a^b 2\pi\, x\, y\, dx = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

bulunur.

2. $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$, $y = d$ doğruları ve y ekseniyle sınırlı alanın x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmi benzer şekilde

$$v = \int_c^d 2\pi\, yx\, dy = \int_c^d 2\pi y\, g(y)\, dy$$

dir. [$0 \notin (c , d)$].

3. $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğrularının sınırladığı düzlem parçasının $x = d$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacmi bulalım [$d \notin (a, b)$]. (Şekil 140)

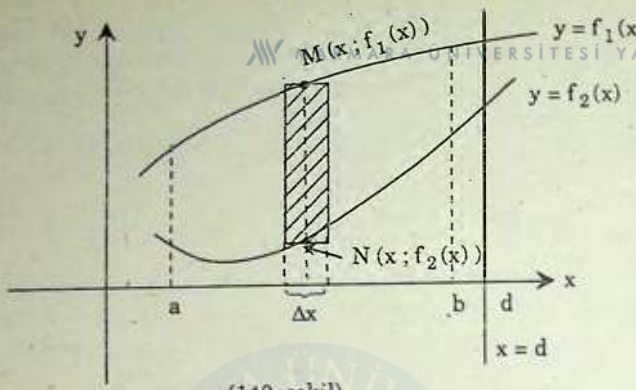
Yaklaşım dikdörtgeninin $x = d$ dönme eksenine olan ortalama uzaklığı $d - x$, boyu $f_1(x) - f_2(x)$, genişliği Δx olduğundan bunun eksen etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanının hacmi

$$\Delta v = 2\pi (d - x)\left[f_1(x) - f_2(x)\right]\Delta x$$

dir. Buradan aradığımız hacim

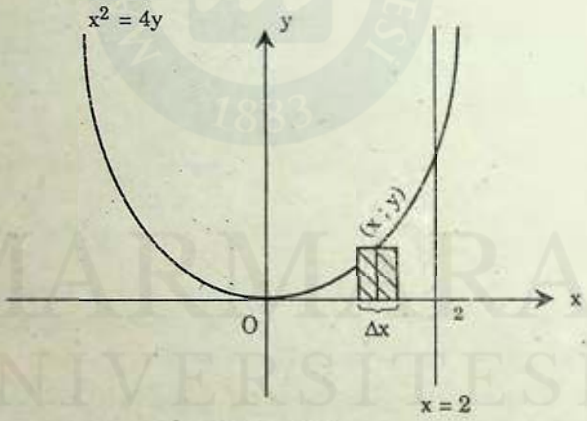
$$v = \int_a^b 2\pi (d - x)\left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx$$

formülü ile bulunur.



(140. şekil)

ÖRNEK 1 : $x^2 = 4y$ parabolü ile $x = 2$ ve $y = 0$ doğrularının sınırladığı düzlem parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.



(141. şekil)

ÇÖZÜM: 141. şekildeki taralı yaklaşım dikdörtgeninin x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elamanının hacmi

$$\Delta v = \pi y^2 . \Delta x$$

dir. Buna göre istenen hacim

$$v = \int_0^2 \pi y^2 . dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 dx = \frac{\pi}{80} x^5 \Big]_0^2 = \frac{2\pi}{5} \text{ birim}^3$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.

ÇÖZÜM: 142. şekildeki yaklaşım dikdörtgeninin boyu x , eni Δy olduğundan bunun y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanının hacmi

$$\Delta v = \pi x^2 \Delta y$$

dir. Buna göre istenen hacim

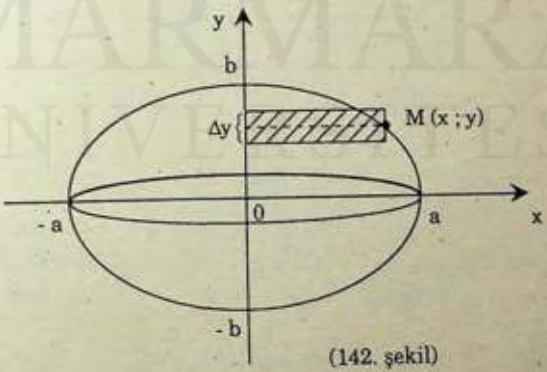
$$v = \int_{-b}^{b} \pi x^2 . dy$$

veya dönen düzlem parçasının x eksenine göre simetrik olduğu gözönüne alınarak

$$v = 2\int_{0}^{b} \pi x^2 . dy = 2\pi \frac{a^2}{b^2}\int_{0}^{b} (b^2 - y^2) . dy = \frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg]_0^b$$

$$v = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

bulunur.



(142. şekil)

ÖRNEK 3: $y = x^2$ eğrisi ile $y = x + 2$ doğrusunun sınırladığı düzlem parçasının;

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) x ekseni etrafında,

b) $y = 4$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacimleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

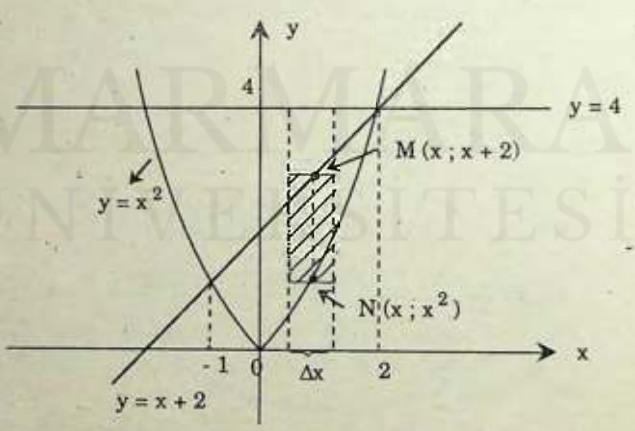
a) 143. şekilde verilen fonksiyonların grafikleri çizilmiştir. Taralı yaklaşım dikdörtgeninin x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanın hacmi

$$\Delta v = \pi (x+2)^2 \Delta x - \pi (x^2)^2 \Delta x = \pi \left[(x+2)^2 - x^4 \right] \Delta x$$

dir. Buna göre istenen hacim

$$v = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+2)^2 - x^4 \right] dx = \pi \left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{2} = \frac{72}{5} \pi \quad \text{birim}^3$$

bulunur.



(143. şekil)

b) 143. şekildeki yaklaşım dikdörtgeninin $y = 4$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmi:

$$\Delta v = \pi (4 - x^2)^2 \Delta x - \pi [4 - (x + 2)]^2 \Delta x = \pi \left[(4 - x^2)^2 - (2 - x)^2 \right] \Delta x$$

dir. Buna göre istenen hacim:

$$v = \pi \int_{-1}^{2} \left[(4 - x^2)^2 - (2 - x)^2 \right] dx$$

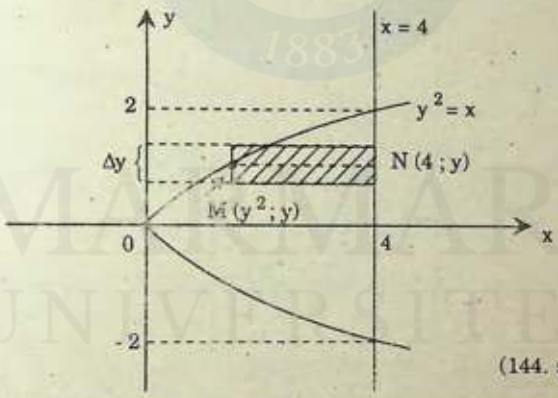
$$= \pi \int_{-1}^{2} (x^4 - 9x^2 + 4x + 12)\, dx = \frac{108}{5} \pi \quad \text{birim}^3$$

bulunur.

ÖRNEK 4: $y^2 = x$ parabolü ile $x = 4$ doğrusu arasındaki alanın $x = 4$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen cismin hacmini

a) Diskler yöntemiyle,

b) Silindirik kabuklar yöntemiyle bulunuz.



(144. şekil)

ÇÖZÜM: a) 144. şekilde $x = 4$ dönme eksenine dik olarak alınan yaklaşım dikdörtgeninin boyu $(4 - y^2)$, eni Δy olduğundan bunun eksen etrafında dönmesiyle elde edilen diskin hacmi

$$\Delta v = \pi (4 - y^2)^2 \cdot \Delta y$$

dir. Buna göre istenen hacim

$$v = \pi \int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 \, dy = 2\pi \int_{0}^{2} (4 - y^2)^2 \, dy = \frac{512}{15}\pi \quad \text{birim}^3$$

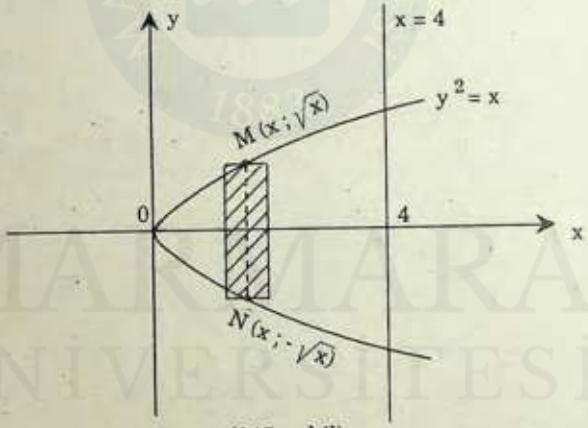
bulunur.

b) 145. şekilde $x = 4$ dönme eksenine paralel olarak alınan yaklaşım dikdörtgeninin dönme ekseninden ortalama uzaklığı $(4 - x)$, boyu $2\sqrt{x}$, eni Δx olduğundan bunun $x = 4$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen silindirik kabuğun hacmi $\Delta v = 2\pi (4 - x) \cdot 2\sqrt{x}\, \Delta x$ dir. Buna göre istenen hacim:

$$v = \int_{0}^{4} 2\pi \cdot (4 - x) \cdot 2\sqrt{x} \, dx$$

$$= 2\pi \int_{0}^{4} \left(8x^{1/2} - 2x^{3/2}\right) dx = \frac{512}{15}\pi \quad \text{birim}^3$$

bulunur.



(145. şekil)

ÖRNEK 5: $y = \text{Sin}x$ eğrisinin birinci kemerinin x ekseniyle sınırladığı alanın y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacmi bulunuz.

ÇÖZÜM: Silindirik kabuklar yöntemiyle bulalım. 146. şekildeki yaklaşım dikdörtgeninin eksenden ortalama uzaklığı x, boyu Sin x, eni Δx olduğundan bunun y ekseni etrafında dönmesiyle oluşan silindirik kabuğun hacmi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\Delta v = 2\pi x \cdot \text{Sin } x \cdot \Delta x$$

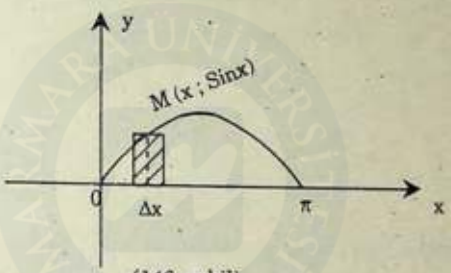
dir. O halde istenen hacim:

$$v = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \text{Sin } x \cdot dx$$

olur. Buradan $u = x$, $dv = \text{Sin } x \cdot dx$ alınarak kısmi integral ile

$$v = 2\pi \left(- x \text{ Cos } x + \text{Sin } x \right)\Big]_0^{\pi} = 2\pi^2 \quad \text{birim}^3$$

bulunur.



(146. şekil)

ÖRNEK 6: $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin $y = 2$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen halkanın hacmini bulunuz.

ÇÖZÜM: 147. şekilde $y = 2$ doğrusuna paralel olarak alınan yaklaşım dikdörtgeninin bu doğruya olan ortalama uzaklığı, $(2 - y)$, boyu $2\sqrt{1 - y^2}$, eni Δy olduğundan bu diktörtgenin $y = 2$ etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanının hacmi $\Delta v = 2\pi \cdot (2 - y)\, 2\sqrt{1 - y^2}\, \Delta y$ dir. Buna göre istenen hacim

$$v = 4\pi \int_{-1}^{1} (2 - y)\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

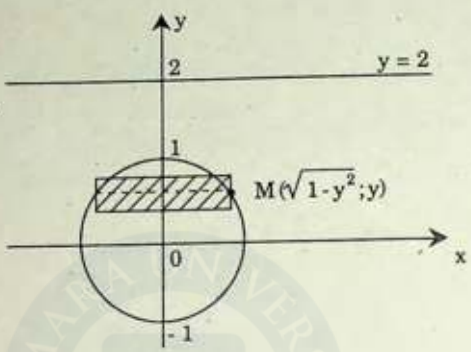
$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\, dy - 4\pi \int_{-1}^{1} y\sqrt{1 - y^2}\, dy$$

$$= 8\pi \left[\frac{y}{2}\sqrt{1 - y^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } y + \frac{4\pi}{3}\left(1 - y^2\right)^{3/2} \right]_{-1}^{1}$$

$v = 4\pi^2$ birim^3

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur.



(147. şekil)

ÖRNEK 7: $y = -x^2 + 4x$ ile $y = x^2 - 2x$ eğrilerinin sınırladığı düzlem parçasının $x = -1$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacmi bulunuz.

ÇÖZÜM: 148. şekildeki yaklaşım dikdörtgeninin $x = -1$ dönme ekseninden ortalama uzaklığı $(x + 1)$, uzunluğu $(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x) = -2x^2 + 6x$, genişliği Δx olup bunun $x = -1$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacim elemanının hacmi

$$\Delta v = 2\pi (x + 1)(-2x^2 + 6x)\,\Delta x$$

dir. Buna göre istenen hacim

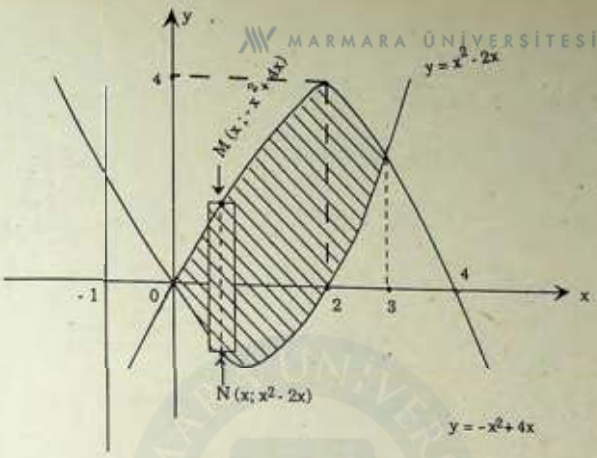
$$v = 2\pi \int_0^3 (x+1)(-2x^2 + 6x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 (-2x^3 + 4x^2 + 6x)\,dx$$

$$= 45\pi \text{ birim}^3$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(148. Şekil)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlı alanların yanlarında verilen eksenler etrafında dönmesiyle elde edilen hacimleri diskler yöntemiyle bulunuz.

1) $y = x(x - 2)$, $y = 0$; (x ekseni) $\left(\frac{16\pi}{15}\right)$

2) $-2x + y + 2 = 0$, $x = 0$, $y = 0$; (x ekseni) $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

3) $x^2 + y^2 = R^2$; (x ekseni) $\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$

4) $4x^2 + y^2 = 4$; (y ekseni) $\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

5) $y^2 = 2x + 1$, $x = 0$; (y ekseni) $\left(\frac{4\pi}{15}\right)$

6) $y = \text{Sin } 2x$ 'in bir yayı ; (x ekseni) $\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$

7) $y = \text{Cos } x - 1$; $x = 0$; $x = \pi$; (x ekseni) $\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)$

8) $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$; (x ekseni) $\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9) $y^2 = x$, $x^2 = y$; (x ekseni) $\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

10) $y^2 = 2x$, $y = x$; (x ekseni) $\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

11) $y^2 = 2x$, $y = x$; (y ekseni) $\left(\frac{16\pi}{3}\right)$

12) $y = (x-1)^2$, $y = x + 1$; (x ekseni) $\left(\frac{72\pi}{5}\right)$

13) $y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; (x ekseni) (4π)

14) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$; (x ekseni) $\frac{\pi}{2}(e^8 - 1)$

15) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; (x = 2 ekseni) $\left(\frac{16\pi}{5}\right)$

16) $y = x^3 - 2x^2 + x$; (x ekseni) $\left(\frac{\pi}{105}\right)$

17) $y = -x^2 + 3x$, $y = x$; (x ekseni) $\left(\frac{56\pi}{15}\right)$

18) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; (x ekseni) $\left(\frac{128\pi}{3}\right)$

19) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; (y ekseni) (16π)

20) $y = \text{Cos } x$, $y = \text{Sin } x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$; (x ekseni) (π)

21) $y = \text{Sin } x$ $(0 \le x \le \pi)$ eğrisinin $y = c$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen hacmin minimum olması için c ne olmalıdır? $\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlı alanların yanlarında verilen eksenler etrafında dönmesiyle elde edilen hacimleri silindirik kabuklar yöntemiyle bulunuz.

