

## Kuadratik Yüzeyler Konusundaki Görselleme Süreçlerinin Fakülte Farklılıkları Bağlamında İncelenmesi

### Investigation of the Visualization Processes in Quadratic Surfaces Topic in Terms of Faculty Differences

Ali DELİCE<sup>1</sup>, M. Fatih ÖÇAL<sup>2</sup>, Eyüp SEVİMLİ<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Marmara Üniversitesi, OFMA Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı.  
alidelice@marmara.edu.tr

<sup>2</sup>Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim  
Dalı. fatihocal@gmail.com

<sup>3</sup>Gaziosmanpaşa Üniversitesi, İlköğretim Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı  
eyup.sevimli@gop.edu.tr

#### ÖZ

Matematikte soyut kavramların ve simgesel temsillerin daha iyi anlaşılması bakımından görselleştirmenin her eğitim seviyesinde kullanılması önerilse de, yapılan çalışmaların genellikle lise ve altı düzeyde kaldığı görülmektedir. Bu çalışmada farklı fakültelerdeki üniversite öğrencilerinin kuadratik yüzeyler konusundaki görselleştirme süreçleri incelenmiştir. Örneklem, amaçlı örnekleme yoluyla seçilmiş olup; İstanbul'daki bir devlet üniversitesinin fen-edebiyat fakültesi, eğitim fakültesi ve teknoloji fakültesinden toplam 90 öğrenciden oluşmaktadır. Veri toplama sürecinde öğretim ortamını ve görselleme sürecini değerlendirmek üzere anket formu, test ve görüşme tekniğinden faydalanılmıştır. Çalışma bulguları, örneklem grubundaki öğrencilerin büyük çoğunluğunun kuadratik yüzeylerin görsel ve sembolik temsilleri arasında geçiş yapmakta zorlandıklarını göstermiştir. Öğrencilerin görselleme sürecindeki performanslarının kayıtlı olunan fakülte türüne göre değiştiği gözlenirken, bu farklılıklar epistemolojik inanç ve önceki öğrenme yaşantıları bağlamında tartışılmıştır. Ayrıca, öğretim ortamlarının geliştirilmesine yönelik bazı öneriler paylaşılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Fakülte farklılığı, Görselleme, Kuadratik yüzeyler

#### ABSTRACT

The studies related to visualization were generally conducted to students in high school and lower levels, even though visualization is in the use of transition from the abstract concepts and symbolic representations to concrete one to make the concepts more understandable in every education level. This study investigated the relations among university students' performance processes on basic drawings of the 3-D shapes in calculus lessons according to these shapes' figures, names and formulas. The sample was chosen conveniently and it was composed of 90 students from science faculty, faculty of education and faculty of technology at a public university in Istanbul. Test and interview were research techniques used for gathering data from the student

*to evaluate the teaching environment and visualization process. Findings showed that the vast majority of the students had difficulties in the process of transition between symbolic and visual representations of quadratic surfaces. It was also observed that, visualization performance have affected from the faculty differences. The findings have been discussed in terms of epistemological belief and previous learning experiments. In addition, some suggestions have been shared to improve teaching environments.*

**Keywords:** *Faculty differences, Visualization, Quadratic surfaces*

## GİRİŞ

Okul öncesi eğitimden başlayarak her öğretim düzeyinde, soyut kavramların ve sembolik temsillerin görsel temsillerle somutlaştırılıp daha iyi anlaşılmasını sağlamak üzere, görselleme sürecinden yararlanılabilir (Presmeg, 2006). Vergnaud (1998) matematik eğitiminde görsel öğeler ve özellikle görselleştirmenin iki büyük yararından bahsetmektedir. Bu yararlardan ilki, matematiksel nesnelere için içsel resim çizen öğrencilerin daha kolay öğreneceği iken ikincisi, sınıf ortamında kullanılacak olan dış görsellerin (materyal, temsil vb.) matematiksel nesnenin özellikleri, ilişkileri ve süreçleri arasında iletişim kurulmasına yardımcı olacaktır. Palais'in (1999) "zihin gözü" tanımından hareketle görselleştirmenin, matematikçilerin ileri matematiksel düşünme süreçleri için de önemli olduğu anlaşılabilir. Palais (a.g.e), soyut kavramları ve soyut süreçleri görsel bir hale getirmek için matematikçilerin zihin gözünü devamlı kullandıklarını ve kullanmakta olduklarını vurgulamaktadır. Zihin gözünün gelişmesi için dış görsellerin önemli olduğunu belirten Kadunz ve Sträber (2004) matematiksel bir sembolü temsil eden resim, diyagram veya grafik destekli yazılımların kavramlar ve ilişkileri algılamada yardımcı birer araç olarak kullanılabileceğine dikkat çekmektedirler. İlgili alan yazın incelendiğinde, matematik eğitiminde görselleme sürecini odağında bulunduran çalışmaların genellikle lise ve altı düzeydeki örneklem grubu ile gerçekleştirildiği görülmektedir. Bunun nedenlerinden birisi görselleme sürecinin bir somutlaştırma işlemi olarak görülmesi ve yükseköğretim düzeyindeki matematik konularının daha çok teorik doğaya sahip olması olarak görülebilir (Habre, 2001). Oysa soyutlama ve sentezleme gibi görselleme de ileri matematiksel düşünme sürecinin bileşenleri arasında yer almaktadır. Ayrıca, görselleme yükseköğretim

düzeyindeki matematiğin cebir, analiz ve geometri gibi birçok dalının anlaşılmasına yardımcı olmakta ve sezgisel yaklaşımların gelişmesini desteklemektedir (Habre, 2001; Sevimli, 2013). Özellikle analiz bilim dalı gibi cebir ve geometri disiplinlerinin doğrudan yansımalarını içeren konularda, kavramların sembolik ve görsel karşılıklarının farkında olmak ayrıca önemlidir. Bu çalışmada analitik geometri, analiz ve lineer cebir gibi yükseköğretim düzeyindeki farklı derslerde ele alınan kuadratik yüzeyler konusu, görsel ve sembolik temsillerin birbirine dönüştürülmesi süreci üzerinden karşılaştırılmıştır. Araştırmada yükseköğretim düzeyindeki öğrencilerin, disiplinler arası bir matematik konusundaki görselleştirme süreçleri, fakülte farklılıkları üzerinden değerlendirildiğinden dolayı çalışma önemlidir ve özgün değere sahiptir.

