MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO : 441

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ YAYINLARI NO : 6

DİFERANSİYEL GEOMETRİ

II

Prof. Dr.
Ferruh ŞEMİN

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

İSTANBUL — 1987

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYIN NO : 441
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ YAYINLARI NO : 6

DİFERANSİYEL GEOMETRİ

II

Prof. Dr.
Ferruh ŞEMİN

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

İSTANBUL — 1987

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

FATİH YAYINEVİ MATBAASI — 527 23 72
Alibaba Türbe Sok. No. 21/3 Nuruosmaniye/İST.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ÖNSÖZ

Diferansiyel Geometri I [1] *Ferruh'un sağlığında basıldı. Bunun devamı olan Diferansiyel Geometri II, şimdi baskısı biten eserdir.*

Bu yapıtlar, herşeyden önce, Ferruh'un otuz sekiz yıl boyunca dikkatle hazırlanan derslerini içerir. Ancak, bu kitaplarda, derslerden başka, konuyu tamamlayıcı özellikte bölümler de vardır. Ferruh hocalığı sırasında, ders notlarının basılmasını istemedi. Hatta bu notlarını bastırmak isteyen öğrencilerine izin vermediğini anımsarım. Zira o, ders konularını sürekli olarak işler ve onları mükemmelleştirmeğe çalışırdı. Aslında öğrencilerinin derslerini kitapsız izlemelerine hayıflanırdı da. Bunu Diferansiyel Geometri'nin I inci cildinin önsözünde şöyle dile getirir: «Beni mutlu kılacak tek şey, yıllarca ders notlarıyla yetinmek zorunda kalan gençlerin daha iyi yetişmelerine bu kitabın yardımcı olabilmesidir». Böylece o, kitaplarının bir olgunluk sonucu oluşmasını istedi ve emekli olunca, bunları baskıya hazırlamaya girişti. II inci cildin meydana gelmesinde 1. ciltte işaret ettiği gibi «Uzun yılların kazandırdığı deneyimin ve yorucu bir çabanın ürünü» olan bu çalışmasını oluşturmak için titizlikle uğraş verdi. Vefatından 2-3 gün öncesine değin, kısa aralıklarla da olsa, kitabının bitmesi için çalıştı. Böylece bu iki eser, kırk yıla yakın bir çalışma ürünüdür. Kitaplarını önce elle, sonra makinede yazardı. El yazısı çok ince ve seçikti.

İşte bunların daktiloya verildikten sonra kontrolünü Marmara Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi Doçent Dr. Afet Özok yaptı ve bütün formülleri elle doldurdu. Sonra bununla da yetinmedi, 585 sayfalık II. cildin dizgi yanlışlarını tek başına o düzeltti. Bu hizmeti yapan Doçent Dr. Afet Özok'a bütün kalbimle teşekkürlerimi bildirmek isterim.

Ayrıca bu eserin Marmara Üniversitesinde basılması girişiminde Doçent Dr. A. Özok'la birlikte önayak olan Doçent Dr. Yusuf Avcı'ya ve kitabın basılmasını sağlayan bu Üniversite'nin Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanı Prof. Dr. Hakkı Dursun Yıldız'a teşekkür ederim.

Eşi Prof. Dr. Refia ŞEMİN

---

1) İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi : 1963

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM I

İKİ SKALER DEĞİŞKENLİ VEKTÖREL FONKSİYONLAR

1. İki skaler değişkenli vektörel fonksiyonların tanımı

İki u^1, u^2 **skaler, bağımsız** değişkenin değişim aralıkları sırasıyla

(1-1) (B) $\quad a \leqslant u^1 \leqslant b, \quad c \leqslant u^2 \leqslant d$

olsun. $u^P, (P=1,2)$ düzleminde u^1, u^2 koordinat eksenleri birbirlerine dik se, (B) tanım bölgesi **kapalı bir dikdörtgendir**

Yukarıki iki aralığın her (u^1, u^2) değer takımı, belirli bir kuralla, bir $\vec{x}$ **serbest** vektörünü tanımlıyorsa, $\vec{x}$ **serbest vektörü** u^1 **ve** u^2 **skaler ve bağımsız değişkenlerinin, verilen** $[a, b]$, $[c, d]$ **kapalı aralıklarında veya** (B) **kapalı bölgesinde** -açık da olabilir- **bir vektörel fonksiyonudur.**

(1-1) aralıkları, bu vektörel fonksiyonun **tanım aralıklarıdır.** u^1, u^2 skaler ve bağımsız değişkenleri ile $\vec{x}$ vektörü arasındaki bu ilişki, skaler fonksiyonlarda yapıldığı gibi

(1-2) $\qquad \vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$

sembolü ile gösterilir.

Uyarı 1.1

Bundan böyle, ayrıca üzerinde durulmadıkça, $u^P\,(P = 1,2)$ skaler ve bağımsız değişkenleri ile $\vec{x}$ vektörel fonksiyonunu **gerçel** olarak alacağız. Bundan başka $\vec{x}$ vektörel fonksiyonu **tek değerli** olacak, başka deyimle, skaler değişkenlerin her (u^1, u^2) değer takımı, **bir tek** $\vec{x}\,(u^1, u^2)$ serbest vektörünü belirleyecektir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2. Vektörel kısmi limit ve bununla ilgili teoremler

(1-1) aralıklarında tanımlanmış tek değerli ve gerçel (1-2) fonksiyonu ile bir $\vec{\alpha}$ = sabit vektörü verilmiş olsun.

İstenildiği kadar küçük

$$\varepsilon^p > 0 \ , \quad (p = 1,2)$$

sayıları, öyle

$$\delta^p(\varepsilon^p) > 0$$

sayılarını belirtsinler ki, (1.1) tanım aralıklarında

$$|u^p - u^p_0| < \delta^p(\varepsilon^p), \qquad (p = 1,2)$$

eşitsizliklerini sağlayan u^p değerleri için

$$|\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{\alpha}| < \varepsilon^p, \qquad (p = 1,2)$$

olsun. Buna göre diyeceğiz ki:

u^1, u^2 skaler ve gerçel değişkenleri, (1-1) tanım aralıklarındaki u^p_0 değerlerine yaklaştıkça, $\vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun limiti $\vec{\alpha}$ vektörüdür.

Bunu sembolik olarak

$$\lim_{u^p \to u^p_0} \vec{x}(u^1, u^2) = \vec{\alpha}$$

biçiminde göstereceğiz.

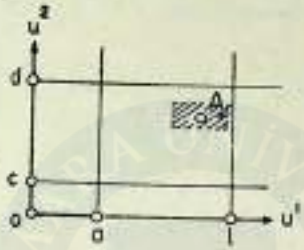
Geometrik yorum

Uzayın sabit bir O noktasına göre

$$\overrightarrow{ON} = \vec{x}(u^1, u^2), \quad \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$$

olsun ve A merkezli, ε^p yarıçaplı kürelerden en küçüğüne de $A(\varepsilon)$ diyelim. Ayrıca, Ou^1u^2 dik koordinat düzlemi üzerinde $u^1=a$, $u^1=b$ ve $u^2=c$, $u^2=d$ doğrularının tanımladığı dik dikdörtgen bölgenin $A_0(u^1_0, u^2_0)$ noktasını alalım (Şek. 1)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 1.

Kenarları $O u^1$, $O u^2$ eksenlerine paralel, merkezi A_o ve kenar uzunlukları da sırasıyla $2\delta^1(\varepsilon')$, $2\delta^2(\varepsilon')$ olan dikdörtgeni de Δ ile gösterelim. O halde iki skaler değişkenli vektörel fonksiyonlarda, vektörel limitin biraz önce verilen tanımından, şu geometrik yorum çıkarılır:

$O u^1 u^2$ düzleminin (u^1, u^2) noktası, A_o merkezli Δ dikdörtgeni içinde kaldıkça, N noktası da $A(\varepsilon)$ küresi içinde kalır.

Uyarı 2.1. Yola bağlı olmayış

Sabit bir O noktasından itibaren alınan

$$\overrightarrow{ON} = \vec{x}(u^1, u^2)$$

vektörünün N ucu, iki değişken parametreye bağlı olduğundan, u^2 lerin kendi tanım aralıklarında değişmeleri hâlinde ilerde de görüleceği gibi, bir Y yüzey parçası üzerinde yer değiştirir. Biraz önceki yorum gösterir ki: u^2 lerin u^2_o lara gelişi güzel yaklaşmaları hâlinde, N noktası da Y üzerinde gelişi güzel bir yol çizerek, A noktasına yaklaşır. Bu demektir ki: Y üzerinde N den A ya giden yol nasıl seçilirse seçilsin —başka deyimle, u^2 ler kendi tanım bölgelerinde kalmak üzere, u^2_o lara nasıl yaklaşırlarsa yaklaşsınlar— N noktası A ya yaklaşır. O halde:

Vektörel limit kavramının tanımına göre, A limit noktası, N noktasının Y üzerinde izlediği yola bağlı değildir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Limitlerle ilgili teoremler

Aşağıdaki teoremlerde sözü edilecek skaler veya vektörel fonksiyonların tanım aralıkları aynı olmak üzere

$$\lim_{u^p \to u^p_0} \vec{x}_j(u^1, u^2) = \vec{\alpha}_j, \quad \lim_{u^p \to u^p_0} f_j(u^1, u^2) = \beta_j$$

diyelim.

$$p = 1,2; \quad j = 1,2, -, n$$

Buna göre, şu teoremler ispatlanabilir:

Teorem 1.

$$\lim_{u^p \to u^p_0} \sum_{j=1}^{n} \vec{x}_j(u^1, u^2) = \sum_{j=1}^{n} \vec{\alpha}_j.$$

Teorem 2.

$$\lim_{u^p \to u^p_0} \sum_{j=1}^{n} f_j(u^1, u^2)\, \vec{x}_j(u^1, u^2) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \vec{\alpha}_j.$$

Teorem 3.

$$\lim_{u^p \to u^p_0} \vec{x}_1(u^1, u^2) \cdot \vec{x}_2(u^1, u^2) = \vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\alpha}_2.$$

Teorem 4.

$$\lim_{u^p \to u^p_0} \vec{x}_1(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_2(u^1, u^2) = \vec{\alpha}_1 \wedge \vec{\alpha}_2.$$

3. Bir noktada veya bir bölgede vektörel kısmi süreklilik

(1-1) aralıklarında tanımlanmış tek değerli ve gerçel bir $\vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonu verildiğinde, aralıkların bir $u^p_0, (P=1,2)$ değer takımı için

$$\lim_{u^p \to u^p_0} \vec{x}(u^1, u^2) = \vec{x}(u^1_0, u^2_0)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ise, $\vec{x}(u^1, u^2)$ **vektörel fonksiyonu,** u^ν **skalar değişkenlerinin** u^ν_0 **değerleri için ya da bu değerler yakınlarında süreklidir, diyeceğiz.** Aralıkların uç noktalarında da süreklilikten söz edilebilir. (1-1) aralıklarıyla tanımlanmış dikdörtgen bölgenin, ya da herhangi bir bölgenin her noktasında sürekli olan bir vektörel fonksiyon, **bu bölgede süreklidir.**

4. Birinci mertebeden vektörel kısmi türevler

(1-1) aralıklarında tanımlanmış tek değerli, gerçel ve sürekli bir vektörel fonksiyon

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$$

olsun. Tanım bölgesinin bir değer takımını (u^ν_0) ile gösterelim ve

$$\Delta \vec{x}^1 = \vec{x}(u^1, u^2_0) - \vec{x}(u_0^1, u^2_0), \quad \Delta u^1 = u^1 - u^1_0$$

diyelim.

Tanım I.

Eğer sözü edilen vektörel fonksiyon için

$$\lim_{\Delta u^1 \to 0} \frac{\Delta \vec{x}^1}{\Delta u^1}$$

varsa, **bu limite,** $\vec{x}(u^1, u^2)$ **vektörel fonksiyonunun,** (u^1_0, u^2_0) **değer takımı için,** u^1 **skaler değişkenine göre, birinci mertebeden vektörel kısmi türevi,** denilir.

Aynı biçimde

$$\Delta \vec{x}^2 = \vec{x}(u_0^1, u^2) - \vec{x}(u_0^1, u^2_0), \quad \Delta u^2 = u^2 - u^2_0$$

denilecek olursa,

$$\lim_{\Delta u^2 \to 0} \frac{\Delta \vec{x}^2}{\Delta u^2}$$

ifadesi de, eğer varsa, $\vec{x}(u^1, u^2)$ **vektörel fonksiyonunun,** (u_0^1, u^2_0) **değer takımı için,** u^2 **skaler değişkenine göre, birinci mertebeden vektörel kısmi türevidir.**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Gösteriliş

Bir (u^1, u^2) değer takımı için birinci mertebeden iki vektörel kısmî türevi :

$$\vec{x}_{u^1} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \quad \vec{x}_{u^2} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}$$

yazış biçimlerinden biriyle göstereceğiz.

Tanım II.

Tanım bölgesinin her noktasında birinci mertebeden vektörel kısmî türevleri olan bir $\vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonuna **bu bölgede birinci mertebeden vektörel kısmî türevli,** diyeceğiz.

Uyarı 4.1 Sürekliliğin yeterli olmayışı

Tek skaler değişkenli vektörel fonksiyonlarda olduğu gibi, kısmî türevlerin varlığı için vektörel fonksiyonun gerekli olan sürekliliği **yeterli** değildir.

5. Bileşik vektörel fonksiyonlar ve bunların birinci mertebeden türevleri

Ou^1u^2 düzleminin (1-1) aralıklarıyla tanımlanmış (B) dikdörtgen bölgesinde —ya da herhangi bir bölgesinde— verilmiş ve birinci mertebeden **sürekli** kısmî türevleri olan bir vektörel fonksiyon

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2) \tag{5-1}$$

olsun.

(B)'nin herhangi bir noktası N_0 ve bu noktadan geçen bir eğrisi de E ile gösterilsin. u^1, u^2 skaler, bağımsız ve gerçel değişkenleri, E eğrisi boyuca alınan $N(u^1, u^2)$ noktaları için, örneğin t ile gösterilen, aynı bir skaler değişkenin

$$u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t) \tag{5-2}$$

biçiminde fonksiyonlarıdır. Buna göre, (5-1) vektörel fonksiyonu, E eğrisi boyunca, t skaler değişkeninin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(5-3) $$\vec{x} = \vec{x}\,[u^1(t), u^2(t)]$$

biçiminde bir **bileşik fonksiyonudur.**

Bundan sonraki kısımlarda, E nin N_0 noktasını belirleyen t parametresinin değeri t_0 olarak alınacağından, (5-2) nedeniyle

$$u^1_0 = u^1(t_0), \quad u^2_0 = u^2(t_0)$$

diyeceğiz.

Bir bileşik fonksiyonun birinci mertebeden türevi

Tek skaler değişkenli (5-3) vektörel fonksiyonun $t = t_0$ için birinci mertebeden türevi[1] tanım gereğince

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1_0, u^2_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

dir. Bu oranı

$$\frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1_0, u^2)}{u^1 - u^1_0} \cdot \frac{u^1 - u^1_0}{t - t_0} + \frac{\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1_0, u^2)}{u^2 - u^2_0} \cdot \frac{u^2 - u^2_0}{t - t_0}$$

biçiminde yazarsak, sıra ile

$$\lim_{t \to t_0} \frac{u^1 - u^1_0}{t - t_0} = u^1_{t_0} \qquad \lim_{t \to t_0} \frac{u^2 - u^2_0}{t - t_0} = u^2_{t_0}$$

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{x}(u^1_0, u^2) - \vec{x}(u^1_0, u^2_0)}{u^2 - u^2_0} = [x(u^1_0, u^2)]_{u^2_0}$$

dir.

Birinci oranın limitine gelince,

1) FERRUH ŞEMİN, **Diferensiyel Geometri** I, s. 28, (1983)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1_0, u^2)$$

geometrik farkını[2] sadece u^1 değişkeninin fonksiyonu gibi düşünerek

$$\vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1_0, u^2) = (u^1 - u^2_0) \quad [\vec{x}_{u^1}(u^1_0, u^2) + \vec{\alpha}_1(u^1, u^1_0, u^2)],$$

$$\lim_{u^1 \to u^1_0} \vec{\alpha}_1(u^1, u^1_0, u^2) = \vec{O}$$

olarak yazabiliriz. Bunun için de $\vec{x}_{u^1}$ kısmî vektörel türevinin, u^1_0 değeri yakınlarında sürekli olması gerekir.

Görülüyor ki birinci oranın limiti de: $\vec{x}(u^1_0, u^2)$ dir. Buna göre

$$\left[\frac{d}{dt}\vec{x}(u^1, u^2)\right]_{t_0} = (\vec{x}_{u^1}(u^1, u^2)\, u^1_t + \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)\, u^2_t)_{t_0} \tag{5-4}$$

bulunur.

Bu sonuç, şu teoremi verir:

Teorem 5-1. $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ **vektörel fonksiyonunun birinci mertebeden** $\vec{x}_{u^1}$, $\vec{x}_{u^2}$ **kısmî türev vektörleri,** $t = t_0$ **ile belirli olan** u^1_0, u^2_0 **noktası yakınlarında sürekli iseler ve aynı** t_0 **değeri için,** $u^1_{t_0}$, $u^2_{t_0}$ **türevleri varsa, (5-1) bileşik fonksiyonunun** $t = t_0$ **için birinci mertebeden vektörel türevi, (5-4) formülü ile hesaplanır.**

6. Çeşitli mertebelerden vektörel kısmî türevler

İki skaler ve bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyonun birinci mertebeden kısmî türevleri de aynı bağımsız skaler değişkenlerin vektörel fonksiyonlarıdır. Bunların da, tanım bölgelerinde, eğer varsa, birinci mertebeden kısmî vektörel türevlerinden söz edilebilir. Bunlara $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun: **ikinci mertebeden vektörel kısmî türevleri** denilir. Bunlar da

---

2) FERRUH ŞEMİN, **Diferensiyel Geometri** I, s. 36, (15-2) TAYLOR formülü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(6-1) $\vec{x}_{u^1u^1} = \dfrac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^1 \partial u^1} = \dfrac{\partial^2 \vec{x}}{(\partial u^1)^2}$,

$$\vec{x}_{u^1u^2} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^1 \partial u^2} \; ; \; \vec{x}_{u^2u^1} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^2 \partial u^1} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{(\partial u^2)^2}$$

sembolleri ile gösterilirler.

İkinci mertebeden vektörel kısmî türevlerden söz açmışken, bir özeliği anımsatmak isteriz:

Bilindiği gibi, iki bağımsız değişkenli skaler fonksyonlarda, örneğin $z = f(x, y)$ fonksiyonunda, ikinci mertebeden z_{xy} ve z_{yx} kısmi türev fonksiyonları, (x, y) noktasında sürekli fonksiyonlarsa, bu noktada

$$z_{xy} = z_{yx}$$

dir.

Aynı sonuç, hatta daha hafifletilmiş koşullar altında, iki skaler bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlar için de geçerlidir, yâni birazdan ele alacağımız SCHWARZ teoremindeki koşullara göre, bir (u^1, u^2) noktasında

$$\vec{x}_{u^1u^2} = \vec{x}_{u^2u^1}$$

dir.

Teorem 6-1 (H.A. SCHWARZ teoremi). **İki skaler ve bağımsız değişkenli** $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ **vektörel fonksiyonunun,** (u^1, u^2) **noktası yakınlarında**

a) $\vec{x}_{u^2}$ **birinci mertebeden kısmi vektörel türevi varsa ve sürekli ise;**

b) $\vec{x}_{u^1u^2}$ **ikinci mertebeden kısmi vektörel türevi varsa; aynı noktada** $\vec{x}_{u^2u^1}$ **ikinci mertebeden kısmi vektörel türevi de vardır ve** (u^1, u^2) **noktasında**

$$\vec{x}_{u^1u^2} = \vec{x}_{u^2u^1}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) koşulu nedeniyle, (u^1, u^2) noktası yakınlarında birinci mertebeden $\vec{x}_{u^1}$ vektörel kısmî türevi de vardır ve bu türev aynı noktada hem sürekli hem de türevlidir. Buna göre

$$\vec{y} = \frac{\vec{x}(u^1+h, u^2+k) - \vec{x}(u^1+h, u^2) - \vec{x}(u^1, u^2+k) + \vec{x}(u^1, u^2)}{hk}$$

vektörünün bir kez $h \to o$, $k \to o$ ve bir kez de $k \to o$, $k \to o$ sırasında limitlerini arıyalım. İlk sıra için $\vec{y}$ vektörünü

$$\vec{y} = \frac{1}{kh} \left[\{\vec{x}(u^1+h, u^2+k) - \vec{x}(u^1, u^2+k)\} - \{\vec{x}(u^1+h, u^2) - x(u^1, u^2)\} \right]$$

biçiminde yazarsak, son söylediklerimizden ve birinci mertebeden vektörel kısmî türevin tanımından

$$\lim_{k \to o,\, h \to o} \vec{y} = \lim_{k \to o} \frac{\vec{x}_{u^1}(u^1, u^2+k) - \vec{x}_{u^1}(u^1, u^2)}{k}$$

ve ikinci mertebeden vektörel kısmî türevlerin tanımından ve b) koşulundan

$$\lim_{h \to o,\, k \to o} \vec{y} = \vec{x}_{u^1 u^2}(u^1, u^2)$$

elde edilir.

İkinci sıra için $\vec{y}$ vektörünü

$$\vec{y} = \frac{1}{hk} \left[\{\vec{x}(u^1+h, u^2+k) - \vec{x}(u^1+h, k)\} - \{\vec{x}(u^1, u^2+k) - \vec{x}(u^1, u^2)\} \right]$$

biçiminde yazarsak, a) koşulu nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lim_{h\to 0;\,k\to 0} \vec{y} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{x}_{u^2}(u^1+h, u^2) - \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)}{h}$$

bulunur.

İlk sıraya göre $\vec{y}$ nin limitinin $\vec{x}_{u^1u^2}(u^1, u^2)$ ye eşit oluşu ve a) koşulu dolayısıyla da $\vec{x}_{u^2}$ türevinin (u^1, u^2) yakınlarında sürekli bulunuşu yüzünden, yukarıki limit vardır ve $\vec{x}_{u^2u^1}(u^1, u^2)$ ye eşittir. O halde, (u^1, u^2) noktasında

$$\vec{x}_{u^1u^2}(u^1, u^2) = \vec{x}_{u^2u^1}(u^1, u^2)$$

dir.

İkinci mertebeden üç kısmî vektörel türevin de, eğer varsa, tanım alanlarındaki birinci mertebeden kısmî vektörel türevlerinden sözedilebilir. Bunlar da, $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun **üçüncü mertebeden kısmî vektörel türevleridir** ve bu böylece sürüp gider.

İki skaler değişkenli skaler fonksiyonların çeşitli mertebelerden kısmî türevlerinin sayıları ve hesaplanış sıraları için bulunan sonuçlar, aynen, iki skaler değişkenli vektörel fonksiyonlar için de geçerlidir. Şimdi bunları anımsatacağız:

SCHWARZ teoremi nedeniyle, ikinci mertebeden farklı kısmî vektörel türevlerin sayısının, dörtten üçe indiğini biraz önce görmüştük. Buna göre, bu üç kısmî türevle, ikişerden $2.3 = 6$ kadar üçüncü mertebeden farklı kısmî vektörel türev var gibi görünürse de, aslında, SCHWARZ teoremini uyguladığımızda, farklı olanların sayısı

$$u^1u^1u^1,\quad u^2u^1u^1,\quad u^1u^2u^1,\quad u^2u^2u^2$$

türev alma sıralarına göre, dörde iner. Bu sıraları kısaca

$$(u^1)^3,\quad (u^1)^2u^2,\quad u^1(u^2)^2,\quad (u^2)^3$$

biçiminde göstereceğiz. Akılda tutulması gereken tek nokta, SCHWARZ teoreminin uygulanabilmesi koşulu ile, farklı değişkenlere göre hesaplanan ardışık iki türev almanın sırasının değiştirilebileceğidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Genel olarak, n- ninci mertebeden farklı kısmî vektörel türevlerin sayısı da, bunlar daima

$$(u^1)^n,\ (u^1)^{n-1}u^2,\ \ldots,\ u^1(u^2)^{n-1},\ (u^2)^n$$

sıralarında hesaplanabileceklerine göre

$$n+1$$

dir.

Uyarı. Türev alma kuralları

Bir tek skaler değişkenli vektörel fonksiyonlarda sözünü ettiğimiz (Türev alma kuralları) —DİFERANSİYEL GEOMETRİ I— kısmî vektörel türevlerin hesabında da aynen uygulanır.

7. Vektörel tam diferansiyel

(5-2) formülündeki vektörel ve skaler fonksiyonlar, bir tek t skaler değişkenine bağlıdırlar. O halde, t nin herhangi bir değeri için bu formülü, (Diferansiyel Geometri I, Ferruh ŞEMİN, s. 36. formul (16-2)) yardımiyle

$$\frac{d\vec{x}(u^1,u^2)}{dt} = \vec{x}_{u^1}(u^1,u^2)\,\frac{du^1}{dt} + \vec{x}_{u^2}(u^1,u^2)\,\frac{du^2}{dt}$$

biçiminde yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki yanını dt diferansiyeli ile çarptımızda, kısaca

$$d\vec{x} = \vec{x}_{u^1}\,du^1 + \vec{x}_{u^2}\,du^2 \qquad (7\text{-}1)$$

bağıntısı elde edilir.

(7-1) in ikinci yanı, tanım gereğince, 2 **skaler ve bağımsız değişkenli** $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ **vektörel fonksiyonunun tam diferansiyelidir.**

Bu bağıntıdaki du^1, du^2 diferansiyelleri tamamiyle keyfidir, ve bu formül, B tanım bölgesinde seçilen yol ve bu yol üzerinde hesaplanan diferansiyeller nasıl olursa olsun, geçerlidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Değişkenlerin değiştirilmesinde, tam diferansiyelin kullanılması

Diyelim ki, u^P, $(P = 1,2)$ bağımsız değişkenleri, başka iki bağımsız $\bar{u}^P$, $(P = 1,2)$ skaler değişkeninin fonksiyonudur. Buna göre, B tanım bölgesinde seçilecek bir yol boyunca, u^R ve $\bar{u}^Q$ değişkenleri aynı bir t değişkeninin fonksiyonlarıdır. Bileşik skaler fonksiyonların diferansiyelleri kuralına göre

$$(7\text{-}2) \qquad \begin{cases} du^1 = u^1_{\bar{u}^1}\, d\bar{u}^1 + u^1_{\bar{u}^2}\, d\bar{u}^2 \\ du^2 = u^2_{\bar{u}^1}\, d\bar{u}^1 + u^2_{\bar{u}^2}\, d\bar{u}^2 \end{cases}$$

dir.