22) $y = x^2 + 2x$, $y = 0$; (y ekseni) $\left(\frac{8\pi}{3}\right)$

23) $y = \text{Cos } 2x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$; (y ekseni) $\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)$

24) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$; (y ekseni) $2\pi(3e^4 + 1)$

25) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$; (y ekseni) $\pi\left(\ln 16 - \frac{5}{2}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

26) $y = x^2$, $y = 4$;

a) x ekseni, $\left(\frac{256}{5}\pi\right)$

b) $y = 4$ doğrusu, $\left(\frac{512}{15}\pi\right)$

c) $y = -1$ doğrusu, $\left(\frac{1088}{15}\pi\right)$

d) $x = 2$ doğrusu, $\left(\frac{128}{3}\pi\right)$

27) $x = y^2$, $x = 4y - y^2$; (x ekseni) $\left(\frac{16\pi}{3}\right)$

28) $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x$; ($x = 4$ doğrusu) $\left(\frac{7\pi}{3}\right)$

29) $y = 2x^2$, $y = 2x + 4$; ($x = 2$ doğrusu) (27π)

30) $x^2 + y^2 = a^2$ $(b > a)$; ($x = b$ doğrusu) $(2\pi a^2 b)$

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlı alanların yanlarında verilen eksenler etrafında dönmesiyle elde edilen hacimleri iki yöntemle de bulunuz.

31) $y = 1 - x^2$, $y = 0$; (y ekseni) $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

32) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$; (x ekseni) $\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

33) $y = \frac{1}{12}x^2$, $y = 0$, $x = 4$; (y ekseni) $\left(\frac{32\pi}{3}\right)$

34) $y = x^2$, $y = x$; (x ve y ekseni) $\left(V_x = \frac{2\pi}{15}, V_y = \frac{\pi}{6}\right)$

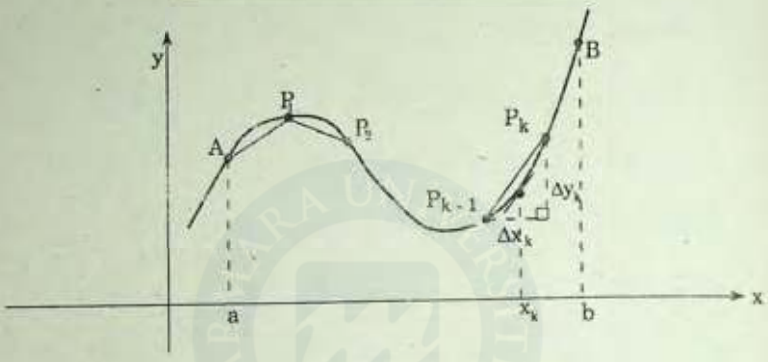
35) $y = x^2 - 1$, $x = 2$, $y = -1$; (y ekseni) (8π)

36) $y^2 = 3x$, $x^2 = 3y$; (x ekseni) $\left(\frac{81\pi}{10}\right)$

37) $y = x^m$, $y = x^n$ arasındaki 1. bölgedeki alanın y ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hacim. $(m < n)$ $\left[\frac{2(n-m)}{(m+2)(n+2)}\pi\right]$

9.4. EĞRİ UZUNLUĞU

Bir eğrinin A ve B gibi iki noktası arasındaki parçasının uzunluğunu bulmak için bu eğri parçası üzerinde ardışık $AP_1, P_1P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}B$ (n tane) kirişleri çizilir ve bu kirişlerin uzunlukları toplamının $n \to \infty$ için limiti alınır.



(149. Şekil)

I. $y = f(x)$ eğrisi üzerinde iki nokta A(a ; c) ve B(b ; d) olsun. $y = f(x)$ ile $y' = f'(x)$ fonksiyonları [a , b] aralığında sürekli olsunlar. AB eğri parçası üzerinde çizilen ardışık n kirişten (k) yıncı kirişin uzunluğu

$$|P_{k-1}P_k| = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{\Delta x_k^2\left[1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2\right]} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k$$

dır (Şekil 149.) Bütün kirişlerin toplam uzunluğu ise

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k$$

olur. $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = m_{(P_{k-1}P_k)}$ $\left(P_{k-1}P_k \text{ kirişinin eğimi}\right)$ dir. Türevde ortalama değer teoremine göre (Bkz. sayfa 161-162) $P_{k-1}P_k$ yayının en az bir x_k noktasındaki teğeti $P_{k-1}P_k$ kirişine paralel olacağından $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(x_k)$ dır. Buna göre

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\,\Delta x_k$$

yazılabilir. Bu toplamın $n \to \infty$ için limiti aradığımız L eğri parçası uzunluğunu vereceğinden

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

bulunur.

II. $x = g(y)$ eğrisinin iki noktası $A(a;c)$ ve $B(b;d)$ olsun. $g(y)$ ve $g'(y)$ fonksiyonları $c \le y \le d$ aralığında sürekli iseler bu durumda eğrinin AB parçasının uzunluğu

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

olur.

III. Eğri $x = g(t)$, $y = h(t)$ parametrik denklemiyle verilmiş olsun. $a \le t \le b$ aralığında bu fonksiyonlar ve türevleri sürekli iseler bu durumda eğrinin $A(g(a); h(a))$ ile $B(g(b); h(b))$ noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu veren formül

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

şeklini alır.

ÖRNEK 1: $y = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\right)^{3/2}$ eğrisinin $x = -1$ den $x = 5$'e kadar olan parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözümü : $y' = x\,(x^2 + 2)^{1/2}$ dir. y ve y' $-1 \le x \le 5$ aralığında süreklidirler.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{-1}^{5} \sqrt{1 + x^2\left(x^2 + 2\right)}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{5} \sqrt{\left(x^2 + 1\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{5} \left(x^2 + 1\right) dx = \frac{x^3}{3} + x \Big]_{-1}^{5} = 48 \text{ birim}$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $y^2 = 8x$ parabolünün $O(0;0)$ ile $A(2;4)$ noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü:

$x = \frac{y^2}{8}$ ve $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{4}$ tür

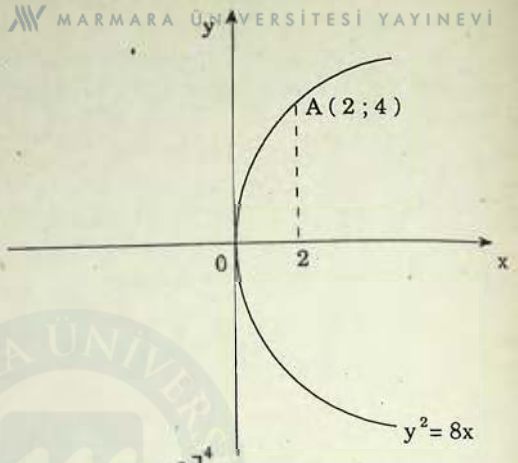
$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{y^2}{16}\right)}\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{y^2 + 16}\, dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2 + 16} + 8 \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 16}\right)\right]\Bigg|_0^4$$

$$= 2\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] \equiv 4{,}59 \text{ birim}$$



(150. Şekil)

bulunur.

ÖRNEK 3: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ eğrisinin $x = 1$ den $x = e$ ye kadar olan parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözümü: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx$$

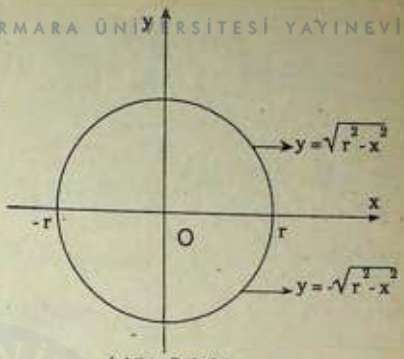
$$= \int_1^e \sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right) \text{ birim.}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 4: r yarıçaplı bir çemberin çevresini bulunuz.

Çözümü : Çemberin kartezyen denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ olup buradan $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ yazılır. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ üst yarının denklemidir.



(151. Şekil)

Buradan $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ olup çemberin çevre uzunluğu

$$L = 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 4r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$= 4r \operatorname{Arcsin}\frac{x}{r}\Big]_0^r = 4r\left(\operatorname{Arcsin} 1 - \operatorname{Arcsin} 0\right) = 2\pi r$$

bulunur. Aynı formülü bir de çemberin parametrik denkleminden yararlanarak bulalım.

$x = r\,\mathrm{Cost}$, $y = r\,\mathrm{Sint}$ den $\dfrac{dx}{dt} = -r\,\mathrm{Sint}$, $\dfrac{dy}{dt} = r\,\mathrm{Cost}$ dir.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\,\mathrm{Sin}^2 t + r^2\,\mathrm{Cos}^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$$

bulunur.

ÖRNEK 5: $x = \dfrac{1}{3}(2t + 5)^{3/2}$, $y = \dfrac{t^2}{2} + 2t$ eğrisinin $t = 0$ dan $t = 4$'e kadar olan parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözümü : $\dfrac{dx}{dt} = (2t + 5)^{1/2}$, $\dfrac{dy}{dt} = t + 2$ dir.

$$L = \int_0^4 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^4 \sqrt{(2t+5) + (t+2)^2}\, dt$$

$$= \int_0^4 \sqrt{t^2 + 6t + 9}\, dt = \int_0^4 (t+3)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + 3t\right)\Bigg]_0^4 = 20 \text{ birim}$$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki eğrilerin yanlarında belirtilen parçalarının uzunluklarını bulunuz.

1) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$; $x = 1$ den $x = 3$ e kadar $\left(\frac{14}{3}\right)$

2) $y = \sqrt{x^3}$; $x = 0$ dan $x = 5$ e kadar $\left(\frac{335}{27}\right)$

3) $y = \ln\left(1 - x^2\right)$; $x = 0$ dan $x = \frac{1}{2}$ ye kadar $\left(\ln 3 - \frac{1}{2}\right)$

4) $y = x^2 - \frac{1}{8}\ln x$; $x = 1$ den $x = e$ ye kadar $\left(e^2 - \frac{7}{8}\right)$

5) $y = \frac{1}{6}x^2$; $x = 0$ dan $x = 6$ ya kadar $\left(3\sqrt{5} + \frac{3}{2}\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right)$

6) $y = \ln\cos x$; $x = 0$ dan $x = \frac{\pi}{3}$ e kadar $\left[\ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right]$

7) $y^2 = (x-2)^3$; x eksenini kestiği noktadan $(6;8)$ e kadar $\left[\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)\right]$

8) $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$; $y = 1$ den $y = 2$ ye kadar $\left(\frac{123}{32}\right)$

9) $x = \frac{4\sqrt{2}}{3} y^{3/2} - 1$; $y = 0$ dan $y = 1$ e kadar $\left(\frac{13}{6}\right)$

10) $4y^3 = 9x^2$; $(0;0)$ dan $(2\sqrt{3};3)$ e kadar $\left(\frac{14}{3}\right)$

11) $y = \frac{1}{2}\left(e^x + x^{-x}\right)$; $x = 0$ dan $x = 1$ e kadar $\left(\frac{e^2-1}{2e}\right)$

12) $x = \frac{1}{2}t^2 + 2t$, $y = \frac{1}{3}(2t+5)^{3/2}$; $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar $\left(\frac{27}{2}\right)$

13) $x = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2}$, $y = \frac{t^2}{2}$; $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar (20)

14) $x = \text{Cost}$, $y = t + \text{Sint}$; $t = 0$ dan $t = \pi$ ye kadar (4)

15) $x = \text{Cost} + t\,\text{Sint}$, $y = \text{Sint} - t\,\text{Cost}$; $t = 0$dan $t = \frac{\pi}{2}$ ye kadar $\left(\frac{\pi^2}{8}\right)$

16) $x = a\,\text{Cos}^3\theta$, $y = a\,\text{Sin}^3\theta$; $\theta = 0$ dan $\theta = \pi$ ye kadar (3a)

17) $x = a(\theta - \text{Sin}\theta)$, $y = a(1 - \text{Cos}\theta)$; $\theta = 0$ dan $\theta = 2\pi$ ye kadar (8a)

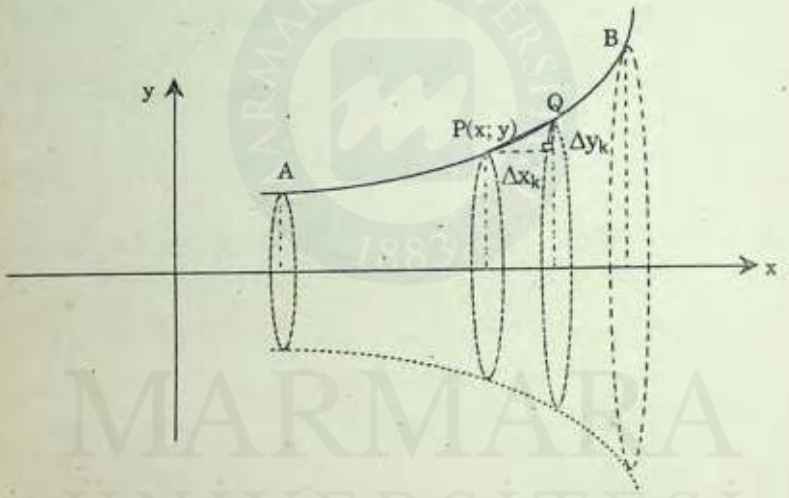
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9.5. DÖNEL YÜZEYLERİN ALANLARI

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Sürekli bir eğrinin AB parçasının, bu eğri düzlemindeki bir eksen etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulmak için bu eğri parçası üzerinde $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B$ olmak üzere n tane kiriş çizilir. Bu kirişlerin eksen etrafında dönmesiyle oluşan alanlar toplamının $n \to \infty$ için limiti alınır.

I. $y = f(x)$ eğrisi üzerinde A (a : c) ve B (b : d) noktalarını alalım. $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonlarının $a \le x \le b$ aralığında sürekli olduklarını ve aynı aralıkta $f(x)$ in işaret değiştirmediğini varsayalım. AB eğri parçası üzerinde çizilen n kirişten k (yıncı) kiriş $P(x ; y)$ den geçen [PQ] kirişi olsun. (Şekil 152)



(152. Şekil)

$$|PQ| = \Delta L_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\ \Delta x_k$$

dır. Bu kirişin x ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel kesik koninin yan alanı

$$\Delta S_k = \pi\left[y + (y + \Delta y_k)\right]\Delta L_k = 2\pi\left(y + \frac{\Delta y_k}{2}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\,\Delta x_k$$

dır. f (x) sürekli olduğundan [PQ] kirişinin bulunduğu (k) yıncı aralıktaki en az bir x_k noktasında $f(x_k) = y + \frac{\Delta y_k}{2}$ olur. Ortalama değer teoremine göre de (Bkz. sayfa 161) aynı aralıktaki en az bir x'_k noktasında $f'(x'_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$ dır. Buna göre

$$\Delta S_k = 2\pi f(x_k)\sqrt{1 + \left[f'(x'_k)\right]^2}\,\Delta x_k$$

yazılır. n tane kirişin x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen alanlar toplamı

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x_k)\sqrt{1 + \left[f'(x'_k)\right]^2}\,\Delta x_k$$

olur. Bu toplamın $n \to \infty$ için limiti AB eğri parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen dönel cismin alanını verir. buradan

$$S_x = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

bulunur. Bu formül, [a, b] aralığında $\frac{dy}{dx} \neq 0$ olmak koşuluyla

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y.\,dL = \int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

olarak da kullanılabilir.

II. $x = g(y)$ eğrisinin iki noktası A (a; c) ve B (b;d) olsun. g (y) ve g' (y) fonksiyonları $c \le y \le d$ aralığında sürekli iseler ve g (y) bu aralıkta işaret değiştirmiyorsa AB eğri parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanı

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x.\, dL = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

veya $g'(y) = \frac{dx}{dy} \neq 0$ olmak koşuluyla

$$S_y = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ile bulunabilir.

III. Eğri $x = g(t)$, $y = h(t)$ parametrik denklemiyle verilmiş olsun. Bir $a \leq t \leq b$ aralığında süreklilik ve işaret değiştirmeme koşullarının sağlanması halinde, bu eğrinin A (g (a); h (a)), B (g (b); h (b)) noktaları arasındaki parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanı

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y.\, dL = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanı ise

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x.\, dL = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

formülleri ile bulunur.

ÖRNEK. I $y^2 = 2x$ parabölünün $x = 0$ dan $x = \frac{3}{2}$ ye kadar olan parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

Çözümü:

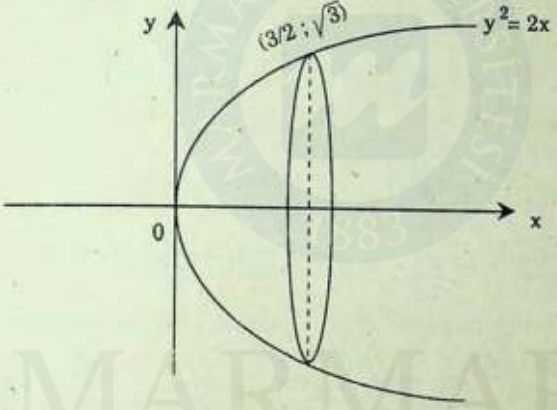
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) $S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ formülü ile çözelim. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ dir.

$$S_x = 2\pi \int_a^{3/2} y\sqrt{1 + 1/y^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_a^{3/2} \sqrt{y^2 + 1}\, dx = 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2x + 1}\, dx = \frac{2\pi}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^{3/2} = \frac{14\pi}{3}$$

birim kare bulunur.