### **Yükseköğretim Düzeyindeki Matematik Konularında Görselleme**

Zihnin çeşitli etkileşimleri sonucu oluşan ve bir süreç olan görselleme kavramı içerisinde görsel/zihinsel imge ve uzamsal düşünme gibi alt bileşenleri bulundurmaktadır (Presmeg, 2006). Araştırmacıların görselleme kavramına ilişkin farklı tanımları olmakla birlikte bu çalışmada Bishop'un (1980, s.258) görselleme için yaptığı "düşünsel imgelerin, uzamsal beceri ve sezilerin birbirini etkilemesiyle oluşan süreç" tanım referans alınacaktır, bu tanımın tercih edilme nedeni sembolik ve görsel temsiller arasındaki geçiş vurgusudur. Öğrenme-öğretme sürecinde sınıf ortamlarına görselleme araçları getirilerek soyut matematiksel kavramların öğrencilerin daha kolay algılayabilecekleri formlara dönüştürülerek anlatılması gerektiğini belirten çok sayıda matematik eğitimi araştırması mevcuttur (Arcavi, 2003; Brown & Presmeg, 1993; Delice & Sevimli, 2010). Bu araştırmaların büyük çoğunluğu ilköğretim veya ortaöğretim düzeyindeki öğrencilerin uzamsal görselleme becerileri, geometri konu alanı üzerinden değerlendirilmiştir (Vergnaud, 1998; Radford, 1999; Gardener, 2006; Delice & Sevimli, 2010). Yükseköğretim düzeyinde yapılan ve odağında görselleme sürecini bulduran sınırlı sayıda çalışmanın odağında genelde analiz dersi konuları yer almaktadır (Habre, 2001; Przenioslo, 2004; Meadows, 2008). Yükseköğretim düzeyinde yapılan çalışmalar öğrencilerin, matematik kural ve işlemlerini kullanabilmelerine karşın yapılan işlemleri ne için yaptıklarını ve yapılanların ne

anlama geldiğini geometrik anlamda açıklayamadıklarını göstermiştir. Bu çalışmalardan birinde Meadows (2008), analiz dersi öğrencilerinin integral sınır değerlerini analitik olarak belirleyebildiklerini yalnız geometrik yorumunu yapamadıklarını gözlemlemiştir. Bu öğrencilerin akademik başarı puanlarının yüksek olmasına karşın süreci zihinlerinde canlandıramadıkları ve çözümlerine yansıtamadıkları belirlenmiştir. Üstelik bu zorluğun sadece integral konusunda olmadığı, buna ek olarak, türevin (Habre, 2001), limitin (Przenioslo, 2004), üç boyutlu cisimlerin (Delice ve Sevimli, 2010) geometrik yorumunun yapılmasında öğrencilerin zorluk yaşadıkları belirlenmiştir.

Bu zorlukların en temel nedenlerinden biri öğrencilerin geometri derslerinde kullandıkları şekillerin formüllerini ezberlemeye çalışmaları ve bu bilgileri sınav süresince koruyabilmeleridir (Kadunz & Sträber, 2004). Radford (1999), öğrencilerin birçok matematiksel terimleri, formülleri eğitim süresince ezberlediğini, kullanılmadığında ise kaybedildiğini yani unutulduğunu belirtmiştir. Kişi matematiğin başka bir alanıyla uğraşmaya başladığında her ne kadar eski çalışmalar arasındaki mantığı hatırlasa da matematik işlemlerini yapmakta yetersiz kalmaktadır (a.g.e). Verilen şekil veya formülün yorumlanmadan ezberlenmesi sürecinin öğrenciye katkısı sınavdaki performansının yükselmesi olabilir. Ancak bu gerçek öğrenme olarak kabul edilmemektedir. Bu görüşe destek olarak, bazı matematik eğitimi araştırmacıları, daha önceki yıllarda alınan bazı matematik konularını öğrencilerin hatırlamadıklarını veya anlamadıklarını belirtmişlerdir (Gutierrez, 1996; Meadows, 2008). Bu konu alanlarından biri de kuadratik yüzeylerdir. İkinci dereceden bir denklemin ( $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fxz+Gx+Hy+Jz+K=0$ ) üç boyutlu uzaydaki yansıması olan kuadratik yüzeylerin en bilindik formları elipsoit, eliptik paraboloid, tek/iki parçalı hiperboloid ve konidir. Analiz ve geometri derslerindeki farklı problem durumları içerisinde yer alması ve sembolik ile görsel temsil formlarına sahip olması nedeniyle öğrenciler kuadratik yüzeyleri görsellemede çeşitli zorluklar yaşamaktadır (Meadows, 2008). Bu zorlukların nedenleri öğrenci bilgi ve algısı üzerinden değerlendirilirken, fakültelerdeki uygulama farklılıklarının göz önünde bulundurulmadığı gözlenmiştir. Bu

çalışmada, yükseköğretim düzeyindeki öğrencilerin kuadratik yüzeyler konusundaki görselleme süreci farkındalığı, fakülte farklılıkları bağlamında değerlendirilmiştir.