Aynı yol üzerinde, $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun diferansiyeli, bunun (7-1) ile verilen tam diferansiyelinden ibarettir. (7-1) formülündeki du^1, du^2 diferansiyeleri yerine (7-2) ile verilenleri koyar ve elde edilen ifadeyi $d\bar{u}^1$ ve $d\bar{u}^2$ göre sıralarsak

$$(7\text{-}3) \qquad d\vec{x} = (\vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^1} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^1})\, d\bar{u}^1 + (\vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^2} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^2})\, d\bar{u}^2$$

olur.

Öte yandan u^P, $(P = 1,2)$ yeni skaler değişkenleri cinsinden, (7-1) gereğince

$$d\vec{x} = \vec{x}_{\bar{u}^1} d\bar{u}^1 + \vec{x}_{\bar{u}^2} d\bar{u}^2$$

olduğundan, bu sonuncu ile (7-3) ün karşılaştırılması $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ vektörel fonksiyonunun, yeni skaler değişkenlere göre 1. mertebeden kısmî türevlerini, eski skaler değişkenlere göre 1. mertebeden kısmî türevleri cinsinden

$$(7\text{-}4) \qquad \vec{x}_{\bar{u}^1} = \vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^1} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^1} \; ; \; \vec{x}_{\bar{u}^2} = \vec{x}_{u^1} u^1_{\bar{u}^2} + \vec{x}_{u^2} u^2_{\bar{u}^2}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı. Fonksiyonel determinant

Bilindiği gibi, $\bar{u}^\rho$, $(P = 1,2)$ değişkenleri bağımsız iki değişken ise, B tanım bölgesinde seçilen herhangi bir yol üzerinde bunlar u^ρ ler cinsinden ifade edilebilecekleri gibi, (7-2) denklemleri yardımiyle de $d\bar{u}^\rho$ diferansiyelleri de du^ρ ler cinsinden hesaplanabilir ve bu halde seçilen yolun A_0 noktasında ve yakınlarında, «fonksiyonel determinant» adı verilen

$$\frac{D(u^1, u^2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)}$$

yâni

$$\frac{D(u^1, u^2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} = u^1_{\bar{u}^1}\, u^2_{\bar{u}^2} - u^1_{\bar{u}^2}\, u^2_{\bar{u}^1} \neq 0$$

dır.

8. Çeşitli mertebelerden diferansiyeller

İki bağımsız değişkenli $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun ikinci, üçüncü, ..., n - yinci mertebeden tam diferansiyelleri $d^1\vec{x}$, $d^2\vec{x}$, —, $d^n\vec{x}$ sembolleriyle gösterilir ve bunlar birinci mertebeden tam diferansiyeli veren (7-1) formülünden itibaren ve Teorem 6-1 i kullanarak aşama aşama hesabedilir. Örneğin, 2 nci mertebeden tam diferansiyel şöyle bulunur:

$$(8\text{-}1) \qquad d^2\vec{x} = d(\vec{x}_{u^1})\, du^1 + d(\vec{x}_{u^2})\, du^2 + \vec{x}_{u^1} d^2u^1 + \vec{x}_{u^2} d^2u^2$$

yani

$$(8\text{-}1) d^2\vec{x} = \vec{x}_{u^1u^1}(du^1)^2 + 2\vec{x}_{u^1u^2} du^1 du^2 + \vec{x}_{u^2u^2}(du^2)^2 + \vec{x}_{u^1} d^2u^1 + \vec{x}_{u^2} d^2u^2.$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

9. İki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlarda sınıf kavramı

B bölgesinde tanımlanmış iki bağımsız değişkenli

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$$

vektörel fonksiyonunun, bölgenin her noktasında, $n \geq 1$ olmak üzere, n-yinci mertebeye kadar kısmî türevlerinin hepsi —n dahil olmak koşulu ile— varsa ve sürekli ise, buna: B bölgesinde **n-yinci sınıftan 2 bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyon**, ya da **2 bağımsız değişkenli bir C^n — vektörel fonksiyonu** diyeceğiz.

Verilen B bölgesinin her noktasında, verilen 2 bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonun sonsuz mertebeden sürekli kısmî türevi varsa, sınıfı ∞ dur, veya bu bir C^{∞} — vektörel fonksiyonudur.

2 bağımsız değişkenli bir C^n -vektörel fonksiyonunun, bir karteziyen koordinat sistemine göre, skaler bileşenlerinden en az birisi aynı sınıftandır. Öteki ikisinin sınıfları ise en az n dir.

10. İki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlar için TAYLOR formülü

Bir B bölgesinin bir (u^1, u^2) noktasında n- ninci sınıftan ve iki bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyon

$$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$$

ise, biraz önce de belirttiğimiz gibi, bunun herhangi bir Ox_p, $(P = 1, 2, 3)$ karteziyen koordinat sistemine göre skaler bileşenlerinden hiç olmazsa birisi, aynı (u^1_0, u^2_0) noktasında n- ninci sınıftandır ve öteki iki bileşenin de sınıfları en az n dir. O halde, Analiz'den bilindiği gibi, bu üç skaler bileşen için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$
(10\text{-}1)\quad
\begin{cases}
\Delta u^1 = u^1 - u^1_0, \quad \Delta u^2 = u^2 - u^2_0, \quad \Delta x_p = x_p(u^1, u^2) - x_p(u^1_0, u^2_0), \quad (P = 1, 2, 3). \\
\Delta x_p = (x_{p1}\,\Delta u^1 + x_{p2}\,\Delta u^2 + \frac{1}{2!}(x_{p1}\,\Delta u^1 + x_{p2}\,\Delta u^2)^{(2)} + \\
\qquad \ldots + \frac{1}{n!}[(x_{p1}\,\Delta u^1 + x_{p2}\,\Delta u^2)^{(n)} + e_{pn}], \\
e_{pn} = e_{pn}(u^1_0, u^2_0, \Delta u^1, \Delta u^2), \quad \lim_{\substack{\Delta u^1 \to 0 \\ \Delta u^2 \to 0}} e_{pn} = 0
\end{cases}
$$

TAYLOR formülü yazılabilir.

Öte yandan

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2) - \vec{x}(u^1_0, u^2_0) = \sum_{p=1}^{3} (\Delta x_p)\,\vec{k}_p,$$

$$\vec{e}_n = \sum_{p=1}^{3} e_{pn}\,\vec{k}_p$$

dersek

$$
(10\text{-}2)\quad \Delta\vec{x} = (\vec{x}_{u^1}\,\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\,\Delta u^2) + \frac{1}{2!}(\vec{x}_{u^1}\,\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\,\Delta u^2)^{(2)} + \ldots
$$

$$
+ \frac{1}{n!}[(\vec{x}_{u^1}\,\Delta u^1 + \vec{x}_{u^2}\,\Delta u^2)^{(n)} + \vec{e}_n]
$$

$$
\lim_{\substack{\Delta u^1 \to 0 \\ \Delta u^2 \to 0}} \vec{e}_n = \vec{0}
$$

olur. Görülüyor ki :

B tanım bölgesinde **2 bağımsız değişkenli ve n- ninci sınıftan bir vektörel fonksiyon verildiğinde, bölgenin** (u^1_0, u^2_0) **noktası ve yakınları için (10-2) formülü yazılabilir.** Buna: **İki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonların TAYLOR formülü** denilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11. İki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlarda ikikatlı integraller

B tanım bölgesinde verilmiş iki bağımsız değişkenli bir vektörel fonksiyon $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ ve bölgenin değişen bir noktası da $A(u^1, u^2)$ olsun. Herhangi bir Ox_p $(P = 1, 2, 3)$ karteziyen koordinat sistemine göre

$$\vec{x}(u^1, u^2) = \sum_{p=1}^{3} x_p(u^1, u^2)\, \vec{k}_p$$

dir.

Verilen vektörel fonksiyonun B bölgesine teşmil olunmuş

$$\vec{I}_B = \int\int_B \vec{x}(u^1, u^2)\, du^1\, du^2$$

ikikatlı integrali

$$\vec{I}_B = \sum_{p=1}^{3} \vec{k}_p \left(\int\int_B x_p(u^1, u^2)\, du^1\, du^2 \right)$$

biçiminde tanımlanır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM II

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLERİN YEREL ÖZELLİKLERİ

Üç boyutlu E_3 Öklid uzayında yüzeylerin, önce, **Diferansiyel Geometri bakımından yerel geometrik özelliklerini** incelemek istiyoruz. Bunun için de Diferansiyel Geometri'de **yüzey kavramı**'ndan ne anladığımızı, öncelikle, açıklamamız gerekir. Bununla beraber, konuya açıklık getirmek üzere, bâzı klâsik örneklerde nasıl davranıldığını yeniden gözden geçirmek çok yerinde ve yararlı olacaktır.

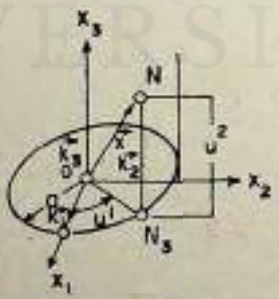
12. Örnekler

12.1. Dönel Silindir.

Dik eksen sisteminde

$$\vec{x}(u^1, u^2) = a \operatorname{Cos} u^1 \vec{k}_1 + a \operatorname{Sin} u^1 \vec{k}_2 + u^2 \vec{k}_3 \qquad (12\text{-}1)$$

vektörel denklemi, ekseni Ox_3 ve yarıçapı a **olan dönel silindiri** tanımlar (Şek. 1).



(Şek. 2)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu dönel silindirin herhangi bir N noktasının x_p karteziyen koordinatlarının değerleri de

$$(12\text{-}2)\qquad \begin{cases} x_1 = a\,\mathrm{Cos}\,u^1 \\ x_2 = a\,\mathrm{Sin}\,u^1 \\ x_3 = u^3 \quad , \quad a < u^2 \leqslant 2\pi; \quad -\infty < u^3 < +\infty \end{cases}$$

dir.

(12-2) formülleri, sözü edilen dönel silindirin u^1, u^2 **parametreli denklemleridir.** Bu denklemlerdeki u^p, $(p=1, 2)$ parametrelerinin geometrik anlamları açıktır: u^1 radyan cinsinden $\overset{\frown}{x_1 O N_3}$ açısını, u^2 de $\overline{N_3N}$ kotunu gösterir.

12.2 Dönel koni.

Dik eksen sisteminde

$$(12\text{-}3)\qquad \vec{x}(u^1, u^2) = u^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,u^1\,\vec{k}_1 + u^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,u^1\,\vec{k}_2 + u^2\,\cos\alpha\,\vec{k}_3\,,\ \alpha: \text{sabit}$$

vektörel denklemi; tepesi O, ekseni Ox_3 ve tepe yarıaçısı α olan **dönel koniyi** tanımlar.

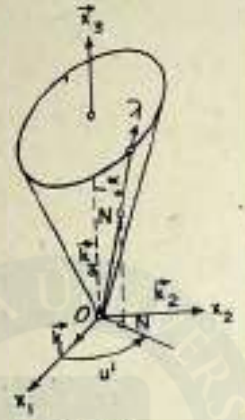
Bu dönel koninin herhangi bir N noktasının x_p karteziyen koordinatları

$$(12\text{-}4)\qquad \begin{cases} x_1 = u^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,u^1 \\ x_2 = u^2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,u^1 \\ x_3 = u^2\,\mathrm{Cos}\,\alpha, \quad 0 < u^1 \leqslant 2\pi \end{cases}$$

dir.

(12-4) denklemleri, sözü edilen dönel koninin, u^1, u^2 **parametreli denklemleridir.** Bu denklemlerdeki u^p, $(P=1, 2)$ parametrelerinin geometrik anlamları açıktır: $N(x_p)$ noktasının, x_1Ox_2 koordinat düzlemi üzerindeki dik izdüşümü N_3 ise, u^1 parametresi radyan cinsinden $\overset{\frown}{x_1 O N_3}$ açısını, u^2 parametresi de, N noktasının $O\lambda$ ekseni üzerindeki apsisini gösterir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 3.

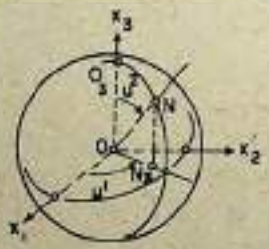
12.3. Küre

Dik eksen sisteminde

(12-5) $\vec{x}(u^1, u^2) = R \operatorname{Sin} u^2 \operatorname{Cos} u^1 \vec{k}_1 + R \operatorname{Sin} u^2 \operatorname{Sin} u^1 \vec{k}_2 + R \operatorname{Cos} u^2 \vec{k}_3$ **vektörel denklemi**, O merkezli ve R yarıçaplı küreyi tanımlar. Bu kürenin herhangi bir N noktasının x_i karteziyen koordinatları

(12-6)
$$\begin{cases} x_1 = R \operatorname{Sin} u^2 \operatorname{Cos} u^1 \\ x_2 = R \operatorname{Sin} u^2 \operatorname{Sin} u^1 \\ x_3 = R \operatorname{Cos} u^2 , \quad R : \text{sabit} \\ 0 < u^1 \leqslant 2\pi , \quad 0 < u^2 \leqslant \pi \end{cases}$$

dır.



Şek. 4

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(12-6) denklemleri, sözü edilen kürenin u^1, u^2 **parametreli denklemleridir.** Bu denklemlerdeki u^p, $(p=1,2)$ parametrelerin geometrik anlamlarına gelince; her ikisi de radyan cinsinden birer açıyı gösterir ve

$$u_1 = \widehat{x_1 o N_3}, \quad u^2 = \widehat{N o x_3}$$

dür.

Bu örnekler gösterir ki, verilen bir yüzey analitik olarak 2 bağımsız parametreye bağlı üç skaler fonksiyonla, vektörel olarak da gene 2 bağımsız parametreye bağlı bir tek vektörel fonksiyonla tanımlanmaktadır. Skaler olsun, vektörel olsun, bütün bu fonksiyonlar: her örnek için aynı tanım bölgeli, gerçel, tek değerli, bir takım mertebelere kadar kısmî türevleri olan ve bu kısmî türevleri sürekli fonksiyonlardır.

13. Yüzey kavramı, Analitik ve vektörel gösterilişler

Biraz önce söylediklerimize göre, şöyle bir sorunun akla gelmesi doğaldır: Acaba, yukarıki örneklerden esinlenerek, hattâ konuya biraz da kesinlik getirerek, şöyle diyebilir miyiz?

u^p, $(P=1,2)$ skaler, gerçel ve bağımsız değişkenlerinin gerçel, tek değerli ve belirli mertebelere kadar sürekli kısmî türevli ve aynı (B) tanım bölgeli üç

(13-1) $$x_p = x_p(u^1, u^2), \quad (p=1,2,3)$$

skaler fonksiyonu, bir Ox_p karteziyen koordinat sistemine göre, bir yüzey tanımlar. Veya : **u^p, $(p=1,2)$ skaler, gerçel ve bağımsız değişkenlerinin gerçel, tek değerli ve belirli mertebeye kadar sürekli kısmî türevli**

(13-2) $$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$$

vektörel fonksiyonu, sabit bir O noktasından itibaren

$$\vec{ON} = \vec{x}(u^1, u^2)$$

biçiminde alındığında, N noktası bir yüzey çizer.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bunun, bazı koşullar yerine gelmedikçe, doğru olamayacağı örneklerle gösterilebilir. Bir kere, x_ρ **fonksiyonlarının üçü birden sabitse,** uzayın belirli bir N noktası tanımlanıyor, demektir. Eğer x_ρ **fonksiyonları, bir tek bağımsız değişkenin fonksiyonları biçiminde yazılabilirse,** bir eğri söz konusudur. Örneğin

$$x_1 = u^1 - u^2, \quad x_2 = (u^1 - u^2)^2, \quad x_3 = \operatorname{tg}(u^1 - u^2)$$

denklemleriyle tanımlanmak istenen geometrik varlık,

$$x_1 = t, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = \operatorname{tg} t$$

denklemlerinin gösterdiği eğriden ibarettir. Ayrıca şurasını da kaydedelim ki, bu örnekteki üç fonksiyondan herhangi ikisi, geriye kalanın fonksiyonudur. Öte yandan

$$\vec{x}(u^1, u^2) = (u^1 - u^2)\,\vec{k}_1 + (u^1 - u^2)^2\,\vec{k}_2 + \operatorname{tg}(u^1 - u^2)\,\vec{k}_3$$

dersek,

$$\vec{x}_{u^1} = \vec{k}_1 + 2(u^1 - u^2)\,\vec{k}_2 + [1 + \operatorname{tg}^2(u^1 - u^2)]\,\vec{k}_3,$$

$$\vec{x}_{u^2} = -\vec{k}_1 - 2(u^1 - u^2)\,\vec{k}_2 - [1 + \operatorname{tg}^2(u^1 - u^2)]\,\vec{k}_3 = -\vec{x}_{u^1}$$

bağıntılarından

$$\vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = \vec{0}$$

sonucu çıkarılır veya bu vektörel çarpımın dik eksen sisteminde skaler bileşenleri olan üç

$$(13\text{-}1)' \qquad \frac{D(x_l, x_m)}{\Delta(u^1, u^2)} = 0, \quad (l \neq m,\ l = 1, 2, 3;\ m = 1, 2, 3)$$

fonksiyonel determinant ya da jakobyen özdeş olarak sıfırdır.

Şurası geometrik olarak açıktır ki (13-1) ile gösterilen geometrik varlığın bir **nokta** veya bir **eğri** olması için **gerekli ve yeterli koşul,** bunun koordinat düzlemlerinden her birisi üzerindeki izdüşümünün de bir **nokta** ya da bir **eğri** olmasıdır. Bu izdüşümlerden herhangi birisi, örneğin x_1Ox_2 koordinat düzlemi üzerindeki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x_1 = x_1(u^1, u^2),\quad x_2 = x_2(u^1, u^2)$$

denklemleriyle belirlidir. Dolayısiyle, bunun bir **nokta** ya da bir **eğri** olması demek, bu **iki koordinatın birbirine fonksiyonel olarak bağlı bulunması** demektir. Bunun için de gerekli ve yeterli koşul

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(u^1, u^2)} = 0$$

dır.

Buna göre: **(13-1) in gösterdiği geometrik varlığın bir nokta veya bir eğri olması için gerekli ve yeterli koşul $x_p(u^1, u^2)$, $(P = 1, 2, 3)$ fonksiyonları ile oluşturulan üç jakobiyenin özdeş olarak sıfıra eşit bulunmasıdır.**

Söyle de diyebiliriz: **(13-2) ile gösterilen geometrik varlığın bir nokta ya da bir eğri olması için gerekli ve yeterli koşul, $\vec{x}_{u^1}(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)$ vektörel çarpımının sıfır-vektöre özdeş olmasıdır.**

Söz konusu vektörel çarpım sıfır-vektöre özdeş değilse, veya bunun bileşenlerini oluşturan üç jakobiyenin üçü birden özdeş olarak sıfır değilse, (12-1) veya (12-2) bir yüzey gösterir. Gerçekten, diyelim ki

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(u^1, u^2)} \not\equiv 0$$

dır. Böyle olunca da, x_1 ve x_2 koordinatları birbirine fonksiyonel olarak bağlı değildir; dolayısiyle, x_1Ox_2 düzlemi üzerindeki izdüşüm bir bölgedir. Buna göre, (13.1) veya (13.2) ile bir yüzey gösterilir. O halde, yüzey tanımını şöyle yapabiliriz:

Tanım $u^p, (p=1,2)$ **skaler, gerçel ve bağımsız değişkenlerinin**

(B) $$u^1_0 \leqslant u^1 \leqslant u^1_1,\quad u^2_0 \leqslant u^2 \leqslant u^2$$

(B) **dikdörtgen bölgesinde tanımlanmış gerçel, tek değerli ve $n \geqslant 1$ inci mertebeye kadar sürekli kısmi türevli,** yâni n- yinci sınıftan

(13-2) $$\vec{ON} = \vec{x}(u^1, u^2) = \sum_{p=1}^{3} x_p(u^1, u^2)\,\vec{k}_p$$

vektörel fonksiyonu,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(13-3) $\vec{x}_{,1}(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_{,2}(u^1, u^2) \neq \vec{O}$

koşulunu sağlıyorsa, N noktası n- yinci sınıftan, ya da C^n -yinci sınıftan bir yüzey çizer.

Yukarıki tanımda sözü edilen koşulların bâzıları üzerinde durmak yerinde olur:

Verilen tanım bölgesi yüzünden, yüzeyin noktaları ile u^p ler arasındaki ilişki bire-bir olmayabilir. O zaman u^p lerin değişim bölgesi sınırlandırılabilir.

$\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun sınıfını belirten n sayısı, uğraşılan problemin niteliğine göre, değişebilir. n nin verilmesi, tanım bölgesinin herhangi bir u^p, $(p=1,2)$ noktasında, verilen vektörel fonksiyona, (10-2) TAYLOR formülünün n sayısı için uygulanabileceği anlamını taşır.

a) Parametreli vektörel ve skaler denklemler

(13-2) de sözü edilen

(13-4) $$x_p = x_p(u^1, u^2), \quad (p = 1, 2, 3)$$

denklemleri, yüzeyin **parametreli skaler denklemleri**dir. Bu denklemlerdeki x_p ler, verilen herhangi bir karteziyen koordinat sistemine göre, yüzeyin $N(u^1, u^2)$ noktasının **karteziyen koordinatları**dır ve bunlar

$$\frac{D(x_l\ x_m)}{D(u^1, u^2)} \neq 0, \quad (l \neq m;\ l, m = 1, 2, 3)$$

koşulunu sağlarlar. (13-3) ü sağlıyan $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ de aynı yüzeyin **parametreli vektörel denklemi**dir.

b) Karteziyen denklem

(13-4) denklemlerinde, hiç olmazsa kuramsal olarak, u^p parametreleri yok edilirse, (13-3) koşulu sağlanmak üzere, x_p koordinatları arasında

(13-5) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu, **yüzeyin karteziyen denklemi**dir. Yalnız şurasını kaydetmek yerinde olur: u^p lerin yokedilmesi sonucunda, $x_p(u^1, u^2)$ fonksiyonlarının u^p ler cinsinden aynı olan (B) tanım bölgesi dikkate alınmazsa, yüzeyin parametreli denklemlerle gösterilmek istenilen parçasından fazlası da söz konusu olabilir. Nitekim, ilk dönel silindir örneğinde, parametrelerin değişim aralıklarını sınırlayarak, silindirin belirli bir bölgesi ele alınsa, u^p leri yok ederek bulunan

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2$$

karteziyen denklemi, sadece bu parçayı değil, dönel silindirin tümünü gösterir, meğer ki sözü edilen sınırlandırma, x_p lere de uygulansın. (13-5) denklemi, özel hallerde

(13-6) $$x_3 = g(x_1, x_2)$$

biçiminde yazılabilir.

Yüzeyleri, Diferansiyel Geometri bakımından metodik olarak ilk kez bu tür denklemlerle inceleyen Fransız matematikcilerinden GASPARD MONGE (1746-1818) un adı (13-6) tipindeki denklemlere verilmiştir.

Bu biçimdeki denklemlerin özelliği, ilerde göreceğimiz gibi, (13-3) koşulunun her x_p, $(p = 1, 2, 3)$ noktasında sağlanmış olmasıdır.

Eğer yüzey (13-5) karteziyen denklemi ile verilmişse, birazdan da değineceğimiz gibi, (13-3) koşulu

$$t_p \neq 0, \quad (p = 1, 2, 3)$$

biçimindedir.

14. Eğrisel (veya (GAUSS) koordinatları. Koordinat (veya GAUSS) çizgileri. Koordinat çizgilerinden farklı çizgiler

a) Eğrisel koordinatlar

Yüzey, **tek değerli** (13-2) fonksiyonlariyle tanımlanmış olduğundan, parametrelerin bir (u^1_0, u^2_0) değer takımı ile, yüzeyin bir tek N_0 noktası belirlenmiş olur. Bu yüzden; u^1, u^2 parametrelerine yüzey üzerinde **eğrisel koordinatlar**, veya bunları ilk olarak metodlu bir biçimde kullandığı için, adını anımsatmak üzere, **GAUSS koordinatları denilir.** (FREDERICK GAUSS, Alman matematikcilerinden, 1777-1855).

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Koordinat çizgileri

Eğrisel koordinatlardan sadece bir tanesi, örneğin

$$u^2 = u^2_0 = \text{sabit}$$

olarak alınırsa, (u^1, u^2_0) değer takımlarıyle değişen noktalar, yüzey üzerinde bir eğri boyunca yerlerini değiştirirler. Bu eğriye u^1 — koordinat (veya GAUSS) çizgisi adı verilir. Bu eğriler, yüzey üzerinde 1 parametreli bir eğri ailesi oluştururlar. Başka deyimle, yüzeyin u^1— GAUSS çizgilerinin sayısı ∞^1 dir.

Aynı düşünceler, yüzeyin

$$u^1 = u^1_0 = \text{sabit}$$

koordinat çizgileri için de geçerlidir.

Uyarı

Demin söylediğimiz gibi, (13-2) denklemleri tek değerli varsayıldığından, her ne kadar, seçilen her u^1, u^2 parametre takımı, S üzerinde sadece bir tek nokta belirtirse de, bunun tersi genellikle doğru değildir, yâni S üzerinde seçilen bir N noktası birden çok u^1, u^2 parametre takımı belirleyebilir. Nitekim, ilk dönel silindir üzerinde seçilen bir N noktasının parametre değerleri

$$u^1 + 2k\pi,\ u^2 : (k : 0 \text{ da olabilen işaretli tamsayı})$$

biçimindedir, yâni ∞ dur; bu sakıncayı ortadan kaldırmak için, yâni S nin noktalariyle parametre değerleri arasındaki ilişkiyi **bire-bir** kılmak için, adı geçen örnekte

$$0 < u^1 \leqslant 2\pi$$

olarak alınmıştır.

İşte bu özel örnekte yapıldığı gibi, (13-2) hâlinde, gerekirse $x_k(u^1, u^2)$ fonksiyonlarının tanım bölgesi veya bölgeleri öyle sınırlandırılabilir ki yüzeyin noktaları da sadece birer parametre takımı belirlesin. Böyle yapılsa bile, bâzen, ayrıcalık gösteren hallerle karşılaşılabilir. Nitekim üçüncü küre örneğinde, seçilen ortak (B) tanım bölgesi nedeniyle, her ne ka-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dar küre noktaları ile (u^1, u^2) parametre takımları arasındaki ilişki bire-bir ise de, **güney ve kuzey kutup noktalarının u^1 leri belirsizdir.** (Bu iki noktadan sonsuz boylam çemberi geçer.) Bu iki kutup noktası, sıfır yarıçaplı

$$u^2 = o \quad ve \quad u^2 = \pi$$

enlem çemberleriyle tanımlanır.

