Ocak 2000, ss.55-59.

# COBB-DOUGLAS ÜRETİM FONKSİYONUNUN GEOMETRİK PROGRAMLAMA İLE ANALİZİ

***Dr. Tuncay CAN***

***M.Ü. İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, Yardımcı Doçent***

***Abstract:*** *Geometric programming is a recent analytical technique developed for solving a class of nonlinear programming problems that often arise in the fields of management Science and engineering design. Characteristic of these problems is the fact that the function to be maximized or minimized is the sum of products of a certain number of terms. The Cobb-Douglas production function is fairly universal law relating manufacturing output $\gamma$ to the inputs labor and capital K as* $Y = \gamma L^{\alpha} K^{\beta}$ *where $\gamma$, $\alpha$ and $\beta$ are assumed to be constants. We shall consider studies of maximizing the output of a production process subject to a budget constraint using geometric programming technique.*

## I-GİRİŞ

Bu makalenin amacı Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun analiz edilmesinde Geometrik Programlama (GP) tekniğinin amaca uygun tanıtılması ve kullanılmasıdır. Yapılan literatür taramasında böyle bir çalışmaya ülkemizde rastlanmamıştır.

Bir firmanın elde ettiği ürün (output) ile kullandığı girdiler (input) arasındaki ilişkilere "üretim fonksiyonu" adı verilir. Girdilerin veya ürünün fiyatlarını ve dolayısıyla firma için maliyetlerini hiç hesaba katmadan, sadece bilinen üretim teknikleri çerçevesi içinde "girdi ürün ilişkilerini" fiziki yönü ile ele alan üretim fonksiyonu biz bir firmanın hangi üretim kanunlarının etkisi altında bulunduğu gösterecektir.

Bir firmanın üretim miktarı $\gamma$, bu miktar ürünü elde etmek için kullanılması gereken girdiler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise girdi-ürün ilişkilerini

$$y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad (1)$$

Şeklinde bir "üretim fonksiyonu" ile gösterebiliriz. Bu gösterimle $\gamma$ çok değişkenli bir fonksiyondur ve fonksiyonun yapısı (doğrusal ve doğrusal olmayan) hakkında bir fikir vermez. Girdileri emek(L) ve sermaye (K) ile gösterirsek (1) ile gösterilen fonksiyonu

$$y=f(L,K)$$

Fonksiyonuna indirgeyebiliriz. Bugüne kadar yapılan çalışmalarda çoğu iktisatçı üretim fonksiyonunu bulmaya çalışmışlardır. P.H. Douglas ve C.W.Cobb bu araştırmayı yapan iki ünlü iktisatçıdır. Gerçekte Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun "wicksell fonksiyonu" olarak adlandırılması gerekir. Çünkü İsveç'li iktisatçı Knut Wicksell (1851-1926) sözü edilen üretim fonksiyonunu 1900 den önce tanıtmıştı. (Bakınız: B. Sandelin, "On the origin of the Cobb-Douglas'ın Amerika Birleşik Devletlerinde yaptıkları araştırmada imalat sanayii ele alınmıştır. Girdi olarak sadece emek ve sermaye ayrımı yapılmış ve ürün olarak ta bütün mamuller alınmıştır ve sonuçta Amerikan ekonomisindeki sınai üretim artışlarının ¾ ü emeğin katkısı, ¼ i kapitalin katkısı ile sağlanabileceği gösterilmiştir.

Cobb-Douglas üretim fonksiyonu $\gamma$, $\alpha$, $\beta$ sabitler, L(emek) ve K(sermaye) olmak üzere

$$y = \gamma L^{\alpha} K^{\beta} \qquad (2)$$

şeklinde tanımlanır. (2) ile gösterilen Cobb-Douglas üretim fonksiyonu doğrusal olmayan bir fonksiyondur ve bu tür bir fonksiyonun kullanımı şüphesiz ki doğrusal üretim fonksiyonunun kullanılmasından daha gerçekçi bir yaklaşım sağlar.

(2) fonksiyonun bazı temel özellikleri şöyledir:

i) $\alpha+\beta$ nıncı dereceden homogendir.

ii) $\alpha+\beta=1$ ise doğrusal olarak homogendir.