(153. Şekil)

b) $S_x = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ formülü ile çözümü:

$$S_x = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y\sqrt{1 + y^2}\, dy = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (1 + y^2)^{1/2}\, d(1 + y^2)$$

$$= \frac{2\pi}{3}(1 + y^2)^{3/2}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{14\pi}{3} \text{ birim kare}$$

ÖRNEK 2. $x^2 - 4y = 2\ln x$ eğrisinin $x = 1$ den $x = 3$ e kadar olan parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

Çözümü

$$S_y = 2\pi \int_1^3 x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \text{ formülü ile çözelim.}$$

$x^2 - 4y = 2\ln x$ den türev alınarak $2x - 4\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x}$

veya $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{2x}$ bulunur

$$S_y = 2\pi \int_1^3 x\sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_1^3 x\sqrt{\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)^2}\, dx$$

$$= \pi \int_1^3 (x^2 + 1)\, dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big]_1^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ birim kare}$$

ÖRNEK 3. $x = t + 1$, $y = \dfrac{1}{2}t^2 + t$ parametrik denklemiyle verilen eğrinin $t = 0$ dan $t = 6$ ya kadar olan parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

Çözümü. $\dfrac{dx}{dt} = 1$ ve $\dfrac{dy}{dt} = t + 1$ dir.

$$S_y = 2\pi \int_0^6 x\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 2\pi \int_0^6 (t + 1)\sqrt{1 + (t + 1)^2}\, dt$$

$$= \pi \int_0^6 (2t + 2)\sqrt{t^2 + 2t + 2}\, dt = \frac{2\pi}{3}(t^2 + 2t + 2)^{3/2}\Big]_0^6$$

$$= \frac{2\pi}{3}(250\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = \frac{496\sqrt{2}}{3}\pi \text{ birim kare}$$

ÖRNEK 4. $x = 2\,Cost - Cos2t$, $y = 2\,Sint - Sin2t$ eğrisinin $t = 0$ dan $t = \pi$ ye kadar olan parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü:

$$\frac{dx}{dt} = -2Sint + 2Sin2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2Cost - 2Cos2t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 8 - 8\,(Cos2t\,Cost + Sin2t\,Sint) = 8 - 8\,Cost$$

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (2\,Sint - Sin2t)\sqrt{8\,(1 - Cost)}\, dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} 2\,Sint\,(1 - Cost)\,2\sqrt{2}\,(1 - Cost))^{1/2}\, dt$$

$$= 8\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} Sint\,(1 - Cost)^{3/2}\, dt$$

$$= \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi\,(1 - Cost)^{5/2}\Big]_0^{\pi} = \frac{128\,\pi}{5}\ \text{birim kare}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen eğri parçalarının belirtilen eksenler etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeylerin alanlarını bulunuz.

1) $y = x^3$ eğrisinin $x = 0$ dan $x = 1$ e kadar olan parçası; x ekseni etrafında. $\left[S_x = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)\right]$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2) $y = \sqrt{x}$; x = 0 dan x = 2 ye kadar; x ekseni. $\left(S_x = \frac{13\pi}{3}\right)$

3) $y = x^2$; (0;0) dan (2;4) e kadar; y ekseni $\left[S_y = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)\right]$

4) $y = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\right)^{3/2}$; x = 0 dan x = 3 e kadar; y ekseni $\left(S_y = \frac{99\pi}{2}\right)$

5) $18y^2 = x(6 - x)^2$; x = 0 dan x = 6 ya kadar; x ekseni $(S_x = 18\pi)$

6) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$; x = 1 den x = 2 ye kadar; y ekseni $\left(S_y = \frac{32\pi}{3}\right)$

7) $8y^2 = x^2 - x^4$; (0; 0) dan (1; 0) a kadar; x ekseni. $\left(S_x = \frac{\pi}{4}\right)$

8) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$; x = 1 den x = 3 e kadar; y = - 1 doğrusu $\left(S = \frac{1823}{18}\pi\right)$

9) $x^2 + 4y^2 = 16$; x ekseni $\left[S_x = 8\pi\left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\right)\right]$

10) $y = \ln x$; x = 1 den x = 7 ye kadar; y ekseni $S_y = \left[34\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})\right]\pi$

11) Kürenin alan formülünü integralle bulunuz $(S = 4\pi r^2)$

12) $x = \text{Sin}^2 t$, $y = \text{Cos}^2 t$; t = 0 dan $t = \frac{\pi}{2}$ ye kadar; x ekseni $(S_x = \pi\sqrt{2})$

13) x = 1 + Sint, y = Cost ; t = 0 dan $t = 2\pi$ ye kadar; y ekseni $\left(S_y = 4\pi^2\right)$

14) $y = a\,\text{Cos}^3 t$, $y = a\,\text{Sin}^3 t$; t = 0 dan $t = \pi$ ye kadar; x ekseni $\left(S_x = \frac{12\pi a^2}{5}\right)$

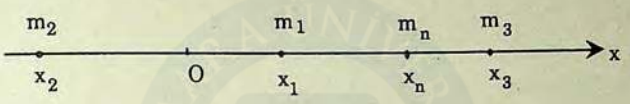
15) $x = e^t \text{Cost}$, $y = e^t \text{Sint}$; t = 0 dan $t = \frac{\pi}{2}$ ye kadar; x ekseni $\left[S_x = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(2e^{\pi} + 1)\right]$

9.6. MOMENTLER VE KÜTLE MERKEZİ

Bir cismin tüm kütlesinin, bu kütle içindeki kütle merkezi denilen bir noktada toplanmış olarak düşünülmesi kolaylık sağlar. Homojen bir cisimde kütle merkezi, bu cismin geometrik merkezi ile aynıdır.

Bir cismin bir nokta, doğru veya düzleme göre momenti, o cismin o nokta, doğru veya düzlemden olan yönlü uzaklığı ile kütlesinin çarpımına eşittir.

I. Birtakım $m_1, m_2, ..., m_n$ kütlelerinin bir eksen üzerinde sıra ile apsisleri $x_1, x_2, ..., x_n$ olan noktalarda yerleştirildiğini varsayalım.



(154. Şekil)

bu kütlelerin 0 başlangıç noktasına göre momentleri toplamı

$$M_o = x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_n m_n = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k$$

olur. Sistemdeki toplam kütle

$$M = m_1 + m_2 + ... + m_n = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

dır. Bu kütlenin tümünün apsisi $\bar{x}$ olan noktada toplandığını varsayarsak, tüm kütlenin 0 noktasına göre momenti $\bar{x}.M$ olur. Bu moment ile yukarıda bulduğumuz momentler toplamı eşit olacağından

$$\bar{x}.M = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k \qquad \text{dan} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

bulunur. $\bar{x}$ apsisine sistemin kütle merkezi (veya ağırlık merkezi) denir.

Şimdi bir eksen üzerine yeleştirilmiş AB çubuğunun, 0 başlangıcına göre momentini hesaplayalım.



(155. Şekil)

Çubuk uçlarının apsisleri A(a), B(b) olsun. Çubuğu A dan itibaren n tane küçük parçaya ayıralım. Bu parçaların kütle merkezlerinin apsisleri $\tilde{x}_k$, kütleleri Δm_k (k = 1, 2, ..., n) ise 0 ya göre momentleri $\tilde{x}_k . \Delta m_k$ olur. Buradan AB çubuğunun 0 ya göre toplam momenti

$$M_o = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \cdot \Delta m_k$$

dır. Bu toplamın $n \to \infty$ için limitiniden

$$M_o = \int x \, . \, dm$$

bulunur. Diğer taraftan AB çubuğunun kütle merkezinin apsisi $\bar{x}$, toplam kütlesi M ise $M_0 = \bar{x} \, . \, M$ olup $M_o = \bar{x} \, . \, M = \int x \, . \, dm$ den

$$\bar{x} = \frac{M_o}{M} = \frac{\int x \, dm}{\int dm}$$

bulunur. Çubuğun uzunlukça yoğunluğu δ ise $dm = \delta . dx$ dir. Buna göre

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta dx}{\int_a^b \delta dx}$$

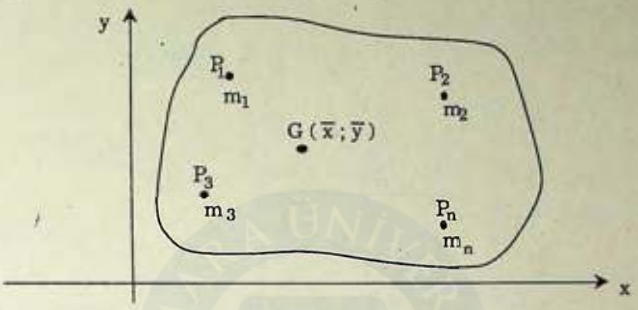
olur. Eğer çubuk homojen bir maddeden yapılmışsa δ sabit olacağından

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x dx}{\int_a^b dx} = \frac{a + b}{2}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

II. Şimdi $m_1, m_2, ..., m_n$ kütlelerinin bir xoy düzleminde $P_1(x_1, ; y_1), P_2(x_2; y_2), ..., P_n(x_n; y_n)$ noktalarına yerleştirildiğini varsayalım.



(156. Şekil)

Bu kütlelerin x ve y eksenlerine göre momentleri toplamı

$$M_x = y_1 m_1 + y_2 m_2 + ... + y_n m_n = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k$$

$$M_y = x_1 m_1 + x_2 m_2 + ... + x_n m_n = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k$$

olur. Sistemin kütle merkezi $G(\bar{x} ; \bar{y})$, toplam kütle M ise

$$\bar{y}.M = M_x = \sum_{k=1}^{n} y_k m_k$$

$$\bar{x}.M = M_y = \sum_{k=1}^{n} x_k m_k$$

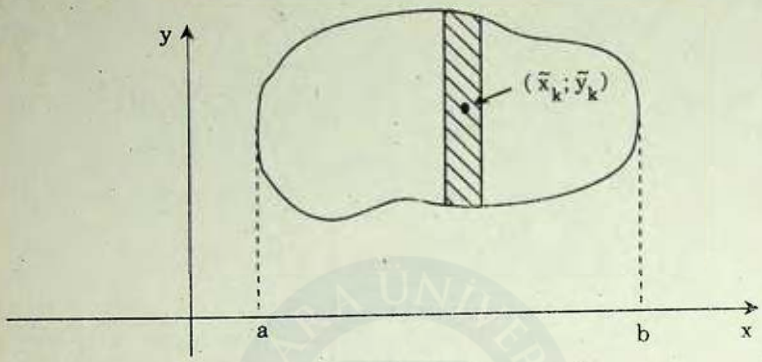
formüllerinden

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$ bulunur

Şimdi de bir eğriyle sınırlı düzlemsel bir cismin (Levhanın) kütle merkezini bulalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(157. Şekil)

Şekil 157 deki düzlemsel cismin düşey şeritlerle n parçaya ayrıldığını varsayalım. Bu parçaların kütle merkezleri $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$, kütleleri Δm_k $(k = 1, 2, ..., n)$ ise x ve y eksenlerine göre momentleri sırasıyla $\tilde{y}_k \cdot \Delta m_k$ ve $\tilde{x}_k \cdot \Delta m_k$ olur. Tüm düzlemsel cismin eksenlere göre momentleri ise

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} \tilde{y}_k \Delta m_k \qquad \text{ve} \qquad M_y = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \Delta m_k$$

bulunur. Bu toplamların $n \to \infty$ için limitinden

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm \qquad \text{ve} \qquad M_y = \int \tilde{x}\, dm$$

yazılır. Bu integrallerdeki $\tilde{x}$ ve $\tilde{y}$, dm kütle elemanının kütle merkezinin koordinatları olarak düşünülür.

Tüm düzlemsel cismin kütle merkezi $(\bar{x}; \bar{y})$ ise

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunur. Düzlemsel cismin alanca yoğunluğu δ ise burada dm = δ.ds (ds alan elemanı) alınır.

III. Şimdi de $m_1, m_2, ..., m_n$ kütlelerinin uzayda koordinatları $(x_1 ; y_1 ; z_1), (x_2 ; y_2 ; z_2), ..., (x_n ; y_n ; z_n)$ olan noktalara yerleştirildiğini varsayalım. Bu kütlelerin xy, xz, yz düzlemlerine göre toplam momentleri

$$M_{xy} = z_1m_1 + z_2m_2 + ... + z_nm_n = \sum_{k=1}^{n} z_km_k$$

$$M_{xz} = y_1m_1 + y_2m_2 + ... + y_nm_n = \sum_{k=1}^{n} y_km_k$$

$$M_{yz} = x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n = \sum_{k=1}^{n} x_km_k$$

dır. Sistemin kütle merkezi $(\bar{x} ; \bar{y} ; \bar{z})$, toplam kütlesi M ise

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\sum x_km_k}{\sum m_k}$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\sum y_km_k}{\sum m_k}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\sum z_km_k}{\sum m_k}$$

olur.

Uzayda bir cismin n tane küçük parçacığa bölündüğünü varsayalım. Bu parçacıkların kütleleri Δm_k, kütle merkezleri $(\tilde{x}_k ; \tilde{y}_k ; \tilde{z}_k)$ $(k = 1, 2, .., n)$ ise tüm cismin koordinat düzlemlerine göre momentleri

$$M_{xy} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{z}_k \Delta m_k$$

$$M_{xz} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{y}_k \Delta m_k$$

$$M_{yz} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k \Delta m_k$$

olup bu toplamların $n \to \infty$ için limitlerinden

$$M_{xy} = \int \tilde{z}.\, dm$$

$$M_{xz} = \int \tilde{y}.\, dm$$

$$M_{yz} = \int \tilde{x}.\, dm$$

bulunur. Buradaki $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ cismin dm kütle elemanının kütle merkezinin koordinatları olarak alınır. Tüm cismin kütle merkezi ($\bar{x}$; $\bar{y}$; $\bar{z}$) ise

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm}$$

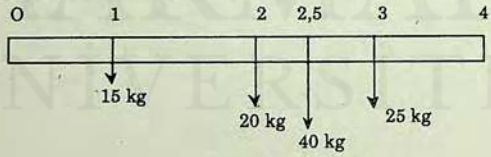
$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\int \tilde{z}\, dm}{\int dm}$$

bulunur. Bu formüllerde, cismin hacimce yoğunluğu δ ise $dm = \delta . dv$ (dv hacim elemanı) alınır.

ÖRNEK I. Uzunluğu 4m, yoğunluğu 5 kg/m olan homojen bir çelik borunun bir uçtan itibaren 1 m ; 2,5 m ve 3m uzaklıktaki noktalarına sırasıyla 15 kg, 40 kg ve 25 kg lık kütleler asılıyor. Bu boru hangi noktasından asılmalı ki dengede kalsın.

Çözümü: Borunun ölçüm yapılan ucunu başlangıç olarak alalım.



(158. Şekil)

Borunun kütle merkezi orta noktası, kütlesi de 4.5 = 20 kg olacağından sistemin başlangıç noktasına göre toplam momenti

$M_0 = 1.15 + 2.20 + 2{,}5.40 + 3.25 = 230$ kg.m.

dir. Toplam kütle ise

$M = 15 + 20 + 40 + 25 = 100$ kg

olup kütle merkezinin apsisi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\bar{x} = \frac{M_o}{M} = \frac{230}{100} = 2{,}3 \text{ m}$$

bulunur. Buna göre borunun dengede kalması için başlangıçtan 2,3 m uzaklıktan asılması gerekir.

ÖRNEK 2. 6 m uzunluğunda düzgün bir metal çubuk bir eksen üzerine, bir ucu başlangıç noktasına gelecek şekilde yerleştiriliyor. Çubuğun uzunlukça yoğunluğu $\delta(x) = (1 + x)$ kg/m olduğuna göre kütle merkezini bulunuz.