Genel halde, yüzey noktaları ile parametreler arasındaki ilişki bire bir kılındığında, eğrisel koordinatlar gerçek anlamda birer koordinat rolünü oynarlar.

Koordinat çizgisi olmayan eğriler

Bir P noktası yüzeyin bir C çizgisi üzerinde dolandığında, bu noktanın u^1, u^2 eğrisel koordinatları artık bağımsız değildir ve

(14-1) $\quad u^2 = f(u^1)$ veya $g(u^1, u^2) = o$ ya da $u^1 = f_1(t), \quad u^2 = f_2(t)$

biçiminde birbirine bağlıdır. Bu bağıntılardan herhangi birisi, yüzeyin, örneğin

$$\vec{x}(u^1, u^2) = \sum_{n=1}^{3} x_n(u^1, u^2)\,\vec{k}_n$$

vektörel denklemleriyle birlikte, söz konusu C eğrisini tanımlar.

Bu tanımdaki (14-1) fonksiyonlarının hepsi: **gerçel, tek değerli ve $n \geqslant 1$ inci sınıftandır.**

15. Düzgün elemanlar

a) Düzgün nokta

Bir (B) kapalı dikdörtgen bölgesinde -veya daha genel, kapalı bir bölgede- tanımlanmış bir yüzeyin birinci mertebeden kısmî türevli olduğu bir $P(u^1, u^2)$ noktasında

(15-1) $$\vec{x}_{,1} \wedge \vec{x}_{,2} \neq \vec{o}$$

ise, P noktasına **düzgün nokta** denilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yüzeyin bir P noktasının düzgün olmaması, parametrelerin seçim biçiminden gelebileceği gibi, yüzeyin kendisinden de gelebilir.

Gerçekten, (12-6) denklemleriyle tanımlan kürenin, kuzey ve güney kutuplarında (yani $u^2 = 0$ ve $u^2 = \pi$ noktalarında) kolaylıkla görülür ki

$$\vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = \vec{0}$$

dür. Ama aslında, öteki noktalardan hiçbir farkı olmayan kutuplar için böyle bir sonuca varılması, küreyi tanımlamak üzere alınan parametrelerin seçim biçiminden kaynaklanmaktadır.

Nitekim, aynı küreyi dik koordinatlarda

$$x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - R^2 = 0$$

denklemiyle tanımlar ve

$$x_1 = u^1, \quad x_2 = u^2, \quad x_3 = \varepsilon \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}, \quad \varepsilon = \mp 1$$

dersek, herhangi bir (u^1, u^2) noktası için

$$\vec{x}_{u^1}\left(1, 0, -\varepsilon u^1 / \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right)$$

$$\vec{x}_{u^2}\left(0, 1, -\varepsilon u^2 / \sqrt{R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2}\right)$$

olacağından, $(0, 0, \varepsilon R)$ koordinatlı kutuplar da

$$\vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = \vec{k}_1 \wedge \vec{k}_2 = \vec{k}_3$$

bulunur ki bu da kutupların düzgün olduklarını gösterir.

Buna karşılık, (12-4) denklemleriyle tanımlanan dönel koni örneğinde, koninin başlangıçla çakışan $(0, 0, 0)$ koordinatlı tepesinde de $\vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = \vec{0}$ dır ve kürede yapıldığı gibi, dik koordinat sisteminde, koniyi

$$x_1^2 + x_2^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha\, x_3^2 = 0$$

denklemiyle tanımlar ve

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x_1 = u^1,\quad x_2 = u^2,\quad x_3 = \varepsilon\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}\ \operatorname{cotg}\alpha,\quad \varepsilon = \pm 1$$

dersek, herhangi bir (u^1, u^2) noktası için

$$\vec{x}_{,1}\,(1,\ 0,\ \varepsilon\ \operatorname{cotg}\alpha\ u^1/\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}\ )$$

$$\vec{x}_{,2}\,(0,\ 1,\ \varepsilon\ \operatorname{cotg}\alpha\ u^2/\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}\ )$$

olacağından, (0, 0, 0) koordinatlı tepede $\vec{x}_{,1}$ ve $\vec{x}_{,2}$ nin üçüncü aksler bileşenleri için belirsiz değerler elde edilir. Şu halde, dönel konide, tepenin düzgün olmayışı, koninin kendisinden gelir.

b) Düzgün yüzey

Bir B dikdörtgen kapalı bölgesinde -veya daha genel kapalı bir bölgede- tanımlanmış $n \geqslant 1$ inci sınıftan bir yüzeyin her noktası düzgünse, bu yüzeye B **bölgesinde tanımlanmış düzgün ve C^n sınıfından bir yüzey**, diyeceğiz.

c) Parametrelerin değiştirilmesi (Düzgün olma niteliğini yitirmeyen, parametre değişimi).

B dikdörtgen ve kapalı bölgesi ile verilmiş bir u^p, $(p=1,2)$ eğrisel koordinat sisteminden

$$u^p = f_p(\bar{u}^1, \bar{u}^2),\quad (p = 1, 2) \tag{15-2}$$

denklemleriyle başka bir $\bar{u}^p$, $(p=1, 2)$ eğrisel koordinat sistemine geçelim ve (15-2) fonksiyonları, B bölgesi yardımiyle tanımanın gerçel u^p, $(p=1,2)$ lerin bölgesinde; **gerçel, tek değerli** ve $n \geqslant 1$ **inci sınıftan** fonksiyonlar olsun. Ayrıca eğrisel koordinat takımleriyle yüzey noktaları arasındaki ilişkinin bire-bir olabilmesi için, (15-2) denklemlerinin eski ve yeni koordinat takımlar arasında bire-bir bir ilişki oluşturduklarını varsayalım. Bu da

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} = \frac{D(u^1, u^2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \neq 0 \tag{15-3}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olmasını gerektirir. Böyle olmasa, (15-2) formülleriyle tanımlanan u^p, $(p = 1, 2)$ ler birbirine

$$f(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = 0$$

biçiminde bir bağıntı ile bağlı bulunur ve yüzeyin bir eğrisi üzerindeki noktalar söz konusu olur.

Öte yandan f_p fonksiyonlarının sınıfı $n \geqslant 1$ olduğundan, (15-2) yardımiyle

$$\vec{x}_{\bar{u}^1} = \vec{x}_{u^1} f_{1\bar{u}^1} + \vec{x}_{u^2} f_{2\bar{u}^1}$$

(15-3)

$$\vec{x}_{\bar{u}^2} = \vec{x}_{u^1} f_{1\bar{u}^2} + \vec{x}_{u^2} f_{2\bar{u}^2}$$

bulunacağından

(15-4) $$\vec{x}_{\bar{u}^1} \wedge \vec{x}_{\bar{u}^2} = \frac{D(f_1, f_2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2}$$

elde edilir.

Bu bağıntı gösterir ki, eski eğrisel koordinat sistemine göre düzgün olan bir noktanın, yani (15-1) i sağlayan bir noktanın, yeni eğrisel koordinat sisteminde de düzgün olması için gerekli ve yeterli koşul, (15-3) tür. O halde, şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 15.1. Bir u^p, $(p = 1, 2)$ eğrisel koordinat sisteminde, yüzeyin düzgün olan bir (u^1_0, u^2_0) noktasının, başka bir $\bar{u}^p$, $(P = 1, 2)$ eğrisel koordinat sisteminde de düzgün olması için gerekli ve yeterli koşul, noktanın yeni sisteme göre $(\bar{u}^1_0, \bar{u}^2_0)$ eğrisel koordinatlarının

$$\frac{D(u^1, u^2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \neq 0$$

eşitsizliğini sağlamasıdır.

d) Düzgün parametre

Son yazdığımız **fonksiyonel determinant, B tarım bölgesinde özdeş olarak sıfıra eşit değilse, düzgün bir parametre değişiminin gerçekleştiril-**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

diğini söyleyeceğiz. Başka deyimle, düzgün noktalardan oluşan bir yüzeyin, düzgün bir parametre değişimi sonucunda, tüm noktaları gene düzgün olarak kalacaktır.

16. Teğet düzlem ve normal birim vektörü

Teğet düzlemin tanımı

Yüzeyin bir P_0 noktasından geçen tüm eğrilerinin bu noktadaki teğetleri aynı bir düzlem üzerinde bulunurlarsa, bu düzleme: Yüzeyin P_0 noktasındaki **teğet düzlemi** denilir.

I. Düzgün noktada teğet düzlem

P_0 noktası, yüzeyin bir düzgün noktası ise, aşağıdaki teorem söz konusudur:

Teorem 16-1. $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ **vektörel denklemi ile verilmiş bir yüzeyin bir P_0 düzgün noktasında, lineer olarak bağımsız** $\vec{x}_{u^1_0}$, $\vec{x}_{u^2_0}$ **kısmi türev vektörleriyle tanımlanan düzleme paralel, bir ve yalnız bir teğet düzlemi vardır.**

Gerçekten, yüzeyin $P_0(u^1_0, u^2_0)$ noktasından geçen ve üzerinde bulunan herhangi bir C eğrisini (14-2;3) denklemleriyle, yani

(14-2;3) $\quad u^1 = f_1(t), \quad u^2 = f_2(t), \quad [u^1_0 = f_1(t_0), u^2_0 = f_2(t_0)]$

denklemleriyle tanımlayalım ve $f_P = f_P(t)$, $(P = 1, 2)$ fonksiyonlarını $t = t_0$ için birinci mertebeden türevli olarak alalım.

$$\vec{x} = \vec{x}[f_1(t), f_2(t)]$$

vektörel denklemiyle tanımlanan C eğrisinin P_0 noktasındaki teğeti; $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonu ile $f_P = f_P(t)$ skaler fonksiyonları P_0 noktasında sıra ile birinci mertebeden kısmi türevli ve birinci mertebeden türevli olarak alındıklarından,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-1) $\vec{x}'(t_0) = \vec{x}_{u^1}(u^1_0, u^2_0)\, f'_1(t_0) + \vec{x}_{u^2}(u^1_0, u^2_0)\, f'_2(t_0)$

vektörel türevinin taşıyıcısına paraleldir.

Düzgün olan P_0 noktasında, (15-1) nedeniyle

$$\vec{x}_{u^1}(u^1_0, u^2_0) \wedge \vec{x}_{u^2}(u^1_0, u^2_0) \neq \vec{0}$$

dür, yâni yukarıki vektörel çarpımı oluşturan iki vektör, ayrı ayrı sıfır-vektörden farklı ve birbirine paralel olmayan iki vektördür. O halde P_0 noktası, bu noktadan geçen koordinat çizgilerinin her ikisi için de düzgündür ve söz konusu iki vektör P_0 noktasında birbirlerine lineer olarak bağlı bulunmadıklarından bir düzlem doğrultusu belirlerler.

1) Eğer P_0 noktası, bu noktadan geçen tüm **C eğrileri için de düzgün se,** bu noktada **aynı zamanda**

$$f'_p(t_0) = 0, \quad (P = 1, 2)$$

olamaz, dolayısiyle C eğrisinin (16-1) ile tanımlanan teğeti, $\vec{x}_{u^1}(u^1_0, u^2_0)$, $\vec{x}_{u^2}(u^1_0, u^2_0)$ vektörlerinin belirledikleri düzlem doğrultusuna paraleldir.

2) Eğer P_0 noktası, yüzeyin bu noktadan geçen C eğrilerinden birisi için **düzgün** değilse, bu noktada söz konusu eğri için

(16-2) $$f'_p(t_0) = 0, \quad (P = 1, 2)$$

dir. C nin P_0 noktasında bir teğeti varsa, (DİFERANSİYEL GEOMETRİ I. s. 16, VI) daki koşullar sağlandığı takdirde, C nin $\vec{x} = \vec{x}(t)$ yer vektörünün n-ninci mertebeden vektörel türevini hesaplamamız gerekir. Kolaylıkla görüleceği gibi, $t = t_0$ için $f_p^{(n)}(t_0)$ ların ikisi birden sıfır değilse, bu türev

(16-3) $$\vec{x}^{(n)}(t_0) = \vec{A} + \vec{x}_{u^1}(u^1_0, u^2_0)\, f_1^{(n)}(t_0) + \vec{x}_{u^2}(u^1_0, u^2_0)\, f_2^{(n)}(t_0)$$

biçimindedir.

$\vec{A}$ vektöründe, $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun, n- ninci mertebeye kadar sürekli kısmî türevlerinin, C eğrisi ve $t = t_0$ için değerleri var-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dır ve her terimde çarpan olarak $f_1'(t_0)$ ve $f_2'(t_0)$ ın çeşitli mertebelerden kuvvetleri bulunur. Dolayısiyle, (16-2) nedeni ile, P_0 noktasında C için

$$\vec{A} = \vec{O}$$

dür. O halde

$$\vec{x}^{(n)}(t_0) = \vec{x}_{u^1}(u^1_0, u^2_0)\, f_1^{(n)}(t_0) + \vec{x}_{u^2}(u^1_0, u^2_0)\, f_2^{(n)}(t_0) : \tag{16-4}$$

bulunacağından, P_0 noktası bir özel C eğrisi için **düzgün** olmasa dahi, varsa, bunun P_0 daki teğeti, gene yer vektörünün birinci mertebeden kısmî türevlerinin bu noktadaki değerleri ile tanımlanan teğet düzlem üzerindedir. Bu sonucu şöyle ifade edebiliriz:

Yüzeyin bir P_0 düzgün noktası, bu noktadan geçen ve yüzey üzerinde bulunan bir C eğrisi için düzgün değilse ve bu eğri (14-3;2) denklemleriyle tanımlanmışsa, $f_p(t)$, $(p=1,2)$ skaler fonksiyonlarının sürekli ve $t=t_0$ için ikisi birden sıfır olmayan ilk türevlerinin mertebesi $n > 1$ ise, yüzeyi veren $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ vektörel fonksiyonunun n- ninci mertebeye kadar -n dahil - sürekli vektörel kısmî türevleri bulunmak koşulu ile C nin P_1 daki teğeti, (16-4) vektörel eşitliği ile belirlidir ve bu teğet de, yüzeyin P_1 düzgün noktasındaki $\vec{x}_{u^1}, \vec{x}_{u^2}$ birinci mertebeden kısmî türev vektörleri ile belirli olan teğet düzlem üzerindedir.

Örnek

Dik eksen sisteminde

$$\vec{x}(u^1, u^2) = u^1 \vec{k}_1 + u^2 \vec{k}_2 + [(u^1)^3 - (u^2)^2]\, \vec{k}_3$$

vektörel denklemiyle tanımlanan yüzey, $\vec{x}(0,0) = \vec{O}$ olduğundan, başlangıçtan geçer.

Yüzeyin herhangi bir $P(u^1, u^2)$ noktası

$$\vec{x}_{u^1} = \vec{k}_1 + 2u^1 \vec{k}_3, \quad \vec{x}_{u^2} = \vec{k}_2 - 3(u^2)^2 \vec{k}_3$$

$$\vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = -2u^1 \vec{k}_1 + 3(u^2)^2 \vec{k}_1 + \vec{k}_3$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

eşitlikleri dolayısiyle, düzgündür. Özellikle, düzgün olan O (o, o) başlangıç noktasında teğet düzlem $x_1 O x_2$ koordinat düzlemidir.

Verilen yüzey üzerinde bulunan ve O noktasından geçen

C) $\quad u^1 = t^3,\ u^2 = t^2$

eğrisinin teğeti, (16-1) formülü nedeniyle

$$\vec{x'}(t) = 3t^2\vec{k}_1 + 2t\vec{k}_2$$

vektörü ile belirlidir. O (o, o) noktasında

$$\vec{x'}(o) = \vec{0}$$

olduğundan, bu nokta C nin düzgün olmayan bir noktasıdır. O halde, C nin O daki teğetini bulmak için, (16-3) formülünü uygulamamız gerekir.

Kolaylıkla görülür ki bu örnekte $n = 2$ dir ve

$$\vec{x''}(o) = \vec{k}_2$$

bulunur, yâni C eğrisi başlangıçta Ox_2 koordinat eksenine teğettir. Başka deyimle, C nin O daki teğeti de, bu nokta C için düzgün olmadığı halde, O daki teğet düzlem üzerindedir.

Uyarılar

1) C nin yer vektörünün üçüncü skaler bileşeni, t cinsinden

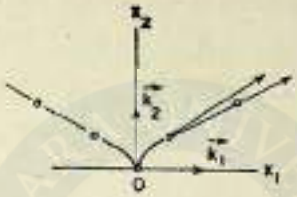
$$(u^1)^2 - (u^2)^3 = t^6 - t^6 = 0$$

olduğundan, bu eğri, x_1Ox_2 koordinat düzleminin

$$x_1^2 - x_2^3 = 0$$

eğrisidir ve O noktası bu eğrinin düzgün olmayan bir noktasıdır; daha kesin bir deyişle (DİFERANSİYEL GEOMETRİ I, s. 53, örnek 4) birinci türden bir dönüm noktasıdır (Sek. 5).

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 5.

2) Yukardaki örneğin aksine, bir P noktası, alınan C eğrisinin düzgün bir noktası olduğu halde, sırf C yi tanımlamak üzere alınan parametrelerin kötü seçimi yüzünden, P noktası C nin düzgün olmayan bir noktası gibi görünebilir. Örneğin, dik eksen sisteminde

$$x_1 = u^1, \quad x_2 = u^2, \quad x_3 = (u^2)^2 - 2u^1$$

denklemleriyle tanımlanan yüzey üzerinde

$$u^1 = f_1(t) = \frac{t^4}{2} \; ; \quad u^2 = f_2(t) = t^2$$

denklemleriyle tanımlanan C eğrisi

$$x_3 = t^4 - t^4 = 0$$

olduğundan, x_1Ox_2 düzlemi üzerinde O tepeli ve Ox_1 eksenli parabolün $x_2 > 0$ ile belirli bulunan yarısıdır ve bunun her noktası düzgündür. Böyle olduğu halde, başlangıç için

$$\vec{x}'(t) = 2t^1 \vec{k}_1 + 2t \vec{k}_2$$

$$\vec{x}'(0) = \vec{0}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Eğer

$$u^1 = f_1(t) = \frac{t^2}{2};\quad u^2 = f_2(t) = t$$

alınsaydı, bu biçimsizlik meydana gelmezdi.

Düzgün noktada teğet düzlemin vektörel ve karteziyen denklemleri

Verilen yüzeyin bir $P_o(u^1_o, u^2_o)$ **düzgün** noktasındaki teğet düzlemin herhangi bir noktası O ise, P_o **düzgün noktasındaki teğet düzlemin vektörel denklemi**

$$(\vec{P_oO},\ \vec{x_{u^1}},\ \vec{x_{u^2}}) = O \tag{16-5}$$

dır.

Herhangi bir karteziyen koordinat sisteminde P_o ve O noktalarının koordinatları sırasıyle

$$x_{po},\ X_p,\ (p = 1, 2, 3)$$

ise, P_o düzgün noktasındaki teğet düzlemin karteziyen denklemi

$$\| X_p - x_{po}\ x_{pu^1}(u^1_o, u^2_o)\ x_{pu^2}(u^1_o, u^2_o) \| = o \tag{16.6}$$

olur.

Eğer yüzey, en az 1 -nci sınıftan (13-6) MONGE denklemiyle verilmişse,

$$x_1 = u^1,\ x_2 = u^2,\ x_3 = g(u^1, u^2) \tag{16-7}$$

dır ve g fonksiyonunun birinci mertebeden kısmi türevlerini

$$g_{x_1} = p,\ g_{x_2} = q \tag{16-8}$$

ile gösterirsek,

$$\begin{cases} x_{1\,u^1_o} = 1,\quad x_{2\,u^1_o} = 0,\quad x_{3\,u^1_o} = g_{x_{1o}} = p_o \\ x_{2\,u^2_o} = 0,\quad x_{2\,u^2_o} = 1,\quad x_{3\,u^2_o} = g_{x_{2o}} = q_o \end{cases} \tag{16-9}$$

olacağından, MONGE denklemiyle verilen yüzeyin bir P_o düzgün noktasındaki teget düzleminin karteziyen denklemi (16-6) ve (16-9) eşitlikleri nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\begin{vmatrix} X_1-x_{10} & X_2-x_{20} & X_3-x_{30} \\ 1 & 0 & p_0 \\ 0 & 1 & q_0 \end{vmatrix} = 0$$

veya açarak

(16-10) $$X_3-g(x_{10}, x_{20}) = p(x_{10}, x_{20})(X_1-x_{10}) + g(x_{10}, x_{20})(X_2-x_{20})$$

denklemiyle belirlidir.

Eğer yüzey (13-5) denklemiyle verilmişse, bu denklemden

(16-10)' $$p = -f_{x_1}/f_{x_3}, \quad q = -f_{x_2}/f_{x_3}, \quad f_{x_3} \neq 0$$

elde edileceğinden, (16-10) dolayısiyle, P_0 **düzgün noktasındaki teğet düzlemin karteziyen denklemi**

(16-11) $$\sum_{j=1}^{3} f_{x_j}(x_{10}, x_{20}, x_{30})(X_j-x_{j0}) = 0$$

olur.

Örnekler

1. $x_1 = u^1 + u^2$, $x_2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$, $x_3 = (u^1)^3 + (u^2)^3$

yüzeyi için sıra ile

$$\vec{x}_{u^1} = \vec{k}_1 + 2u^1\vec{k}_2 + 3(u^1)^2\vec{k}_3$$

$$\vec{x}_{u^2} = \vec{k}_1 + 2u^2\vec{k}_2 + 3(u^2)^2\vec{k}_3$$

$$\vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = [6u^1u^2\vec{k}_1 - 3(u^1+u^2)\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3](u^2-u^1)$$

bulunur.

Görülüyor ki, $u^1 = u^2$ bağıntısı ile yüzey üzerinde tanımlanan özel C^* eğrisi boyunca

$$\vec{x}_{u^1} = \vec{x}_{u^2}, \quad \vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = \vec{0}$$

olacağından, C^* ın noktaları, verilen yüzeyin düzgün olmayan noktalarıdır. O halde, $u^1 \neq u^2$ koşulunu sağlayan $P(u^1, u^2)$ noktasındaki teğet düzlemin karteziyen denklemi, (16-6) nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-12) $6u^1u^2X_3-3(u^1+u^2)X_2+2X_1 + [(u^1)^3+(u^2)^3-3u^2(u^1)^2 -3u^1(u^2)^2] = 0$

olur.

Köşeli parantez içindeki terim

$$(u^1)^3+(u^2)^3-3u^2(u^1)^2-3u^1(u^2)^2 = (u^1+u^2)[(u^1-u^2)^2-2u^1u^2]$$

biçiminde de yazılabilir.

Uyarılar

1. $u^1=u^2$ bağıntısıyla tanımlanan C^* eğrisi üzerindeki noktaların, yüzey için düzgün olmamaları, yüzeyi tanımlamada kullanılan u^1, u^2 parametrelerinin seçiminden kaynaklanmaktadır. Gerçekten, yeni bir parametre sistemi olarak

$$\bar{u}^1 = u^1 + u^2, \quad \bar{u}^2 = u^1u^2$$

yi alırsak, verilen yüzeyin yeni parametreler cinsinden, parametreli kartezyen denklemleri

$$x_1 = \bar{u}^1, \; x_2 = (\bar{u}^1)^2 - 2\bar{u}^2, \quad x_3 = (\bar{x}^1)^3 - 3\bar{u}^1\bar{u}^2$$

olur. O halde

$$\vec{x}_{u^1} = \vec{k}_1 + 2\bar{u}^1\vec{k}_2 + 3[(\bar{u}^1)^2-\bar{u}^2]\vec{k}_3$$

$$\vec{x}_{u^2} = -2\vec{k}_2 - 3\bar{u}^1\vec{k}_3$$

$$\vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} = -6\bar{u}^2\vec{k}_3 + 3\bar{u}^1\vec{k}_2 - 2\vec{k}_3$$

bulunur.

$u^1 = u^2$ bağıntısı ile tanımlanan C^* eğrisini yeni parametreler cinsinden veren bağıntı, kolaylıkla görüleceği gibi

(16-13) $$(\bar{u}^1)^2 = 4\bar{u}^2$$

dir. Buna göre, C^* eğrisi boyunca

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{x}_{\bar{u}^1} \wedge \vec{x}_{\bar{u}^2} = -\frac{3}{2}(\bar{u}^1)^2 \vec{k}_1 + 3\bar{u}^1 \vec{k}_2 - 2\vec{k}_3$$

olacağından, u^1 ne olursa olsun,

$$\vec{x}_{\bar{u}^1} \wedge \vec{x}_{\bar{u}^2} \neq \vec{0}$$

dür, yâni parametre olarak $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ alındığında, C^* ın her noktası, yüzeyin bir düzgün noktasıdır. Görülüyor ki $\bar{u}^p$, $(p=1,2)$ ler cinsinden $P(u^1, u^2)$ noktasındaki teğet düzlemin karteziyen denklemi

$$-6\bar{u}^2 X_1 + 3\bar{u}^1 X_2 - 2X_3 - \bar{u}^1[(\bar{u}^1)^2 - 6\bar{u}^2] = 0$$

ve C^* ın herhangi bir $P(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ noktasında da, (16-13) nedeniyle

$$(16\text{-}14) \qquad -\frac{3}{2}(\bar{u}^1)^2 X_1 + 3\bar{u}^1 X_2 - 2X_3 + \frac{1}{2}(\bar{u}^1)^3 = 0$$

olur.

C^* eğrisi boyunca $\bar{u}^1 = 2u^1$ olduğundan, (16-14) eşitliği

$$-6(u^1)^2 X_1 + 6u^1 X_2 - 2X_3 + 4(u^1)^3 = 0$$

verir ki bu (16-12) de $u^1 = u^2$ alınarak elde edilecek denklemin aynıdır. O halde, (16-12) denklemi (u^1, u^2) değer takımının seçimi nasıl olursa olsun, uygulanabilir, yâni bu denklem için $u^1 = u^2$ hali bir ayrıcalık oluşturmaz, başka deyimle, (16-12) bu özel halde de geçerlidir.

Birazdan göreceğiz ki C^* eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğet düzlem, C^* ın aynı noktadaki oskülatör düzlemidir. Bu özellik, doğrudan doğruya da denetlenebilir.