## YÖNTEM

Araştırmanın desen ve tekniklerinin belirlemeden önce, araştırmacının sahip olduğu dünya görüşü, temel inançlar topluluğu olan paradigmasının belirlenmesi önemlidir (Guba & Lincoln, 1994). Araştırma desenlerinden olan durum çalışmalarında, bir birey, bir grup, bir olgunun tüm yönleriyle ele alınması amaçlanırken güncellik önemlidir (Cohen, Manion & Morrison, 2007, s. 182). Görselleme sürecinin kuadratik yüzeyler konusu üzerindeki yansımaları, neden ve nasıl sorularına cevap aranacak biçimde değerlendirildiğinden, nitel yaklaşımlar tercih edilmiş; çoklu durum deseni ile fakülteler bazında karşılaştırmalar yapılmıştır. Sonuç olarak, araştırma nitel yorumlayıcı paradigmanın ilkeleri doğrultusunda çoklu durum deseni üzerinden yapılandırılmıştır.

**Örneklem:** Bir araştırmanın kalitesini yöntem seçimi kadar çalışılan örneklemin doğru seçimi de belirler (Cohen, Manion & Morrison, 2007, s. 100). Araştırmanın örneklemini, İstanbul'da bir devlet üniversitesinde, fen-edebiyat fakültesi matematik bölümünden 28 (FEF), eğitim fakültesi ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünden 32 (EF) ve teknoloji fakültesi bilgisayar mühendisliği bölümünden 30 (TF) öğrenci oluşturmaktadır. Örneklem seçimi yaparken araştırmacının kendi yargısını göz önünde bulundurarak, amacına en uygun olan çalışma grubunu oluşturabileceği amaçlı örnekleme tekniği kullanılmıştır (Balcı, 2006, s. 90). Öğrencilerin aynı sınıf seviyesinde (2. sınıf) ve yükseköğretim düzeyindeki temel matematik derslerini aynı öğretim elemanı tarafından almış olmalarına dikkat edilmiştir. Bu bağlamda EF ve FEF'in Analiz-I ve Analiz-II dersi adı altında aldığı konu başlıkları ile TF'de alınan Genel Matematik derslerindeki konu başlıkları örtüşmektedir. Örneklem grubu seçilirken fakültelerin matematik bilim insanı yetiştirmek (FEF), matematik öğretmen adaydı yetiştirmek (EF) ve matematiği mühendislik problemlerinde esnek olarak kullanabilecek meslek insanı yetiştirmek (TF) gibi vizyon farklılıklarının görselleme sürecine etkisi de konu edinilmiştir. Bu çalışma kapsamında özel olarak incelenen

kuadratik yüzeyler konusuna her üç fakülte düzeyinde en az iki ders türü içerisinde yer verilmektedir. Her üç fakülte'deki öğrenciler kuadratik yüzeyler konusunu öncelikle analitik geometri dersinde işlemekte daha sonra Analiz veya Genel matematik dersleri içerisindeki çok katlı türev ve integral hesabında bu yüzeylerin kullanıldığı problem durumları ile karşılaşmaktadırlar.

**Veri Toplama Araçları:** Araştırmada fakülte farklılıkları göz önüne alınarak matematik eğitiminde görselleştirme sürecinin nasıl işlediği incelenmiştir. Bu bakımdan kullanılan veri toplama aracı bu farklılıkları ortaya çıkartacak nitelikte olması gerekmektedir. Araştırmadaki veri toplama araçları anket formu, test ve görüşmedir. Araştırma problemleri doğrultusunda geliştirilen anket formu ile öğrencilerin kuadratik yüzeyler konusunda verilen şekil, formül ve isimleri eşleştirmeleri beklenmiştir. Analiz ders kitaplarından seçilen ve araştırmacılar tarafından üretilen sorularda kuadratik yüzeylerin şekilleri, isimleri ve formülleri karışık olarak verilmiş ve öğrencilerden ilgili şeklin isim ve formülünü eşleştirmesi istenmektedir. Anket formu aynı zamanda üçlü likert ölçeği ile öğrencilerin cevaplarından ne kadar emin oldukları da içermektedir. İkinci veri toplama aracı olan test ile öğrencilerin görselleştirme becerilerinin performans sürecine etkisi, sembolik-görsel temsil geçişleri üzerinden anlaşılmaya çalışılmıştır. Öğrencilerden, formülü verilen matematiksel ifadenin şeklini ve şekli verilen ifadelerin matematiksel ifadesini göstermeleri istenmiştir. Böylelikle öğrencilerin görselleştirme sürecinde ne zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir. Sorular hazırlanırken yine mevcut literatürden ve uzman görüşünden yararlanılmıştır. Ayrıca her fakülte'den amaçlı örnekleme göre seçilen ikişer öğrenci ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmeler destekleyici veri olarak bulgular ve tartışma bölümünde kullanılmıştır.

**Verilerin Çözümlemesi:** Araştırmada elde edilen veriler, betimsel istatistik ve içerik analizi yöntemleri kullanılarak değerlendirilmiştir. Birer hafta ara ile uygulanan anket formu ve test ile elde edilen bulguların çözümlemesinde betimsel istatistiğe başvurulmuştur. Bu araştırmada kullanılan betimsel istatistik kategorik verilerde frekans ve yüzde dağılımlarını özetlemek için kullanılmıştır. Görüşme formuna öğrencilerin verdikleri cevaplar süreçlerin daha derinden bir işleme tabi tutulabilmesi için içerik

analizi yardımıyla değerlendirilmiştir (Yıldırım & Şimşek, 2006, s. 227). Her bir öğrencinin her bir veri toplama aracına verdiği yanıtlar önce bireysel daha sonra fakülte bazında değerlendirilmiş ve tablolar okuyucunun kolay karşılaştırma yapabileceği şekilde düzenlenmiştir. Bulgular aktarılırken frekans ve cevap yüzdelerinin yanında görüşme kesitleri ve çözüm örneklerine de yer verilmiştir.