Çözümü : Çubuğun başlangıç noktasına göre momenti

$$M_o = \int_0^6 x\delta dx = \int_0^6 x(1+x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big]_0^6 = 18 + 72 = 90 \text{ kg.m}$$

kütlesi :

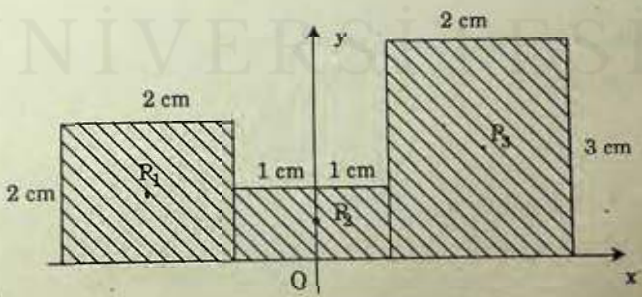
$$M = \int_0^6 \delta dx = \int_0^6 (1+x)\,dx = x + \frac{x^2}{2}\Big]_0^6 = 6 + 18 = 24 \text{ kg.}$$

kütle merkezinin apsisi

$$\bar{x} = \frac{M_o}{M} = \frac{90}{24} = 3{,}75 \text{ m}$$

bulunur.

ÖRNEK. 3. Alanca yoğunluğu 5 gr/cm^2 olan homojen bir maddeden yapılmış şekil 159 daki sistemin eksenlere göre momentlerini ve kütle merkezini bulunuz.



(159. Şekil)

Çözümü: Sistemi şekildeki gibi dikdörtgenlere ayıralım. Bu dikdörtgenlerin kütle merkezleri $P_1(-2;1)$, $P_2(0;1/2)$, $P_3(2;3/2)$; kütleleri ise

$m_1 = s_1 . \delta = (2.2).5 = 20$ gr.

$m_2 = s_2 . \delta = (2.1).5 = 10$ gr

$m_3 = s_3 . \delta = (2.3).5 = 30$ gr.

olup sistemin eksenlere göre momentleri

$$M_x = \sum_{k=1}^{3} y_k m_k = 1.20 + \frac{1}{2} . 10 + \frac{3}{2} . 30 = 70 \text{ gr. cm.}$$

$$M_y = \sum_{k=1}^{3} x_k m_k = -2.20 + 0.10 + 2.30 = 20 \text{ gr. cm.}$$

bulunur. Sistemin toplam kütlesi $M = \sum_{k=1}^{3} m_k = 60$ gr. olup kütle merkezi $(\bar{x}; \bar{y})$ ise

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{70}{60} = \frac{7}{6}$$

bulunur. $(\bar{x}; \bar{y}) = (\frac{1}{3}; \frac{7}{6})$ dır

ÖRNEK 4. $y = 1 - x^2$ eğrisinin x ve y eksenleriyle birinci bölgede sınırladığı, alanca yoğunluğu δ olan homojen levhanın kütle merkezini bulunuz.

Çözüm : Şekildeki düşey şeritin

kütle merkezi : $(\tilde{x}; \tilde{y}) = (x; \frac{1 - x^2}{2})$

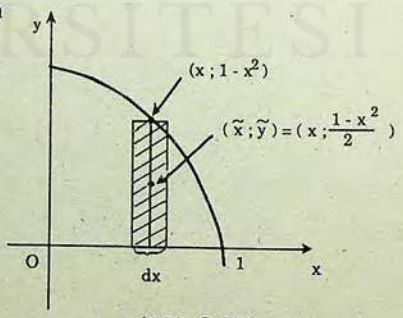
yüksekliği : $1 - x^2$

genişliği : dx

alanı : $ds = (1 - x^2)\,dx$

kütlesi :

$dm = \delta . ds = \delta (1 - x^2)\,dx$



(160. Şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

x eksenine göre momenti : $\tilde{y}\,dm = \frac{1-x^2}{2}\,\delta\,(1-x^2)\,dx = \frac{\delta}{2}(1-x^2)^2\,dx$

y eksenine göre momenti : $\tilde{x}\,dm = x\,\delta\,(1-x^2)\,dx = \delta\,(x-x^3)\,dx$

dir. Buradan tüm levhanın kütlesi

$$M = \int dm = \int_0^1 \delta(1-x^2)\,dx = \delta\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1 = \frac{2}{3}\delta$$

x eksenine göre momenti

$$M_x = \int \tilde{y}\,dm = \int_0^1 \frac{\delta}{2}(1-x^2)^2\,dx = \frac{\delta}{2}\int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx$$

$$= \frac{\delta}{2}\left(x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big]_0^1 = \frac{4}{15}\delta$$

y eksenine göre momenti

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^1 \delta\,(x - x^3)\,dx = \delta\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\delta$$

bulunur. Levhanın kütle merkezi $(\bar{x}\,;\bar{y})$ ise

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{4}\delta}{\frac{2}{3}\delta} = \frac{3}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{4}{15}\delta}{\frac{2}{3}\delta} = \frac{2}{5}$$

$(\bar{x}\,;\bar{y}) = \left(\frac{3}{8}\,;\frac{2}{5}\right)$ dir.

ÖRNEK 5. Örnek 4 deki levhanın her (x ; y) noktasındaki yoğunluğu x ile orantılı olduğuna göre kütle merkezini bulunuz.

Çözümü : 4. örnekte yoğunluk $\delta = kx$ (k sabit) alınarak

$$M = \int_0^1 kx\,(1-x^2)\,dx = \frac{1}{4}k$$

$$M_x = \int_0^1 \frac{kx}{2}(1 - x^2)^2\,dx = \frac{1}{12}k$$

$$M_y = \int_0^1 kx\,(x - x^3)\,dx = \frac{2}{15}k$$

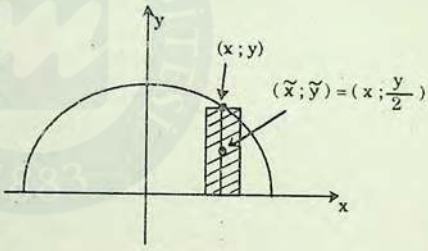
bulunur. Kütle merkezi

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{8}{15} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{3}$$

$$(\bar{x}\,;\,\bar{y}) = (\frac{8}{15}\,;\,\frac{1}{3}) \qquad \text{tür.}$$

ÖRNEK 6. r yarıçaplı yarım daire şeklinde homojen bir levhanın kütle merkezini bulunuz.

Çözümü : Yarım daireyi koordinat düzlemine şekil 161 deki gibi yerleştirirsek denklemi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ olur. Bu durumda kütle merkezi y ekseni üzerinde olacağından koordinatları $(0\,;\,\bar{y})$ şeklindedir. Levhanın alanca yoğunluğu δ ise şekildeki şeritin



(161. Şekil)

alanı : $ds = y\,dx = \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

kütlesi : $dm = \delta\,ds = \delta\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

x eksenine göre momenti : $\tilde{y}\,dm = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{2}\,\delta\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{\delta}{2}(r^2 - x^2)\,dx$ dir. Yarım dairenin alanı $\frac{\pi r^2}{2}$ olduğundan kütlesi $M = \frac{\pi r^2}{2}\,\delta$ dır. x eksenine göre momenti

$$M_x = \int \tilde{y}\,dm = \int_{-r}^{r} \frac{\delta}{2}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{\delta}{2}(r^2 x - \frac{x^3}{3})\Big]_{-r}^{r} = \frac{2r^3}{3}\delta$$

bulunur. Buradan

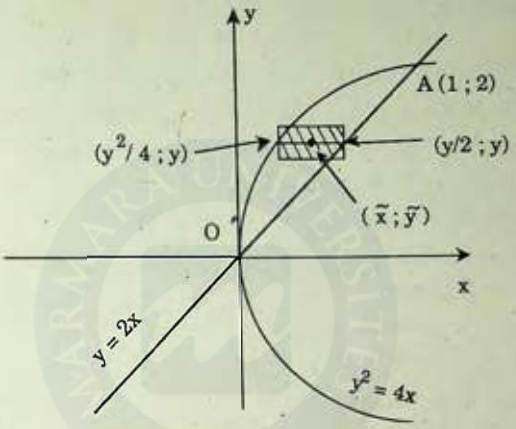
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{4r}{3\pi}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edilir. Levhanın kütle merkezi $(0 ; \frac{4r}{3\pi})$ dir.

ÖRNEK 7. $y^2 = 4x$ parabolü ile $y = 2x$ doğrusunun sınırladığı homojen levhanın kütle merkezini bulunuz.

Çözümü:



(162. Şekil)

İki denklemin ortak çözümünden kesim noktaları $0(0 ; 0)$ ve $A(1 ; 2)$ bulunur. Problemi yatay şeritlerden yararlanarak çözelim. Şekildeki şeridin

alanı : $ds = (\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4})\,dy = \frac{1}{4}(2y - y^2)\,dy$

kütlesi : $dm = \delta \cdot ds = \frac{\delta}{4}(2y - y^2)dy$

kütle merkezi : $(\tilde{x} ; \tilde{y}) = (\frac{y^2/4 + y/2}{2} ; y) = (\frac{y^2 + 2y}{8} ; y)$

dir. Tüm levhanın kütle merkezi $(\bar{x} ; \bar{y})$ ise

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} = \frac{\int_0^2 \frac{y^2 + 2y}{8}\frac{\delta}{4}(2y - y^2)\,dy}{\int_0^2 \frac{\delta}{4}(2y - y^2)\,dy} = \frac{\frac{1}{8}\int_0^2 (4y^2 - y^4)\,dy}{\int_0^2 (2y - y^2)\,dy} = \frac{8/15}{4/3} = \frac{2}{5}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\int \tilde{y}\, dm}{\int dm} = \frac{\int_0^2 y \frac{\delta}{4}(2y - y^2)\, dy}{\int_0^2 \frac{\delta}{4}(2y - y^2)\, dy} = \frac{\int_0^2 (2y^2 - y^3)\, dy}{\int_0^2 (2y - y^2)\, dy} = \frac{4/3}{4/3} = 1$$

bulunur. $(\bar{x}\,;\,\bar{y}) = (\frac{2}{5}\,;\,1)$ dir.

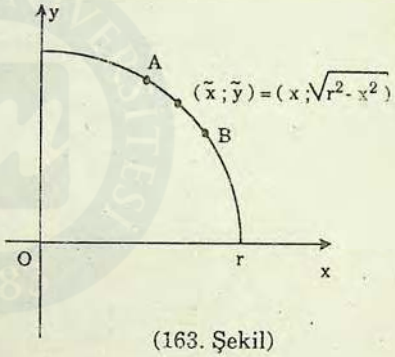
Siz de aynı problemi düşey şeritlerden yararlanarak çözünüz.

ÖRNEK 8. r yarıçaplı dörttebir çember şeklinde homojen bir maddeden yapılmış olan bir yayın kütle merkezini bulunuz.

Çözümü : Dörttebir çemberi şekil 163 deki gibi yerleştirelim. Bu durumda denklemi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(x > 0)$ ve yay elemanı

$$AB = dL = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \sqrt{1 + (\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}})^2}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$



(163. Şekil)

olur. Yayın uzunlukça yoğunluğu δ, tüm yayın kütle merkezi $(\bar{x}\,;\,\bar{y})$ ise

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \tilde{x}\delta\, dL}{\int \delta\, dL} = \frac{\int \tilde{x}\, dL}{\int dL} = \frac{\int_0^r x \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx}{\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx}$$

$$= \frac{-r\sqrt{r^2 - x^2}\Big]_0^r}{r \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{r}\Big]_0^r} = \frac{r^2}{\pi r/2} = \frac{2r}{\pi}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

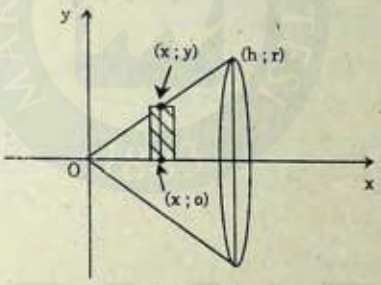
$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm} = \frac{\int \tilde{y}\,\delta\,dL}{\int \delta\,dL} = \frac{\int \tilde{y}\,dL}{\int dL} = \frac{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx}{\pi r/2}$$

$$= \frac{\int_0^r r\,dx}{\pi r/2} = \frac{r^2}{\pi r/2} = \frac{2r}{\pi}$$

bulunur. Buna göre $(\bar{x}; \bar{y}) = \left(\frac{2r}{\pi}; \frac{2r}{\pi}\right)$ dir.

ÖRNEK 9 : Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan dönel koni şeklinde homojen bir cismin kütle merkezini bulunuz.

Çözümü : Koniyi şekil 164 deki gibi yerleştirelim.



(164. Şekil)

Taralı şeritin x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen diskin

hacmi : $dv = \pi y^2 dx$

kütlesi : $dm = \delta.\pi y^2 dx$

kütle merkezi : $(\tilde{x}; \tilde{y}) = (x ; o)$

dır. Tales'e göre

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{h} \quad \text{veya} \quad y = \frac{r}{h}x$$

dir. Koninin, orijinde x eksenine dik olan yoz düzlemine göre momenti

$$M_{yz} = \int \tilde{x}dm = \int_0^h x\,\delta\pi y^2 dx = \delta\pi \int_0^h x\left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$$

$$= \frac{\delta\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^3 dx = \frac{\delta\pi r^2}{h^2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big]_0^h = \frac{1}{4}\delta\pi r^2 h^2$$

bulunur. Koninin hacmi $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, kütlesi $M = \frac{1}{3}\pi r^2 h.\,\delta$ dır.

Kütle merkezi x ekseni üzerinde olacağından ordinatı $\bar{y} = 0$ dır. Apsisi ise

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\frac{1}{4}\delta\pi r^2 h^2}{\frac{1}{3}\delta\pi r^2 h} = \frac{3h}{4}$$

bulunur. Buna göre dönel koninin kütle merkezi, tepeden itibaren yüksekliğin 3/4'ü olan noktadadır.

ÖRNEK 10: 4. örnekteki alanın (sayfa 388) x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen homojen cismin kütle merkezini bulunuz.

Çözümü : Şekil 160 daki düşey şeridin x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen diskin

hacmi : $dv = \frac{1}{3}\pi(1 - x^2)^2\,dx$

kütle merkezi : $(\tilde{x}\,;\,\tilde{y}) = (x\,;\,o)$

dır. Tüm dönel cismin kütle merkezi $(\bar{x}\,;\,o)$ ise

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}dm}{\int dm} = \frac{\int x\delta dv}{\int \delta dv} = \frac{\int xdv}{\int dv} = \frac{\int_0^1 x(1-x^2)^2 dx}{\int_0^1 (1-x^2)^2 dx} = \frac{1/6}{2/15} = \frac{5}{4}$$

bulunur. Kütle merkezi $(\frac{5}{4}\,;\,0)$ dır

ÖRNEK 11. 7. örnekteki alanın (sayfa 391) x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen homojen cismin kütle merkezini bulunuz.

Çözümü : Problemi kabuk yöntemiyle çözelim. Şekil 162 deki şeritin x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen silindirik kabuğun

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

hacmi : $dv = 2\pi y\left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{\pi}{2}y(2y - y^2)\,dy$

kütle merkezi : $(\tilde{x}\,;\,\tilde{y}) = \left(\frac{y/2 + y^2/4}{2}\,;\,0\right) = \left(\frac{2y + y^2}{8}\,;\,0\right)$

dır. Tüm dönel cismin kütle merkezi $(\bar{x}\ ;\ 0)$ ise

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm} = \frac{\int \tilde{x}\,\delta\,dv}{\int \delta\,dv} = \frac{\int_0^2 \frac{2y + y^2}{8} \cdot \frac{\pi}{2} y\,(2y - y^2)\,dy}{\int_0^2 \frac{\pi}{2} y\,(2y - y^2)\,dy}$$

$$= \frac{\frac{1}{8}\int_0^2 (4y^3 - y^5)\,dy}{\int_0^2 (2y^2 - y^3)\,dy} = \frac{2/3}{4/3} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Kütle merkezi $(\bar{x}\,;\,0) = (\frac{1}{2}\,;\,0)$ dır.

ALIŞTIRMALAR

1) $m_1 = 4$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$ kütleleri x ekseni üzerinde $P_1(3)$, $P_2(10)$, $P_3(-2)$ noktalarına yerleştirilmiştir. Sistemin kütle merkezini bulunuz.

$$\left(\bar{x} = \frac{8}{3}\right)$$

2) 7 m uzunluğunda bir metal çubuk bir ucu başlangıç noktasına gelecek şekilde bir eksene yerleştiriliyor. Çubuğun uzunlukça yoğunluğu

a) $\delta = \begin{cases} 1 \text{ kg/ m.}, & 0 < x \le 4\text{m ise} \\ 2 \text{ kg/m.}, & 4\text{m} < x \le 7\text{m ise} \end{cases}$

b) $\delta = (1 + x)$ kg./m.

c) $\delta = (1 + \frac{x}{7})^2$ kg/m.

olduğuna göre kütle merkezini bulunuz.

[a) $\bar{x} = 4{,}1$ m, b) $\bar{x} = 4\frac{11}{27} \cong 4{,}4$ m, c) $\bar{x} = 4{,}25$ m]

Aşağıdaki eğrilerle sınırlı düzlem parçalarının (homojen levha olarak düşününüz) kütle merkezlerini bulunuz.