2. $$\vec{x}(u^1, u^2) = \vec{y}(u^1) + \vec{z}(u^2)$$

vektörel denklemiyle tanımlanan yüzeylere: **öteleme yüzeyleri** denilir. İleride bu tür yüzeyleri ayrıntılı bir biçimd ele alacağız. Biraz önce ele aldığımız örnek de bu yüzey grubuna girer. Üstelik bu örnekte: $\vec{y} = \vec{z}$ özeliği vardır, yâni

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{x}(u^1, u^2) = \vec{y}(u^1) + \vec{y}(u^2)$$

dir.

$\vec{y} = \vec{y}(t)$ eğrisine, yâni

$$x_1 = u^1, \quad x_2 = (u^1)^2, \quad x_3 = (u^1)^3$$

eğrisine E diyelim. Bilindiği gibi bu, O başlangıcından geçen bir **uzay kübiğidir.**

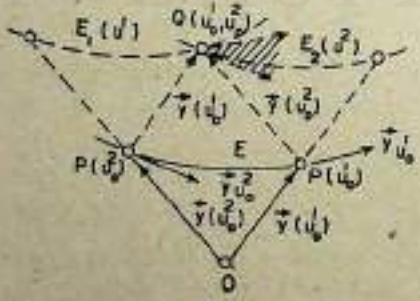
Yüzeyin $u^2 = u^2_0 =$ sabit koordinat çizgileri, E çizgisine

$$\vec{y}_2 = \vec{y}(u^2_0)$$

vektörü ile tanımlanan ötelemelerin uygulanması ile elde olunan $E_1(u^1)$ eğrileridir. Ayni biçimde, $u^1 = u^1_0 =$ sabit koordinat çizgileri de, E çizgisine

$$\vec{y}_1 = \vec{y}(u^1_0)$$

vektörü ile tanımlanan ötelemelerin uygulanması ile bulunan $E_2(u^2)$ eğrileridir. Öyleyse, yüzeyin $O(u^1_0, u^2_0)$ noktasındaki teğet düzlem, E nin $P(u^1_0)$ ve $P(u^2_0)$ noktalarındaki teğetlere paraleldir. O halde, yüzeyin $u^1 = u^2$ koşulunu sağlayan eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğet düzlem, $E_2(u^2) = E_1(u^1)$ olacağından, yâni $P(u^1_0) = P(u^2_0)$ özdeşliğinden, E nin $P(u^1_0)$ noktasındaki oskülatör düzleme paralel olacaktır; başka deyimle, $u^1 = u^2$ eğrisinin alınan noktasındaki oskülatör düzlemden ibaret bulunacaktır. Bu tür eğrilere, yâni oskülatör düzlemleri yüzeyin teğet düzlemleri ile çakışan eğrilere: **yüzeyin asimptotik çizgileri** denildiğini ilerde göreceğiz.



Şekil 6

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1. Örnekteki yüzeyin parametreli karteziyen denklemleri

$$x_1 = u^1 + u^2, \quad x_2 = (u^1)^2 + (u^2)^2, \quad x_3 = (u^1)^3 + (u^2)^3$$

olduğundan,

$$x_3 = x_1{}^2 - 2u^1u^2, \quad x_3 = x_1x_2 - u^1u^2x_1$$

dir; u^1u^2 çarpımını yokederek, karteziyen denklem olarak

$$x_3 = \frac{x_1}{2}(3x_2 - x_1{}^2)$$

bulunur.

3. Dik eksen sisteminde

$$x_3 = x_1{}^2 + x_2{}^2$$

denklemiyle tanımlanan **dönel paraboloid**'i alalım. Bunun bir $P(x_p)$, $(p = 1, 2, 3)$ noktasındaki teğet düzlemin karteziyen denklemi, (16-10) formülünü kullanarak bulunur. Bu örnekte

$$p(x_1, x_2) = 2x_1, \quad q(x_1, x_2) = 2x_2$$

olduğundan, söz konusu formül

$$2x_1X_1 + 2x_2X_2 - X_3 - (x_1{}^2 + x_2{}^2) = 0$$

verir.

4. Küre

Herhangi bir karteziyen koordinat sisteminde $O^*(\alpha_p)$ merkezli ve R yarıçaplı küremin gelişi güzel bir noktası $P(x_p)$, $(p = 1, 2, 3)$ ise, bu kürenin **vektörel denklemi**

$$\overrightarrow{O^*P^2} = R^2$$

olacağından, **skaler denklemi** de

(16-15) $$\left[\sum_{p=1}^{3}(x_p - \alpha_p)\vec{k}_p\right]^2 = R^2$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Eksenler arasındaki açıların cos. lerini - Diferansiyel Geometri I, s. 19 formül (5-0) daki gibi

$$\gamma_1 = \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3, \quad \gamma_2 = \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_1, \quad \gamma_3 = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2$$

biçiminde gösterir ve (16-15) i açarsak

$$(16\text{-}15)' \quad f = (x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2 + (x_3-\alpha_3)^2 + 2[(x_2-\alpha_2)(x_1-\alpha_1)\gamma_1 + (x_3-\alpha_3)(x_1-\alpha_1)\gamma_2 + (x_1-\alpha_1)(x_2-\alpha_2)\gamma_3] - R^2 = 0$$

veya

$$(16\text{-}16) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(\gamma_1 x_2 x_3 + \gamma_2 x_3 x_1 + \gamma_3 x_1 x_2) - 2[(\alpha_1 + \alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2)x_1 + (\alpha_2 + \alpha_3\gamma_1 + \alpha_1\gamma_3)x_2 + (\alpha_3 + \alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_3)x_3] + \delta = 0,$$

$$\delta = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2\gamma_3 + \alpha_2\alpha_3\gamma_1 + \alpha_3\alpha_1\gamma_2) - R^2$$

olur.

(16-15)' karteziyen denklemiyle verilen $O^*(R)$ küresinin $P(x_0)$ noktasındaki teğet düzlemin karteziyen denklemi, (16-10) formülünü kullanarak bulunur. Sıra ile

$$(16\text{-}17) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} f_{x_1} = A = (x_1-\alpha_1) + \gamma_2(x_3-\alpha_3) + \gamma_3(x_2-\alpha_2) \\ \qquad = x_1 + \gamma_3 x_2 + \gamma_2 x_3 - \alpha_1 - \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, \\ \frac{1}{2} f_{x_2} = B = (x_2-\alpha_2) + \gamma_3(x_1-\alpha_1) + \gamma_1(x_3-\alpha_3) \\ \qquad = x_2 + \gamma_1 x_3 + \gamma_3 x_1 - \alpha_2 - \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, \\ \frac{1}{2} f_{x_3} = C = (x_3-\alpha_3) + \gamma_1(x_2-\alpha_2) + \gamma_2(x_1-\alpha_1) \\ \qquad = x_3 + \gamma_2 x_1 + \gamma_1 x_2 - \alpha_3 - \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 \end{cases}$$

bulunacağından, (16-10) formülü teğet düzlem için, kısaca

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$A(X_1-x_1)+B(X_2-x_2)+C(X_3-x_3)=0$$

verir. Bu da, kürenin (16-16) denklemi yardımiyle, kolaylıkla

(16-18) $$x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3+\gamma_1(x_3X_2+x_2X_3)+\gamma_2(x_3X_1+x_1X_3)+\gamma_3(x_1X_2+x_2X_1)-(\alpha_1+\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)(X_1+x_1)-(\alpha_2+\alpha_3\gamma_1+\alpha_1\gamma_3)(X_2+x_2)-(\alpha_3+\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)(X_3+x_3)+\delta=0$$

biçimine girer. $O^*(R)$ küresinin $P(x_p)$ noktasındaki teğet düzlemi veren bu denkleme, (16-16) küre denkleminin **poler formu** denilir.

Dikkat edilecek olursa, (16-16) küre denkleminden (16-18) poler formuna, şu işlemlerle geçilmektedir:

$$x^2\to x\,X;\ 2x_ix_m\to x_iX_m+x_mX_i;\ 2x\to x+X.$$

Bir dik karteziyen koordinat sistemi söz konusu ise, $\gamma_p=0$ $(p=1,2,3)$ olacağından, α_p merkezli ve R yarıçaplı kürenin denklemi, (16-16) yardımiyle

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-2(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)+\delta=0,$$
$$\delta=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-R^2;$$

ve aynı kürenin x_p noktasındaki teğet düzlemin denklemi de, (16-18) nedeniyle

$$x_1X_1+x_2X_2+x_3X_3-\alpha_1(X_1+x_1)-\alpha_2(X_2+x_2)-\alpha_3(X_3+x_3)+\delta=0$$

veya

$$(x_1-\alpha_1)(X_1-x_1)+(x_2-\alpha_2)(X_2-x_2)+(x_3-\alpha_3)(X_3-x_3)=0$$

olur.

II. Düzgün noktada normal birim vektörü. Yönlendirme

Yüzeyin bir P düzgün noktasındaki teğet düzlem, (15-1) koşulunu sağlayan birinci mertebeden $\vec{x}_{u^1}(u^1,u^2)$, $\vec{x}_{u^2}(u^1,u^2)$ kısmi türev vektörlerine paralel olduğundan,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{n}^*(u^1, u^2) = \vec{x}_{u^1}(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)$$

vektörel çarpımıyle tanımlanan $\vec{n}^*(u^1, u^2)$ vektörü, P düzgün noktasındaki teğet düzleme diktir. $\vec{n}^*$ tanım olarak, yüzeyin P düzgün noktasındaki ∞ **normal vektörden** biridir.

P düzgün noktasında yüzeye normal olan ∞ vektör arasında **ters yönlü** — ya da karşıt — **iki birim vektörü** vardır. Bunlardan birisini

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_{u^1}(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)}{|\vec{x}_{u^1}(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)|} \tag{16.19}$$

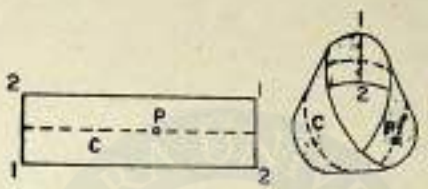
biçiminde seçersek, yüzeyin $P(u^1, u^2)$ düzgün noktasındaki **pozitif** ve **negatif** olarak adlandırabileceğimiz yüzlerini ayırdetmiş oluruz. Böyle davranmakla, üstelik, P noktasındaki teğet düzlem de **yönlendirilmiş** olur. Hattâ, $\vec{n}$ nin seçimi, yüzeyin P düzgün noktasında da bir **yönlendirme** oluşturur, yâni, genellikle, P nin yeteri kadar yakın bir civarı için, yönlendirme işi, sürekli bir biçimde yayılabilir. Ama bu, yüzeyin tümü için, daima doğru olmayabilir. Örneğin, dönel silindir gibi, bâzı yüzeylerde sürekli bir normal birim vektörü seçimi yapılabildiği halde; bâzı yüzeyler için bu olanak dışıdır. Buna örnek olarak, MOEBIUS şeridi denilen yüzey parçasını gösterebiliriz. Önce, bu şeridi tanımlayalım:

1212 dik dörtgeninin 12 ile gösterilen kısa kenarlarından biri çevrilip kıvrılır ve 1 köşesi sâbit tutulan öteki 1 köşesine gelmek üzere kısa kenarlar, birbiri üstüne yapıştırılır.

MOEBIUS şeridinde kesik olarak gösterilen C çizgisinin bir P noktasından belirli yönlü bir normalle başlayıp sürekli olarak C üzerinde seçilen bir yönde gidildiğinde, aynı P noktasına, öncekinin karşıtı normal vektörle varılır. Böylece görülür ki: MOEBIUS şeridi üzerinde sürekli bir yönlendirme söz konusu olamaz. Yönlendirilemeyen yüzeylere, çoğu kez, **tek yanlı yüzey** denilir.

Böyle yüzeylerde, bir yüz üzerinde alınan bir P noktasından, aynı zamanda öteki yüz üzerinde de bulunan aynı P noktasına, sınır çizgilerini aşmadan varılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



MOEBIUS Şeridi

Şekil 7

(u^1, u^2) eğrisel koordinat sistemi yerine, (15-2) ile tanımlanan $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ eğrisel koordinat sistemi alındığında, (15-4) nedeniyle

$$\vec{x}_{\bar{u}^1} \wedge \vec{x}_{\bar{u}^2} = \frac{D(u^1, u^2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \vec{x}_{u^1} \wedge \vec{x}_{u^2} \tag{15-4}$$

olur.

Yüzeyin bütün noktaları düzgün olan bir bölgesinde

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_{u^1}(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2)}{\left| \vec{x}_{u^1}(u^1, u^2) \wedge \vec{x}_{u^2}(u^1, u^2) \right|}$$

normal birim vektörü sürekli fonksiyondur ve yönlendirme işi tüm bölgede gerçekleşir.

Düzgün bir parametre değişiminde, (15-4) nedeniyle ve

$$\frac{D(u^1, u^2)}{D(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} \neq 0$$

koşulu yüzünden, düzgün bir nokta, değişim sonucunda, gene düzgün kalacağından; (15-4) ün ikinci yanındaki jakobiyenin işaretinin artı ya da eksi oluşuna göre, yönlenme de sıra ile aynı kalacak veya yönünü değiştirecek-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

tir. Artı işaretli bir jakobiyenle oluşturulan bir düzgün parametre değişimine: **Yönlenmeyi koruyan bir düzgün parametre değişimi**, denilir. Bundan sonraki kısımlarda, ayrıca belirtmedikçe, daima: **Yönlenebilen yüzeyler** söz konusu olacaktır.

Uygulama 16-1.

Bir dik eksen sisteminde

$$x_1 = \operatorname{Cos} u^1 + u^2 \operatorname{Sin} \frac{u^1}{2}\,; \quad x_2 = \operatorname{Sin} u^1 - u^2 \operatorname{Cos} \frac{u^1}{2}\,; \quad x_3 = u^2$$

$$0 \leqslant u^1 \leqslant 2\pi\,; \quad -\frac{1}{2} < u^2 < \frac{1}{2}$$

denklemleriyle tanımlanan yüzey parçasının — MOEBIUS şeridi — **yönlenmeyen** bir yüzey parçası olduğunu gösteriniz.

Uyarı. Normalin skaler bileşenleri

Bir dik karteziyen koordinat sisteminde

$$\vec{x}(u^1, u^2) = x_1(u^1, u^2)\,\vec{k}_1 + x_2(u^1, u^2)\,\vec{k}_2 + x_3(u^1, u^2)\,\vec{k}_3\,,$$

$$x_3(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

denklemlerinden biriyle verilen bir yüzeyin düzgün bir noktasındaki teğet düzlemin (16-5), (16-9) ve (16-10) denklemleri gösterir ki **normalin skaler bileşenleri** veriliş biçimine göre, sıra ile

$$(16\text{-}20)\quad \begin{cases} x_{2u^1}x_{3u^2} - x_{2u^2}x_{3u^1} = n_1^*\,; \quad x_{3u^1}x_{1u^2} - x_{3u^2}x_{1u^1} = n_2^*\,; \quad x_{1u^1}x_{2u^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - x_{1u^2}x_{2u^1} = n_3^* \\ p(x_1, x_2),\quad q(x_1, x_2),\quad -1 \\ f_{x_1}(x_1, x_2, x_3),\quad f_{x_2}(x_1, x_2, x_3),\quad f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

tür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Eksenler bir dik koordinat sistemi oluşturmuyorlarsa; bunların $\vec{k}_p$, $(p = 1, 2, 3)$ birim vektörleriyle tanımlanan karşıt baz birim vektörlerine $\vec{k}_p^*$, $(p = 1, 2, 3)$ dersek, yâni

$$\vec{k}_1^* = \vec{k}_2 \wedge \vec{k}_3 \,,\quad \vec{k}_2^* = \vec{k}_3 \wedge \vec{k}_1 \,,\quad \vec{k}_3^* = \vec{k}_1 \wedge \vec{k}_2$$

ise,

$$\vec{x}_{s1} = x_{1s1}\,\vec{k}_1 + x_{2s1}\,\vec{k}_2 + x_{3s1}\,\vec{k}_3 \,,$$

$$\vec{x}_{s2} = x_{1s2}\,\vec{k}_1 + x_{2s2}\,\vec{k}_2 + x_{3s2}\,\vec{k}_3$$

$$\vec{x}_{s1} \wedge \vec{x}_{s2} = n_1^*\,\vec{k}_1^* + n_2^*\,\vec{k}_2^* + n_3^*\,\vec{k}_3^* = \sum_{p=1}^{3} n_p^*\,\vec{k}_p^*$$

olacağından: (16-20) **değerleri, karşıt bazın $\vec{k}_p^*$ birim vektörleriyle tanımlanan koordinat eksenlerine göre normalin skaler bileşenleridir.**

III. Düzgün olmayan noktada teğet eleman

(13-6) denklemiyle verilen ve kartezyen koordinatlarının O başlangıç noktasından geçen bir yüzey için O noktası düzgünse, yüzeyin O noktasındaki teğet düzleminin denklemi, (16-10) nedeniyle

$$(16\text{-}21) \qquad \sum_{p=1}^{3} X_p\, f_{x_p}(o, o, o) = 0$$

dır.

Eğer $f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonu, O başlangıcı yakınlarında 1-inci sınıftan bir fonksiyonsa ve yüzeyin O başlangıcına yakın bir P noktasının koordinatları da $x_p (P = 1, 2, 3)$ ise, $f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonuna uygulanan TAYLOR formülü

$$(16\text{-}22) \quad f(x_1, x_2, x_3) = f_{x_1}(o, o, o)\; x_1 + f_{x_2}(o, o, o)\; x_2 + f_{x_3}(o, o, o)\; x_3 + \alpha_1(x_1, x_2, x_3) = 0$$

$$\lim \alpha_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad x \to 0, \quad x_2 \to 0, \quad x_3 \to 0 \quad \text{için}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

O başlangıcına yeteri kadar yakın $P(x_i)$ noktaları için α_1 in limiti sıfır olduğundan, $f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonu için **yaklaşık değer** olarak

(16-23) $$\sum_{p=1}^{3} f_{x_p}(o, o, o)\, x_p = 0$$

alınabilir.

Buna: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ yüzeyinin O **düzgün** noktasındaki **teğet elemanı,** diyeceğiz. Görülüyor ki bu, (16-21) le verilen ve O noktasındaki teğet düzlemi tanımlayan denklemden başka bir şey değildir.

Şimdi O noktasının yüzey üzerinde düzgün olmadığını ve bu nokta yakınlarında $f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun 2-nci sınıftan olduğunu varsayalım.

Önce düzgün olmayan O noktasında, (16-20; 3) nedeniyle

$$f_{x_p}(o, o, o) = 0,\ p = 1, 2, 3)$$

tür. Buna göre, yüzeyin O noktasına yakın $P(x_p)$, $(p = 1, 2, 3)$ noktaları için TAYLOR formülü

(16-24) $$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}[a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2(a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2) + \alpha_2(x_1, x_2, x_3)] = 0.\quad a_{pq} = f_{x_p x_q}(o, o, o) \neq 0$$

$$\lim_{x_1, x_2, x_3 \to o} \alpha_2(x_1, x_2, x_3) = 0$$

sonucunu verecektir. a_{pq} **lerin hepsi aynı zamanda sıfır değildir.**

O noktasına yeteri kadar yakın ve yüzeye ait $P(x_p)$ noktaları için, α_2 nin salt değeri çok küçük olacağından, $f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonunun **yaklaşık değeri** olarak

(16-25) $$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2(a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{12}x_1x_2) = 0$$

$$a_{pq} = f_{x_p x_q}(o, o, o)$$

alınabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-25) ile tanımlanan 2 **-nci dereceden koniye,** $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ yüzeyinin düzgün olmayan O noktasındaki **teğet elemanı** diyeceğiz. Daha açık bir deyimle, bu özel hâlde, **2 -nci mertebeden bir teğet elemanı,** söz konusudur.

Bu koninin çeşitli biçimlerini incelemeden önce, bâzı özelliklerini gözden geçirmede yarar vardır. Şöyle ki:

2 -nci sınıftan (13-6) açılmamış

(13-6) $$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

denklemiyle tanımlanan yüzeyin bir $P(x_0)$ noktasından geçen ve yüzey üzerinde bulunan bir C eğrisinin parametreli denklemleri

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t)$$

ise, bunlar (13-6) yı gerçekleyeceklerinden

$$f[x_1(t), x_2(t), x_3(t)] = 0$$

olacaktır. O hâlde, C nin $P(x_0)$ noktasındaki teğetinin $x'_p(t)$ skaler bileşenleri, son yazdığımız denklemin t parametresine göre iki kez türevini almakla bulunan

$$f_{x_1} x' + f_{x_2} x'_2 + f_{x_3} x'_3 = 0;$$

$$f_{x_1x_1} x'^2_1 + f_{x_2x_2} x'^2_2 + f_{x_3x_3} x'^2_3 + 2(f_{x_2x_3} x'_2 x'_3 +$$

$$f_{x_3x_1} x'_3 x'_1 + f_{x_1x_2} x'_1 x'_2) + f_{x_1} x_1'' + f_{x_2} x_2'' + f_{x_3} x_3'' = 0$$

denklemlerini sağlarlar.

Eğer P noktası olarak, düzgün olmayan O noktası alınacak olursa, bu noktada

$$f_{x_p}(o, o, o) = 0, \quad (p = 1, 2, 3)$$

olacağından, yukarıki denklemlerden ikincisi, $f_{x x_q}(o, o, o) = a_{pq}$ olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_{11} x_1'^2 + a_{22} x_2'^2 + a_{33} x_3'^2 + 2(a_{23} x_2' x_3' + a_{31} x_3' x_1' + a_{12} x_1' x_2') = 0$$

verecektir. Buna göre şu sonuca varılmış olur:

2 -nci sınıftan bir yüzeyin düzgün olmayan bir O noktasından geçen eğrilerinin bu noktadaki teğetleri, yüzeyin aynı O noktasındaki teğet elemanını oluşturan (16-25) 2 -nci derece konisi üzerindedir.

Düzgün olmayan O noktasındaki teğet eleman olarak tanımladığımız (16-25) 2 -nci derece konisi sanalsa, yüzeyin O noktasına yeteri kadar yakın $P(x_e)$ noktaları için, $\alpha_2(x_1, x_2, x_3)$ nin salt değeri çok küçük olacağından, yüzeyin de O noktası yakınlarında gerçel noktası bulunmayacaktır. Yâni:

2 -nci sınıftan bir yüzeyin düzgün olmayan bir O noktasında, teğet elemanı oluşturan (10-25) 2 -nci derece konisi sanalsa, yüzeyin O noktası yakınlarında gerçel noktası yoktur ve O noktası yüzeyin yalnız başına kalmış bir noktasıdır.

(16-25) konisinin çeşitli biçimleri

(16-25) konisini, koordinat düzlemlerinden biriyle, örneğin

$$x_3 = a = \text{sabit}$$

koordinat düzlemiyle kestiğimizde, kesitin x_1Ox_2 düzlemi üzerinde Ox_3 eksenine paralel ve kendisine eşit izdüşümü olarak

$$(K) \qquad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a(a_{23} x_2 + a_{31} x_1) + a_{33} a^2 = 0$$

denklemiyle tanımlanan (K) koniğini elde ederiz.

a) (K) koniği gerçeldir.

Eğer parçalanmamış bir (K) koniği - çember, elips, hiperbol, parabol- söz konusu ise, tepesi O noktası, doğrultmanı da (K) dan oluşan O noktasındaki teğet elemanı tanımlar.

Örnek 16-5.

Dik eksen sisteminde

$$f = x_1 x_2 x_3 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklemiyle tanımlanan yüzeyin O (o, o, o) noktası düzgün değildir. Bu noktada, verilen yüzey için

$$f_{x_1x_1}(o, o, o) = -f_{x_2x_2}(o, o, o) = f_{x_3x_3}(o, o, o) = 2,$$
$$f_{x_px_q}(o, o, o) = 0, \quad p \neq q$$

olduğundan, (16-25) formülü, yüzeyin düzgün olmayan O noktasındaki 2-nci **mertebeden teğet eleman** için

(16-26) $$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0$$

dönel konisini verir. Bunun ekseni Ox_2, tepe yarı açısı da $\pi/4$ tür. Yüzeyin O dan geçen eğrilerinin O daki teğetlerinin bu dönel koni üzerinde bulunacakları, doğrudan doğruya, denetlenebilir. Aynı koni, şöyle de bulunabilir: Verilen yüzey cebirsel olduğundan ve O dan geçtiğinden başlangıçtaki teğet eleman, kuvvetleri en düşük terimler toplamını sıfıra eşit kılarak bulunur ki bu da (16-26) yı verir.

b) (K) koniği gerçel ve farklı iki doğrudan oluşmaktadır.

Bu özel hâlde, düzgün olmayan O noktasındaki **teğet eleman** O noktasını, söz konusu doğruların Ω kesim noktasına, yâni (K) koniğinin merkezine, birleştiren doğrudan geçen iki düzlemden meydana gelir. Yüzey üzerinde bulunan ve O dan geçen eğrilerin bu noktadaki teğetleri, bu iki düzlemden birisi üzerindedir.

Örnek 16-6.

O noktası düzgün olmayan

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)\, x_3 - x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_1x_3 + x_2x_3 = 0$$

yüzeyinin O noktasındaki **teğet eleman** da, biraz önce söylediklerimize göre

$$-x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 3x_1x_3 + x_2x_3 = (x_3 - x_1 - x_3)\,(x_1 + x_2 + 2x_3) = 0$$

denklemleriyle tanımlanan iki düzlemdir. Yüzeyin O noktasından geçen eğrilerin O daki teğetleri

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x_3 - x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_1 + 2x_3 = 0$$

düzlemlerinden birisi üzerindedir. Bu düzlemlerin O dan geçen arakesitleri $(-3, -1, 2)$ doğrultusuna paraleldir.

c) (K) **koniği sanaldır.**

Düzgün olmayan O noktasındaki **teğet eleman,** O tepeli sanal bir ikinci derece konisidir. Yüzeyin, O noktası yakınlarında gerçel noktası yoktur, O noktası, yüzeyin **yalnız başına kalmış** bir noktasıdır.

Örnek 16-7.