Homojenlik özelliği L ve K nın $t>0$ iken tL ve tK haline getirildiğinde çıktının da

$$f(tL,tK)=\gamma(tL)^{\alpha}(tK)^{\beta}=t^{\alpha+\beta}\gamma L^{\alpha}K^{\beta}=t^{\alpha+\beta}f(L,K)$$

olması olgusunda yatar. Yani Cobb-Douglas üretim fonksiyonu $\alpha+\beta$ derecesinden homojendir. $\alpha+\beta=1$ ise fonksiyonu 1.dereceden homojendir ve bu özellik "ölçeğe göre değişmeyen getiri" (constant return to scale) kuralının geçerli olduğunu gösterir. Şu halde Cobb-

Douglas'ın ABD de yaptıkları araştırma Amerikan imalat sanayinde "ölçeğe göre değişmeyen getiri" kuralının geçerli olduğunu ortaya koymuştur. $\alpha+\beta>1$ ise ölçeğe göre artan getiri, $\alpha+\beta<1$ ise ölçeğe göre azalan getiri anlamına gelir.

Biz bu çalışmada bir bütçe kısıtı altında bir üretim sürecinin çıktısını maksimize etmek için GP yi kullanarak bir model üzerinde çalışacağız.

GP, 1964 yılında önceleri mühendislik problemlerinin çözümü için geliştirilen ve sonraları diğer birçok bilim dallarında olduğu gibi iktisadi problemlerin çözümünde de başarılı bir şekilde uygulanan doğrusal olmayan programlama probleminin özel bir halidir.

$$\underline{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_N),\ b_t\in R^+ \text{ ve } a_{tn}\in R \text{ olmak uzere}$$

$$y\equiv y(\underline{X})=\sum_{t=1}^{T} b_t\prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{tn}} \quad , \quad \underline{X}>0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona "posynomial fonksiyon" denir.

$b_t(t=1,2,\ldots,T)$ katsayıları "ekonomik katsayılar" ve $a_{tn}(t=1,2,\ldots,T;\ n=1,2,\ldots,N)$ kuvvetleri de "teknolojik katsayılar" olarak adlandırılır. $b_t$ katsayılardan en az birinin negatif olması durumunda $Y(\underline{X})$ fonksiyonu "signomial fonksiyon" adını alır. Gerçel Dünya problemlerinde doğrusal olmayan programlama problemlerinin de birçok kısıtla karşılaşılır.

$$\text{Min}: y_0(\underline{X})=\sum_{t=1}^{T_0} b_{0t}\prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{0tn}} \tag{3}$$

$$\text{Kisitlar}\quad y_m(\underline{X})=\sum_{t=1}^{T_m} b_{mt}\prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{mtn}}\le 1;\ m=1,2,\ldots,M$$
$$\underline{X}=(x_1,x_2,\ldots,x_N)\ ;\ x_i>0\ ,i=1,2,\ldots,N \tag{4}$$

modeli ile verilen "posynomial geometrik programlama" problemini ele alalım. Modelimizde M tane eşitsizlik ve bir tane amaç fonksiyonu olmak üzere M+1 tane posynomial bağıntı vardır. Amaç fonksiyonuna "primal fonksiyon", $x_i>0$ ; $i=1,2,\ldots,N$ değişkenlerine "primal değişken" veya "primal karar değişkenleri" adı verilir. (4) kısıtlarına "primal kısıtlar" adı verilir.

Her primal fonksiyondaki terim sayısını $T_m$ ; $m=0,1,\ldots,M$ ile her bir terimin katsayısı çift indis ve her bir değişkenin kuvveti üç indis ile gösterilecektir.

$c_{mt}$; m : denklem, t : terim

$a_{mtn}$; m : denklem, t : terim, n : değişken

Şu halde, örneğin $c_{04}$ amaç fonksiyonunda 4.terimin katsayısını gösterirken, $a_{342}$, 3.kısıtta 4.terimde 2.değişken kuvvetini gösterir.