## BULGULAR

Araştırma kapsamında elde edilen bulgular iki başlık altında sunulmuş ve gerektiği görülen yerlerde yorumlarla desteklenmiştir. Bu başlıklardan ilki, anket ve görüşme formu üzerinden elde edilen bulguların yer aldığı görselleme bilgisi ve farkındalığıdır. İkinci başlıkta örneklemin teste verdiği cevaplar performans bağlamında dikkate alınmış ve bulgular görselleme başarısı başlığı altında sunulmuştur.

### Görselleme Bilgisi ve Farkındalığı

Öğrencilerin görselleme bilgisi sembolik ve görsel temsiller arasındaki geçiş becerileri üzerinden değerlendirilmiştir. Bu bağlamda anket formu uygulamalarında öğrencilerden kuadratik yüzeylerin şekil-şeklin ismi ve formülü karşılaştırmaları istenmiştir. Tablo 1’de kuadratik yüzey isim-şekil-formül ikili eşleştirmelerinin tümünü doğru yapan (Tam doğru), %50 üzeri ve %50 altı doğru yapan öğrenci yüzde ve frekanslarına yer verilmiştir.

**Tablo 1.** Kuadratik Yüzey İsim-Şekil-Formül Eşleştirme Başarı Oranları

	EF		FEF		TF	
	%	(F)	%	(F)	%	(F)
Tam Doğru	6	(2)	-	(-)	10	(3)
%50 – %99 Doğru	50	(16)	43	(12)	53	(16)
%0 – %49 Doğru	44	(14)	57	(16)	36	(11)

Elde edilen sonuçlar bilgi düzeylerinin her üç fakülte içinde oldukça düşük olduğunu göstermiştir. Özellikle FEF öğrencilerinin formüllerdeki değişkenleri ayırt edemedikleri

görülmüştür. Kuadratik yüzeylelerin sözel, sembolik ve görsel temsillerinin eşleştirilmesi sürecinde FEF öğrencilerinin, EF ve TF öğrencilerine göre başarısız oldukları belirlenmiştir. Eşleştirmelerde TF öğrencilerinin en başarılı grup olduğu görülmüştür. İsim-şekil-formül eşleştirmelerinde yer alan yedi sorunun en az üç tanesi için çizim yapmaya çalışan öğrenci sayısı EF için 20 (% 62), FEF için 14 (%57) ve TF için 22 (%73)'dir. Görselleme çabası ve başarı arasındaki ilişki incelendiğinde yüzey şekillerini çizmeye çalışan EF öğrencilerinin eşleştirmelerde daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Anket formu üzerindeki veriler, FEF öğrencilerinin görselleme anlamında yeteri kadar uğraşta bulunmadıklarını göstermiştir. Burada öğrencilerin epistemolojik inançları da başarısızlığın sebebi olarak değerlendirilebilir (Gardner, 2006). Öğrenciler, daha önce karşılaşmadıkları veya karşılaşmadığını sandıkları kuadratik yüzeyle için çarpanlara ayırma, referans noktaları oluşturma ve ekstremum noktaları belirleme gibi işlemlerle görselleme sürecini tamamlayabilecek iken; genelde kalıp olarak öğrendikleri şekil-formül eşleştirmelerine atıfta bulunmaya çalışmışlardır. Fakülte farklılığından bağımsız olarak öğrencilerin üç boyutlu uzayı temsil eden formüller üzerine yorum yapamadıkları görülmüştür.

Öğrencilerin cevaplarına göre her fakülte için isim-şekil eşleştirmesinde çift yapraklı hiperbol, elipsoit ve kürede %60'ın üzerinde başarı elde edilmiştir. FEF grubundaki cevapların neredeyse tamamında öğrenciler eliptik parabol ile tek yapraklı hiperbolü karıştırmış; diğer gruplarda belirgin farklılık gözlenmemiştir. EF, FEF ve TF öğrencilerinin ortak başarılı oldukları şekil-formül eşleştirmesi sadece küre ve elipsoittir. İsim-formül eşleştirmesinde öğrenci başarılarının daha düşük olduğu belirlenmiştir. En az başarı yine FEF grubundaki öğrencilerde görülmüştür. Öğrencilere ayrıca yaptıkları eşleştirmelerden emin olup olmadıkları ve hangi tür eşleştirmelerde zorlandıkları sorulmuş böylece bilginin farkındalık düzeyinin değerlendirilmesi hedeflenmiştir. Bu bağlamda öğrencilere yöneltilen, "*Sizin için formülden şekli çizmek mi yoksa şekilden formül elde etmek mi kolay? Neden?*" sorusuna verilen yanıtlar Tablo 2'de özetlenmiştir. Her üç fakülte'deki öğrenciler daha yüksek yüzdeler ile formülden şekle gitmenin kolay olduğunu düşünmektedir. Öğrenciler, benzer olarak şeklin görsel

temsilini bilmeseler de, formüldeki değişkenlere değer verip noktaları birleştirerek şekli çizebileceklerini söylemişlerdir.