O noktası düzgün olmayan

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2) = 0$$

yüzeyinin O noktasındaki **teğet elemanı,** aynı şekilde görülür ki

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 0$$

sanal konisidir. O noktası yakınlarında yüzeyin gerçel noktası yoktur.

d) (K) **koniği farklı iki sanal doğrudan oluşmaktadır.**

Bir gerçel yüzeyi tanımlayan $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ın katsayıları gerçel olduğundan, teğet elemanın katsayıları da gerçeldir. (K) koniğini veren denklemin katsayıları da gerçel olacağından, bunun, x_r değişkenlerine göre hesaplanacak birinci mertebeden kısmî türevlerden oluşan birinci dereceden denklemlerin ortak çözümü olarak elde edilecek Ω merkezi de daima gerçeldir. (K) konik düzlemi üzerinde alınacak Ωx_1, Ωx_3 eksenlerini, gerektiğinde Ω etrafında döndürerek, kendi Ω merkezinden geçen (K) koniğinin denklemini

$$A x_1^2 + B x_2^2 = 0$$

biçimine sokabiliriz. O halde Ω merkezinden geçen iki sanal doğru birbirinin eşleniğidir. Dolayısiyle, **teğet eleman,** bu özel halde düzgün olmayan O noktasından ve Ω dan geçen birbirinin eşleniği iki sanal düzlemden oluşur. Yüzeyin O noktası yakınlarında gerçel noktası yoktur ve O noktası yüzeyin **tek başına kalmış** bir noktasıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 16-8.

O noktası düzgün olmayan

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2 x_3 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 = 0$$

yüzeyinin O noktasındaki **teğet eleman**

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1 x_2 + x_2 x_3) = 0$$

denklemiyle tanımlanmıştır. Bu denklem

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 = 0$$

biçiminde de yazılabileceğine göre, O daki teğet eleman

$$x_1 + x_2 + i(x_2 + x_3) = 0, \qquad x_1 + x_2 - i(x_2 + x_3) = 0$$

denklemleriyle tanımlanan eşlenik sanal düzlemlerdir.

e) (K) koniği çakışık iki gerçel doğrudan oluşmaktadır.

Düzgün olmayan O noktasındaki **teğet eleman**, çakışık iki gerçel düzlemden oluşur. Yüzeyin O dan geçen eğrilerinin O daki teğetleri, bu çakışık iki düzlem üzerindedir.

Örnek 16-9.

O noktası düzgün olmayan

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1 x_2 x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) = 0$$

yüzeyinin O noktasındaki **teğet elemanı**

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_1) \equiv (x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$$

çakışık gerçel düzlemleridir.

Buraya kadar söylediklerimizi özetlersek, şu teorem söz konusu olur:

Teorem 16-3.

$f = f(x_1, x_2, x_3) = 0$ denklemiyle tanımlanan bir S yüzeyi, düzgün olmayan $O(0, 0, 0)$ noktasından geçiyorsa ve bu nokta yakınlarında f fonksiyonu en az 2-nci sınıftan ise, bu noktada f fonksiyonunun ikinci mertebe

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

beden kısmi türevlerinin hepsi birden aynı zamanda sıfır olmamak koşulu ile, S nin O noktasındaki 2-nci mertebeden teğet elemanı, (16-25) le tanımlanan 2-nci derece konisidir. Bu koni gerçel ya da sanal olabilir. Birinci hâlde, farklı ya da aynı iki gerçel düzleme parçalanabilir. İkinci hâlde, eşlenik iki sanal düzleme bölünebilir. Gene birinci hâlde, yüzeyin O dan geçen eğrilerinin O daki teğetleri, koni ya da parçalanmasiyle oluşan düzlemler üzerindedir. İkinci hâlde de, yüzeyin O noktası yakınlarında gerçel noktası yoktur ve O noktası yüzeyin tek başına kalmış bir noktasıdır.

Eğer O noktasında $f_{x_2x_4}(0,0,0)$ ikinci mertebeden kısmi türevlerin hepsi birden sıfırsa, biraz önceki teorem doğru olmaz. Bu kez üçüncü mertebeden kısmi türevlerin O daki değerlerine bakmak gerekir. Buna göre, genel olarak denilebilir ki:

Teorem 16-4.

$f = f(x_1, x_2, x_3) = 0$ denklemiyle tanımlanan S yüzeyi, düzgün olmayan $O(0,0,0)$ noktasından geçiyorsa, bu nokta yakınlarında f fonksiyonu en az $n > 2$ inci sınıftansa ve bu noktada f fonksiyonunun n-ninci mertebede kısmi türevlerinin hepsi birden aynı zamanda sıfıra eşit değilse, S nin O noktasındaki n-ninci mertebeden teğet elemanı n-ninci dereceden ve O tepeli bir konidir. Bu koni, daha düşük dereceli koni ve düzlemlere bölünebilir. Sanal olması hâlinde, yüzeyin O noktası yakınlarında gerçel noktası yoktur ve bu nokta yalnız başına kalmış bir noktadır. Gerçel olması hâlinde ise, yüzeyin O dan geçen eğrilerinin O daki teğetleri, söz konusu koni üzerindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM III

TEMEL KUVADRATİK FORMLAR

A. BİRİNCİ TEMEL KUVADRATİK FORM YÜZEYLERİN İÇ GEOMETRİSİ

17. Birinci temel kuvadratik form ve diskriminantı.

u, v skalar, bağımsız ve — şimdilik — gerçel değişkenlerinin

(B) $$a \leqslant u \leqslant b, \quad c \leqslant v \leqslant d$$

kapalı dikdörtgen bölgesinde — u, v eksenleri birbirine dik alınmıştır — tanımlanmış, gerçel, tek değerli ve 1-nci sınıftan

(17.1) $$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu ile bir yüzey parçası verilmiş olsun. Bundan önce de gördüğümüz gibi, eğer bir C eğrisi — veya bunun bir parçası — tümü ile bu yüzey parçası üzerinde ise, yüzeyin bu eğri üzerinde dolanan bir P noktasının u, v parametreleri, eğri boyunca aynı bir t parametresinin

(17.2) $$u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

biçiminde fonksiyonlarıdır ve C nin parametreli vektörel denklemi de

(17.3) $$\vec{x} = \vec{x}\,[u(t), v(t)]$$

olur.

Eğer C eğrisi 1-nci sınıftan ise, yüzey parçası da böyle sayıldığından, (17-2) vektörel fonksiyonu da 1-nci sınıftandır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C eğrisinin $t=t_0$ la belirli olan bir P_0 noktasındaki teğet, (17-2) denklemlerindeki u ve v ye

$$u_0 = u(t_0), \quad v_0 = v(t_0)$$

dersek, (16-1) de de gördüğümüz gibi

(17-4) $$\vec{x}'_p(t_0) = \vec{x}_u(u_0, v_0)\, u'(t_0) + \vec{x}_v(u_0, v_0)\, v'(t_0)$$

vektörünün başlıcısına paraleldir.

Eğer yüzeyin P_0 noktası düzgünse, (15-1) dolayısıyla bu noktada

$$\vec{x}_u(u', v_0) \wedge \vec{x}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$$

dür. Aynı noktada $u'(t_0)$, $v'(t_0)$ aynı zamanda sıfır değilse, (17-4) le tanımlanan $x'_p(t_0) \neq 0$ dür, yâni P_0 noktası, C eğrisinin de düzgün bir noktasıdır.

(17-4) bağıntısında, türevler yerine diferansiyelleri alırsak, yâni (17-4) ün her iki yanını keyfî olan dt ile çarpar ve herhangi bir P noktasını düşünürsek, t parametresine bağlı olmayan ve C nin P deki teğetine paralel olan

(17-5) $$\vec{dx} = \vec{x}_u\, du + \vec{x}_v\, dv$$

vektörünü elde ederiz.

C eğrisinin P noktasındaki teğetine paralel olan $\vec{dx}$ vektörü, P den itibaren alındığında, yüzeye teğet olur. Bunun doğrultusu, açıkça görüldüğü gibi dv/du oranına bağlıdır. Eğer C eğrisi (17-2) denklemleriyle verilecek yerde,

$$g(u, v) = 0$$

bağıntısıyle tanımlanmışsa,

$$g_u\, du + g_v\, dv = 0$$

eşitliğinden

$$\frac{dv}{du} = -\frac{g_u}{g_v}$$

çıkarılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C eğrisinin P noktasındaki lineer elemanı[1], bilindiği gibi

(17-6) $$ds^2 = \vec{dx}^2$$

olduğundan, (17-5) yardımiyle

$$ds^2 = \vec{x}_u^2\, du^2 + 2\,\vec{x}_u\,\vec{x}_v\, du\, dv + \vec{x}_v^2\, dv^2,$$

veya

(17-7) $$\vec{x}_u^2 = E, \quad \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = F, \quad \vec{x}_v^2 = G$$

dersek

(17-8) $$I = ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

sonucunu elde ederiz.

Buna yüzeyin P noktasındaki **birinci temel formu**, veya **metrik formu**, ya da **temel kuvadratik formu** denilir.

Bu formda, varsayım gereğince, du ve dv aynı zamanda sıfır olmadıklarından ve P de yüzeyin düzgün bir noktası olarak alındığından, yani bu noktada $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ nin ikisi birden sıfır-vektörden farklı bulunduklarından, (17-8) **kuvadratik formunun değeri**, gerçel elemanlar için, **artı işaretlidir.** Çünkü sıfır-vektörden farklı olan (17-5) vektörünün skaler karesine eşittir.

Bu kuvadratik formdaki du^2, du, dv ve dv^2 nin E, F, G katsayıları u, v nin

$$E = E(u, v), \quad F = F(u, v), \quad G = G(u, v)$$

biçiminde fonksiyonlarıdır.

(u, v) değer takımı ile bir P (u, v) noktası belirtildiğinden, bu üç katsayının **nokta fonksiyonları** oldukları da söylenir.

---

1) Diferensiyel Geometri I, s. 79

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Birinci ve üçüncü katsayılar, v = sâbit ve u = sâbit koordinat çizgilerinin teğet doğrultularını veren $\vec{x}_u, \vec{x}_v$ vektörlerinin, (17-7) de görüldüğü gibi, uzunluklarının karelerine eşit olduklarından, gerçel elemanlar hâlinde, düzgün noktada sıfırdan farklıdırlar.

Buna göre, yüzeyin düzgün her P noktasında daima

(17-9) $$E > 0, \quad G > 0$$

dır.

Teorem 17-1. En az 1-nci sınıftan bir yüzeyin birinci temel kuvadratik formu bir diferansiyel invaryanttır, yâni (u, v) eğrisel koordinatları yerine, en az 1 - inci sınıftan

$$u = f(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = g(\bar{u}, \bar{v})$$

fonksiyonlariyle yeni bir $(\bar{u}, \bar{v})$ eğrisel koordinat sistemi alındığında,

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \bar{E}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}^2$$

olur.

Bu formun (17-6) tanımı nedeniyle, bu teorem geometrik olarak açıktır. Bununla beraber, alıştırma niteliğinde, doğruluğunu hesapla denetleyebiliriz. Şöyle ki:

$$E = \vec{x}_u^2 = (\vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_u + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_u)^2 = \bar{E}\,\bar{u}_u^2 + 2\bar{F}\,\bar{u}_u\bar{v}_u + \bar{G}\,\bar{v}_u^2$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (\vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_u + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_u)(\vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_v + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_v) = \bar{E}\,\bar{u}_u\bar{u}_v +$$

$$\bar{F}(\bar{u}_u\bar{v}_v + \bar{v}_u\bar{u}_v) + \bar{G}\,\bar{v}_u\bar{v}_v$$

$$G = \vec{x}_v^2 = (\vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_v + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_v)^2 = \bar{E}\,\bar{u}_v^2 + 2\bar{F}\,\bar{u}_v\bar{v}_v + \bar{G}\,\bar{v}_v^2$$

eşitliklerinden

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \bar{E}(\bar{u}_u^2\,du^2 + 2\bar{u}_u\bar{u}_v\,du\,dv + \bar{u}_v^2\,dv^2) +$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$+ 2\bar{F}\,[\bar{u}_u \bar{v}_u\,du^2 + (\bar{u}_u \bar{v}_v + \bar{u}_v \bar{v}_u)\,du\,dv + \bar{u}_v \bar{v}_v\,dv^2]$$

$$+ \bar{G}\,(\bar{v}_u^2\,du^2 + 2\,\bar{u}_v \bar{v}_v\,du\,dv + \bar{v}_v^2\,dv^2) = \bar{E}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}^2$$

çıkar.

Uyarı 17-1.

Gerçel olmayan elemanlar için yukarıki sonuçlar doğru değildir. Nitekim, başlangıçtan geçen sanal

$$\vec{x}(u, v) = (u + v)\,\vec{k}_1 + (iu + v)\,\vec{k}_2 + \sqrt{2}\,iv\,\vec{k}_3$$

düzlemi için,

$$\vec{x}_u = \vec{k}_1 + i\,\vec{k}_2\,,$$

$$\vec{x}_v = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \sqrt{2}\,i\,\vec{k}_3$$

dir ve dik eksen sisteminde

$$\vec{x}_u \neq \vec{0}\,,\quad E = \vec{x}_u^2 = 0,\quad \vec{x}_v \neq \vec{0}\,,\quad G = \vec{x}_v^2 = 0\,,$$

$$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v = -\sqrt{2}\,\vec{k}_1 - \sqrt{2}\,i\,\vec{k}_2 + (1-i)\,\vec{k}_3 \neq \vec{0}$$

dür.

Birinci temel kuvadratik formun ikinci F katsayısına gelince; (17-7;2) nedeniyle bunun değeri

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$$

skaler çarpımına eşit olduğundan, koordinat çizgileri arasındaki φ açısının değerine bağlıdır. (17-7) formüllerine göre, φ nin yönü ne olursa olsun,

(17-10) $$F = \sqrt{EG}\,\cos\varphi$$

olduğundan,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\varphi \text{ açısı} \begin{cases} \text{dar ise} & , \ F > 0 \\ \text{dik ise} & , \ F = 0 \\ \text{geniş ise} & , \ F < 0 \end{cases}$$

dır.

(17-8) kuvadratik formunun **diskriminantını** H^2 ile, yani

$$H^2 = EG - F^2 \tag{17-11}$$

biçiminde göstereceğiz.

Yüzeyin düzgün ve gerçel her noktasında diskriminant, birazdan göreceğimiz gibi, **artı işaretli olduğundan,** H^2 biçiminde gösterilmiştir. Gerçekten (17-10) ve (17-11) bağıntılarından

$$H^2 = EG - EG \cos^2 \varphi = EG \sin^2 \varphi \tag{17-12}$$

sonucu çıkarılır.

Düzgün ve gerçel noktada

$$E > 0, \quad G > 0 \quad \varphi \neq 0$$

olduğundan

$$H^2 > 0$$

dır. Bu sonuca şöyle de varabiliriz:

Yüzeyin **düzgün** ve **gerçel** her noktasında, (17-7) ve (17-12) nedeniyle

$$(\vec{x_u} \wedge \vec{x_v})^2 = EG \sin^2 \varphi = H^2 > 0 \tag{17-13}$$

dır. Görülüyor ki yüzeyin **düzgün** ve **gerçel** bir noktasında **sıfırdan farklı olan** H **sayısını**

$$H > 0 \tag{17-14}$$

olarak alırsak, normal vektörünün salt değeri H dır, yani

$$|\vec{n^*}| = |\vec{x_u} \wedge \vec{x_v}| = H \tag{17-15}$$

olur.

(16-19) formülü yardımıyle aynı noktadaki normal birim vektörü için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(17-16) $$\vec{H}\,\vec{n} = \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v$$

yazabiliriz.

E, F, G, H katsayılarının çeşitli gösterilişlerdeki değerleri ve normal birim vektörü.

a) MONGE gösterilişi

Bir yüzeyin, en az 1-nci sınıftan

$$x_3 = g(x_1, x_2)$$

fonksiyonu ile MONGE gösterilişinde, (16-8) denklemleri nedeniyle

(17-17) $$\vec{x}_u = \vec{k}_1 + p\,\vec{k}_3, \quad \vec{x}_v = \vec{k}_2 + q\,\vec{k}_3$$

olduğundan, **herhangi bir karteziyen koordinat sisteminde,** eksenler arasındaki açıların cosinüsleri

(17-18) $$\gamma_1 = \vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3, \quad \gamma_2 = \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_1, \quad \gamma_3 = \vec{k}_3 \cdot \vec{k}_2$$

ile gösterildiğinden, (17-17) den yararlanarak, (17-7) formülleri yardımıyle

(17-19) $$E = 1 + 2\gamma_2 p + p^2, \quad F = \gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 + pq,$$
$$G = 1 + 2\gamma_1 q + q^2,$$

ve (17-11)'i kullanarak

(17-20) $$H^2 = 1 - \gamma_3^2 + 2(\gamma_2 - \gamma_1\gamma_3)p + 2(\gamma_1 - \gamma_3\gamma_2)q - 2(\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2)pq + (1-\gamma_1^2)p^2 + (1-\gamma_2^2)q^2$$

eşitlikleri bulunur.

Karteziyen koordinat sistemleri bir dik sistem oluştururlarsa

$$\gamma_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3)$$

olacağından, (17-19) ve (17-20) formülleri

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(17-21) $$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1+q^2, \quad H^2 = 1+p^2+q^2$$

verir. Dik eksenlerde, (17-16) formülü, (17-17) yardımiyle

(17-21)' $$\vec{H}\vec{n} = \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v = -p\vec{k}_1 - q\vec{k}_2 + \vec{k}_3 = \vec{n}^*$$

verir.

b) İmplisit gösterilis

Bir yüzey en az 1-nci sınıftan

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

implisit denklemiyle verildiğinde, (16-10) nedeniyle

$$p = -f_{x_1}/f_{x_3}; \quad q = -f_{x_2}/f_{x_3}; \quad f_{x_3} \neq 0$$

olacağından, **bir dik koordinat sisteminde,** (17-21) formüllerinden

(17-22)
$$\begin{cases} E = (f^2_{x_1} + f^2_{x_1}) / f^2_{x_3} ; \quad F = f_{x_1} f_{x_2} / f^2_{x_3} ; \quad G = (f^2_{x_2} + f^2_{x_3})/f^2_{x_3} \\ H^2 = (f^2_{x_1} + f^2_{x_2} + f^2_{x_3})/f^2_{x_3} = \dfrac{1}{f^2_{x_3}} \sum_{p=1}^{3} f^2_{x_p} \end{cases}$$

sonuçlarına varılır.

İmplisit gösterilişte (17-21)'; $(f_{x_1} ; f_{x_2} ; f_{x_3})$ bir normal vektörün skaler bileşenlerini verir. İstenirse, (17-19) formüllerinden yararlanarak, herhangi bir eksen sistemindeki formüller de kolayca bulunabilir. Çok yer tutacaklarından, bunları yazmadık. Unutmamalı ki **bütün bu formüller de düzgün ve gerçel olan noktada geçerlidir.**

Eğrisel koordinatların değiştirilmesi

Birinci temel kuvadratik formun katsayıları, seçilen eğrisel koordinatlarına bağlıdırlar. Eğer bunların yerine, (15-2) ile, yâni $C \geq$ 1-inci sınıftan olmak üzere

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\bar{u} = f(u,v), \quad \bar{v} = g(u,v)$$

biçiminde tanımlanan $(\bar{u}, \bar{v})$ eğrisel koordinatları alınırsa, söz konusu katsayılar değişecektir. Her şeyden önce, yeni ve eski eğrisel koordinatlar arasındaki **bire-bir**liği sağlamak için, (15-3) ün, yani

$$\frac{D(\bar{u},\bar{v})}{D(u,v)} \neq 0$$

koşulunun sağlanması gerekir.

Bu koşul gerçekleştiğinde, söz konusu katsayıların nasıl değişeceklerini görelim. Bunun için,

$$(17\text{-}23) \qquad \begin{cases} \vec{x}_u = \vec{x}_{\bar{u}}\, f_u + \vec{x}_{\bar{v}}\, g_u \\ \vec{x}_v = \vec{x}_{\bar{u}}\, f_v + \vec{x}_{\bar{v}}\, g_v \end{cases}$$

vektörel eşitliklerinin önce skaler karelerini, sonra da skaler çarpımlarını alacak olursak: $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ için

$$(17\text{-}24) \qquad \begin{cases} f_u^2\,\bar{E} + 2 f_u g_u \bar{F} + g_u^2 \bar{G} = E \\ f_v^2\,\bar{E} + 2 f_v g_v \bar{F} + g_v^2 \bar{G} = G \\ f_u f_v \bar{E} + (f_u g_v + f_v g_u)\bar{F} + g_u g_v \bar{G} = F \end{cases}$$

lineer denklemleri elde edilir.

$\bar{E}, \bar{F}$ ve $\bar{G}$ nin katsayılar determinantı

$$(17\text{-}25) \qquad \begin{vmatrix} f_u^2 & 2 f_u g_u & g_u^2 \\ f_u f_v & f_u g_v + f_v g_u & g_u g_v \\ f_v^2 & 2 f_v g_v & g_v^2 \end{vmatrix} = D^2, \quad D = \frac{D(f,g)}{D(u,v)}$$

olduğundan,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(17\text{-}26)\qquad \begin{cases} \bar{E} = \dfrac{1}{D^2}(E\,g_v^2 - 2F g_u g_v + G\,g_u^2); \\ \bar{F} = \dfrac{1}{D^2}(E\,f_v g_v - F[f_u g_v + f_v g_u] + G\,f_u g_u) \\ \bar{G} = \dfrac{1}{D^2}(E f_v^2 - 2F f_u f_v + G f_u^2) \end{cases}$$

bulunur.

Eğer BELTRAMİ'nin

$$(17\text{-}27)\qquad \begin{cases} \nabla(\varphi,\ \varphi) = \nabla\varphi = \dfrac{1}{H^2}(E\varphi_v^2 - 2\varphi_u\ \varphi_v F + G\varphi_u^2) = -\dfrac{1}{H^2}\begin{vmatrix} E & F & \varphi_u \\ F & G & \varphi_v \\ \varphi_u & \varphi_v & 0 \end{vmatrix} \\ \nabla(\varphi,\psi) = \dfrac{1}{H^2}(E\varphi_v\psi_v - F(\varphi_u\psi_v + \varphi_v\psi_u) + G\varphi_u\psi_v) = -\dfrac{1}{H^2}\begin{vmatrix} E & F & \varphi_u \\ F & G & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v & 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

biçimindeki **diferansiyel operatörleri** veya **birinci diferansiyel parametresi** kullanılırsa, (17-26) formülleri

$$(17\text{-}28)\qquad \bar{E} = \frac{H^2}{D^2}\nabla g,\quad \bar{F} = \frac{H^2}{D^2}\nabla(f,g),\quad \bar{G} = \frac{H^2}{D^2}\nabla f$$

biçimine girerler. Öte yandan :

$$\bar{D} = \frac{D(u,v)}{D(\bar{u},\bar{v})};\quad D\bar{D} = 1$$

ve (15-4), (17-14) formüllerinden

$$(17\text{-}29)\qquad \vec{x}_{\bar{u}} \wedge \vec{x}_{\bar{v}} = \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v D;\quad \bar{H}^2 = \frac{H^2}{D^2}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 17-2.

$\bar{u} = sâbit$, $\bar{v} = sâbit$ yeni koordinat çizgilerinin bir dik eğri şebekesi oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşul

(17-30) $\nabla(f, g) = E f_v g_v - F(f_u g_v + f_v g_u) + G f_u g_u = 0$

dır.

Sonuç olarak, şu teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 17-1. En az 1 -inci sınıftan bir yüzeyin (u, v) eğrisel koordinatları yerine, en az 1 - inci sınıftan

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v)$$

fonksiyonlariyle tanımlanan $(\bar{u}, \bar{v})$ eğrisel koordinatları alındığında, birinci kuvadratik formun yeni $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ katsayıları, (17-2) formülleriyle hesaplanır.

Birinci temel kuvadratik formun çeşitli biçimleri :

Yarı geodezik, geodezik ve izometrik biçimler

1) Koordinat çizgilerinin bir dik şebeke oluşturmaları hâlinde, yüzey üzerinde F nin

$$F = 0$$

olacağı birinci temel kuvadratik form, genellikle

(17-31) $ds^2 = E du^2 + G dv^2, \quad E = E(u, v), \quad G = G(u, v)$

biçimindedir.

F nin yüzey üzerinde, hiç olmazsa yerel olarak, sıfıra özdeşliği daima sağlanabilir.

2) Eğer koordinat çizgileri

$$E = E(u), \quad F = 0$$

olmasını sağlayacak biçimde seçilmişse, birinci temel kuvadratik form

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(17-32) $$ds^2 = E(u)\,du^2 + G(u, v)\,dv^2$$

biçimindedir.

Buna da, ilerde göreceğimiz gibi, **yarı geodezik form** denilir. Bunu sağlayan eğrisel koordinatlar da: **yarı geodezik eğrisel koordinatlar,** adını alır.

Özel olarak

$$d\bar{u} = \sqrt{E}\ du$$

veya

$$\bar{u} = \int_{u_0}^{u} \sqrt{E(u)}\ du = \bar{u}(u)$$

bağıntısiyle tanımlanan $\bar{u}$ yi, yeni $\bar{u}$, v eğrisel koordinatların ilki olarak alırsak, (17-32) formu, $\bar{u}$ yerine gene u koyarak

(17-33) $$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca şurasını da kaydedelim ki $E > 0$ olduğundan yapılan bir düzgün parametre değişimidir.

(17-33) formuna da, ilerde değineceğimiz gibi, **geodezik form,** eğrisel koordinatlara da **geodezik koordinatlar** denilir. $\bar{u}$ nin anlamı, v = sâbit çizgileri üzerinde seçilecek bir u_0 başlangıç noktasından itibaren bu çizgilerin uzunluğunu vermesidir.

3) Başka bir olasılık da, birinci temel kuvadratik formun

$$ds^2 = \lambda(u, v)\,(du^2 + dv^2)$$

biçiminde yazılabilmesidir. Böyle bir formu ya da eğrisel koordinatları **izometrik** veya **izotermik** kelimelerinden biriyle adlandırmak âdet olmuştur. Bir yüzey üzerinde sonsuz izometrik koordinat sisteminin seçilebileceğini ilerde göreceğiz.

4) Bazı yüzeyler üzerinde de, birinci temel kuvadratik form

(17-34) $$ds^2 = [U(u) + V(v)](du^2 + dv^2)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

biçiminde yazılabilir. Bu tür yüzeylere LIOUVILLE yüzeyleri denildiğini ilerde göreceğiz.

5) İlerde sözünü edeceğimiz **açılabilir** yüzeylerde de

(17-35) $$ds^2 = E(u)\,du^2 + G(v)\,dv^2$$

dir.

18. Yüzeyin bir eğrisinin iki noktası arasındaki eğrisel uzunluk

1 - sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel denklemiyle verilen bir yüzeyin bir C eğrisi de 1 - nci sınıftan (17-2) denklemleriyle tanımlanmışsa, C nin parametreli vektörel denklemi de (17-3) le, yâni

(17-3) $$\vec{x}(t) = \vec{x}[u(t), v(t)]$$

denklemiyle belirli olur.