Amacımız M primal kısıt altında amaç fonksiyonunu minimum yapan $\underline{X}=(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_N)$ vektörünü bulmaktır.

Kısıtsız posynomial geometrik programlamada olduğu gibi kısıtlı posynomial geometrik programlamada da primal amaç fonksiyonunun kısıtlar altında minimum noktaya ulaşmada Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliği (Cauchy Eşitsizliği) önemli rol oynar. $u_1,u_2,\ldots,u_T$ gibi negatif olmayan sayıların aritmetik ile geometrik ortalama arasındaki bağıntı

$$\frac{1}{T}(u_1+u_2+\cdots+u_T)\ge(u_1.u_2\ldots u_T)^{\frac{1}{T}}$$

şeklinde verilir. Bu eşitsizlik, $u_1,u_2,\ldots,u_T$ herhangi negatif olmayan sayılar ve $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_T$ toplamları bire eşit olan pozitif ağırlıklar olmak üzere

$$\delta_1u_1+\delta_2u_2+\ldots+\delta_Tu_T\ge u_1^{\delta_1}u_2^{\delta_2}\ldots u_T^{\delta_T} \tag{5}$$

şeklinde de yazılabilir. $u_1=u_2=\ldots=u_T$ şartı ile (5) eşitsizliği eşitlik şekline dönüşür. $y(\underline{x})$ posynomial fonksiyon

$$y(\underline{x})=\sum_{t=1}^{t}\delta_t\left(\frac{b_tr_t(\underline{x})}{\delta_t}\right)$$

$$r_t(\underline{x})=\prod_{t=1}^{T} x_n^{a_{mtn}}\ ;{}_{m=0,1,\ldots M}^{t=1,2,\ldots,T}$$

şeklinde yazılabilir ve bu form ile aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılabilir. (5) de yazılan aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak

$$y(\underline{x})\ge\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{b_tr_t}{\delta_t}\right)^{\delta_t}=\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{b_t}{\delta_t}\right)^{\delta_t}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{b_t r_t}{\delta_t}\right)^{\delta_t}$ ifadesi "predual fonkisyon" ve $\prod_{t=1}^{T}\left(\frac{b_t}{\delta_t}\right)^{\delta_t}$ ifadesi de "dual fonksiyon" olarak adlandırılır. $\delta_t$ değişkenlerine de "dual değişkenler" adı verilir. Optimal ağırlıklar

$$w_t = \frac{b_t r_t}{y} \quad ; \quad t = 1,2,\dots,T$$

şeklinde tanımlanır.

$\sum_{t=1}^{T} a_{tn}\delta_t = 0 \quad ; \quad n = 1,2,\dots,N$ denklemine "ortogonolite koşulu" ve $\sum_{t=1}^{T}\delta_t = 1$ denklemine de "normalite koşulu" adı verilir. Terim sayısı ve doğrusal denklemlerin sayısı arasındaki fark "zorluk derecesi" olarak adlandırılır. Şu halde kısıtsız problem için N ortogonolite koşulu ve bir normalite koşulu vardır ve bu denklemler

T-(N+1)

Zorluk derecesine sahiptirler. (5) eşitsizliği ele alınıp

$$J_i = \delta_i u_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,T$$

değişken dönüşümü yapılırsa aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği

$$J_1 + J_2 + \dots + J_T \geq \left(\frac{J_1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{J_2}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\cdots\left(\frac{J_T}{\delta_T}\right)^{\delta_T}$$

$$\sum_{i=1}^{T}\delta_i = 1 \qquad (7)$$

eşitsizliğine dönüşür. (5) eşitsizliği $\delta_i$ ağırlıklarının normalite koşulunu sağlamadığı durumda

$$\lambda = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_T$$

yazılarak gösterilebilinir. Normalize ve normalize edilmemiş ağırlıklar arasındaki bağıntı

$$\Delta_i = \lambda\delta_i \quad ; \quad i = 1,2,\dots,T \qquad (8)$$

şeklinde verilir. (7) ve (8) eşitlikleri kullanılarak

$$(J_1 + J_2 + \dots + J_T)^{\lambda} \geq \left(\frac{J_1}{\Delta_1}\right)^{\Delta_1}\left(\frac{J_2}{\Delta_2}\right)^{\Delta_2}\cdots\left(\frac{J_T}{\Delta_T}\right)^{\Delta_T} \qquad (9)$$

elde edilir.