3) $y = 4 - x^2$, x ekseni, 1. bölgede $\left(0\,;\,\frac{8}{5}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4) $y = x^3$,	$x = 0$, $x = 2$	$\left(\frac{4}{5}; \frac{32}{7}\right)$
5) $y = -x^3 + x$,	$0 \le x \le 1$, x ekseni	$\left(\frac{8}{15}; \frac{16}{105}\right)$
6) $y = \text{Sin } x$,	$0 \le x \le \pi$, $y = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}\right)$
7) $x = y^2 - 2y$,	y ekseni	$\left(-\frac{2}{5}; 1\right)$
8) $x^2 + y^2 = r^2$,	1. bölgedeki parçası	$\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4a}{3\pi}\right)$
9) $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$,	$x = 0$, $y = 0$	$\left(\frac{a}{5}; \frac{a}{5}\right)$
10) $y = -x^2 + 4x$,	$y = x$	$\left(\frac{3}{2}; \frac{12}{5}\right)$
11) $x^2 - 8y + 4 = 0$,	$x^2 = 4y$	$\left(\frac{3}{4}; \frac{2}{5}\right)$
12) $y = 2x^2 - 4x$,	$y = -x^2 + 2x$	$\left(1; -\frac{2}{5}\right)$
13) $x^2 + y^2 = r^2$,	$x = r$, $y = r$, 1. bölge	$\left(\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{3(4 - \pi)}\right)$
14) $x^2 - 8y = 0$,	$x^2 + y^2 = 128$	$\left(0; \frac{352}{5(2 + 3\pi)}\right)$
15) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,	$x^2 + y^2 = a^2$, 1. bölge	$\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4(a + b)}{3\pi}\right)$
16) $y = -x^2 - 3x + 6$,	$x + y - 3 = 0$	$\left(-1; \frac{28}{5}\right)$
17) $x = \text{Sin } t$, eğrisinin 1. yayı ile x ekseni	$y = 1 - \text{Cost}$	$\left(\pi; \frac{5}{6}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

18) Homojen bir üçgen levhanın kütle merkezinin kenarlardan h/3 uzaklıktaki nokta olduğunu gösteriniz.

19) $y = 4 - x^2$ eğrisi ile x ekseninin sınırladığı levhanın her (x, y) noktasındaki yoğunluğu x^2 ile orantılı olduğuna göre kütle merkezini bulunuz.

$$\left(0 ; \frac{8}{7}\right)$$

20) $y = x^2$ ile $y = x$ in sınırladığı levhanın yoğunluğu $\delta(x) = 12x$ şeklinde verildiğine göre kütle merkezini bulunuz

$$\left(\frac{3}{5} ; \frac{1}{2}\right)$$

Aşağıdaki eğrilerle sınırlı düzlem parçalarının yanlarında verilen eksenler etrafında dönmesiyle elde edilen homojen dönel cisimlerin kütle merkezlerini bulunuz

21) $y^2 = x, y = 0, x = 9$; x etrafında. $\left(\bar{x} = 6\right)$

22) $y^2 = x, y = 0, x = 9$; y etrafında. $\left(\bar{y} = \frac{5}{4}\right)$

23) $y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 2$; x etrafında. $\left(\bar{x} = \frac{9}{7}\right)$

24) $y = 4 - x^2$, 1. bölge ; y etrafında $\left(\bar{y} = \frac{4}{3}\right)$

25) $x^2 + y^2 = r^2$, 1. bölge ; x etrafında $\left(\bar{x} = \frac{3r}{8}\right)$

26) $y = \text{Cos}x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$; x etrafında $\left(\bar{x} = \frac{\pi^2 - 4}{4\pi}\right)$

27) $x^2 - y^2 = 16, y = 0, x = 8$; x etrafında $\left(\bar{x} = \frac{27}{4}\right)$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

28) $y = x^2$, $y = x + 2$; x etrafında $\left(\bar{x} = \frac{35}{32}\right)$

29) $y = 4x - x^2$, $y = x$; x etrafında $\left(\bar{x} = \frac{27}{16}\right)$

30) $y = 4x - x^2$, $y = x$; y etrafında $\left(\bar{y} = \frac{27}{10}\right)$

31) $x = y^2 - y$, $y = x$; x etrafında $\left(\bar{x} = \frac{4}{5}\right)$

32) Bir dönel konide yoğunluk tabana olan uzaklığın karesi ile orantılı olarak değiştiğine göre kütle merkezinin yüksekliğin orta noktası olduğunu gösteriniz.

33) $y^2 = 4x$, $x = h$ $(h > 0)$ ile sınırlı alanın x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cisimde yoğunluk $\delta(x) = 1/x$ ile verildiğine göre kütle merkezini bulunuz.

$$\left(\bar{x} = \frac{h}{2}\right)$$

Aşağıdaki eğri parçalarının (homojen maddeden yapılmış bir yay olarak düşününüz) kütle merkezlerini bulunuz.

34) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin 1. bölgedeki parçası.

$$\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$$

35) $8y = x^4 + \frac{2}{x^2}$ eğrisinin $x = 1$ den $x = 2$ ye kadar olan parçası.

$$\left(\frac{1179}{1056}; \frac{268}{165}\right)$$

36) $9y^2 = x(x - 3)^2$ eğrisinin $x = 0$ dan $x = 3$ e kadar olan parçası.

$$\left(\frac{7}{5}; -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

37) $y = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$ eğrisinin $0 \le x \le 1$ aralığındaki parçası.

$$\left(\frac{2}{e^{2}-1}; \frac{e^{4}+4e^{2}-1}{4e\,(e^{2}-1)}\right)$$

38) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisinin,

a) Birinci bölgedeki parçasının kütle merkezini bulunuz

$$\left(\bar{x} = \bar{y} = \frac{2a}{5}\right)$$

b) Birinci bölgede eksenlerle yaptığı alanın kütle merkezini bulunuz

$$\left(\bar{x} = \bar{y} = \frac{256a}{315\pi}\right)$$

c) Birinci bölgedeki alanın x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin kütle merkezini bulunuz.

$$\left(\bar{x} = \frac{21a}{128}\right)$$

39) $y^2 = 4x$ eğrisinin $0 \le x \le 3$ arasındaki parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin kütle merkezini bulunuz.

$$\left(\bar{x} = \frac{7}{5}\right)$$

40) $x = \sqrt{y}$ eğrisinin $y = 0$ dan $y = 2$ ye kadar olan parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin kütle merkezini bulunuz

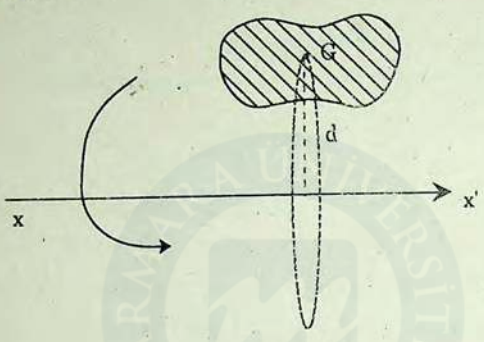
$$\left(\bar{y} = \frac{149}{135}\right)$$

41) Yarım küre yüzeyinin kütle merkezinin, simetri ekseninin orta noktası olduğunu gösteriniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9.7. PAPPUS TEOREMLERİ

I. Bir düzlem parçası, aynı düzlemde bulunan ama kendisini kesmeyen bir eksen etrafında döndürülürse, elde edilen cismin hacmi, bu düzlem parçasının alanı ile, kütle merkezinin bu dönmede aldığı yolun çarpımına eşittir.



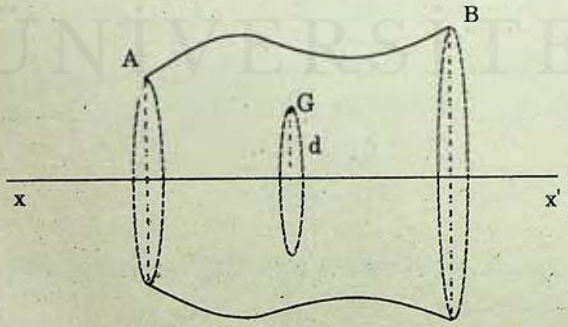
(165. Şekil)

Düzlem parçasının alanı A, bunun kütle merkezinin xx' dönme ekseninden uzaklığı d ise

$$V = A.\ 2\pi d$$

dir.

II. Bir düzlem eğrisinin yayı, kendi düzleminde bulunan ama bu yayı kesmeyen bir eksen etrafında döndürülürse, elde edilen yüzeyin alanı bu yayın uzunluğu ile yayın kütle merkezinin bu dönmede aldığı yolun çarpımına eşittir.



(166. Şekil)

AB yayının uzunluğu L, kütle merkezi G, Gnin xx' dönme ekseninden olan uzaklığı d ise AB yayının xx' etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeyin alanı

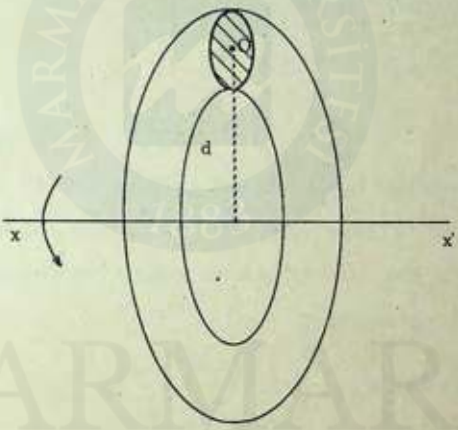
$$S = L.\ 2\pi d$$

dir.

Pappus teoremleri, kütle merkezi bilindiğinde dönel cisimlerin hacimlerinin ve yüzey alanlarının bulunuşunda kolaylık sağlar.

ÖRNEK I. r yarıçaplı bir dairenin merkezinden d uzaklığında (d>r) olan bir doğru etrafında dönmesiyle elde edilen simidin (tor) hacmini ve alanını bulunuz.

Çözümü:



(167. Şekil)

1. Pappus teoremine göre simidin hacmi $V = A.\ 2\pi d$ dir. Burada $A = \pi r^2$ olduğundan

$$V = \pi r^2.\ 2\pi d = 2\pi^2 r^2 d$$

bulunur.

2. Pappus teoremine göre simidin alanı $S = L.2\pi d$ dir.

$L = 2\pi r$ olduğundan

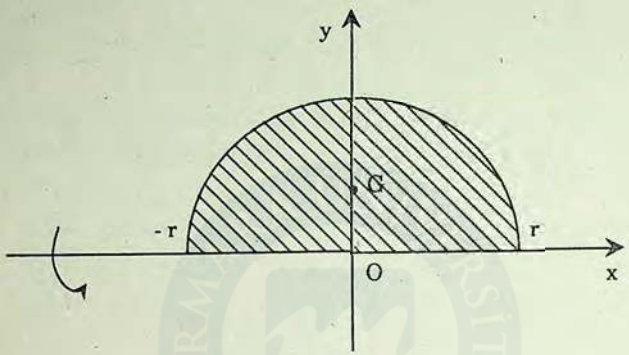
$$S = 2\pi r.2\pi d = 4\pi^2 rd$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2. Birinci Pappus teoreminden yararlanarak bir yarım dairenin kütle merkezini bulunuz.

Çözümü:



(168. Şekil)

Yarım daireyi Şekil 168 deki gibi yerleştirelim. Yarım dairenin alanı $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, bunun x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen kürenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ tür. Yarım dairenin kütle merkezi $G(0 ; \bar{y})$ ise 1. Pappus teoremine göre

$$V = A.\, 2\pi\bar{y} = \frac{1}{2}\pi r^2 .\, 2\pi\bar{y} = \pi r^2 2\bar{y} \text{ dir.}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 2\bar{y} \text{ den } \bar{y} = \frac{4r}{3\pi} \text{ bulunur.}$$

Kütle merkezi $G\left(0 ; \frac{4r}{3\pi}\right)$ dir.

ÖRNEK 3. İkinci Pappus teoreminden yararlanarak r yarıçaplı bir yarım çember yayının kütle merkezini bulunuz.

Çözümü: Yarım çember yayının uzunluğu $L = \pi r$, bu yayın x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen kürenin alanı $S = 4\pi r^2$ dir. (168. Şekil) Çember yayının kütle merkezi $(0 ; \bar{y})$ ise, ikinci Pappus teoremine göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$S = L.\ 2\pi\bar{y} = \pi r.2\pi\bar{y} = 2\pi^2 r\bar{y}$ dir.

$4\pi r^2 = 2\pi^2 r\bar{y}$ den $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$

bulunur. Buna göre kütle merkezi $(0\ ;\ \bar{y}) = \left(0\ ;\ \frac{2r}{\pi}\right)$ dir.

ALIŞTIRMALAR

1) Pappus teoremlerinden yararlanarak taban yarıçapı a, yüksekliği b olan bir dik silindirin hacmini ve yan yüz alanını bulunuz.

$(V = \pi a^2 b\ ;\ S = 2\pi ab)$

2) Bir kenar uzunluğu a olan eşkenar üçgen, ağırlık merkezinden d uzaklığında olan aynı düzlemdeki kendisini kesmeyen bir doğru etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin

a) hacmini

b) yüzey alanını bulunuz

$$\left(V = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2 d\ \ ;\ \ S = 6\pi ad\right)$$

3) $x^2 + y^2 = 9$ çemberinin $x = 5$ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen simidin hacmini bulunuz.

$(V = 90\ \pi^2)$

4) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ elipsinin

a) x ekseni,

b) y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen hacimleri bulunuz.

$(V_x = 48\pi^2\ ;\ V_y = 60\ \pi^2)$

5) Köşe koordinatları A (1;3), B (5;3), C (5;5), D (1;5) olan dikdörtgen

a) $x = 7$ b) $y = -2$ c) $y = -x$

doğruları etrafında döndürülüyor. Elde edilen cisimlerin hacimlerini ve yüzey alanlarını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\left[\begin{array}{lll} \text{a) } V = 64\pi & \text{b) } V = 96\pi & \text{c) } V = 56\sqrt{2}\,\pi \\ S = 96\pi & S = 144\pi & S = 84\sqrt{2}\,\pi \end{array}\right]$$

6) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yarımçemberinin x ekseniyle sınırladığı alanın kütle merkezi $\left(0\,;\,\frac{4r}{3\pi}\right)$ olduğuna göre (Bkz. örnek 2), bu düzlem parçasının

a) $y = r$ b) $y = x - r$

doğruları etrafında dönmesiyle elde edilen hacimleri bulunuz.

$$\left[\text{a) } \frac{3\pi - 4}{3}\pi r^3 \qquad \text{b) } \frac{3\pi + 4}{3\sqrt{2}}\pi r^3\right]$$

7) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yarımçemberinin kütle merkezi $\left(0\,;\,\frac{2r}{\pi}\right)$ olduğuna göre (Bkz. örnek 3) bu yarım çemberin

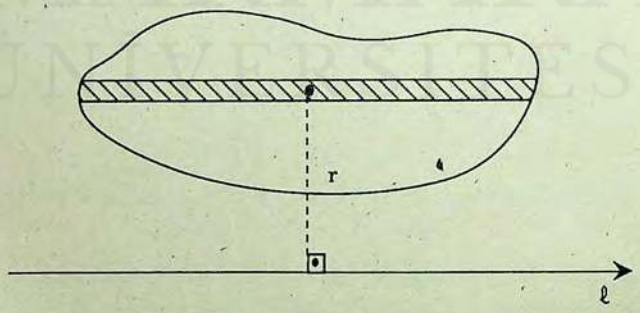
a) $y = -r$ b) $y = x + r$

doğruları etrafında dönmesiyle elde edilen yüzeylerin alanlarını bulunuz.

$$\left[\text{a) } 2\pi(\pi + 2)r^2 \qquad \text{b) } \sqrt{2}\,\pi(\pi + 2)r^2\right]$$

9.8. ATALET MOMENTİ

I. Bir düzlemsel levhanın kendi düzlemindeki bir ℓ doğrusuna paralel bir takım ince şeritlere ayrıldığını düşünelim.



(169. Şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu şeritlerden birinin kütle merkezinin ℓ ye uzaklığı r, kütlesi Δm ise

$$\Delta I_\ell = r^2.\Delta m$$

çarpımına bu şeridin (levha elemanının) ℓ ye göre atalet momenti denir. Buradan tüm levhanın ℓ ye göre atalet momenti

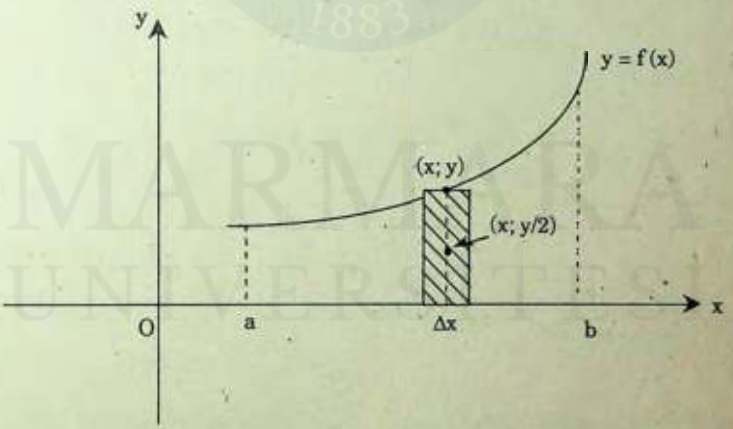
$$I_\ell = \lim_{\Delta m \to o} \sum r^2 \Delta m = \int r^2 . dm$$

olur. Levhanın alanca yoğunluğu δ ise $dm = \delta.ds$ (ds alan elemanı) dir.