C eğrisinin A(a) ve B(b) noktaları arasındaki **yay uzunluğu**, $\overset{\frown}{AB}$ yayı düzgün noktalardan oluşuyorsa, C nin AB yayının bir P(t) noktasında,

$$\vec{dx}^2 = \vec{x}_t'^2(t)\,dt^2 = ds^2$$

yazılabileceğinden, Diferansiyel Geometri I, s. 76, 77, formül (27-15 ve 17) ve (17-8) nedeniyle

(18-1) $$\overset{\frown}{AB} = s = \int_a^b \sqrt{\vec{x}_t'^2(t)}\,dt = \int_a^b \sqrt{\vec{dx}^2} = \int_a^b \sqrt{E u_t'^2 + 2F u_t' v_t' + G v_t'^2}\,dt$$

integraliyle hesaplanır.

Yüzeyin düzgün noktalardan oluşan bir eğrisi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$h(u, v) = 0, \quad u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad v_1 \leqslant v \leqslant v_2$$

denklemiyle tanımlanmışsa, bunun $P_1(u_1)$, $P_2(u_2)$ noktaları arasındaki $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yay uzunluğu da eğri boyunca

$$\frac{dv}{du} = -\frac{h_u}{h_v}; \quad h_v(u, v) \neq 0$$

olacağından, $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayı

$$P_1P_2 = s = \int_{u_1}^{u_2} \frac{[E h_v^2(u, v) - 2F h_u(u, v) h_v(u, v) + G k_u^2(u, v)]^{1/2} du}{h_v(u, v)} \qquad h(u, v) = 0 \tag{18-2}$$

sonlu integraline eşittir.

Özel haller 18-1.

a) v = sâbit eğrilerinin lineer elemanı ve yay uzunluğu

$v = v_0$ = sâbit koordinat çizgisinin $P_1(u_1)$ ve $P_2(u_2)$ noktaları arasındaki $\overset{\frown}{P_1P_2}$ yayı, düzgün noktalardan oluşuyorsa, bunun da, lineer elemanı ve s_1 yay uzunluğu sırasiyle

$$ds_1 = \sqrt{E(u, v_0)}\, du, \quad s_1 = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E(u, v_0)}\, du = \overset{\frown}{P_1P_2} \tag{18-3}$$

dir.

b) u = sâbit eğrilerinin lineer elemanı ve yay uzunluğu

$u = u_0$ = sâbit koordinat çizgisinin $Q_1(v_1)$ ve $Q_2(v_2)$ noktaları arasındaki $\overset{\frown}{Q_1Q_2}$ yayı, düzgün noktalardan oluşuyorsa, bunun ds_2 lineer elemanı ile s_2 yay uzunluğu sırasiyle

$$ds_2 = \sqrt{G(u_0, v)}\, dv, \quad S_2 = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G(u_0, v)}\, dv = \overset{\frown}{Q_1Q_2} \tag{18-4}$$

dir.

19. Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen herhangi iki eğrisi arasındaki açı

İki yanlı ve 1 -nci sınıftan bir yüzeyin **düzgün** bir $P(u, v)$ noktasındaki normal birim vektörü $\vec{n}$, P den geçen ve 1 - nci sınıftan herhangi iki eğrisi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

de C, C* olsun. Bundan önce de söylediğimiz gibi, sürekli olarak değişen $\vec{n}$ vektörü ikiyanlı olarak alınan yüzeyi, hiç olmazsa bunun P noktası yakınlarını **yönlendirmektedir.**

C ve C* eğrileri, gene 1 - nci sınıftan

$$(\alpha) \qquad u = u(t), \quad v = v(t); \quad u = u(t^*), \quad v = v(t^*)$$

fonksiyonları ile verilmişlerse, bunların yer vektörleri, 1 - nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}[u(t), v(t)], \quad \vec{x} = \vec{x}[u(t^*), v(t^*)]$$

vektörleridir.

O halde C ve C* ın P düzgün noktasındaki teğet vektörleri

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}_u \frac{du}{dt} + \vec{x}_v \frac{dv}{dt}; \quad \frac{\delta\vec{x}}{\delta t^*} = \vec{x}_u \frac{\delta u}{\delta t^*} + \vec{x}_v \frac{\delta v}{\delta t^*};$$

veya kısaca,

$$(19\text{-}1) \qquad d\vec{x} = \vec{x}_u\, du + \vec{x}_v\, dv, \quad \delta\vec{x} = \vec{x}_u\, \delta u + \vec{x}_v\, \delta v$$

olur.

C, C* eğrilerinin P noktasında oluşturdukları açının tanımı

P noktasındaki $\vec{n}$ normal birim vektörü, bu noktadaki teğet düzlem üzerinde pozitif bir dönme yönü tanımlar. P den geçen iki eğriyi belirli bir sırada, örneğin C, C* sırasında alalım. Bunların aynı sırada ve aynı noktadaki $d\vec{x}$, $\delta\vec{x}$ teğet vektörleri arasında, π den küçük olmak üzere oluşan

$$\varphi = \widehat{d\vec{x}, \delta\vec{x}}, \quad |\varphi| < \pi$$

açısı, C, C* eğrilerinin, tanım gereğince, P deki açılarıdır. φ açısı, π den küçük olarak seçildiğine göre, (+) ya da (−) işaretli olabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a) φ açısının cosinüsü

φ açısı hangi işaretli olursa olsun, bunun cosinüsü daima aynı işaretlidir ve

$$\text{(19-2)} \qquad \cos\varphi = \frac{\vec{dx} \cdot \vec{\delta x}}{|\vec{dx}|\,|\vec{\delta x}|}$$

e eşittir.

(18-1) ve (17-8) formüllerini kullanacak olursak, (18-2) yi

$$\text{(19-3)} \quad \cos\varphi = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta u + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}$$

biçiminde yazabiliriz.

Eğer (α) fonksiyonlarını

$$(\alpha) \qquad u = f(t),\ v = k(t);\quad u = f^*(t^*),\quad v = k^*(t^*)$$

biçiminde yazarsak,

$$(\beta) \qquad du = f'_t\,dt,\quad dv = k'_t\,dt;\quad \delta u = f^{*\prime}_{t^*}\,dt^*;\quad \delta v = k^{*\prime}_{t^*}\,dt^*$$

olacağından, (18-3) formülü, diferansiyelsiz

$$\cos\varphi = \frac{E\,f'_t f^{*\prime}_{t^*} + F(f'_t k^{*\prime}_{t^*} + k'_t f^{*\prime}_{t^*}) + G\,k^{*\prime}_t k'_t}{\sqrt{E f'^2_t + 2F f'_t k'_t + G k'^2_t}\cdot\sqrt{E f^{*\prime 2}_{t^*} + 2F f^{*\prime}_{t^*} k^{*\prime}_{t^*} + G k^{*\prime 2}_{t^*}}}$$

dir.

b) φ açısının sinüsü

$\dfrac{\vec{dx}}{|\vec{dx}|}$ ve $\dfrac{\vec{dx}}{|\vec{dx}|}$ birim vektörlerinin

$$\frac{\vec{dx} \wedge \vec{\delta x}}{|\vec{dx}| \cdot |\vec{\delta x}|}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

vektörel çarpımının salt değeri bu iki birim vektörü arasındaki açının salt değerine eşittir. O halde

$$(19\text{-}5)\qquad \vec{n}\cdot\frac{\vec{dx}\wedge\vec{\delta x}}{|\vec{dx}|\cdot|\vec{\delta x}|}=\frac{(\vec{n},\vec{dx},\vec{\delta x})}{|\vec{dx}|\cdot|\vec{\delta x}|}=\operatorname{Sin}\varphi$$

yazabiliriz.

$\vec{dx}\wedge\vec{\delta x}$ vektörel çarpımının $\vec{n}$ ile aynı yönlü olması halinde, $\varphi>0$, aksi halde $\varphi<0$ dır.

(19-1) ve(17-8) bağıntıları yardımiyle, (18-5) den, önce

$$\vec{dx}\wedge\vec{\delta x}=(du\ \delta v-dv\ \delta u)\ \vec{x_u}\wedge\vec{x_v}$$

ve (17-16) yı kullanarak

$$(19\text{-}6)\qquad \vec{dx}\wedge\vec{\delta x}=H\,(du\,\delta v-dv\,\delta u)\,\vec{n}$$

bulunacağından

$$(19\text{-}7)\qquad \operatorname{Sin}\varphi=\frac{\pm H\begin{vmatrix} du & dv\\ \delta u & \delta v\end{vmatrix}}{\sqrt{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}\ \sqrt{E\,\delta u^2+2F\,\delta u\,\delta v+G\,\delta v^2}}$$

olur.

Deminki gibi, eğrilerin α fonksiyonları ile verilmeleri halinde

$$(19\text{-}8)\qquad \operatorname{Sin}\varphi=\frac{\pm H\begin{vmatrix} f_t' & k_t'\\ f_{t^*}^{*\prime} & k_{t^*}^{*\prime}\end{vmatrix}}{\sqrt{E\,f_t'^2+2F\,f_t'k_t'+G\,k_t'^2}\ \sqrt{E\,g_{t^*}^{*\prime 2}+2F\,f_{t^*}^{*\prime}k_{t^*}^{*\prime}+G\,k_{t^*}^{*\prime 2}}}$$

bulunur.

c) φ açısının tangenti

(18-3) ve (18-7) formüllerinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(19\text{-}9)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm H\,(du\,\delta v - dv\,\delta u)}{E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}$$

formülü ve (18-8) formüllerinden de

$$(19\text{-}10)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\pm H\,(f'_t k^{*\prime}_{t^*} - k'_t f^{*\prime}_{t^*})}{E f'_t f^{*\prime}_{t^*} + F\,(f'_t k^{*\prime}_{t^*} + k'_t f^{*\prime}_{t^*}) + G\,k'_t k^{*\prime}_{t^*}}$$

formülü elde edilir.

Özel haller 19-1.

a) Diklik

Yüzeyin P düzgün noktasından geçen C, C* eğrilerinin P de dik kesişmeleri için gerekli ve yeterli koşul, (18-3) veya (18-4) e göre

$$(19\text{-}11)\qquad E\,du\,\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0$$

veya

$$(19\text{-}12)\qquad E f'_t f^{*\prime}_{t^*} + F(f'_t k^{*\prime}_{t^*} + k'_t f^{*\prime}_{t^*}) + G\,k^*_t k^{*\prime}_{t^*} = 0$$

dır.

b) Yüzeyin P düzgün noktasından geçen C, C* eğrilerinin P de birbirlerine teğet olmaları için gerekli ve yeterli koşul, (18-9) veya (18-10) dolayısiyle

$$(19\text{-}13)\qquad du\,\delta v - dv\,\delta u = 0$$

veya

$$(19\text{-}14)\qquad f'_t k^{*\prime}_{t^*} - k'_t f^{*\prime}_{t^*} = 0$$

dır. Bu iki sonuç, doğrudan doğruya da yazılabilir.

Uyarı 19-1.

Koordinat çizgilerinin P düzgün noktasında birbirlerini dik kesmeleri hâlinde, elde edilen bütün formüllerde, F yerine sıfır koymak gerekir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yüzeyin bir eğrisinin koordinat çizgileriyle oluşturduğu açılar

a) $v = v_0$ sâbit eğrisiyle oluşturulan açı.

C eğrisi olarak $v = v_0$ koordinat çizgisini alalım. Buna göre, C eğrisi için $dv=0$ olacağından, (18-3), (18-7) ve (18-9) formülleri sıra ile aşağıdaki eşitlikleri verirler. Bunlarda, $v = v_0$ koordinat çizgisi ile C^* ın P düzgün noktasında oluşturdukları açı φ_1 ile gösterilmiştir:

$$(19\text{-}15)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{E\,\delta u + F\,\delta v}{\sqrt{E}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{\pm H\,\delta v}{\sqrt{E}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{\pm H\,\delta v}{E\,\delta u + F\,\delta v} \end{cases}$$

b) $u = u_0$ = sâbit eğrisiyle oluşturulan açı.

C^* eğrisi olarak $u = u_0$ koordinat çizgisini alalım, bu açıyı da φ_2 ile gösterelim. C^* eğrisi için $\delta u = 0$ olacağından, (18-3), (18-7) ve (18-9) formülleri bu özel halde

$$(19\text{-}16)\quad \begin{cases} \cos\varphi_2 = \dfrac{F\,du + G\,dv}{\sqrt{G}\,\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}} \\ \sin\varphi_2 = \dfrac{\pm H\,du}{\sqrt{G}\,\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{\pm H\,du}{F\,du + G\,dv} \end{cases}$$

verir.

c) Koordinat çizgilerinin oluşturduğu açı

Koordinat çizgileri arasındaki açıyı α ile, yâni

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\widehat{\vec{x}_u, \vec{x}_v} = \alpha$$

ile gösterirsek,

$$0 < \alpha < \pi$$

dir.

Buna göre, örneğin a) hâlinde, $\tilde{C}$ eğrisi olarak $u = u_0 =$ sâbit eğrisini alırsak, (18-15) denklemlerinde $\delta u = 0$ olacağından, α açısının çeşitli trigonometrik fonksiyonları

$$(19\text{-}17) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \dfrac{F}{\sqrt{EG}} \\ \sin \alpha = \dfrac{H}{\sqrt{EG}} \\ \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{H}{F} \end{cases}$$

olur.

Yüzey üzerindeki bir eğri ailesinin eş açılı yörüngeleri (Loksodromlar)

Yüzey üzerinde bir parametreli bir (C) eğri ailesini oluşturan eğriler 1-nci sınıftan olsun. Yüzey üzerinde bulunan ve (C) nin bütün eğrilerini aynı $\beta =$ sâbit açısı altında kesen bir eğri, (C) ailesinin **eşaçılı bir yörüngesidir.** $\beta = \pi/2$ ise, bir **dik yörünge** söz konusudur.

(C) nin bir C eğrisinin bir P noktasındaki teğet doğrultusunda hesaplanan diferansiyeller $(\delta u, \delta v)$; eşaçılı yörüngelerin P den geçen eğrisinin bu noktadaki teğeti doğrultusunda hesab edilecek diferansiyeller de (du, dv) olsun. C nin P noktasındaki teğetle β açısı yapan iki doğrultu bulunduğundan ve bu doğrultular söz konusu teğete göre simetrik olduklarından, şimdiden, (C) nin iki ayrı eşaçılı yörünge ailesi bulunacağı kestirilebilir. Eşaçılı yörüngeler yerine dik açılı yörüngeler söz konusu ise, bu sayı bir olur.

Eşaçılı yörüngelerin diferansiyel denklemi, (18-9) dan yararlanarak, kolayca yazılabilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(19-18) $\operatorname{tg}\beta\,[E\,\delta u\,du + F(\delta v\,du + \delta u\,dv) + G\,\delta v\,dv] \mp H(\delta v\,du - \delta u\,dv) = 0.$

Görülüyor ki, $\mp$ işareti nedeniyle, **birinci dereceden ve birinci mertebeden** iki diferansiyel denklem söz konusudur.

Özetlemek gerekirse, şöyle söyleyebiliriz:

Verilen bir yüzey üzerinde bir parametreli ve 1 - nci sınıftan bir eğri ailesinin, eşaçılı yörüngeleri olarak, bir parametreli ayrı iki eğri ailesi vardır. Bunlar, (18-18) birinci dereceden ve birinci mertebeden diferansiyel denklemlerinin çözümleri olarak bulunur.

Özel olarak, yüzeyin bir parametreli ve 1 - nci sınıftan bir (C) eğri ailesinin **dik yörüngeleri** söz konusu ise, $\operatorname{tg}\beta \to \infty$ olacağından, bunların diferansiyel denklemi

(19-19) $$E\,\delta u\,du + F(\delta v\,du + \delta u\,dv) + G\,\delta v\,dv = 0$$

olur.

Örnekler 19-1.

1) Dik eksen sisteminde

$$\vec{x}(u, v) = a\{\cos u\,\vec{k}_1 + \sin u\,\vec{k}_2\} + v\,\vec{k}_3$$

vektörel denklemiyle verilen **dönel silindir** için

$$E,\ F,\ G,\ H,\ \vec{n} \quad \text{ve} \quad \varphi_2$$

yi hesaplayınız.

(17-7), (17-11), (17-16) ve (18-16; 3) formülleri sıra ile,

$$\vec{x}_u = a(-\sin u\,\vec{k}_1 + \cos u\,\vec{k}_2),\ \vec{x}_v = \vec{k}_3$$

formülleri yardımıyle

(19-20)
$$\begin{cases} E = a^2,\ F = 0,\ G = 1,\ H^2 = a^2 \\ \vec{n} = \cos u\,\vec{k}_1 + \sin u\,\vec{k}_2. \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(19\text{-}21)\quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\varphi_2 = \dfrac{dv}{\sqrt{a^2\,du^2 + dv^2}}, \\ \operatorname{Sin}\varphi_2 = \dfrac{\pm a\,du}{\sqrt{a^2\,du^2 + dv^2}}, \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \pm a\dfrac{du}{dv} \end{cases}$$

verir.

2) Dik eksen sisteminde

$$\vec{x}(u, v) = v \operatorname{Sin}\alpha\,(\operatorname{Cos} u\,\vec{k}_1 + \operatorname{Sin} u\,\vec{k}_2) + v \operatorname{Cos}\alpha\,\vec{k}_3,\ \alpha = \text{Sabit} > 0$$

vektörel denklemiyle verilen **dönel koni** için

$$E, F, G, H, \vec{n} \text{ ve } \varphi_2$$

yi hesaplayınız.

$$\vec{x}_u = v \operatorname{Sin}\alpha\,(-\operatorname{Sin} u\,\vec{k}_1 + \operatorname{Cos} u\,\vec{k}_2)$$

$$\vec{x}_v = \operatorname{Sin}\alpha\,(\operatorname{Cos} u\,\vec{k}_1 + \operatorname{Sin} u\,\vec{k}_2) + \operatorname{Cos}\alpha\,\vec{k}_3$$

olduğundan, aynı (17-7), (17-11), (17-16) ve (18-16; 3) formülleri sıra ile

$$(19\text{-}22)\quad \begin{cases} E = v^2 \operatorname{Sin}^2\alpha, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad H^2 = v^2 \operatorname{Sin}^2\alpha, \\ \vec{n} = \operatorname{Cos}\alpha\,(\operatorname{Cos} u\,\vec{k}_1 + \operatorname{Sin} u\,\vec{k}_2) - \operatorname{Sin}\alpha\,\vec{k}_3, \end{cases}$$

$$(19\text{-}23)\quad \begin{cases} \operatorname{Cos}\varphi_2 = \dfrac{dv}{\sqrt{v^2 \operatorname{Sin}^2\alpha\,du^2 + dv^2}} \\ \operatorname{Sin}\varphi_2 = \dfrac{\pm v \operatorname{Sin}\alpha\,du}{\sqrt{v^2 \operatorname{Sin}^2\alpha\,du^2 + dv^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \pm v \operatorname{Sin}\alpha\,\dfrac{du}{dv} \end{cases}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3) Dik eksen sisteminde

$$\vec{x}(u, v) = R\,[\mathrm{Sin}\, v\,(\mathrm{Cos}\, u\,\vec{k}_1 + \mathrm{Sin}\, u\,\vec{k}_2) + \mathrm{Cos}\, v\,\vec{k}_3]$$

vektörel denklemiyle verilen **küre** için

$$E, F, G, H, \vec{n} \text{ ve } \varphi_i$$

i hesaplayınız.

$$\vec{x}_u = R\,\mathrm{Sin}\, v\,(-\mathrm{Sin}\, u\,\vec{k}_1 + \mathrm{Cos}\, u\,\vec{k}_2).$$

$$\vec{x}_v = R\,[\mathrm{Cos}\, v\,(\mathrm{Cos}\, u\,\vec{k}_1 + \mathrm{Sin}\, u\,\vec{k}_2) - \mathrm{Sin}\, v\,\vec{k}_3]$$

olduğundan, (17-7), (17-11), (17-16) ve (18-15; 3) formüllerinden yararlanıldığında

$$(19\text{-}24)\quad \begin{cases} E = R^2\,\mathrm{Sin}^2 v, \quad F = 0, \quad G = R^2, \quad H^2 = R^4\,\mathrm{Sin}^2 v \\ \vec{n} = -\mathrm{Sin}\, v\,(\mathrm{Cos}\, u\,\vec{k}_1 + \mathrm{Sin}\, u\,\vec{k}_2) - \mathrm{Cos}\, v\,\vec{k}_3. \end{cases}$$

$$(19\text{-}25)\quad \begin{cases} \mathrm{Cos}\ \varphi_i = \dfrac{\mathrm{Sin}\, v\,\delta u}{\sqrt{\mathrm{Sin}^2 v\,\delta u^2 + \delta v^2}}, \quad 0 \leqslant v \leqslant \pi \\ \mathrm{Sin}\ \varphi_i = \dfrac{\pm\,\delta v}{\sqrt{\mathrm{Sin}^2 v\,\delta u^2 + \delta v^2}}, \\ \mathrm{tg}\ \varphi_i = \pm\dfrac{\delta v}{\mathrm{Sin}\, v\,\delta u} \end{cases}$$

bulunur.

4) Dik eksen sisteminde

$$x_3 = x_1^2 - x_2^2$$

MONGE denklemiyle verilen **hiperbolik paraboloidi** için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$E,\ F,\ G,\ H,\ \vec{n} \text{ ve } \varphi_1$$

i hesaplayınız.

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = u^2 - v^2$$

denilirse,

$$\vec{x}(u, v) = u\vec{k}_1 + v\vec{k}_2 + (u^2 - v^2)\vec{k}_3$$

vektörel denklemlerinden

$$\vec{x}_u = \vec{k}_1 + 2u\vec{k}_3, \quad \vec{x}_v = \vec{k}_2 - 2v\vec{k}_3$$

elde edileceğinden, (17-7), (17-11), (17-16) ve (18-15; 3) formüllerinden

$$(19\text{-}26)\quad \begin{cases} E = 1+4x_1^2, \ F = -4x_1x_2, \ G = 1+4x_2^2, \ H^2 = 1+4(x_1^2+x_2^2) \\ \vec{n} = \dfrac{-2x_1\vec{k}_1 + 2x_2\vec{k}_2 + \vec{k}_3}{\sqrt{1+4(x_1^2+x_2^2)}}, \end{cases}$$

$$(19\text{-}27)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{(1+4x_1^2)\,\delta x_1 - 4x_1x_2\,\delta x_2}{\sqrt{1+4x_1^2}\ \sqrt{(1+4x_1^2)\,\delta x_1^2 - 8x_1x_2\,\delta x_1\,\delta x_2 + (1+4x_2^2)\,\delta x_2^2}} \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{\pm\sqrt{1+4(x_1^2+x_2^2)}\,\delta x_2}{\sqrt{1+4x_1^2}\ \sqrt{(1+4x_1^2)\,\delta x_1^2 - 8x_1x_2\,\delta x_1\,\delta x_2 + (1+4x_2^2)\,\delta x_2^2}} \\ \operatorname{tg}\varphi_1 = \pm\dfrac{\sqrt{1+4(x_1^2+x_2^2)}\,\delta x_2}{(1+4x_1^2)\,\delta x_1 - 4x_1x_2\,\delta x_2} \end{cases}$$

çıkarılır.

Uygulama 19-1.

Dönel silindirin anadoğrularını —veya paralellerini— **sâbit açı altında kesen eğrilerini** —Loksodromilerini— **bulunuz.**

(19-21; 3) formülünden,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = m = \text{sabit} = \pm a \frac{du}{dv}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bunun da çözümü,

$$\frac{a}{m} = k, \quad v = \pm k u + b, \quad b = \text{sabit}$$

dır. O halde, aranan eğrilerin denklemleri,

$$x_1 = a \operatorname{Cos} u, \quad x_2 = a \operatorname{Sin} u, \quad x_3 = \pm k u + b, \quad b : \text{sabit}$$

olacağından, **sağa veya sola birer dairesel helis ailesi** söz konusudur.

Uygulama 19-2.

Dönel koninin anadoğrularını —veya paralellerini— **sabit açı altında kesen eğrilerini** —loksodromlerini— **bulunuz.**

(19-23; 3) formülünden yararlanılacak olursa

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = m^{-1} = \text{sabit} = \pm v \operatorname{Sin} \alpha \frac{du}{dv}$$

veya

$$\frac{dv}{v} = \pm (m \sin \alpha)\, du$$

diferansiyel denklemi bulunur. Bunun da integrasyonu ile

$$v = k\, e^{\pm (m \sin \alpha) u} \quad ; \quad k = e^{c} = \text{sabit}$$

bağıntısı elde edilir. O halde, aranan eğri ailesi

$$x_1 = k \sin\alpha\, e^{\pm (m \sin \alpha) u} \cos u, \quad x_2 = k \sin \alpha\, e^{\pm (m \sin \alpha) u} \sin u,$$

$$x_3 = k \cos \alpha\, e^{\pm (m \sin \alpha) u}$$

denklemlerinin tanımladığı aile olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu eğrilerin $x_1 Ox_2$ koordinat düzlemi üzerindeki dik izdüşümleri, kolayca görüldüğü gibi, logoritmik spirallerdir.

Uygulama 19-3.

Kürede boylam çemberlerini —ya da enlem çemberlerini— aynı açı altında kesen eğrileri —loksodromileri— bulunuz.

(19-25; 3) formülü nedeniyle

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = m = \text{sabit} = \pm \frac{dv}{\operatorname{Sin} v \, du}$$

veya

$$m \, du = \pm \frac{dv}{\sin v}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bunun integrasyonu ile de

$$v = 2 \operatorname{Aretg} c \, e^{\pm mu} \quad ; \quad c : \text{sabit}$$

çıkar.

Uyarı 19-2.

(0, 0, R) kutbuna göre, kürenin, (0, 0, —R) noktasındaki teğet düzlemi üzerinde, stereografik izdüşümü —özel bir evirtim— alınırsa, loksodromların izdüşümleri, kolaylıkla görüleceği gibi, logoritmik spirallerdir.

Yüzeyin düzgün bir noktasındaki herhangi bir teğetin, koordinat çizgilerinin teğetlerine göre açı katsayısı.