Amacımızı açıklamak ve Cobb-Douglas üretim fonksiyonu modelinde karşımıza çıkacağı için bir tek kısıt kullanarak posynomial G.P problemini tekrar gözönüne alalım ve yöntemi göstermeye çalışalım.

$$Min \quad y_0(\underline{x}) = \sum_{t=1}^{T_0} b_{0t} r_t(\underline{x}) \qquad (10)$$

$$Kisit \ : \quad y_1(\underline{x}) = \sum_{t=1}^{T_1} b_{1t} q_t(\underline{x}) \qquad (11)$$

$$r_t(\underline{x}) = \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{0tn}} \quad ; \quad t = 1,2,\dots,T_0$$

$$q_t(\underline{x}) = \prod_{n=1}^{N} x_n^{a_{1tn}} \quad ; \quad t = 1,2,\dots,T_1$$

posynomial G.P problemini ele alınsın. (9) da verilen aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği kullanılarak $y_0(\underline{x})$ ve $y_1(\underline{x})$ için

$$[y_0(\underline{x})]^{\lambda_0} \geq \left(\frac{b_{01}r_1(\underline{x})}{\Delta_{01}}\right)^{\Delta_{01}}\left(\frac{b_{02}r_2(\underline{x})}{\Delta_{02}}\right)^{\Delta_{02}}\cdots\left(\frac{b_{0T_0}r_{T_0}(\underline{x})}{\Delta_{0T_0}}\right)^{\Delta_{0T_0}}\lambda_0^{\lambda_0} \qquad (12)$$

$$1 \geq [y_1(\underline{x})]^{\lambda_1} \geq \left(\frac{b_{11}q_1(\underline{x})}{\Delta_{11}}\right)^{\Delta_{11}}\left(\frac{b_{12}q_2(\underline{x})}{\Delta_{12}}\right)^{\Delta_{12}}\cdots\left(\frac{b_{1T_1}q_{T_1}(\underline{x})}{\Delta_{1T_1}}\right)^{\Delta_{1T_1}}\lambda_1^{\lambda_1} \qquad (13)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (12) ve (13) eşitsizliklerin her iki tarafı karşılıklı çarpılarak

$$\left[y_0(\underline{x})^{\lambda_0}\right] \geq \left(\frac{b_{01}r_1(\underline{x})}{\Delta_{01}}\right)^{\Delta_{01}}\cdots\left(\frac{b_{0T_0}r_{T_0}(\underline{x})}{\Delta_{0T_0}}\right)^{\Delta_{0T_0}}\left(\frac{b_{11}q_1(\underline{x})}{\Delta_{11}}\right)^{\Delta_{11}}\cdots\left(\frac{b_{1T_1}q_{T_1}(\underline{x})}{\Delta_{11}}\right)^{\Delta_{1T_1}}\lambda_0^{\lambda_0}\lambda_1^{\lambda_1} \qquad (14)$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir.

(14) eşitsizliği ağırlıklarının her seçimi için sağlanmasına rağmen $\lambda_0=1$ seçilerek normalize edilmiş ağırlıkları seçmek uygundur. Şu halde

$$\lambda_0 = \delta_{01} + \delta_{02} + \ldots + \delta_{0T_0} \equiv 1$$

bağıntısı yazılabilir. Diğer ağırlıkları da $\delta_i$ ağırlıkları cinsinden yazarsak (14) eşitsizliği

$$y_0(\underline{x}) \geq \left(\frac{b_{01} r_1(\underline{x})}{\delta_{01}}\right)^{\delta_{01}} \ldots \left(\frac{b_{0T_0} r_{T_0}(\underline{x})}{\delta_{0T_0}}\right)^{\delta_{0T_0}} \left(\frac{b_{11} q_1(\underline{x})}{\delta_{11}}\right)^{\delta_{11}} \ldots \left(\frac{b_{1T_1} q_{T_1}(\underline{x})}{\delta_{11}}\right)^{\delta_{1T_1}} \lambda_1^{\lambda_1}$$