Örnek olarak, bir xoy koordinat düzleminde $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseniyle sınırlı, alanca yoğunluğu δ olan homojen levhanın y eksenine göre atalet momenti

$$I_y = \int x^2 . dm = \int x^2 . \delta . ds = \delta \int x^2 . y . dx$$

olur. (Şekil 170)



(170. Şekil)

II. Bir düzlem parçasının, aynı düzlemde kendisini kesmeyen bir ℓ doğrusu etrafında dönmesiyle elde edilen homojen cismin ℓ ye göre atalet momentini bulmak için bu düzlem parçası içinde ℓ ye paralel birtakım

şeritler düşünülür. Bu şeritlerden birinin kütle merkezinin ℓ den uzaklığı r, ℓ etrafında dönmesiyle elde edilen silindirik kabuğun kütlesi Δm ise $\Delta I_\ell = r^2.\Delta m$ çarpımı bu kabuğun ℓ ye göre atalet momentini verir. Buradan tüm cismin ℓ ye göre atalet momenti levhadakine benzer şekilde

$$I_\ell = \int r^2 . dm$$

olur. Burada silindirik kabuğun hacimce yoğunluğu δ ise $dm = \delta.dv$ (dv hacim elemanı) dir.

Örnek olarak Şekil 170 deki alanın y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen homojen cismin y eksenine göre atalet momentini bulalım. Taralı şeritin y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen silindirik kabuğun hacmi

$$\Delta v = 2\pi xy.\Delta x$$

dir. Cismin hacimce yoğunluğu δ ise kabuğun kütlesi

$$\Delta m = \delta\,(2\pi xy.\Delta x)$$

y eksenine göre atalet momenti

$$\Delta I_y = r^2.\Delta m = x^2\,(\delta.2\pi xy.\Delta x) = 2\pi\delta x^3 y.\Delta x$$

olur. Buradan tüm cismin y eksenine göre atalet momenti

$$I_y = \int r^2 . dm = 2\pi\delta \int x^3 y\, dx$$

bulunur.

JİRASYON YARIÇAPI. Bir cismin kütlesi m, bir ℓ doğrusuna göre atalet momenti I ise

$$I = R^2.m$$

eşitliği ile verilen pozitif R sayısına o cismin ℓ doğrusuna göre Jirasyon yarıçapı denir. Burada, s alanlı bir levha için $m = \delta.s$, v hacimli bir cisim için $m = \delta.v$ dir.

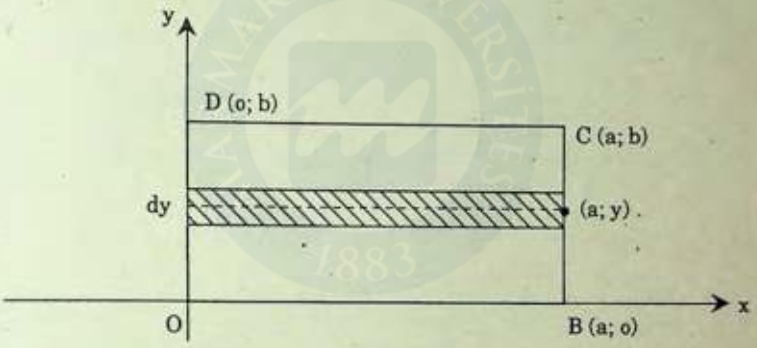
PARALEL EKSENLER TEOREMİ. Bir cismin bir ℓ doğrusuna göre atalet momenti ile bu cismin kütle merkezinden geçen ve ℓ ye paralel olan g doğrusuna göre atalet momenti arasında, cismin kütlesi m, kütle merkezinin ℓ ye uzaklığı d ise

$$I_\ell = I_g + md^2$$

bağıntısı vardır.

ÖRNEK I. Kenar uzunlukları a ve b olan dikdörtgen şeklindeki homojen ince bir levhanın a kenarına göre atalet momentini bulunuz.

Çözümü: Dikdörtgeni koordinat düzlemine şekil 171 deki gibi yerleştirelim.



(171. Şekil)

a kenarına paralel olarak alınan şeritin kütlesi dm ise, bu kenara göre atalet momenti,

$$dI_x = y^2 . dm = y^2 \delta ds = y^2 \delta a.dy$$

dir. Tüm levhanın atalet momenti

$$I_x = \delta a \int_o^b y^2 . dy = \delta a . \frac{y^3}{3}\Big]_o^3 = \frac{1}{3} \delta ab^3$$

veya $\delta ab = m$ olduğu düşünülerek

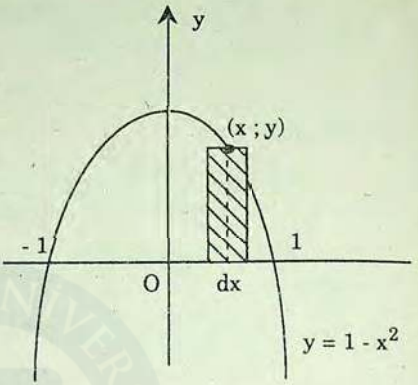
$$I_x = \frac{1}{3} mb^2$$

bulunur. Buna göre dikdörtgen şeklindeki levhanın bir kenarına göre

atalet momenti, kütlesi ile diğer kenar uzunluğunun karesi çarpımının $\frac{1}{3}$ üne eşittir.

ÖRNEK 2. $y = 1 - x^2$ parabolü ile x ekseninin sınırladığı homojen levhanın x ve y eksenlerine göre atalet momentlerini bulunuz.

Çözümü: 172. şekilde x eksenine dik olarak alınan taralı şeritin x eksenine göre atalet momenti, 1. örneğe göre



(172. Şekil)

$$dI_x = \frac{1}{3}y^2 . dm = \frac{1}{3}y^2 (\delta y dx)$$

$$= \frac{\delta}{3}(1 - x^2)^3 dx$$

dir. Buradan tüm levhanın x eksenine göre atalet momenti

$$I_x = \frac{\delta}{3}\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^3 dx = \frac{2\delta}{3}\int_{0}^{1} (1 - x^2)^3 dx$$

$$= \frac{2\delta}{3}\int_{0}^{1} (1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6) dx = \frac{32}{105}\delta$$

bulunur. Aynı şeridin y eksenine göre atalet momenti, tanıma göre

$$dI_y = x^2 . dm = x^2 (\delta y dx) = \delta x^2 (1 - x^2) dx$$

dir. Buradan tüm levhanın y eksenine göre atalet momenti

$$I_y = \delta \int_{-1}^{1} x^2 (1 - x^2) dx = 2\delta \int_{0}^{1} (x^2 - x^4) dx = \frac{4}{15}\delta$$

bulunur.

ÖRNEK 3. $y^2 = x$ parabolü ile $y = x - 2$ doğrusunun sınırladığı homojen levhanın x eksenine göre atalet momentini ve jirasyon yarıçapını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Çözümü: Levha üzerinde x eksenine paralel olarak alınan taralı şeritin alanı:

$ds = (y + 2 - y^2)\,dy$

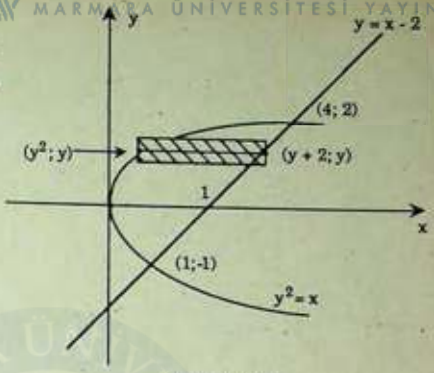
kütlesi:

$dm = \delta (y + 2 - y^2)dy$

x eksenine göre atalet momenti:

$dI_x = y^2 dm = \delta y^2 (y + 2 - y^2)dy$

dir. Tüm levhanın x eksenine göre atalet momenti



(173. Şekil)

$$I_x = \delta \int_{-1}^{2} (y^3 + 2y^2 - y^4)\,dy = \frac{63}{20}\delta$$

bulunur. Diğer taraftan levhanın kütlesi

$$m = \delta \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\,dy = \frac{9}{2}\delta$$

dır. Levhanın x eksenine göre jirasyon yarıçapı R_x ise $I_x = R_x^2 . m$ den

$$R_x^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{63}{20}\delta}{\frac{9}{2}\delta} = \frac{7}{10}$$

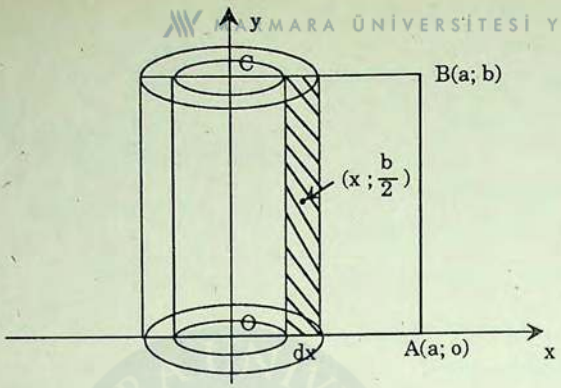
$$R_x = \sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{\sqrt{70}}{10}$$

bulunur.

ÖRNEK 4. Taban yarıçapı a, yüksekliği b, yoğunluğu δ olan bir dik silindirin eksenine göre atalet momentini ve jirasyon yarıçapını bulunuz.

Çözümü: Böyle bir silindir, koordinat düzlemine şekil 174 deki gibi yerleştirilen OABC dikdörtgeninin y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilebilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(174. Şekil)

Dikdörtgenin içindeki taralı şeritin y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen silindirik kabuğun

hacmi : $dv = 2\pi xb.dx$

kütlesi : $dm = \delta.2\pi xbdx$

y eksenine göre atalet momenti:

$$dI_y = x^2.dm = 2\pi\delta b\, x^3\, dx$$

dir. Tüm silindirin y eksenine göre atalet momenti

$$I_y = 2\pi\delta b \int_0^a x^3 dx = \frac{1}{2}\pi\delta b a^4 = \frac{1}{2}(\delta\pi a^2 b)a^2 = \frac{1}{2} m.a^2$$

bulunur. Buna göre homojen bir dik silindirin eksenine göre atalet momenti, kütlesi ile yarıçapının karesi çarpımının yarısına eşittir.

Jirasyon yarıçapı R ise $R^2 m = I_y$ den

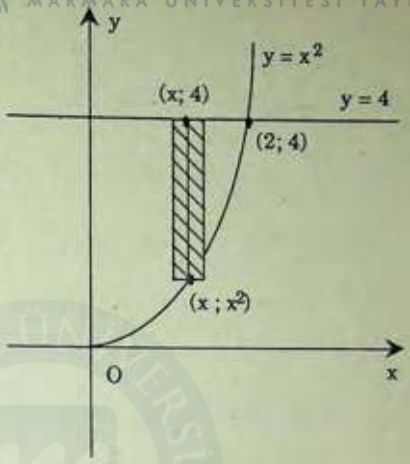
$$R^2 = \frac{I_y}{m} = \frac{\frac{1}{2}ma^2}{m} = \frac{1}{2}a^2,$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 5. $y = x^2$ parabolü, y ekseni ve $x = 4$ doğrusu ile 1. bölgede sınırlı düzlem parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen homojen cismin y eksenine göre atalet momentini ve jirasyon yarıçapını bulunuz



(175. Şekil)

Çözümü: Şekil 175 deki taralı şeritin y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen kabuğun

hacmi: $dv = 2\pi x\,(4 - x^2)dx$

kütlesi: $dm = \delta.2\pi x\,(4 - x^2)dx$

y eksenine göre atalet momenti:

$dI_y = x^2.dm = x^2.\ 2\delta\pi x\ (4 - x^2)dx$

dir. Buradan tüm dönel cismin kütlesi:

$$m = 2\pi\delta \int_0^2 (4x - x^3)\,dx = 8\pi\delta,$$

y eksenine göre atalet momenti

$$I_y = 2\pi\delta \int_0^2 (4x^3 - x^5)\,dx = \frac{32\pi}{3}\,\delta = \frac{4}{3}\,m$$

bulunur. Buna göre cismin y eksenine göre jirasyon yarıçapı

$$R_y^2 = \frac{I_y}{m} = \frac{4}{3} \quad \text{den} \quad R_y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

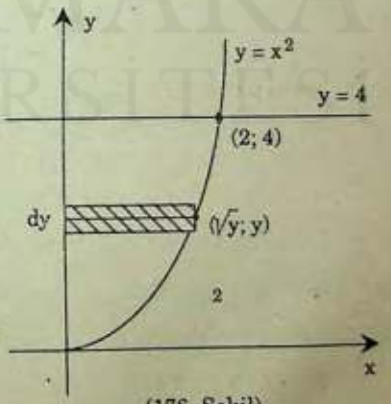
tür.

İkinci çözümü: Alan elemanı olan şeridi şekil 176 daki gibi y dönme eksenine dik alalım. Bu şeridin y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen diskin

hacmi : $dv = \pi\,(\sqrt{y})^2\,dy = \pi\,y dy$

kütlesi: $dm = \delta\pi y dy$

dir. Dördüncü örneğin sonucundan yararlanarak y eksenine göre atalet momenti



(176. Şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$dI_y = \frac{1}{2}(\sqrt{y})^2\, dm = \frac{1}{2} y\,(\delta\pi y dy) = \frac{1}{2}\delta\pi y^2\, dy$$

olur. Buradan tüm cismin kütlesi

$$m = \delta\pi \int_0^4 y dy = 8\pi\delta$$

y eksenine göre atalet momenti

$$I_y = \frac{1}{2}\delta\pi \int_0^4 y^2 dy = \frac{32\pi}{3}\delta = \frac{4}{3} m$$

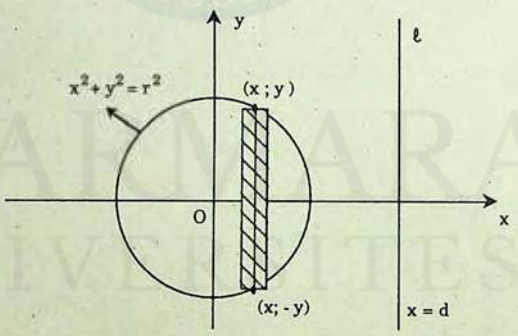
bulunur.

ÖRNEK 6. r yarıçaplı daire şeklindeki homojen bir levhanın,

a) bir çapına göre,

b) merkezinden d uzaklığındaki bir ℓ doğrusuna göre atalet momentini bulunuz.

Çözümü: Daireyi ve ℓ doğrusunu koordinat düzlemine şekil 177 deki gibi yerleştirelim.



(177. Şekil)

a) Çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ olup üst yarısı için $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dir. Şekildeki taralı şeritin

alanı : $ds = 2y.dx$

kütlesi : $dm = \delta.2ydx$

y eksenine göre atalet momenti : $dI_y = x^2 . 2\delta y\, dx$ dir. Tüm dairenin y eksenine göre atalet momenti

$$I_y = 2\delta \int_{-r}^{r} x^2 y dx = 2\delta \int_{-r}^{r} x^2 \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4\delta \int_{0}^{r} x^2 \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$$

dir. $x = r\,Sint$ dönüşümü yapılırsa $\sqrt{r^2 - x^2} = r\,Cost$, $dx = r\,Cost.dt$ olur. t ye göre integral sınırları

$x = 0$ için $0 = r\,Sin\,t$ den $Sint = 0$, $t = 0$

$x = r$ için $r = r\,Sint$ den $Sint = 1$, $t = \pi/2$

bulunur. Buna göre

$$I_y = 4\delta \int_{0}^{\pi/2} r^2 Sin^2 t.r\,Cost.\, r\,Cost\, dt = \delta r^4 \int_{0}^{\pi/2} (2\,Sint\,Cos\,t)^2\, dt$$

$$= \delta r^4 \int_{0}^{\pi/2} Sin^2 2t.dt = \frac{1}{2}\delta r^4 \int_{0}^{\pi/2} (1 - Cos4t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\delta r^4 \left(t - \frac{1}{4} Sin\,4t\right)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}\pi r^4 \delta$$

bulunur. $\pi r^2\ \delta = m$ (levhanın kütlesi) olduğundan

$$I_y = \frac{1}{4} mr^2$$

olur.

b) Levhanın ℓ doğrusuna göre atalet momenti I_ℓ ise Paralel eksenler teoremine göre

$$I_\ell = I_y + md^2 = \frac{1}{4}mr^2 + md^2 = m\left(\frac{1}{4}r^2 + d^2\right)$$

bulunur.