**Tablo 2.** Kuadratik Yüzeylerde Şekil-Formül Geçişlerine İlişkin Öğrenci Görüşleri

<b>Görüş</b>	EF		FEF		TF	
	%	(F)	%	(F)	%	(F)
Şekilden formüle geçiş daha kolay	69	(22)	54	(15)	67	(3)
Formülden şekle geçiş daha kolay	12	(4)	21	(6)	20	(16)
İkisi de zor	9	(3)	-	(-)	3	(11)

Kuadratik yüzeylerin öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiği sorulduğunda ezberleyerek cevabı sırasıyla FEF (%53), EF (%43) ve TF (%35) öğrencileri tarafından daha sık ifade edilmiştir. Görüşme bulguları kuadratik yüzey cinsi ve formülü arasındaki ilişkinin ezbere dayalı olduğu bulgusunu desteklemektedir. TF grubundaki bir öğrenciye ait olan ve aşağıda alıntılanan görüşte, öğrenci, kuadratik yüzeyler konusunun geometrik karşılığı verilmeden ve üzerinde yeteri kadar durulmadan anlatıldığını belirtmektedir.

*“Bu bilgileri sınava girmeden önce ezberlemiştim, derste  $x$ ,  $y$  ve  $z$  önündeki katsayılara göre kuadratik formların cinsini belirliyorduk şuan hatırlamıyorum” (TF öğrencisi)*

Görüşmeye alınan diğer öğrenciler, FEF ve EF grubunda kuadratik yüzeyler konusunun denklemler üzerinden anlatıldığını ve şekil bilgisine öğrencilerin kendilerinin ulaşmaya çalıştıklarını göstermiştir. Görselleme bilgisi ve farkındalığı yönüyle en düşük yeterliğe sahip grup olan FEF’te öğrenciler başarısızlık nedenlerini açıklamaya çalışırken farklı argümanlara başvurmuşlardır. Bunlardan bazıları; konunun işlenmemiş olması, grafikte gösterim eksikliği, kuadratik yüzeyler konusunun sınavlarda doğrudan sorulmayacağına bilinmesi şeklindedir. Bu çıkarımı destekleyen bazı örnek öğrenci yorumları şu şekildedir.

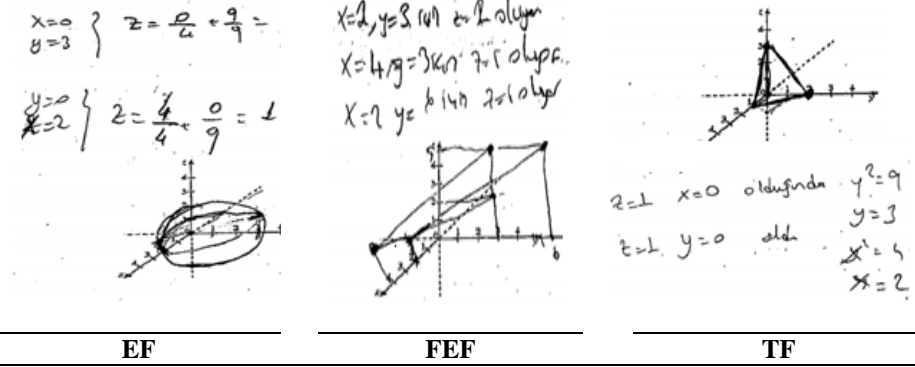
*“Bu şekillere ihtiyacım olmadı. Derslerde de hiç çizilmedi” (FEF öğrencisi)*  
*“Bize analitik geometri dersinde bile bu üç boyutlu şekillerin geometrik karşılığı verilmedi, noktaları belirleyerek şekillerin hiperboloid mi yoksa paraboloid mi olduğuna karar veriyorum” (EF öğrencisi)*

Anket formu içerisinde yer alan üçlü likert tipindeki ölçeğe verdikleri cevaplara göre farklı fakülte'deki öğrencilerin %85'inden fazlası benzer olarak küre ve elipsoit eşleştirmelerinden tamamen emin olduklarını belirtmişlerdir. Bu doğrultuda öğrencilerin ankette ilgili soruları da doğru yaptıkları belirlenmiştir. Yalnız hiperbolik parabol, eliptik parabol ve çift yapraklı hiperbol eşleştirmelerinde her üç fakülte için öğrenciler, %75 ve üstü oranlar ile hiç emin olmadıklarını veya karar veremediklerini belirtmişlerdir. Bulgular fakülte farklılığından bağımsız olarak öğrencilerin, eşleştirmeleri hatalı yapsalar da, nerelerde hatalı olduklarını bildiklerini yani bilgi farkındalığına sahip olduklarını göstermiştir.

### Görselleme Başarısı

Kuadratik yüzeylerin görselleştirilmesine ilişkin sorular öğrencilere yöneltilerek, görselleme başarılarının değerlendirilmesi amaçlanmıştır. İlk soruda tek yapraklı hiperbolün çizimini gerektiren bir formül yer almaktadır. Uygulamaya katılan FEF öğrencilerinin sadece 4'ü (%14) bir tek yapraklı hiperbol çizebilmiş bunların 3'ü (%11) ise şeklin geometrik yerini belirlemeksizin genel görseller kullanma yolunu ( $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ) tercih etmiştir. EF öğrencilerinin sadece 6'sı (%19) tek yapraklı hiperbol şeklini doğru çizerken bunların 4'ü (%12) bu şekli isimlendirememiştir. TF öğrencilerinin ise 3'ü (%10) sadece şekli çizmiştir. Bazı öğrenci cevapları Şekil 1'de sunulmuş olup; TF öğrencisine ait çözümde, öğrenci, değişkenlere değer vererek şekli çizmeye çalışmış ancak noktaları birleştirmede zorluk çekmiştir. EF öğrencisi, soruyu çözerken z-eksenini referans alarak çizim yapmaya çalışmıştır (Şekil 1).