eşitsizliği şeklinde yazılabilinir. Buradan hareketle Dual G.P. olarak adlandırılan model aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$Mak \quad d(\delta) = \prod_{m=0}^{M} \prod_{t=1}^{T_m} \left(\frac{b_{mt}\delta_{m0}}{\delta_{mt}}\right)^{\delta_{mt}}$$

$$Kisitlar: \quad \sum_{t=1}^{T_0} \delta_{0t} = 1$$

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T_m} a_{mnt}\delta_{mt} = 0 \qquad : \ n = 1,2,\ldots,N$$

$$\delta_{m0} = \sum_{t=1}^{T} \delta_{mt} \qquad : \ m = 1,2,\ldots,M$$

$$\delta_{00} \equiv 1 \quad \text{ve} \quad \delta_{m0} \equiv \lambda_m$$

Dual G.P. probleminde bağımsız N+1 tane eşitlik halinde dual kısıt ve bağımsız T dual değişken vardır:

$$T \equiv \sum_{m=0}^{M} T_m$$

T-(N+1) sıfıra eşitse yani zorluk derecesi yoksa çözüm tektir. T-(N+1)>0 ise yani zorluk derecesi varsa bu durumda doğrusal olmayan kısıtlar altında doğrusal olmayan programlama problemi, doğrusal kısıtlı konkav programlama problemine dönüştürülür.

Şu halde dual fonksiyonun kısıtlar altında maksimize edilmesi halinde primal fonksiyonun minimum(global) değeri bulunmuş olur.

$y=\gamma L^{\alpha}K^{\beta}$ Cobb-Douglas üretim fonksiyonuna geri dönersek $\alpha=2/3$ ve $\beta=1/3$ olduğunu varsayalım. $\alpha+\beta=1$ olduğu için "ölçeğe göre sabit getiri" kuralı geçerli olacaktır. Yani, girdilerdeki aynı oranda değişiklik olursa çıktıda da aynı oranda değişiklik olacaktır. Matematiksel olarak açıklamak gerekirse L ve K bir Y çıktısını veriyorsa t>0 olmak kaydıyla tL ve tK girdileri tY çıktısını oluşturacaktır. Şu halde

$$\gamma(tL)^{2/3}(tK)^{1/3} = \gamma t^{2/3} L^{2/3} t^{1/3} K^{1/3} = t\gamma L^{2/3} K^{1/3} = ty$$

yazılabilir ve sonuçta Cobb-Douglas üretim fonksiyonu 1.nci dereceden homogendir, yani "ölçeğe göre sabit getiri" kuralı geçerlidir.

P çıktısının birim fiyatının, w ücret oranının ve q sermaye fiyatının verildiğini varsayalım. M bir bütçe sınırı olsun.

$$P: mak\ PY_{L,K>0} = p\gamma L^{2/3} K^{1/3}$$

$$Kisit\ : \ wL + qK \leq M$$

PY>0 olduğu için verilen modelde PY yi maksimize etmek yerine $\frac{1}{p}Y^{-1}$ i minimize edebiliriz. Şu halde problem

$$P' : \min_{L,K>0} \frac{1}{p} Y^{-1} = p^{-1}\gamma^{-1} L^{-2/3} K^{-1/3}$$

$$Kisit\ : \ \frac{w}{M}L + \frac{q}{M}K \leq 1$$

modeline indirgenmiş olur.