ÖRNEK 7. Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan homojen dik silindirin bir yan yüz yüksekliğine göre atalet momentini bulunuz.

Çözümü: 4. örneğe göre homojen dik silindirin kendi eksenine göre atalet momenti

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$I_g = \frac{1}{2} mr^2$$

idi. Silindirin bir yan yüz yüksekliğine göre atalet momenti I_y ise paralel eksenler teoremine göre

$$I_y = I_g + mr^2 = \frac{1}{2} mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2} mr^2$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlı homojen levhaların yanlarındaki doğrulara göre atalet momentlerini ve jirasyon yarıçaplarını bulunuz.

1) $y = 2x$, $x = 4$, $y = 0$; y eks. göre $(I_y = 128.\delta$, $R_y = 2\sqrt{2})$

2) $y^2 = 2x$, $y = 4$, $x = 0$; x eks. göre $(I_x = \frac{512}{5}\delta$, $R_x = \frac{4\sqrt{15}}{5})$

3) $y = 9 - x^2$, $y = 0$; y eks. göre $(I_y = \frac{324}{5}\delta$, $R_y = \frac{3\sqrt{5}}{5})$

4) $y^2 = 4x$, $x = 1$; x ve y eks. göre $(I_x = \frac{32}{15}\delta$, $R_x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $I_y = \frac{8}{7}\delta$, $R_y = \frac{\sqrt{21}}{7})$

5) $y = \frac{1}{3}x^2$, $x = 3$, $y = 0$; x ve y eksenlerine göre $(I_x = \frac{27}{7}\delta$, $R_x = \frac{3\sqrt{7}}{7}$, $I_y = \frac{81}{5}\delta$, $R_y = \frac{3\sqrt{15}}{5})$

6) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; y eks. göre $(I_y = \frac{256}{5}\delta$, $R_y = \frac{2\sqrt{30}}{5})$

7) $y = 3x - x^3$, $x = -1$, $x = 1$, $y = -3$; y eks. göre $(I_y = 2.\delta$, $R_y = \frac{\sqrt{3}}{3})$

8) Tabanı a, yüksekliği h olan üçgenin tabanına göre $(I = \frac{1}{12} ah^3.\delta$, $R = \frac{h\sqrt{6}}{6})$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9) $x^2 + y^2 = r^2$ dairesinin bir çapına göre $\left(I = \frac{1}{4}\pi r^2 \delta\ ,\ R = \frac{r}{2}\right)$

10) $4x^2 + 9y^2 = 36$ elipsinin x ve y eksenlerine göre $\left(I_x = 6\pi\delta\ ,\ R_x = 1\right)$ $\left(I_y = \frac{27}{2}\pi\delta\ ,\ R_y = \frac{3}{2}\right)$

11) $x^2 = 4y$, $y = x$; y eks. göre $\left(I_y = \frac{64}{5}\delta\ ,\ R_y = \frac{2\sqrt{30}}{5}\right)$

12) $y = x^3$, $x + y = 2$, $y = 0$; y eks. göre $\left(I_y = \frac{13}{12}\delta\ ,\ R_y = \frac{\sqrt{13}}{3}\right)$

13) $y = \text{Sin}\, x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ x ve y eks. göre $\left[I_x = \frac{4}{9}\delta\ ,\ R_x = \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ $\left[I_y = (\pi^2 - 4)\delta\ ,\ R_y = \sqrt{\frac{\pi^2 - 4}{2}}\right]$

Yukarıdaki 3. 4. ve 9. soruların sonuçlarından ve paralel eksenler teoreminden yararlanarak aşağıdaki eğrilerle sınırlı levhaların yanlarında verilen doğrulara göre atalet momentlerini bulunuz.

14) $y = 9 - x^2$, $y = 0$; $x = 4$ doğrusuna göre $\left(I = \frac{504}{5}\delta\right)$

15) $y^2 = 4x$, $x = 1$, $y = 2$ doğ. göre $\left(I = \frac{72}{15}\delta\right)$

16) $x^2 + y^2 = r^2$; bir teğetine göre $\left(I = \frac{5}{4}\pi r^2 \delta\right)$

Aşağıda verilen eğrilerle sınırlı düzlem parçalarının yanlarındaki eksenler etrafında dönmesiyle elde edilen cisimlerin bu eksenlere göre atalet momentlerini ve jirasyon yarıçaplarını bulunuz.

17) $y = \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 4$; x eks. etr. $\left(I_x = \frac{32}{5}\pi\delta,\ R_x = \frac{\sqrt{30}}{5}\right)$

18) $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$, 1. bölgede; y eks. etrafında $\left(I_y = \frac{32\pi}{3}\delta,\ R_y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

19) $y^2 = 8x$, $x = 2$, $y = 0$, 1. bölgede; $\left(I_x = \frac{556}{3}\delta,\ R_x = \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

x ve y eks. etrafında $\left(I_y = \frac{256\pi}{9}\delta,\ R_y = \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$

20) $y = \frac{1}{3}x^3$, $y = 0$, $x = 3$; x eks. etr. $\left(I_x = \frac{27\pi}{2}\delta,\ R_x = \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

21) $y = x^2$, $y = x$; y eks. etrafında $\left(I_y = \frac{\pi}{15}\delta,\ R_y = \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$

22) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; $x = 2$ etr. $\left(I = \frac{64\pi}{35}\delta,\ R = \frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$

23) $y = x^3$, $x + y = 2$, $y = 0$; x eks. etr. $\left(I_x = \frac{9}{65}\pi\delta,\ R_x = \frac{189}{650}\right)$

24) r yarıçaplı homojen bir kürenin çapına göre atalet momentini ve jirasyon yarıçapını bulunuz.

$$\left(I = \frac{8}{15}\pi r^5\delta,\ R = \frac{\sqrt{10}}{5}r\right)$$

25) Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan homojen dik koninin eksenine göre atalet momenti ile jirasyon yarıçapını bulunuz

$$\left(I = \frac{1}{10}\pi r^4 h\delta,\ R = \frac{\sqrt{30}}{10}r\right)$$

18., 19. ve 24. soruların sonuçları ile paralel eksenler teoreminden yararlanarak aşağıda belirtilen dönel cisimlerin verilen eksenlere göre atalet momentlerini bulunuz.

26) $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$ ile 1. bölgede sınırlı düzlem parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin $x = 1$ doğrusuna göre.

$$\left(I = \frac{56}{3}\pi\delta\right)$$

27) $y^2 = 8x$, $x = 2$, $y = 0$ ile 1. bölgede sınırlı düzlem parçasının x ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin $y = 4$ doğrusuna göre.

$$\left(I = \frac{1024}{3}\pi\delta\right)$$

28) $y^2 = 8x$, $x = 2$, $y = 0$ ile 1. bölgede sınırlı düzlem parçasının y ekseni etrafında dönmesiyle elde edilen cismin $x = -5$ doğrusuna göre.

$$\left(I = \frac{3136}{9}\pi\delta\right)$$

29) r yarıçaplı homojen kürenin bir teğetine göre.

$$\left(I = \frac{28}{15}\pi r^2\delta\right)$$

9.9. SIVI BASINCI. Birim hacimdeki ağırlığı ω olan bir sıvı içinde, sıvı yüzeyinden h kadar derinlikteki bir noktada sıvı basıncı $h.\omega$ dır. Bu basınç Pascal kuralına göre tüm yönlerde aynıdır. Sıvı içine h derinlikte yatay olarak yerleştirilen s alanlı bir levhanın bir yüzüne etkiyen basınç kuvveti ise

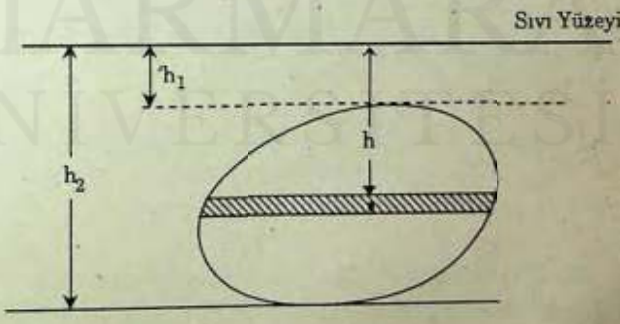
$$F = h\omega s$$

olur.

Şimdi levhanın sıvı içine düşey olarak yerleştirildiğini varsayalım. Bu durumda levhanın farklı derinlikteki noktalarına etkiyen basınç kuvvetleri de farklı olacağından yukarıdaki formül doğrudan kullanılamaz. Bu zorluğu yenmek için, levha yüzeyi birtakım ince yatay şeritlere ayrılır (Şekil 178). Örnek olarak alınacak bir şeritin ağırlık merkezinin derinliği h, alanı Δs ise bu şerite etkiyen basınç kuvveti

$$\Delta F = \omega.h.\Delta s$$

olur.



(178. Şekil)

Buradan tüm levhaya (bir yüzüne) etkiyen basınç kuvveti

$$F = \lim_{\Delta s \to 0} \sum \omega.h.\Delta s = \int_{h_1}^{h_2} \omega.h.ds$$

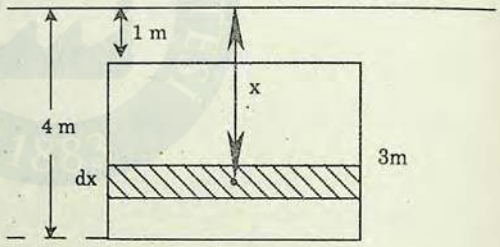
bulunur. (Diğer yüze buna eşit ama ters yönde bir kuvvet etki yapar.) Bu integralin hesabında h ve ds nin aynı bir değişkene bağlı olarak yazılması gerekir.

Diğer taraftan tüm yüzeyin ağırlık merkezinin derinliği $\bar{h}$ ise

$$F = \omega \bar{h} s$$

dir. Bu formül yardımıyla ağırlık merkezi bilinen bir levha yüzeyine etkiyen sıvı basıncı kolayca bulunabilir.

ÖRNEK 1. Kenar uzunlukları 4m ve 3m olan dikdörtgen şeklindeki bir levha, 1 m^3 ünün ağırlığı ω newton olan bir sıvı içine düşey olarak şekil 179 daki gibi batırılmıştır. Bu levhanın bir yüzüne etkiyen sıvı basıncını bulunuz.



(179. Şekil)

Birinci Çözümü: Şekildeki taralı şeritin alanı

ds = 4.dx, bu şerite etkiyen basınç kuvveti dF = ω.x.ds = 4ωxdx dir. Tüm levhaya etkiyen basınç

$$F = 4\omega \int_1^4 xdx = 2\omega x^2 \Big]_1^4 = 30\omega \text{ newton}$$

bulunur.

İkinci çözümü : Levhanın kütle merkezinin derinliği $\bar{h}$ = 2,5 m olup $F = \omega \bar{h} s$ formülüne göre

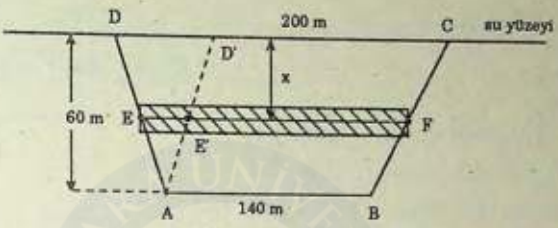
$$F = \omega.2,5.(3.4) = 30\ \omega \quad N$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖRNEK 2. İkizkenar yamuk şeklindeki bir baraj duvarının üst kenarı 200m, alt kenarı 140m, yüksekliği 60m dir. Baraj tamamen dolu iken bu duvara gelen su basıncını bulunuz.

Çözümü:



(180. Şekil)

Su yüzeyinden x metre derinlikteki taralı şeritin boyu $|EF| = \ell$, genişliği dx ise alanı $ds = \ell.dx$ olur (şekil 180) $1m^3$ suyun ağırlığı 9800 Newton olduğundan bu şeride etkiyen su basıncı

$$dF = x.\omega.ds = x.\omega.\ell.dx = 9800.x.\ell.dx \text{ newton}$$

dur. ℓ yi x cinsinden bulmak için AD'//BC çizelim.

Thales'e göre

$$\frac{|EE'|}{|DD'|} = \frac{60 - x}{60}$$

yazılır. $|EE'| = \ell - 140$, $|DD'| = 200 - 140 = 60$ olduğundan

$$\frac{\ell - 140}{60} = \frac{60 - x}{60} \quad \text{dan} \quad \ell = 200 - x$$

bulunur. Buradan

$$dF = 9800\, x\ell dx = 9800\, x(200 - x)dx$$

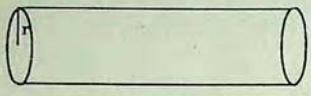
olur. Tüm baraj duvarına gelen basınç kuvveti

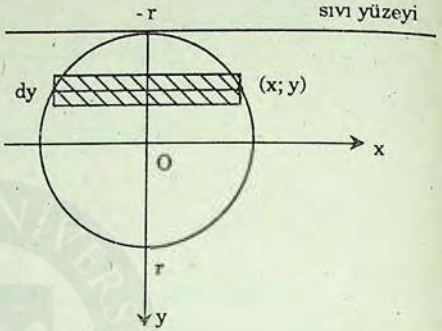
$$F = 9800 \int_0^{60} x(200 - x)\, dx = 9800\left(100x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^{60} = 2{,}8224.10^9 \text{ N}$$

bulunur.

ÖRNEK 3. Taban yarıçapı r metre olan silindirik bir benzin tankı tamamen dolu olup ekseni yatay olarak durmaktadır. Tabanlarından birine gelen basınç kuvvetini bulunuz.

Çözümü:





(181. Şekil)

Tabanı koordinat düzlemine şekil 181 deki gibi yerleştirelim. Taralı şeritin alanı ds = 2x.dy, ağırlık merkezinin derinliği y - (-r) = y + r dir. Bu şerite etkiyen basınç kuvveti dF = ω(y + r) 2x.dy olur. Çemberin merkezil denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ olduğundan $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ alınarak

$$dF = 2\omega (y + r)\sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

yazılır. Buradan tüm daireye etkiyen basınç kuvveti

$$F = 2\omega \int_{-r}^{r} (y + r)\sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

$$= 2\omega \left[\int_{-r}^{r} y\sqrt{r^2 - y^2}\, dy + r \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy \right]$$

$$= 2\omega \left[-\frac{1}{3}(r^2 - y^2)^{3/2} + r\left(\frac{y}{2}\sqrt{r^2 - y^2} + \frac{r^2}{2} \operatorname{Arcsin} \frac{y}{r}\right) \right]_{-r}^{r}$$

$$= 2\omega \left[\frac{r^3}{2} \operatorname{Arcsin} 1 - \frac{r^3}{2} \operatorname{Arcsin} (-1) \right]$$

$$= \omega r^3 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \omega r^3 \pi \quad \text{newton}$$

bulunur.

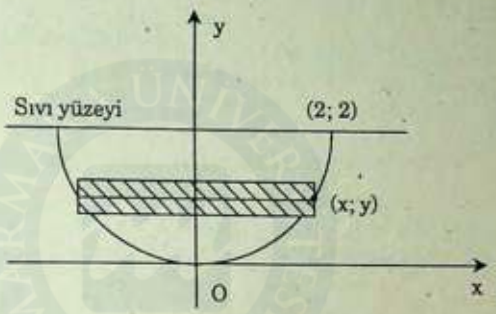
ÖRNEK 4. Tabanı 4m, yüksekliği 2m olan parabol şeklindeki bir

levha tabanı üstte ve yatay olacak şekilde 9000 N/m³ ağırlığındaki bir sıvı içine batırılıyor.

a) Taban sıvı yüzeyinde iken,

b) Taban sıvı yüzeyinden 3 m derinde iken levhanın bir yüzüne etkiyen basınç kuvvetini bulunuz.

Çözümü: Parabolü koordinat düzlemine şekil 182 deki gibi yerleştirelim.