**Soru:**  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$  denklemine karşılık gelen kuadratik yüzeyi çiziniz ve cinsini belirleyiniz?

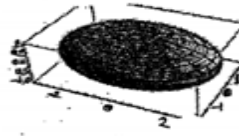


**Şekil 1.** Sembolik-Tek Yapraklı Hiperbol Sorusuna Verilen Cevap Örnekleri

EF öğrencilerinin formülden şekli çizmenin daha kolay olduğunu söylemeleri bu örnekle desteklenmektedir. Öğrenci yine değişkenlere değer vererek sonuca gitmeye çalışmıştır. FEF öğrencisi formülün üç boyutlu cismi ifade ettiğini düşünmemektedir. Değişkenlere verdiği noktalara göre şekil oluşturmaya çalışmış ve başarısız olmuştur. Sembolik temsil ile ifade edilen ve eliptik parabol çizme işlemi içeren bir diğer sorunun ( $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1$ ) denklemine karşılık gelen kuadratik yüzeyi çiziniz ve cinsini belirleyiniz?) çözümünde, TF öğrencileri diğer öğrencilere göre daha başarılı olsa da başarı düzeyinin her üç fakülte içinde düşük olduğu belirlenmiştir (TF:%27, EF :%13, FEF:%9). Her fakülte için, genel olarak öğrencilerin çoğunluğu (% 50'den fazla) bu soruyu çözmek için uğraşta bile bulunmamışlardır. Görselleştirme çabasında bulunan öğrencilerin genel olarak değişkenlere değer verme yolunu tercih ettikleri belirlenmiştir.

Test, kuadratik yüzey şekillerinin verildiği ve cismin sembolik temsilinin istendiği soru türlerini de içermektedir. Öğrenciler, küre gibi matematiğin her alanında karşılına çıkan geometrik şekle ilişkin formülü oluşturmada bile zorlanmışlardır. Hiçbir fakülte grubunda, öğrenciler sorularda % 10'un üzerinde başarı sağlayamamışlardır. Şekil 2'de kartezyen koordinatlar içerisinde verilen bir elipsoid yüzeyi için öğrencilerin belirledikleri eşitliklere yer verilmiştir.

**Soru:** Yandaki şekle karşılık gelen cebirsel ifadeyi yazınız ve cinsini belirleyiniz?



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$b > a > c$

**EF**

a, b, c

$$R^2$$

a=4 b=2 c=1 k=L

**FEF**

$$\frac{(x-a)^2}{k^2} + \frac{(y-b)^2}{l^2} + \frac{(z-c)^2}{m^2} = f$$

(a, b, c) merkezi uzaklıkta  
k, l, m olan elipsoid.

**TF**

**Şekil 2.** Görsel-Elipsoid Sorusuna Verilen Cevap Örnekleri

Şekil 2'deki çözüm örneklerinde TF ve EF öğrencileri elipsoidin tanımını vermişlerdir. Bunu yaparken şekilde verilen değerleri kullanamadıkları görülmüştür. Buradan öğrencilerin şekil-formül eşleştirmelerini ezberledikleri belirlenmiştir. Yalnız işlem yapılırken hangi değerlerin merkez, hangilerinin uzaklık birimine karşılık geldiğinin farkında olmadıkları gözlenmiştir. Bir başka ifadeyle öğrenciler, yaptıkları işlemlerin niçin yapıldığını ve kullanılan değişkenlerin neye yaradığının farkında değiller. Elipsoidin üç boyutlu düzlemdeki genel tanımını veren TF öğrencisi, bu problem durumuna karşılık gelen özel bir çözüm üretmemiştir. Şekil 2'deki FEF'e ait çözümde öğrenci verilen değerleri kullanmaya çalışmış; yalnız formül oluştururken nelere dikkat etmesi gerektiğini bilememiştir.

## TARTIŞMA ve SONUÇ

Yapılan anket, performans testi ve yarı-yapılandırılmış görüşmeler sonucunda, bu çalışmada yer alan farklı fakülte öğrencilerinin, kuadratik yüzeyler konusunda yeterli farkındalık, bilgi ve başarıya sahip olmadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin büyük çoğunluğunun kuadratik yüzeyler konusuna, mantıksal çıkarımlarda bulunmadan ezber yöntemiyle hazırlanmaları görselleştirme başarılarını etkilemiş olabilir. Bu bağlamda yükseköğretim düzeyindeki matematik sınıflarında görselleme süreci, öğrenci ve öğretici etkenlerinin rolü üzerinden değerlendirilmelidir. Görüşme bulguları, kuadratik

yüzeyler konusu işlenirken aynı öğreticinin farklı fakültelerde farklı içerik ve yaklaşımları benimsediğini göstermektedir. Bu bulgu fakültele göre konuya ayrılması gereken zaman ve içerik bilgisinin farklı olmasından kaynaklanabilir. Nitekim EF ve FEF gruplarında önce analitik geometri daha sonra analiz dersi kapsamında işlenen kuadratik yüzeyler konusunda daha teorik bir içerik takip edilmektedir. Sevimli (2013), geleneksel analiz dersi sınıflarında sembolik dilin baskın olarak kullanıldığını ve bu yaklaşımın öğrencilerin görselleştirme başarısını etkilediğini belirtmektedir. Öğreticinin kuadratik yüzeyler gibi özünde geometrik anlamın bulunduğu bir konuda sembolik dili, görsel karşılığı ile ilişkilendirmeden kullanması öğrencilerin görselleştirme sürecinde zorluk yaşamasına neden olmuştur. TF grubunda öğreticinin uygulamaya yönelik sorulara daha fazla yer vermesi, öğreticinin fakülte türüne göre içeriğini şekillendirdiği şeklinde yorumlanmıştır. Bu bulgu beklenen bir durum olmakla birlikte, TF öğrencilerinin sembolik ve görsel temsil eşleştirmelerinde daha başarılı olmaları, akla “teorik bilgiye kıyasla uygulama bilgileri daha fazla kalıcı mıdır?” sorusunu getirmiştir (Palais, 1999). İlgili durum öğrenci boyutuyla düşünüldüğünde, görüşmeye alınan üç fakültedeki öğrenciler benzer olarak, çalışmalarının sınava yönelik olduğunu ve formülleri ezberlediklerini belirtmişlerdir. TF grubunda, diğer fakülte öğrencilerine kıyasla, kuadratik yüzey şekilleri ile bu şekle karşılık gelen formüllerin ezberlenerek öğrenildiğini ifade eden öğrenci yüzdesi daha düşüktür (%35).