P düzgün noktası yakınlarında en az 1 - nci sınıftan bir S yüzeyinin bu noktadan geçen ve sınıfı ≥ 1 olan bir C eğrisinin yer vektörü $\vec{x} = \vec{x}(s)$ ise, C nin P noktasındaki $\vec{a}_1 = \vec{x}^*$ teğet birim vektörü, (16-1) nedeniyle

$$(19\text{-}28) \qquad \vec{a}_1 = \vec{x}^* = \vec{x}_u u^* + \vec{x}_v v^* = u^* (\vec{x}_u + m \vec{x}_v), \; m = \frac{dv}{du}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

P düzgün noktasından geçen koordinat çizgilerinin teğet birim vektörleri

(19-29) $$\sqrt{E}\,\vec{t} = \vec{x}_u\,; \quad \sqrt{G}\,\vec{t^*} = \vec{x}_v$$

bağıntılarını sağladıklarından, (19-28)

(19-30) $$\vec{a_i} = u^*(\sqrt{E}\,\vec{t} + \sqrt{G}\,\overline{m}\,\vec{t^*}) = \vec{t}\cos\alpha + \vec{t^*}\sin\alpha,$$

$$\cos\alpha = \sqrt{E}\,u^*, \quad \sin\alpha = \sqrt{G}\,v^*$$

biçiminde yazılabilir ve dolayısıyla: $\vec{a_i}$ **teğet birim vektörünün** koordinat çizgilerinin $\vec{t}$ ve $\vec{t^*}$ teğet birim vektörüyle belirli olan eksenlere göre $\overline{m}$ açı katsayısı, (19-30) yardımıyle

(19-31) $$\overline{m} = \sqrt{\frac{G}{E}}\,m = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du}$$

olur.

Demek ki: **Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 1$ olan bir S yüzeyinin, P de birbirine teğet ve en az 1 - nci sınıftan C eğrileri için $\overline{m}$ nin P deki değerleri aynıdır.**

Aynı şeyler m için de yinelenebilir, yani m de bir **doğrultu katsayısıdır.**

20. Alan elemanı ve bir yüzey parçasının alanı

a) GAUSS koordinatları

Ou, Ov dik eksenleriyle tanımlanan düzlem üzerinde: u, v **skaler, bağımsız** ve **gerçel** değişkenlerinin

(B) $$a \leqslant u \leqslant b, \quad c \leqslant v \leqslant d$$

aralıklarında, veya (B) dikdörtgen bölgesinde değişmeleri hâlinde,

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

vektörel denkleminin gösterdiği yüzey üzerinde elde edilen (S) bölgesinin A alanını hesaplamak isteyelim. Bunun için, (S) bölgesini

$$u = a = u_0,\ u = u_1, \ldots, u = u_p, \ldots, u = b = u_n;$$

$$u_{p-1} < u_p,\ (p = 0, 1, \ldots, n)$$

$$v = c = v_0,\ v = v_1, \ldots, v = v_q, \ldots, v = d = v_m;$$

$$v_{q-1} < v_q,\ (q = 0, 1, \ldots, m)$$

koordinat çizgileriyle, sonlu sayıda, bir takım eğrisel dörtgenlere bölelim. Eğer

$$\Delta u_p = u_p - u_{p-1}, \quad \Delta v_q = v_q - v_{q-1}$$

$$\Delta \vec{x}_p = \vec{x}(u_p, v_{q-1}) - \vec{x}(u_{p-1}, v_{q-1})$$

$$\Delta \vec{x}_q = \vec{x}(u_{p-1}, v_q) - \vec{x}(u_{p-1}, v_{q-1})$$

dersek,

$$u = u_{p-1},\ u = u_p \quad \text{ve} \quad v = v_{q-1},\ v = v_q$$

koordinat çizgileriyle tanımlanan eğrisel PQRS dörtgeninin yaklaşık alanı olarak, bu dörtgenin PQ, PS kirişleri üzerine tamamlanan PQR'S paralel kenarının alanını, yâni

$$\underset{PQR'S}{\Delta A} = |\vec{pQ} \wedge \vec{PS}| = |\Delta \vec{x}_p \wedge \Delta \vec{x}_q|$$

yü alabiliriz.

Eğer

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu, (B) tanım bölgesinde, 1 - nci sınıftansa, [Ferruh ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 36, formül (15-2) nedeniyle]

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\Delta \vec{x}_p = \Delta u_p \left[\vec{x}_u (u_{p-1}, v_{q-1}) + \vec{\alpha}_1 (u_{p-1}, v_{q-1}, \Delta u_p) \right],$$

$$\lim_{\Delta u_p \to 0} \vec{\alpha}_1 = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{x}_q = \Delta v_q \left[\vec{x}_v (u_{p-1}, v_{q-1}) + \vec{\beta}_1 (u_{p-1}, v_{q-1}, \Delta v_q) \right].$$

$$\lim_{\Delta v_q \to 0} \vec{\beta}_1 = \vec{0}$$

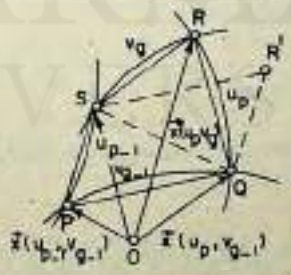
yazılabileceğinden, yeteri kadar küçük Δu_p ve Δv_q değerleri için, PQRS eğrisel dörtgeninin yaklaşık ΔA alanı olarak

$$\Delta A = \left| \vec{x}_u (u_{p-1}, v_{q-1}) \wedge \vec{x}_v (u_{p-1}, v_{q-1}) \right| \Delta u_p \Delta v_q ,$$

veya (17-14) dolayısiyle

$$\Delta A = H (u_{p-1}, v_{q-1}) \Delta u_p \Delta v_q$$

bulunur.



Şekil 8

Böylece, yüzey üzerindeki (S) bölgesinin yaklaşık alanını hesabetmek için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(20-1) $$\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{m} H(u_{p-1}, v_{q-1})\,\Delta u_p\,\Delta v_q$$

toplamını hesaplamamız gerekir.

(S) bölgesinin A alanı, yukarıki toplamda, Δu_p, Δv_q biçimindeki aralıklardan en büyüğünün sıfıra yaklaşması koşulu ile, bu tür toplamların limitidir. Söz konusu vektörel fonksiyon, (B) bölgesinde 1 - nci sınıftan olduğu için, H(u,v) aynı bölgede **integre edilebilen** bir fonksiyondur, dolayısiyle yukarıki toplamın limiti

(20.2) $$A = \iint_{(B)} H(u, v)\,du\,dv$$

dir.

Tanım 20-1.

(20-3) $$dA = H(u, v)\,du\,dv,$$

verilen yüzeyin **alan elemanı**dır.

Uyarı 20-1.

Alan elemanının (20-3) ifadesi şöyle de bulunabilir: P noktasından geçen

$$v = v_{q-1} \quad \text{ve} \quad u = u_{p-1}$$

koordinat çizgileri arasındaki açıya α, ve

$$\overset{\frown}{PQ} = \Delta s_1, \quad \overset{\frown}{PS} = \Delta s_2$$

dersek, PQRS eğrisel dörtgeninin alanı, yüksek mertebeden sonsuz küçükler farkıyle

$$\Delta A = \Delta s_1\,\Delta s_2 \sin\alpha$$

dir. (17-13) ve (18-3) formülleri yardımıyle

$$\Delta s_1 = \sqrt{E}\,du, \quad \Delta s_2 = \sqrt{G}\,dv, \quad \operatorname{Sin}\alpha = \frac{H}{\sqrt{EG}}$$

yazılabileceğinden,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$dA = H\,du\,dv$$

olur.

(17-16) formülünü kullanacak olursak, alan elemanı

(20-4) $$dA = (\vec{n}, \vec{x}_u, \vec{x}_v)\,du\,dv$$

biçimine de sokulabilir.

Uyarı 20-2. Alan elemanı bir diferansiyel invariyanttır.

(20-2) formülündeki: $H(u, v)\,du\,dv$ alan elemanının, kullanılan (u, v) GAUSS eğrisel koordinatlarına bağlı olmayan bir geometrik anlamı vardır. Bunu görmek için, u, v GAUSS koordinatları yerine, (15-2) ile tanımlanan eğrisel koordinatlar alındığında, (20-2) formülünün biçimini değiştirmeyeceğini göstermemiz gerekir. Yeni eğrisel koordinatlar kullanıldığında, (B) bölgesinin, yeni koordinatlara göre tanımladığı $(\bar{B})$ bölgesine göre, (20-2) deki ikikat integrali hesaplamamız gerekir. O halde

(20-5) $$A = \iint_{(\bar{B})} \bar{H}(\bar{u}, \bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v}$$

ikikat integrali söz konusudur. Halbuki (17-19) formülü dolayısıyle

$$\bar{H}(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{H(u, v)}{|D|} = H(u, v)\left|\frac{D(u, v)}{D(\bar{u}, \bar{v})}\right|$$

olduğundan, (20-5) eşitliği, ikikat integrallerde değişkenlerin değiştirilmesi ile ilgili teorem nedeniyle

(20-6) $$A = \iint_{(\bar{B})} \bar{H}(\bar{u}, \bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v} = \iint_{(\bar{B})} H(u, v)\left|\frac{D(u, v)}{D(\bar{u}, \bar{v})}\right| d\bar{u}\,d\bar{v}$$
$$= \iint_{(B)} H(u, v)\,du\,dv$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) MONGE gösterilişinde alan elemanı

(17-21) formüllerine göre, bir yüzeyin MONGE gösterilişinde, yüzey birinci sınıftan ise,

$$H(x_1, x_2) = \sqrt{p^2(x_1, x_2) + q^2(x_1, x_2) + 1}$$

olduğundan, (20-3) alan elemanı

(20-7) $$dA = \sqrt{1 + p^2(x_1, x_2) + q^2(x_1, x_2)}\, dx_1\, dx_2$$

biçimindedir.

Buraya kadar söylediklerimizden şu teorem çıkar:

Teorem 20-1. (u, v) **gerçel, bağımsız ve skaler değişkenlerinin**

(B) $$a \leqslant u \leqslant b\,; \quad c \leqslant v \leqslant d$$

bölgesinde tanımladıkları

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu, bu bölgede en az 1 - nci sınıftansa, verilen vektörel fonksiyonun belirttiği yüzeyin (B) bölgesi ile sınırlanan (S) parçasının A alanı

$$A = \iint_{(B)} H(u, v)\, du\, dv$$

İkikat integrali ile hesaplanır.

Eğer herhangi bir Ox_j $(j = 1, 2, 3)$ **karteziyen koordinat sistemine göre,**

$$\vec{x}(u, v) = u\vec{k}_1 + v\vec{k}_2 + g(u, v)\vec{k}_3$$

ise, yani yüzey MONGE tipinde verilmişse, (20-7) dolayısiyle

(20-8) $$A = \iint \sqrt{1 + p^2(u, v) + q^2(u, v)}\, du\, dv$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$dA = H(u, v)\, du\, dv, \quad dA = \sqrt{1 + p^2(u, v) + q^2(u, v)}\, du\, dv$$

ler, gösteriliş biçimine göre, alan elemanıdır.

Eğrisel koordinatlar değiştirildiğinde, alan elemanı biçimini değiştirmez.

Örnek 20-1. Kürenin alanı

Örnek 19-3 de tanımlanan küre için, (19-24) formüllerinde

$$H = R^2 \operatorname{Sin} v$$

olduğundan, (20-3) gereğince

$$dA = R^2 \operatorname{Sin} v\, du\, dv$$

dir. O halde, R yarıçaplı bir kürenin toplam A alanının değeri

(20-9) $$A = 8R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin} v\, dv \int_0^{\pi/2} du = 4\pi R^2 \int_0^{\pi/2} \operatorname{Sin} v\, dv = 4\pi R^2$$

ye eşittir.

Örnek 20-2. Dönel koni

Örnek 19-2 de tanımlanan dönel konide, (19-22) formülleri dolayısiyle

$$H = v \operatorname{Sin} \alpha$$

olduğundan, (20-3) gereğince

$$dA = v \operatorname{Sin} \alpha\, du\, dv$$

dir.

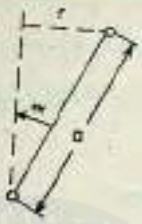
O halde, tepe yarı-açısı α ve yan ana doğru uzunluğu a olan bir dönel koninin alanı

$$A = \operatorname{Sin} \alpha \int_0^a v \int_0^{2\pi} du\, dv = 2\pi \operatorname{Sin} \alpha \int_0^a v\, dv$$

(20-10) $$= \pi a^2 \operatorname{Sin} \alpha = \pi a r \operatorname{Sin} \alpha$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 9.

21. Normal birim vektörü ile ilgili bâzı vektörel bağıntılar

En az 1-nci sınıftan bir yüzey verildiğinde, $\vec{n}$ normal birim vektörünün (17-16) ile belirli olan değerinden, yâni

(17-16) $$\vec{n} = \frac{1}{H}(\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v)$$

formülünden ve (17-17) den, aşağıdaki bağıntılar, kolaylıkla çıkarılır:

(21-1)
$$\begin{cases} \vec{n} \wedge \vec{x}_u = \dfrac{E\vec{x}_v - F\vec{x}_u}{H}\,; \\ \vec{n} \wedge \vec{x}_v = \dfrac{F\vec{x}_v - G\vec{x}_u}{H}\,; \\ \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{x}_u) = -\vec{x}_u\,, \\ \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{x}_v) = -\vec{x}_v\,, \\ \vec{x}_u \wedge (\vec{n} \wedge \vec{x}_u) = E\vec{n}\,, \\ \vec{x}_v \wedge (\vec{n} \wedge \vec{x}_u) = F\vec{n}\,, \\ \vec{x}_u \wedge (\vec{n} \wedge \vec{x}_v) = F\vec{n}\,, \\ \vec{x}_v \wedge (\vec{n} \wedge \vec{x}_v) = G\vec{n}\,. \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

22. Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen herhangi bir eğrisinin, koordinat çizgileriyle oluşturduğu açılarla ilgili bir formul

Lema 17-1.

Üzerinde pozitif bir dönme yönü seçilmiş bir $A_1 A_2 A_3$ üçgeninde kenar uzunlukları a_p ve tepe açıları da α_p, $(p = 1, 2, 3)$ olsun. Her kenar üzerinde, aynı dönme yönünde yönlendirilmiş üç birim vektörüne $\vec{k}_p^*$ dersek,

$$\sum_{p=1}^{3} \vec{k}_p^* \operatorname{Sin} \alpha_p = \vec{0} \tag{22-1}$$

dır.



Şekil 10.

Gerçekten, herhangi bir $A_1 A_2 A_3$ üçgeninde

$$\overrightarrow{A_2 A_3} + \overrightarrow{A_3 A_1} + \overrightarrow{A_1 A_2} = \vec{0}$$

yazılabileceğinden, buradan

$$\sum_{p=1}^{3} a_p \vec{k}_p^* = \vec{0}$$

veya kenar uzunluklariyle tepe açılarının sinüsleri arasındaki

$$a_1 / \operatorname{Sin} \alpha_1 = a_2 / \operatorname{Sin} \alpha_2 = a_3 / \operatorname{Sin} \alpha_3$$

bağıntılardan yararlanarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\sum_{p=1}^{3} \vec{k}_p^* \operatorname{Sin} \alpha_p = \vec{0}$$

sonucu çıkarılır.

En az 1-nci sınıftan bir yüzeyin bir $P = A_2$ düzgün noktasından geçen $v = sabit$, $u = sabit$ koordinat çizgilerinin bu noktadaki teğet birim vektörleri

(22-2) $$\vec{k}_1 = \vec{x}_u / \sqrt{E} \,, \quad \vec{k}_2 = \vec{x}_v / \sqrt{G}$$

dir.



Şekil 11.

Yüzeyin A_2 den geçen herhangi bir eğrisinin A_2 deki teğet birim vektörü de $\vec{k}_3$ olsun. $\vec{k}_3$ nin taşıyıcısına paralel ve A_2 den geçmeyen bir doğrunun, $\vec{k}_2$ ve $\vec{k}_3$ ün taşıyıcılarını kestiği noktalar, sıra ile, A_3 ve A_1 ise, $A_1 A_2 A_3$ üçgeni için söylediklerimizden

$$\vec{k}_1 = \vec{k}_1^*, \quad \vec{k}_2 = \vec{k}_2^*, \quad \vec{k}_3 = -\vec{k}_3^* ; \quad \widehat{\vec{k}_1, \vec{k}_3} = \varphi_3 = \pi - \alpha_3 ,$$

$$\widehat{\vec{k}_2, \vec{k}_3} = \varphi_1 = -\alpha_1 , \quad \widehat{\vec{k}_3, \vec{k}_1} = \varphi_2 = -\alpha_2 , \quad (|\varphi_p| < \pi \text{ olmak üzere})$$

bulunacağından, (22-1) formülü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(22-3) $$\sum_{i=1}^{3} \vec{k}_i \operatorname{Sin} \varphi_i = \vec{0}, \quad \left(\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = 0 \right)$$

verir.

Buradan kolaylıkla

(22-4) $$\vec{k}_3 = \frac{\vec{k}_1 \operatorname{Sin} \varphi_1 + \vec{k}_2 \operatorname{Sin} \varphi_2}{\operatorname{Sin} (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

sonucu elde edilir.

Uyarı 22-1. Kısa yol.

(22-4) formülünü kısaca şöyle bulabiliriz:

$\vec{k}_i \cdot \vec{k} = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere bir $\vec{k}$ birim vektörünü aldığımızda sıra ile yazılan

$$\vec{k}_2 = \vec{k}_1 \operatorname{Cos} \varphi_3 + \vec{k} \operatorname{Sin} \varphi_3$$

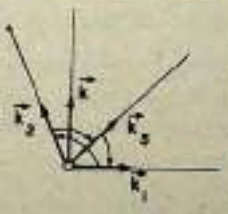
$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 \operatorname{Cos} \varphi_2 + \vec{k} \operatorname{Sin} \varphi_2$$

vektörel eşitlikleri arasında $\vec{k}$ yı yokedersek

$$\vec{k}_2 \operatorname{Sin} \varphi_2 + \vec{k}_3 \operatorname{Sin} \varphi_3 = \vec{k}_1 \operatorname{Sin} (\varphi_2 + \varphi_3)$$

$$= -\vec{k}_1 \operatorname{Sin} \varphi_1,$$

veya



Şekil 12.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$-\vec{k}_3 \operatorname{Sin} \varphi_3 = \vec{k}_1 \operatorname{Sin} \varphi_1 + \vec{k}_2 \operatorname{Sin} \varphi_2 = \vec{k}_3 \operatorname{Sin} (\varphi_1 + \varphi_2)$$

elde edilir.

23. Yüzeylerin İç Geometrisi

Buraya kadar incelediğimiz konuların yardımıyle elde ettiğimiz özeliklerin tümü, yüzeyin ya bir noktasını ya da belirli bir bölgesini ilgilendiren özelliklerdir. Gerçekten :

1) Yüzeyin düzgün bir noktasındaki teğet düzlem;

2) Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen iki eğrisinin bu noktada oluşturdukları açı;

3) Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen bir eğrisinin belirli bir parçasının uzunluğu;

4) Yüzeyin belirli bir bölgesinin alanı,

gibi örneklerden ilk ikisi, seçilen nokta ile ilgili **yerel** özelliklerdir; buna karşılık, son ikisi yüzeyin bir bölgesini ilgilendiren **tümel** özelliklerdir. Örnekleri oluşturan özelliklerin, yüzeyin biçimi veya uzaydaki durumu ile bir ilişkileri yoktur.

Bu tür özellikler, sadece birinci kuvadratik formun E, F, G katsayıları ile ifade edildiklerinden, ds^2 leri aynı olan iki yüzey —izometrik yüzeyler— için, homolog nokta veya bölgelerde, aynıdırlar.

Yüzeyin **İç Geometrisi** veya **Kendi Üzerindeki Geometri,** birinci kuvadratik formun katsayıları ile ifade olunabilen özeliklerin oluşturdukları bir **Geometri**dir. İlerde ele alacağımız izometrik dönüştürümler, bu tür eleman ve özelikleri değiştirmediklerinden yani ds^2 yi koruduklarından, yüzeyin **İç Geometrisi**'nde de bir değişiklik meydana getirmezler. İzometri ile değişmeyen eleman ve özeliklere **Geodezik eleman** veya **özelik,** denilir.

Bu söylediklerimiz dışındaki bâzı eleman ya da özeliklerin, bir anlam taşıyabilmeleri için ise, ya yüzeyin tümüyle bilinmesi ya da uzaydaki durumunun kavranabilmesi gereklidir. Bu çeşit özelikler de, yüzeyin **Dış Geometrisini** oluştururlar. Örneğin;

1) Bir yüzeyin bir noktasındaki teğet düzleme göre durumu

2) Yüzeyin farklı iki noktasındaki normallerin oluşturdukları açı, gibi.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İşte, yüzeyin **Dış Geometrisi**'ne konu olan özelikleri de, bundan sonra gelen bölümde inceleyeceğiz.

Yüzeylerin İç Geometrisi ile ilgili başka özelliklere, ilerde yeniden değineceğiz.

8. İKİNCİ TEMEL KUVADRATİK FORM YÜZEYLERİN DIŞ GEOMETRİSİ

24. İkinci tmel kuvadratik form. Düzgün nokta yakınlarının, düzgün noktadaki teğet düzleme göre durumu.

a) İkinci temel kuvadratik formun tanımı

Bir P(u,v) düzgün noktası yakınlarında en az 2 - nci sınıftan ve iki yanlı bir yüzeyin P ye yakın herhangi bir noktası

$$Q(u + \Delta u, v + \Delta v)$$

olsun. P deki normal birim vektörü $\vec{n}(u, v)$ olduğuna göre, Q nun P deki teğet düzlemden işaretli d uzaklığı

$$d = \vec{n} \cdot \vec{PQ}$$

dur ve (10-2) TAYLOR formülü nedeniyle

$$\vec{PQ} = \vec{\Delta x} = \Delta u \vec{x}_u + \Delta v \vec{x}_v + \frac{1}{2}(\Delta u^2 \vec{x}_{u^2} + 2\Delta u \Delta v \vec{x}_{uv} + \Delta v^2 \vec{x}_{v^2} + \vec{\varepsilon}_2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}$$

yazılabileceğinden,

$$(24\text{-}1) \qquad d = \vec{n} \cdot \vec{\Delta x} = \frac{1}{2}(\Delta u^2 \vec{n} \cdot \vec{x}_{u^2} + 2\Delta u \Delta v \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv} + \Delta v^2 \vec{n} \cdot \vec{x}_{v^2} + \vec{n} \cdot \vec{\varepsilon}_2)$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \vec{n} \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$ olduğundan, parantez içindeki son terimin, d nin işaretini belirlemede bir rolü yoktur. P ye gereği kadar yakın Q noktaları için, başka deyimle, daha yüksek mertebeden diferansiyeller farkiyle

$$d = \frac{1}{2}\left(\vec{n} \cdot \vec{x}_{u^2}\, du^2 + 2\,\vec{n} \cdot \vec{x}_{uv}\, du\, dv + \vec{n} \cdot \vec{x}_{v^2}\, dv^2\right)$$

dır.

Eğer

$$L = \vec{n} \cdot \vec{x}_{u^2}, \quad M = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv}, \quad N = \vec{n} \cdot \vec{x}_{v^2} \tag{24-2}$$

dersek, **tanım gereğince**

$$II = \vec{n} \cdot d^2\vec{x} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 \tag{24-3}$$

diferansiyel formu, yüzeyin P düzgün noktasındaki **ikinci temel kuvadratik formudur.**

Tıpkı I inci temel kuvadratik formda olduğu gibi,

$$L = L(u, v), \quad M = M(u, v), \quad N = N(u, v)$$

katsayıları da **nokta fonksiyonlarıdır.**

Ayrıca söylemedikçe, bundan sonraki kısımlarda, **bu katsayıların üçünün birden sıfır olmadıklarını** varsayacağız.

İkinci kuvadratik formun katsayılarını veren formüller.
(17-16) ve (24-2) formüllerinden

$$L = \frac{(\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{u^2})}{H}; \quad M = \frac{(\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{uv})}{H}; \quad N = \frac{(\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{v^2})}{H} \tag{24.4}$$

sonuçları çıkarılır.

Başlangıçta, yüzeyi tanımlayan vektörel fonksiyon en az 2 - nci sınıftan varsayıldığından, P noktasında bu formüller **geçerlidir.**

L,M,N katsayılarının P düzgün noktasında aynı zamanda sıfıra eşit ol-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

mamaları da, **geometrik bakımdan:** $\vec{x}_{u^2}, \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{v^2}$ **vektörlerinin P düzgün noktasındaki teğet düzleme paralel olmamalarını** gerektirir.

Öte yandan

$$\vec{n} \cdot d\vec{x} = 0$$

özdeşliğinin diferansiyelini alacak olursak

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{x} = II = -d\vec{n} \cdot d\vec{x} = -(\vec{n}_u\, du + \vec{n}_v\, du)(\vec{x}_u\, du + \vec{x}_v\, dv)$$

$$= -(\vec{n}_u \cdot \vec{x}_u)\, du^2 - (\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v + \vec{n}_v \cdot \vec{x}_u)\, du\, dv - (\vec{n}_v \cdot \vec{x}_v)\, dv^2$$

buluruz. Halbuki

(24.5) $$\vec{n} \cdot \vec{x}_u = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{x}_v = 0$$

özdeşliklerinin, sıra ile v ve u ya göre kısmî türevleri,(24-2) dolayısiyle

(24-6) $$-\vec{n}_v \cdot \vec{x}_u = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv} = M \; ; \quad -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv} = M$$

vereceğinden; L, M, N katsayıları için

(24-7) $$L = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_u \; , \quad M = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_u \; , \; N = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_v$$

formülleri elde edilir. Bunların da **geçerli** sayılabilmeleri için, yüzeyi tanımlayan vektörel fonksiyonun P düzgün noktasında en az 2 - nci sınıftan olması gerekir.

Uyarı 24-1.

(24-7) nin birinci ve sonuncu eşitlikleri (24-5) özdeşliklerinden de çıkarılabilir.

MONGE gösterilişinde ikinci formun katsayıları

MONGE gösterilişinde, (17-17) formülleri yardımiyle

(24-8) $$r = p_u \; , \quad s = p_v = q_u \; , \quad t = q_v$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dersek, (17-17) ve (24-2) formülleri, **herhangi bir karteziyen koordinat sisteminde**

$$(24\text{-}9) \qquad L = \frac{k}{H} r, \quad M = \frac{k}{H} s, \quad N = \frac{k}{H} t, \quad k = (\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$$

verir.

Dik koordinatlar halinde, $k = 1$ olduğundan

$$(24\text{-}10) \qquad L = \frac{r}{H}, \quad M = \frac{s}{H}, \quad N = \frac{t}{H}, \quad H = \sqrt{1+p^2+q^2}$$

olur.

Uyarı 24-2.