$x_1:=L$, $x_2:=K$, $d_1:=p^{-1}\gamma^{-1}$, $d_1:=w/M$, $d_2:=q/M$

denilirse bir tek kısıt altında posynomial geometrik programlama problemi

$$P' : \min_{x>0} z = c_1 x_1^{-2/3} x_2^{-1/3}$$

$$Kisit\ : d_1 x_1 + d_2 x_2 \leq 1$$

şeklinde yazılabilir. Terim sayısı T=3, ve değişken sayısı N=2 olduğundan problemin zorluk derecesi

T-(N+1)=3-(2+1)=0

dır. Şu halde problemin normalite ve ortogonalite koşulları altında tek bir optimal çözümü vardır. Problemimiz için normalite koşulu

$\lambda_1=1$

ve ortogonalite koşulları da

$$-\frac{2}{3}\lambda_1 + \mu_1 = 0$$

$$-\frac{1}{3}\lambda_1 + \mu_2 = 0$$

şeklindedir.

$$\lambda_1 = 1$$

$$-\frac{2}{3}\lambda_1 + \mu_1 = 0$$

$$-\frac{1}{3}\lambda_1 + \mu_2 = 0$$

denkleminin çözümünden $\lambda_1 = 1, \mu_1 = \frac{2}{3}, \mu_2 = \frac{1}{3}$

elde edilir.

$$\bar{z} = \frac{c_j \bar{p}_j}{\bar{\lambda}_j}, \; j = 1 \quad \text{ve} \quad \bar{\mu}_i = \bar{\mu} d_j \bar{q}_j \;, \; j = 1,2$$

$$\bar{z} = c_1 \bar{x}_1^{-2/3} \bar{x}_2^{-1/3}, \quad d_1 \bar{x}_1 = \frac{2}{3}, \; d_2 \bar{x}_2 = \frac{1}{3}$$

olduğundan

$$\bar{L} = \bar{x}_1 = \frac{2}{3}\frac{1}{d_1} \Rightarrow \bar{L} = \frac{2M}{3W}, \; \bar{K} = \bar{x}_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{d_2} \Rightarrow \bar{K} = \frac{M}{3q}$$

şu halde sonuçta

$$P\bar{\gamma} = \frac{1}{\bar{z}} = p\gamma \left(\frac{2M}{3W}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{3q}\right)^{1/3} = \frac{P\gamma M}{3} \left(\frac{2}{W}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{q}\right)^{1/3}$$

elde edilir.

## II-SONUÇ

Cobb-Douglas üretim fonksiyonunun çıktısını maksimize edilmesinde doğrusal olmayan programlamanın özel ve güçlü bir tekniği olan geometrik programlama kullanılmıştır. Aynı sonuca "Lagrange çarpanları metodu" kullanılarak da ulaşılabilir. Bu durumda doğrusal olmayan denklemlerle uğraşılmak zorunda kalınır ve bu denklemlerin çözümünde kullanılan teknikler (Newton Raphson vb.) gerçek çözümü bulmakta zorlanırlar. Bu nedenle G.P. tekniğinin kullanılması tercih sebebi olmalıdır.

## KAYNAKÇA


[1] Beighter, Charles S.; Phillips Donald T., **Applied Geometric Programming**. John Wiley and Sons. Inc., New York, 1976.

[2] Chiang, Alpha C., **Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri**. Çevirenler: Prof.Dr. Ergun Kip, Yrd.Doç.Dr. Muzaffer Sarımeşeli, Arş.Gör.Osman Aydoğmuş. Teori Yayınları Verso A.Ş., 1986.

[3] Duffin, R.J.; Peterson, E.L.; and Zener, C., **Geometric Programming**. John Wiley and Sons. New York, 1967.

[4] Ecker, J.G., **Geometrik Programmming: Methods, Computations and Applications**. Siam Review, Vol: 22, 1980.

[5] L.Gue, Ronald; E.Thomas, Micheal, **Mathematical Methods in Operational Research**. U.S.A., 1968.

[6] Mc Namara J.R., "On Geometric Programming and Complementary Slackness". **Journal of Optimization Theory and Applications**. Vol 74, No:2, 1992.

[7] Sinha, S.B.; Biswas, A.; Biswal, M.P., "Geometric Programming Problems with Negative Degrees of Difficulty". **European Journal of Operational Research**. Vol:28, 1987.

[8] Sydsaeter, Knut, Hammond, Peter J., **Mathematics for Economic Analysis**. Prentice-Hall International, Inc., 1995.

[9] Üstünel, Besim, **Ekonominin Temelleri**. Kurtuluş Matbaası, 1975.