Fakülte farklılığından bağımsız olarak, öğrencilerin büyük çoğunluğunun (%80’den fazlası) bilgilerini performansa yansıtamamış olmaları dikkat çekicidir. Öğrencilerin epistemolojik inançları, özellikle üç boyutlu cisimleri görselleştirme süreçlerini olumsuz yönde etkiliyor olabilir (Gardener, 2006). Öğrencilerin büyük kısmının görselleştirme performansının beklendiği sorulara dokunmamaları, bu soruları çözme yönünde “yapamama” endişesi ve epistemolojik inançlarının bulunması ile açıklanabilir. Aslında sembolik temsiller ile verilen kuadratik yüzeylerin görsel temsiline, formülü sağlayan nümerik değerlerin belirlenmesiyle de ulaşılabilir. TF grubunda bu teşebbüs daha çok görülürken, EF ve FEF grubundaki öğrencilerin formülü kullanmak istememeleri ve bunu yapma alışkanlıklarının olmaması, başarısızlığa sebep olmaktadır. Özellikle FEF

grubundaki öğrencilerin görsel temsiller yardımıyla, üç boyutlu cisimleri derinlemesine anlamaya çalışmak yerine formülleri ve şekilleri ezberleme yoluna gitmeleri, bilginin geri çağırılması ve kullanılması sürecini olumsuz etkilemiş olabilir.

Benzer tartışmalar Meadows'un (2008) çalışmasında da yer almış, integral hesabı problemlerinin sadece formüller üzerinden yapıldığı durumlarda öğrencilerin sonucu yorumlayamadıklarını belirtilmiştir. Bu durum FEF grubu öğrencilerinin düşünme yapılarında, uygulamaya kıyasla teorik yaklaşımların daha fazla yer edindiği şeklinde yorumlanabilir. Sevimli'nin (2013) çalışmasında da matematik öğretmenliği öğrencilerinin görsele kıyasla daha fazla analitik düşünme eğiliminde olduklarını ve bu yüzden problem çözme sürecinde cebirsel temsilleri daha sık tercih ettiklerini göstermiştir. Bu kapsamda gelecek araştırmalarda farklı fakülte'deki öğrencilerin düşünme yapıları ile görselleştirme bilgi, farkındalık ve başarıları arasında nasıl bir ilişkinin olup olmadığı durumu araştırılabilir.

Araştırma sonuçları fakülte farklılığından bağımsız olarak örnekleme yer alan öğrencilerin yarısından fazlasının kuadratik yüzeyleri tanıma, şekil-formül eşleştirmeleri yapma bilgi ve farkındalığına sahip olmadığını göstermiş; öğrencilerin görselleme başarılarının ise bilgi ve farkındalıklarından daha düşük olduğunu ortaya koymuştur. Çalışma sonuçları fakülte farklılıkları bağlamında değerlendirildiğinde öğretim içeriğinde uygulama ağırlıklı içerikleri takip eden TF grubu öğrencilerinin teorik içerikleri takip eden FEF ve EF grubu öğrencilerine kıyasla daha başarılı olduklarını göstermiştir.

Görüşmeler üzerinden elde edilen sonuçlar kuadratik yüzeyler konusunu öğrenme sürecinde öğrencilerin, ilişkisel anlama yerine kurallı anlama (Skemp, 1976) ve formül ezberleme yolunu tercih ettiklerini göstermiştir. Diğer bir deyişle anlamlı ilişkiler üzerine kurulan kavramsal bilgi yerine matematiksel bir görevi yerine getirmek için gerekli olan kurallı sembolik dil içerisinde anlamaya yol açan işlemsel bilgiyi kullanma eğiliminde görüldükleri söylenebilir (Hiebert & Lefevre, 1986, s. 3-6). Ayrıca öğrencilerin sembol ve görsel dil ile olan ilişkileri onların performanslarına ve diller arası geçişine sosyo-psiko-matematik ilişki perspektifinde tesir etmiş olabilir, yani

konu, öğrenci ve öğrencinin konuya birey gibi muamele etme algısı (Delice & Ergene, Baskıda). Kuadratik yüzeyler gibi özünde geometri bilgisinin bulunduğu konularda içeriğin cebirsel temsil ve formüllere ek olarak, görsel temsil ve mantıksal çıkarımları sağlayan etkinliklerle sunulması önerilmiştir. Kağıt-kalem temelli ortamın iki boyutlu olmasından dolayı öğretim etkinliklerinin teknoloji destekli ortamlara adapte edilecek şekilde hazırlanması ve öğrencilerin görsel öğrenmelerini destekleyici uygulamalara ağırlık verilmesi önem arz etmektedir (Gutierrez, 1996; Presmeg, 2006). Üç boyutlu cisimlerin temelini iki boyutlu şekiller oluşturduğu için iki boyutlu şekillerin eğitime yani geometri eğitimine de ayrıca önem verilmelidir (Kadunz & Sträßer, 2004).