(182. Şekil)

Bu durumda parabolün denklemi $y = ax^2$ den $y = \frac{1}{2}x^2$ olur. Taralı şeritin

alanı : $ds = 2x.dy$

ağırlık merkezinin derinliği : $2 - y$

olup bu şerite etkiyen sıvı basıncı

$$dF = \omega (2 - y)2x\, dy = 2\omega (2 - y)\sqrt{2y}\, dy$$

dir. Tüm levhaya etkiyen basınç

$$F = 2\sqrt{2}\,\omega \int_0^2 (2 - y)\sqrt{y}\, dy$$

$$= 2\sqrt{2}\,\omega \int_0^2 (2y^{1/2} - y^{3/2})\, dy$$

$$= 2\sqrt{2}\,\omega \left(\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Bigg]_0^2$$

$$= \frac{64}{15}\omega = \frac{64}{15}.9000 = 38400 \quad N$$

bulunur.

b) Şekil 183 teki taralı şeritin

alanı: $ds = 2x.dy$

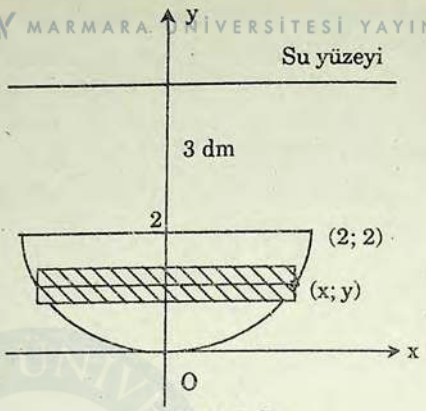
derinliği: $5 - y$

şerite etkiyen su basıncı:

$dF = \omega\,(5 - y)\,2x\,dy$

$= \omega\,(5 - y)\,2\sqrt{2y}\,dy$

dir. Tüm levhaya etkiyen basınç:



(183. Şekil)

$$F = 2\sqrt{2}\,\omega \int_0^2 (5 - y)\sqrt{y}\,dy = \frac{304}{15}.\,9000 = 182400 \quad N$$

bulunur.

Not: Levhanın alanı $S = \frac{16}{3}\,m^2$, kütle merkezi $(0; \frac{6}{5})$ tir. (Bu sonuçlar integralle bulunabilir.) Buna göre, a şıkkı için kütle merkezinin derinliği

$$\bar{h} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}\ m \text{ olduğundan}$$

$$F = \omega.\bar{h}.\,s = \omega.\frac{4}{5}.\frac{16}{3} = \frac{64}{15}\,\omega = 38400 \quad N$$

b şıkkı için $\bar{h} = 5 - \frac{6}{5} = \frac{19}{5}\ m$ olduğundan

$$F = \omega.\bar{h}.s = \omega.\frac{19}{5}.\frac{16}{3} = \frac{304}{15}\,\omega = 182400 \quad N$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1) Kenar uzunlukları 10 dm ve 6 dm olan dikdörtgen şeklindeki bir levha düşey olarak su içine batırılıyor. Aşağıdaki koşullarda levhanın bir yüzüne etkiyen su basıncını bulunuz.

a) uzun kenar yukarıda ve su yüzeyinde bulunursa,

b) uzun kenar yukarıda ve su yüzeyinden 5 dm derinlikte bulunursa,

c) kısa kenar yukarıda ve su yüzeyinde bulunursa,

d) kısa kenar yukarıda ve su yüzeyinden 2 dm üstte bulunursa

[a) 1764 N b) 4707 N c) 2940 N d) 1881,6 N]

2) Tabanı 4m, yüksekliği 3m olan bir üçgen levha, ağırlığı ω N/m^3 olan bir sıvı içine düşey olarak batırılıyor. Aşağıdaki koşullarda levhanın bir yüzüne etkiyen sıvı basıncını bulunuz

a) üçgenin tepesi sıvı yüzeyinde, tabanı yatay olursa,

b) taban yukarıda ve sıvı yüzeyinde olursa,

c) taban yukarıda, yatay ve sıvı yüzeyinden 2m derinde olursa

[a) (12ω) N b) (6ω) N c) (18ω) N]

3) x eksenini yatay ve y ekseninin pozitif yönünü aşağıya doğru alarak, aşağıda verilen eğrilerle sınırlı düzlem parçalarına etkiyen sıvı basıncını bulunuz

a) $y = x^2, y = 1$; sıvı yüzeyi $y = 0$

b) $y = x^2, y = 1$; sıvı yüzeyi $y = -\frac{1}{2}$,

c) $y = 1 - 4x^2, y = 0$; sıvı yüzeyi $y = 0$,

d) $y^2 = 4x, x = 1$; sıvı yüzeyi $y = -1$

$$\left[\text{a) } \left(\frac{4}{5}\omega\right) \text{N} \quad \text{b) } \left(\frac{22}{15}\omega\right) \text{N} \quad \text{c) } \left(\frac{4}{15}\omega\right) \text{N} \quad \text{d) } \left(\frac{135}{48}\omega\right) \text{N} \right]$$

4) Parabolik düzlem parçası şeklindeki bir baraj kapısının yatay olan üst kenarının uzunluğu 3m, yüksekliği 1m dir. Aşağıdaki koşullarda kapıya etkiyen su basıncını bulunuz.

a) su seviyesi kapı üst kenarıyla aynı ise,

b) su seviyesi kapı üst kenarından 5 m yukarıda ise.

[a) 7840 N b) 105840 N]

5) Eksen uzunlukları 2a, 2b olan elips şeklindeki bir levha, merkezi h (h > b) derinlikte olmak üzere düşey olarak bir sıvı içinde durmaktadır. Elipsin 2a ekseni sıvı yüzeyine paralel olduğuna göre levhanın bir yüzüne gelen basınç kuvvetini bulunuz.

[$F = (abh\pi\omega)$ N]

6) Çapı 6 dm olan yarım daire şeklindeki bir levha, çapı yüzeyde olacak şekilde dikey olarak $\omega = 8000$ N/m^3 ağırlığındaki bir sıvıya batırılıyor. Levha üzerine etkiyen sıvı basıncını bulunuz.

(176,4 N)

7) 2m yarıçaplı silindirik bir depo, ekseni yatay olarak durmaktadır. Depo içinde 3m derinlikte sıvı yağ olduğuna göre bir tabana gelen yağ basıncını bulunuz.

$$\left[\left(\frac{8\pi}{3} + 3\sqrt{3} \right) \omega \quad \text{N} \right]$$

9.10. İŞ. Bir cisme etki eden sabit bir F kuvveti, bu cismi kuvvetle aynı yönde bir doğru boyunca d kadar uzağa götürmüş ise yaptığı iş

$$W = F.d$$

dir. Cisme etki eden kuvvet sabit değilse yapılan işi bulmak için yukarıdaki formülü doğrudan kullanamayız. Cismi bir eksen üzerinde A dan B ye götüren F kuvveti, cismin A dan olan x yönlü uzaklığının $F = F(x)$ şeklinde sürekli bir fonksiyonu olsun. Bu durumda cismin aldığı AB yolunu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ noktaları ile n alt aralığa bölelim. (Şekil 184)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



(184. Şekil)

(k) yıncı alt aralığın uzunluğu $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, bu aralığın bir t_k noktasında cisme etkiyen kuvvet $F(t_k)$ olsun. Bu aralıkta yapılan iş ΔW_k ise

$$\Delta W_k \equiv F(t_k).\ \Delta x_k$$

dır. Bütün alt aralıklarda yapılan işler toplamı için

$$W \equiv \sum_{k=1}^{n} F(t_k).\Delta x_k$$

yazılır. Buradan da $n \to \infty$ için limit alınarak

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} F(t_k).\Delta x_k = \int_a^b F(x)\,dx$$

bulunur.

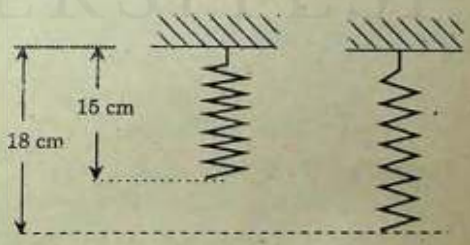
ÖRNEK 1. Normal boyu 15 cm olan bir yayın boyunu x cm uzatmak için gerekli kuvvet F = kx ile veriliyor. (k yay maddesine bağlı bir sabittir ve "yay sabiti" diye adlandırılır.) Yayı 2 cm uzatmak için 200 N luk bir kuvvet gerektiği bilindiğine göre

a) yayın boyunun 15cm den 18 cm ye,

b) 18 cm den 20,2 cm ye uzatılması halinde yapılan işi bulunuz.

Çözümü: x = 2 cm için F = 200 N olduğundan F = kx den k = 100 bulunur. O halde kuvvet formülü F = 100 x dir.

a) Bu kuvvet, yayı 18-15 = 3cm uzattığına göre kuvvetin uygulama noktası x = 0 dan x = 3cm ye kadar yer değiştirmiştir. Burada yapılan iş



(185. Şekil)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$W = \int_0^3 F(x)\,dx = \int_0^3 100x\,dx = 50x^2\Big]_0^3 = 450 \text{ cm N} = 4{,}5 \text{ J}$$

bulunur.

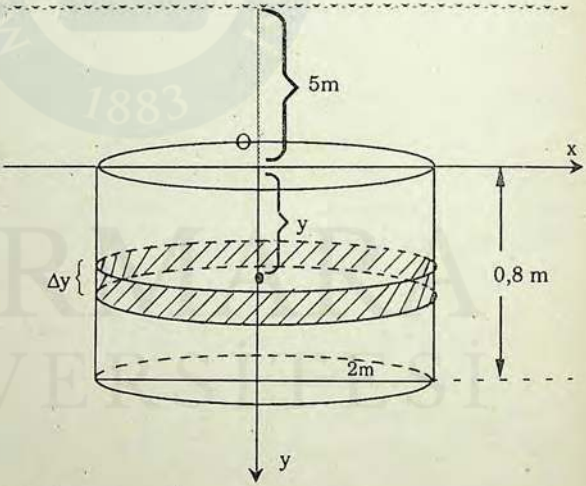
b) 15 cm lik yay 18 cm den 20,2 cm ye uzatılırken kuvvetin uygulama noktası x = 3 den x = 5,2 ye kadar değiştiğinden yapılan iş

$$W = \int_3^{5,2} 100x\,dx = 50x^2\Big]_3^{5,2} = 902 \text{ cm N} = 9{,}02 \text{ J}$$

bulunur.

ÖRNEK 2. Taban yarıçapı 2m, yüksekliği 0,8m olan dik silindir şeklindeki bir depo su ile doludur. Depodaki suyun üst yüzden 5 m yüksekliğe pompalanması halinde yapılan işi bulunuz. (suyun ağırlığı $\omega = 9800$ N/m³)

Çözümü:
Koordinat düzlemini şekil 186 daki gibi alalım. Depo içindeki suyun birtakım ince disklere ayrıldığını varsayalım. Bu disklerden birinin kalınlığı Δy ise



(186. Şekil)

hacmi :

$\Delta v = \pi r^2 . \Delta y = 4\pi\Delta y$

ağırlığı :

$\omega.\Delta v = 9800.4\pi\Delta y = 39200\,\pi\Delta y$

olur. Eğer diskin kütle merkezinin üst yüzeyden uzaklığı y metre ise bu diskteki su (y + 5) metre yukarıya pompalanacaktır. Bu durumda yapılan iş, diski kaldırmak için gerekli kuvvet diskin ağırlığına eşit olacağından

$$\Delta W = 39200\,\pi \Delta y\,(y + 5)$$

dir. Buradan depodaki tüm suyun pompalanması halinde yapılan iş

$$W = \int_0^{0,8} 39200\pi\,(y + 5)\,dy = 39200\,\pi\left(\frac{y^2}{2} + 5y\right)\Bigg]_0^{0,8} = 169344\pi \quad J$$

bulunur.

ÖRNEK 3. 40 m uzunluğunda ve 100 N/m ağırlığındaki bir kablo 15000 N luk bir yük taşımaktadır. Kablonun 30 metresinin makaraya sarılmasıyla yapılan işi bulunuz.

Çözümü: Herhangibir anda makaraya sarılmış olan kablonun uzunluğu x metre olsun. Sarılmamış kablonun uzunluğu (40 - x) metre, makaraya etkiyen toplam ağırlık $15000 + (40 - x)100 = (19000 - 100x)$ N dur. Bu ağırlığın Δx kadar kaldırılmasıyla yapılan iş

$$\Delta W = (19000 - 100x)\,\Delta x$$

olur. Buradan aranan iş

$$W = \int_0^{30} (19000 - 100x)\,dx = 19000x - 50x^2\Big]_0^{30} = 525000\ J$$

bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1) 600 N luk bir kuvvet 3 m uzunluğundaki bir yayı 0,2 m uzatıyor. Yay uzunluğunun

a) 3 m den 4 m ye,

b) 4 m den 4,2 m ye uzatılması;

c) 3 m den 2,5 m ye sıkıştırılması halinde yapılan işi bulunuz.

[a) 1500 J b) 5760 J c) 375 J]

2) Bir eksen üzerinde bulunan A ve B parçacıkları birbirlerini aralarındaki uzaklığın karesiyle ters orantılı olarak çekiyorlar. Parçacıklar arasındaki uzaklığın 2 cm den 3 cm ye çıkarılması halinde yapılan işi bulunuz

$$(\frac{k}{6} \text{ cm N})$$

3) Taban yarıçapı 2 metre, yüksekliği 3 metre olan bir silindirik depo ω N/m^3 ağırlığında bir sıvı ile doludur. Depodaki sıvının

a) Depo üst seviyesinden,

b) Depo üst seviyesinin 6 m yukarısından dışarıya pompalanması halinde yapılan işi bulunuz

[a) $18\pi\omega$ J b) $90\pi\omega$ J]

4) Yarıçapı 2 m olan yarım küre şeklindeki bir depo su ile doludur. Suyun depodan 3m yukarıya pompalanması halinde yapılan işi bulunuz

$(196000\pi$ J)

5) Yarıçapı 10 m, yüksekliği 8m olan koni şeklindeki bir depoda ω N/m^3 ağırlığında sıvı yakıt vardır. Bu yakıtın deponun üst seviyesinden dışarıya pompalanması halinde yapılan işi bulunuz

$$(\frac{1600\pi\omega}{3} \text{ J})$$

6) Ters koni şeklindeki (tepesi aşağıda) bir su deposunun taban yarıçapı 2 m, yüksekliği 5 m dir. Deponun içinde bulunan 3 m derinliğindeki suyun deponun üst yüzünden 1 m yukarıya pompalanması halinde yapılan işi bulunuz

$(52920\pi$ J)

7) Kare tabanlı prizma şeklindeki bir deponun tabanının bir kenarı 4 m, yüksekliği 2 m dir. Deponun 3/4 ü 9000 N/m^3 ağırlığında bir sıvıyla dolu olduğuna göre bu sıvının depo üst seviyesinden 1 m yukarıya pompalanmasıyla yapılan işi bulunuz

$(729000\pi$ J)

8) 400 m derinlikteki bir maden ocağından bir vinç ile 500 kg lık kömür yukarıya çekiliyor. Vincin çekme halatı 40 N/m ağırlığında olduğuna göre yapılan işi bulunuz

$(3{,}56.10^6$ J)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1) S. SÜRAY ; Umumi Matematik Cilt 1, Ankara Fen Fakültesi Yayınları, 1962.

2) MANGOLDT - KNOPP ; Einführung in die Höhere Mathematik I, II, III. (Çeviren : Berki Yurtsever, Yüksek Matematiğe Giriş I, II, III. Ankara Üniversitesi yayınları, 1962-1964), S. Hirzel, Leipzig 1958

3) F. AYRES ; Calculus, Theory and Problem, Schaum publishing Company, 1964.

4) R.C. FİSHER and A.D. ZIEBUR ; Calculus and Analytic Geometry, Prentice - Hall, Inc., 1965.

5) B. YURTSEVER, Matematik Analiz Dersleri cilt I, 1968.

6) N.M. GÜNTER - R. O. KUSMIN ; Aufgabensammlung zur Höheren Mathematik, I, Veb Deutscher Verlag, Berlin 1968.

7) N. CÖMERT ; Yüksek Matematik I, Ankara Yüksek Teknik Öğretmen Okulu Yayınları, 1974.

8) S. AYDIN ; Analize giriş Cilt I, Başarı Yayınları, 1975

9) M. EMİN ALTAN ; Yüksek Matematik I - II; Arpaz Matbaacılık, 1975-1976.

10) S. AYDIN, ABDULLAH DEMİRALP ; Analize Giriş Cilt II, Başarı Yayınları, 1979.

11) AHMET A. KARADENİZ ; Yüksek Matematik Cilt I, Çağlayan Basımevi, 1981.

12) L. BİRAN, E. YARIZ ; Genel Matematik, İ.İ.T.İ.A. Nihad Sayar - Yayın ve Yardım Vakfı, Met/er matbaası, 1982.

13) H. YÜKSEL ; Yüksek Matematiğe Giriş, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 1982.

14) W. SCHWEİZER ; Analysis, Ernst Klett Verlag, 1988.

15) G.B. THOMAS, R.L.FINNEY ; Elements of Calculus and Analytic Geometry, Addison - Wesley Publishing Company, 1989.

16) A. ÖZDEĞER ; Çözümlü Analiz Problemleri Cilt I, Kuşak Ofset, 1989.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ISBN 975 - 400 - 046 - 8

Bu kitabın tüm yayın hakkı yazarına aittir.
Kısmen yada tamamen kopya edilip çoğaltılamaz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
TEKNİK EĞİTİM FAKÜLTESİ
DÖNER SERMAYE İŞLETMESİ
MATBAA BİRİMİNDE BASILMIŞTIR.