### KAYNAKLAR

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Balcı, A. (2006). *Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntem, Teknik ve İlkeleri* (6. Baskı). Ankara: PegemA yayıncılık.
- Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education: A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 257-269.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education (6th Edition)*. London: Routledge.
- Delice, A. & Ergene, E. (Baskıda). İntegral Hacim Problemleri Çözüm Süreçlerinin Bireysel İlişkiler Bağlamında İncelenmesi; Disk, Pul ve Kabuk Yöntemleri. *Sakarya University Journal of Education*.
- Delice, A. & Sevimli, E. (2010). Geometri problemlerinin çözüm süreçlerinde görselleme becerilerinin incelenmesi: Ek çizimler. *Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 31, 83-102.
- Gardener, D. (2006). Spatial visualization, visual imagery, and mathematical problem solving of students with varying abilities. *Journal of Learning Disabilities*, 39(6), 496–506.
- Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research (pp. 105-117)*. London: Sage.

- Gutierrez, A. (1996). *Visualisation in 3-dimensional geometry: In search of framework*. The 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (s.3 - 19), Valencia, Spain.
- Habre, S. (2001). Visualization in multivariable calculus; The case of 3D surfaces. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 23(1), 30 – 47.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J. (ED.), *Conceptual and Procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hilldale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kadunz, G. ve Sträßer, R. (2004). *Image - metaphor - diagram: Visualisation in learning mathematics*, The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (s.241–248), 4, Bergen, Norway.
- Meadows, Y. A. (2008). *Calculus III students' analytic and visual understanding of surface areas of spheres, cylinders, pyramids and prisms*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Florida State University, Florida.
- Palais, R. (1999). The visualisation of mathematics: Towards a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS*, 46(6), 647-658.
- Presmeg, N. C. (2006). *Research on visualization in learning and teaching mathematics*. A. Gutierrez ve P. Boero, (Der.), Handbook of research on the psychology of mathematics education (s.205-235). Rotterdam: Sense Publishers.
- Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103 – 132.
- Radford, L. (1999). Rethinking representations. The 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (s.17-21), North American Chapter, Universidad Autónomadel Estado de Morelos, México.
- Sevimli, E. (2013). *Bilgisayar Cebiri Sistemi Destekli Öğretimin Farklı Düşünme Yapısındaki Öğrencilerin İntegral Konusundaki Temsil Dönüşüm Süreçlerine Etkisi*. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding', *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
- Yıldırım, A. ve Şimsek, H. (2006). *Sosyal Bilimlerde Nitel Arastırma Yöntemleri*, (6.Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 167-181.

## SUMMARY

*In teaching and learning processes, using visualization in transition between symbolic and visual representations is highly recommended for all education levels. By means of visualization, students can make relation between representation types and reach meaningful understanding especially in geometry topics. The studies related to visualization generally conducted to high school or lower grade level students. On the other hand, there were a limited number of studies which investigated university level students' understanding of geometric interpretations of derivative, limit, area determination while solving integration questions, and 3-D shapes. The focus was basically on subjects in calculus lessons. With this respect, the purpose of this study is to investigate university level students' visualization processes in quadratic surfaces topic. The success levels of students who were enrolled in different faculties were compared according to their abilities to make transition between visual and symbolic representations of quadratic surfaces.*

*In this qualitative multiple case study, the participants were university students from different faculties. There were 28 students (FEF) who enrolled in the department of mathematics in faculty of sciences and arts, 32 students (EF) who were enrolled in the department of secondary school mathematics education in faculty of education, and 30 students (TF) from the faculty of technology. The participants were selected conveniently from a public university located in Istanbul. They all were in the second grade and took calculus lessons. Data were collected with three data collection tools. Students were expected to match the figures, formulas, and names of quadratic surfaces in questionnaire. Whether students were sure about their answers was asked in a three point Likert scale in the questionnaire. To investigate students' abilities to make transition between representation types, a test was used in the study. In addition, the data gathered from semi-structured interviews were also used to support the findings of this study. The questionnaire and the test were analyzed descriptively while the content analysis method was used in the analysis of the interviews.*

*According to the findings of this study, TF students were more successful in matching verbal, symbolic, and visual representations of the quadratic surfaces when comparing them with EF and FEF students. In general, students were successful to determine and match the figures, formulas, and names of sphere, ellipsoid, and two leaves hyperboloid. Especially FEF students, however, were unsuccessful in determining the elliptic paraboloid and one leaf hyperboloid. The common success among students from*

*different faculties was observed in matching figure-formula-name of sphere and ellipsoid. In the interviews, majority of the students in different faculty types stated that it was easier to construct formula by looking at its shape (transition from visual to symbolic representation). When they were asked to construct formula from shape or shape from formula in the test, students' success in transition between representation types was found to be very rare. It was found that students in different faculties did not have enough awareness, knowledge, and success in quadratic surfaces topic. Instead of constructing logical relations, they were trying to memorize the knowledge for this topic. Moreover, different faculties followed different content and approach to teach quadratic surfaces. Especially in the faculty of science and arts, it was found in the interviews that the symbolic language was more dominant. Therefore, students were using this representation without relating it with its geometric meanings. On the other hand, students in faculty of technology were more exposed to applications of quadratic surfaces, so, they were more successful in constructing relation between symbolic and visual representations of quadratic surfaces.*

*It was recommended that the teaching activities for quadratic surfaces should include both theoretical and practical knowledge to build the relation between visual and symbolic representations. In addition, technology should be embedded in the teaching practices to make students observe the visual forms of the formulas given in the quadratic surfaces.*