Eğrisel koordinatlar değiştirildiğinde, skaler ya da vektörel bir ifadenin değeri, bâzen aynı kalır, bâzen de tamamiyle farklı olarak bulunur. Bu dediğimizle ilgili bir takım örnekleri bundan önce görmüştük:

Alan elemanı : $dA = H(u, v)\, du\, dv = \overline{H}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}\, d\bar{v}$

Birinci kuvadratik form : $E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2 =$

$$\overline{E}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}^2 + 2\overline{F}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{u}\, d\bar{v} + \overline{G}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2$$

Normal birim vektörü : $\vec{n}(u, v) = \vec{\bar{n}}(\bar{u}, \bar{v})$

gibi. Buna karşılık

$$E(u, v) \neq \overline{E}(\bar{u}, \bar{v})$$

$$\vec{x}_u(u, v) \neq \vec{\bar{x}}_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{v})$$

dir.

Genellikle, eğrisel koordinat değişiminden sonra aynı kalan skaler veya vektörel ifadelerin bir geometrik anlamları vardır. Bu bakımdan bunlara **invaryant** denilir. İlk ikisi birer **diferansiyel invaryanttır.**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tıpkı birinci kuvadratik form gibi, ikincisi de

$$II = \vec{n} \cdot d^2\vec{x} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

bir **diferansiyel invariyanttır.** Bunun böyle olduğu, geometrik tanım dolayısıyla, açıktır. Ama, alıştırma niteliğinde olmak üzere, aşağıki teoremi ispat edebiliriz.

Teorem 24-1. En az 2-nci sınıftan bir yüzeyin ikinci temel kuvadratik formu bir diferansiyel invariyanttır, yâni (u, v) eğrisel koordinatları yerine, en az 1-nci sınıftan

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v)$$

fonksiyonlarıyla yeni bir $(\bar{u}, \bar{v})$ eğrisel koordinat sistemi alındığında

(24-11) $$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + G\,dv^2 = \bar{L}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{M}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{N}\,d\bar{v}^2$$

dir.

Gerçekten, önce

$$\vec{n} = \bar{\vec{n}}$$

dir.

Öte yandan, (24-2) formülleri sıra ile

$$L = \vec{n} \cdot \vec{x}_{u^2} = \vec{n} \cdot (\vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_u + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_u)_u = \vec{n} \cdot (\vec{x}_{\bar{u}^2}\,\bar{u}_u^2 + 2\vec{x}_{\bar{u}\bar{v}}\,\bar{u}_u\bar{v}_u + \vec{x}_{\bar{v}^2}\,\bar{v}_u^2$$

$$+ \vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_{u^2} + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_{u^2})$$

$$= \bar{L}\,\bar{u}_u^2 + 2\bar{M}\,\bar{u}_u\,\bar{v}_u + \bar{N}\,\bar{v}_u^2$$

$$M = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv} = \vec{n} \cdot (\vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_u + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_u)_v = \vec{n} \cdot (\vec{x}_{\bar{u}^2}\,\bar{u}_v\bar{u}_u + \vec{x}_{\bar{u}\bar{v}}\,(\bar{u}_u\bar{v}_v + \bar{u}_v\bar{v}_u)$$

$$+ \vec{x}_{\bar{v}^2}\,\bar{v}_u\bar{v}_v + \vec{x}_{\bar{u}}\,\bar{u}_{uv} + \vec{x}_{\bar{v}}\,\bar{v}_{uv})$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \bar{L}\,\bar{u}_u\,\bar{u}_v + \bar{M}(\bar{u}_u\,\bar{v}_v + \bar{u}_v\,\bar{v}_u) + \bar{N}\,\bar{v}_u\,\bar{v}_v$$

$$N = \vec{n}\cdot\vec{x}_{vv} = \vec{n}\cdot(\vec{x}_u\,\bar{u}_v + \vec{x}_v\,\bar{v}_v)_v = \vec{n}\cdot(\vec{x}_{uu}\,\bar{u}_v^2 + 2\,\vec{x}_{uv}\,\bar{u}_v\,\bar{v}_v + \vec{x}_{vv}\,\bar{v}_v^2 + \vec{x}_u\,\bar{u}_{vv} + \vec{x}_v\,\bar{v}_{vv})$$

$$= \bar{L}\,\bar{u}_v^2 + 2\bar{M}\,\bar{u}_v\,\bar{v}_v + \bar{N}\,\bar{v}_v^2$$

verir.

L yi du^2, M yi $2du\,dv$ ve N yi de dv^2 ile çarpıp toplarsak

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \bar{L}(\bar{u}_u^2\,du^2 + 2\bar{u}_u\bar{u}_v\,du\,dv + \bar{u}_v^2\,dv^2) +$$

$$+ 2\bar{M}(\bar{u}_u\bar{v}_u\,du^2 + (\bar{u}_u\bar{v}_v + \bar{u}_v\bar{v}_u)\,du\,dv + \bar{u}_v\bar{v}_v\,dv^2)$$

$$+ \bar{N}(\bar{v}_u^2\,du^2 + 2\bar{v}_u\bar{v}_v\,du\,dv + \bar{v}_v^2\,dv^2)$$

bulunur. Halbuki

$$d\bar{u} = \bar{u}_u\,du + \bar{u}_v\,dv, \quad d\bar{v} = \bar{v}_u\,du + \bar{v}_v\,dv$$

bağıntıları; $\bar{L}$, $2\bar{M}$ ve $\bar{N}$ nin katsayılarının sıra ile $d\bar{u}^2$, $d\bar{u}\,d\bar{v}$, $d\bar{v}^2$ olduğunu gösterdiğinden

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = \bar{L}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{M}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{N}\,d\bar{v}^2$$

dir.

Uyarı 24-3.

17 nci paragraftaki yöntem, eğrisel koordinatların değişiminde, 2 - nci kuvadratik formun katsayılarına uygulandığında, aynı sonuçlara varılır:

$$(24\text{-}12)\quad \begin{cases} \bar{L} = \dfrac{L g_v^2 - 2M g_u g_v + N g_u^2}{D^2} = -\dfrac{1}{D^2}\begin{vmatrix} L & M & g_u \\ M & N & g_v \\ g_u & g_v & 0 \end{vmatrix} \\ \bar{M} = \dfrac{L f_v g_v - M(f_u g_v + f_v g_u) + N f_u g_u}{D^2} = -\dfrac{1}{D^2}\begin{vmatrix} L & M & f_u \\ M & N & f_v \\ g_u & g_v & 0 \end{vmatrix} \\ \bar{N} = \dfrac{L f_v^2 - 2M f_u f_v + N f_u^2}{D^2} = -\dfrac{1}{D^2}\begin{vmatrix} L & M & f_u \\ M & N & f_v \\ f_u & f_v & 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\bar{H}D = H$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Teğet düzleme göre durum. Yüzey noktalarının sınıflandırılması

Gördük ki, yüzey üzerinde bulunan P düzgün noktasına yeteri kadar yakın Q noktasının P deki teğet düzleme göre durumunu incelemek için d nin veya

$$II = \vec{n} \cdot d^2\vec{x} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

2-nci kuvadratik formunun, çeşitli (du, dv) doğrultularına göre, işaretine bakmak gerekecektir. Bunun için de, herşeyden önce, **2 nci formun katsayılarının üçünün birden P düzgün noktasında sıfır olmadıklarını varsayacağız.** Buna göre, başlıca 3 hâl ayırdedilebilir:

1. Eliptik nokta

P noktasında II nci kuvadratik formun diskriminantı

$$-M^2 + LN > 0$$

ise, II formu hiçbir (du, dv) doğrultusu için sıfır olamaz, dolayısıyla d nin işareti hep aynı kalır. O halde **yüzey P düzgün noktası yakınlarında teğet düzlemin aynı yanındadır.** Yüzeyin bu çeşit noktalarına **eliptik nokta** denilir. P noktası, yüzeyle bu noktadaki teğet düzlemin, P yakınlarındaki tek (gerçel) ortak noktasıdır. Bir kürenin ya da bir elipsoidin tüm noktaları bu tür noktalardır. Şurasını da kaydetmekte yarar vardır: Bir gerçel kürenin bir P noktasındaki teğet düzlemle ortak noktaları, P gerçel noktasından başka, teğet düzlemin P den geçen izotrop doğrularıdır. Aynı şekilde, bir P noktasındaki teğet düzlemle ortak noktaları, P gerçel noktasından başka, teğet düzlemin P den geçen iki sanal doğrusundan oluşur.

2. Hiperbolik nokta

P noktasında II nci kuvadratik formun diskriminantı

$$-M^2 + LN < 0$$

ise, II formu iki ayrı (du, dv) doğrultusu için sıfır olur, dolayısıyla P düzgün noktasındaki teğet düzlem yüzeyi P noktası yakınlarında iki ayrı eğri boyunca keser ve bunların P deki teğetleri bu iki (du, dv) doğrultusudur. Bu iki doğrultuya yüzeyin P noktasındaki **asimptotik doğrultuları** denilir. Sözü edilen iki eğri, P nin yeteri kadar yakınlarında, yüzeyi iki bölgeye ayırırlar. Bu bölgeler teğet düzlemin ayrı yanlarında bulunur. Eliptik nok-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

tada, asimptotik doğrultular sanaldır. Bir hiperbolik paraboloidin, ya da bir yaygılı bir hiperboloidin tüm noktaları hiperboliktir.

3. Parabolik nokta

P noktasında II nci temel kuvadratik formun diskriminantı

$$M^2 - LN = 0$$

ise, 2 hâli ayırdedeceğiz :

a) II nci kuvadratik formun L, M, N katsayıları P de aynı zamanda sıfır değildir.

Buna göre, II nci form, artı ya da eksi işaretli olmak üzere, bir tam karedir ve iki kez sayılması gereken bir (du, dv) doğrultusu için P de sıfıra eşittir. Yüzeyin P den geçen ve (du, dv) doğrultulu doğruya P de teğet olan herhangi bir eğrisinin P deki oskülatör düzlemi, yüzeyin bu noktadaki teğet düzlemidir. Yüzeyin P deki teğet düzlemiyle arakesitinin P deki teğetinin doğrultusu bu (du, dv) doğrultusudur. Yüzeyin böyle bir P noktasına **parabolik nokta** denilir. Yüzeyin bir parabolik noktaya yakın noktaları, bu noktadaki teğet düzlemin aynı yanında bulunabileceği gibi, her iki yanında da olabilir. Bu takdirde, yüzeyin böyle bir noktadaki teğet düzlemle arakesitinin P noktası bir dönüm noktasıdır. Bir dönel koninin, ya da herhangi bir konin, tepe dışındaki tüm noktaları paraboliktir. Bazı yüzeylerde, parabolik noktalardan oluşan ve **parabolik** adı verilen eğriler vardır. Silindir ve konilerin anadoğruları, bir torun en üst ve en alt enlem çemberleri böyle eğrilerdir.

b) II nci kuvadratik formun L,M,N katsayılarının üçü birden P de sıfıra eşittir.

II nci kuvadratik formun L,M,N katsayıları P düzgün noktasında sıfıra eşitse,

$$M^2 - LN = 0$$

olacağından, P noktası gene **paraboliktir**. Bu noktadan geçen hangi (du, dv) doğrultusu alınırsa alınsın, II formu özdeş olarak sıfıra eşittir. Böyle bir noktaya **düzlük noktası** diyeceğiz.

Bir düzlük noktası üç

$$L(u, v) = 0, \quad M(u, v) = 0 \quad N(u, v) = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklemiyle tanımlandığından, genellikle, bu üç denklemin ortak bir (u_0, v_0) çözümü yoktur, yani bu üç denklem, genellikle, bağdaşmayan üç denklemdir. O halde, **genellikle, gelişigüzel alınan bir yüzey üzerinde düzlük noktası yoktur.**

P(u, v) bir düzlük noktası ise, (24-1) ve dolayısiyle (24-3) de TAYLOR formülünün 2 nci mertebeden terimlere kadar alınması, d nin işaretini incelemede yeterli değildir. Eğer verilen yüzeyin, ya da onu tanımlayan vektörel fonksiyonun P ve P ye yakın $Q(\bar{u}, \bar{v})$, $(\bar{u} = u + \Delta u, \bar{v} = v + \Delta v)$ noktaları için sınıfı ≥ 3 ise, Q noktaları için

$$\overrightarrow{PQ} = \Delta \vec{x} = \Delta u \vec{x}_u + \Delta v \vec{x}_v + \frac{1}{2}(\Delta u^2 \vec{x}_{u^2} + 2\Delta u \Delta v \vec{x}_{uv} + \Delta v^2 \vec{x}_{v^2})$$

$$+ \frac{1}{6}(\Delta u^3 \vec{x}_{u^3} + 3\Delta u^2 \Delta v \vec{x}_{u^2v} + 3\Delta u \Delta v^2 \vec{x}_{uv^2} + \Delta v^3 \vec{x}_{v^3}, \bar{\varepsilon}_3), \lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \vec{\varepsilon}_3 = \vec{0}$$

yazabiliriz.

Genellikle düzlük noktası olmayan Q de, (24-2) ve (24-7) formülleri nedeniyle

$$\bar{l} = \bar{n} \vec{x}_{u^2} = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_u, \quad \bar{M} = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv} = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_u,$$

$$\bar{N} = \vec{n} \vec{x}_{v^2} = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_v$$

olduğundan, bunlar P düzlük noktasında ele alındıklarında, farklı doğrultulu $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ vektörlerinin ikisine de, $\vec{n}_u$ ve $\vec{n}_v$ vektörleri aynı zamanda dik olamayacaklarından, P düzlük noktasında

$$(\alpha) \qquad \vec{n}_u = \vec{0}, \quad \vec{n}_v = \vec{0}$$

dür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Q noktası için hesaplanan

$$\overline{L}_u = \vec{\bar{n}} \cdot \vec{x}_{u^2} - \vec{n}_u \cdot \vec{x}_u \,, \quad \overline{L}_v = \vec{\bar{n}} \cdot \vec{x}_{uv} + \vec{n}_v \cdot \vec{x}_u \,,$$

$$\overline{N}_u = \vec{\bar{n}} \cdot \vec{x}_{uv^2} + \vec{n}_u \cdot \vec{x}_v \,, \quad \overline{N}_v = \vec{\bar{n}} \cdot \vec{x}_{v^3} + \vec{n}_v \cdot \vec{x}_{v^2} \,,$$

$$\overline{M}_u = \vec{\bar{n}} \cdot \vec{x}_{u^2 v} + \vec{n}_u \cdot \vec{x}_{uv} \,, \quad \overline{M}_v = \vec{\bar{n}} \cdot \vec{x}_{uv^2} + \vec{n}_v \cdot \vec{x}_{uv}$$

bağıntıları da, P ye uygulandıklarında, (α) nedeniyle

$$L_u = \vec{n} \cdot \vec{x}_{u^3} \,, \quad L_v = \vec{n} \cdot \vec{x}_{u^2 v} = M_u \,,$$

$$N_u = \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv^2} = M_v \,, \quad N_v = \vec{n} \cdot \vec{x}_{v^3}$$

verirler. O halde, (L_u, L_v, N_u, N_v) sayılarının dördü birden sıfır değilse, 24. ün başına göre

$$d \approx \frac{1}{6} (L_u\, du^3 + 3 L_v\, du^2 dv + 3 N_u\, du\, dv^2 + N_v\, dv^3)$$

tür ve d nin işareti için, parantez içindeki ifadenin işaretine bakmak gerekir.

P deki teğet düzlemle yüzeyin C arakesitinin P noktasındaki teğetlerinin (du, dv) doğrultuları

(24-13) $$L_u\, du^3 + 3 L_v\, du^2 dv + 3 N_u\, du\, dv^2 + N_v\, dv^3 = 0$$

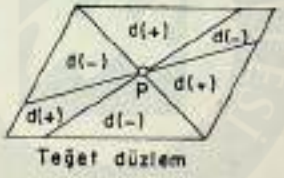
denkleminin kökleridir. Bu denklemin katsayıları gerçel oldukça, bir (du, dv) kökü de daima gerçeldir, şu haller söz konusu olabilir:

a₁) 3 gerçel ve farklı kök

P noktasındaki 3 gerçel teğetle oluşan 6 bölgede yüzey, d(+) ile gösterilenlerde teğet düzlemin bir yanında, d(−) ile gösterilenlerde de öteki yanındadır. C nin genelikle P noktasından 3 kolu geçer. Eğer alınan yüzey

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

3 üncü dereceden ise, C eğrisi, söz konusu 3 teğetten ibarettir. P noktasından geçen herhangi bir teğetin yarısı d(+) işaretli bölgede, öteki yarısı da d(−) işaretli bölgede bulunacağına göre, bu teğetle tanımlanan normal kesitin bir parçası teğet düzlemin bir yanında, öteki de diğer yanında bulunacaktır. O halde: **Bir düzlük noktasından geçen normal kesitler için bu nokta bir büküm noktasıdır elverir ki yüzey alınan noktada ve yakınlarında 3 ncü sınıftan olsun. Bu takdirde, normal kesitlerin P deki eğrilikleri de sıfırdır.**



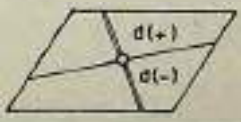
Şekil 13.

Bu çeşit bir nokta, yukarıdaki şekilde görülmektedir. Bu tür düzlük noktalarına **maymun eğeri** de denilir.

Örnek, bu bölümün sonunda verilmiştir.

a_2) 1 gerçel, 2 çakışık gerçel kök.

Bu halde, çakışık olmayan teğet, teğet düzlemi, d(+) ve d(−) ile gösterilen iki bölgeye ayırır. Buna göre yüzey, teğet düzlemin, çakışık olmayan teğetle ayrılan farklı yanlarında bulunur. Genellikle normal kesitlerin P noktası, bir büküm noktasıdır.



Şekil 14.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a_3) 3 gerçel çakışık kök.

Bundan öncekinin aynıdır.

a_4) 1 gerçel, iki farklı sanal kök.

Bu da öyledir.



Şekil 15

Genel olarak, şu teorem söz konusudur:

Teorem 24-2. Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $q \geqslant 3$ olan bir yüzeyin yer vektörünün P noktasında $q-1$ inci mertebeye kadar tüm kısmi türev vektörleriyle $\vec{n}$ normal birim vektörünün skaler çarpımları sıfırsa ve q nüncü mertebeden kısmi türevlerin hepsi için bu böyle değilse, yüzeyin P ye yakın bir Q noktasının, P deki teğet düzlemden d uzaklığı, yaklaşık olarak

$$d \approx \frac{1}{q!}(\vec{n} \cdot \vec{x}_{u^q}\, du^q + q\, \vec{n} \cdot \vec{x}_{u^{q-1}v}\, du^{q-1}\, dv + \ldots$$

$$+ q\, \vec{n} \cdot \vec{x}_{uv^{q-1}}\, du\, dv^{q-1} + \vec{n} \cdot \vec{x}_{v^q}\, dv^q)$$

ifadesi ile belirlidir.

P deki teğet düzlemle yüzeyin arakesitinin P noktasındaki teğetlerinin (du, dv) doğrultuları

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$A_r = \vec{n} \cdot \vec{x}_{u^r v^s}$, $r + s = q$, $r = q, q-1, \ldots, 1, 0$, $s = 0, 1, \ldots, q-1, q$

olmak üzere,

$$A_q\, du^q + A_{q-1}\, du^{q-1}\, dv + \ldots + A_1\, du\, dv^{q-1} + A_0\, dv^q = 0$$

denkleminin (du, dv) kökleri ile belirlidir. q sayısı tekse, söz konusu doğrultulardan birisi daima gerçeldir. Bu denklemin kökleri gerçel, sanal ya da çakışık olabilir.

$q = 2$ hâlinde: 2 gerçel doğrultu için hiperbolik nokta, iki sanal doğrultu için eliptik nokta, iki çakışık doğrultu için de parabolik nokta söz konusudur. $q > 2$ hâlindeki noktalara düzlük noktası diyeceğiz. $q \geq 3$ için, yüzeyin P yakınlarındaki durumunun nasıl inceleneceği hakkında bir fikir vermeğe çalıştık. Nasıl hareket edilmesi gerektiğini, örneklerde göreceğiz.

Uyarı 24-4.

İleride göreceğimiz gibi, eğrisel koordinatlar değiştirildiğinde, noktanın türü aynı kalacağından, § 24 de bulduğumuz sonuçlar, eğrisel koordinatların seçimine bağlı değildirler.

Örnek 24-1.

Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = u \operatorname{Cos} v, \quad x_2 = u \operatorname{Sin} v, \quad x_3 = \log |uv|$$

denklemleriyle tanımlanan yüzeyin tüm noktalarının hiperbolik olduğunu gösteriniz.

(24-4) ve (17-7) formülleri yardımıyle

$$HL = -\frac{1}{u}, \quad HM = -\frac{1}{v}, \quad HN = u\left(1 - \frac{1}{v^2}\right), \quad H > 0$$

bulunacağından

$$H^2(M^2 - LN) = 1 > 0$$

eşitsizliği, § 24.2 nedeniyle, yüzeyin tüm noktalarının hiperbolik olduğunu gösterir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Örnek 24-2.

Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = v \cos u, \quad x_2 = v \sin u, \quad x_3 = v^2(v-1)$$

denklemleriyle tanımlanan dönel yüzeyin noktalarını inceleyiniz.

(17-7) ve (24-4) formüllerini kullandığımızda

$$HL = -v^3(3v-2), \quad M = 0, \quad HN = -2v(3v-1), \quad O > 0$$

sonuçlarını elde ederiz. Buradan

$$H^2(M^2-LN) = -2v^4(3v-2)(3v-1)$$

$$v = \frac{1}{3}; \quad v = \frac{2}{3}$$

değerleri için, II formunun diskriminantı sıfır olacağından, bu değerlerle tanımlanan koordinat çizgileri, yâni

$$x_3 = -\frac{2}{27} \quad \text{ve} \quad x_3 = -\frac{4}{27}$$

enlem çemberleri **parabolik** noktalardan oluşur. Yüzeyin, bu iki enlem çemberiyle sınırlanan bölgesinin tüm noktaları **eliptik**, bunun dışındakiler, O başlangıcı bir yana, **hiperboliktir.** Yüzey üzerinde bulunan O(u, o) noktasına gelince, bu noktada $\vec{x}_v(-v \sin u, v \cos u, o)$ vektörü $\vec{x}(u, o) = \vec{0}$ olduğundan, bu nokta **düzgün** değildir.

Örnek 24-3.

Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = u(u^2-3v^2), \quad [x_3 = x_1(x_1^2 - 3x_2^2)]$$

denklemleriyle tanımlanan yüzeyin noktalarını inceleyiniz.

Gene (17-7) ve (24-4) formüllerinden yararlandığımızda

$$HL = 6u, \quad HM = -6v, \quad HN = -6u, \quad H > 0$$

olur ve bunlar da

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$H^2 (M^2 - LN) = 36 (u^2 + v^2) \geq 0$$

eşitliğini verir.

Bu örnekte, yüzey üzerinde bulunan $(u=0,\ v=0)$ noktası, yâni $O(0, 0, 0)$ başlangıç noktası bir yana, II formunun diskriminantı daima > 0 olacağından, yüzeyin O dışındaki tüm noktaları **hiperboliktir.**

Bu noktalardaki teğet düzlemlerle yüzeyin arakesiti olan doğruların doğrultuları, $u\,du^2 - 2v\,du\,dv - u\,dv^2 = 0$ ın kökleri olan

$$(v \pm \sqrt{u^2 + v^2}) / u = \frac{dv}{du}$$

değerleridir.

Yüzey üzerinde bulunan başlangıç noktasına gelince; genel olarak yazılan

$$\vec{x}_u\,[1, 0, 3(u^2 - v^2)]\,,\ \vec{x}_v\,(0, 1, -6uv)$$

$\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ vektörleri, başlangıç için

$$(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

vereceklerinden, başlangıçtaki normal vektör, üçüncü eksen üzerinde bulunduğundan, yüzeyin O noktasındaki teğet düzlem

$$x_3 = 0$$

dır. Yüzey bununla kesildiğinde, $x_1 Ox_2$ teğet düzlemi üzerinde

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pm (1/\sqrt{3})\, x_1$$

doğruları elde edileceğinden: O noktası, yüzeyin **bir düzlük noktasıdır.** Yüzeyin, MONGE gösterilişinde, 3 ncü dereceden olduğu görülmektedir.

Örnek 24-4.

Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = uv\,(u^2 - v^2), \quad [x_3 = x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)]$$

denklemleriyle tanımlanan yüzeyin noktalarını inceleyiniz.

(17-7) ve (24-4) formüllerinin kullanılmasiyle

$$HL = 6uv, \quad HM = 3(u^2 - v^2), \quad HN = -6uv$$

bulunur ve bunlar da

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$H^2(M^2 - LN) = [3(u^2 + v^2)]^2 \geq 0$$

verir.

Yüzeyin $(u=0,\ v=0)$ noktası, yani $O(0,0,0)$ başlangıç noktası bir yana, II formunun diskriminantı > 0 olduğundan tüm noktalar hiperboliktir, ve teğet düzlemle arakesiti oluşturan iki doğrunun doğrultuları

$$uv\,du^2 + 2(u^2 - v^2)\,du\,dv - uv\,dv^2 = 0$$

denkleminin kökleri, yani $m = (dv/du)$ denildiğinde

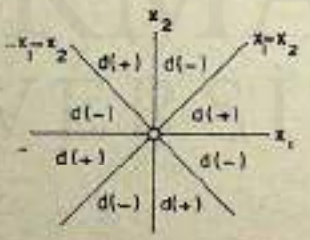
$$m_1,\ m_2 = \frac{2v^2 + u^2}{uv},\ -\frac{2u^2 + v^2}{uv}$$

dir. Yüzey, her noktada, teğet düzlemin farklı yanlarındadır.

Başlangıç noktasında, normal, üçüncü koordinat eksenine paralel olduğundan, bu noktadaki $x_3 = 0$ teğet düzlemiyle yüzey kesildiğinde dört

$$(x_3 = 0),\quad x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad x_1 = x_2,\quad -x_1 = x_2$$

doğrusu elde edileceğinden, O noktası, yüzeyin, bundan öncekinden daha yüksek mertebeden, bir **düzlük** noktasıdır. Teğet düzlemin dört bir yanında, dört de öteki yanında bulunmak üzere, yüzeyin parçaları vardır.



Şekil 16.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM IV.

WEINGARTEN, OLINDE RODRİGUES, GAUSS, DARBOUX-RIBAUCOUR, CODAZZI-MAINARDI formülleri. Yüzeyler Teorisinin Temel Teoremi

25. Normal birim vektörünün birinci mertebeden kısmi türevleri. WEINGARTEN ve OLINDE RODRİGUES formülleri

En az 2-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin bir P(u, v) düzgün noktasındaki $\vec{n}$ (u, v) normal birim vektörünün birinci mertebeden kısmî türev vektörleri, $\vec{n}$ ye dik olduklarından, P deki teğet düzleme paralel vektörlerdir. O hâlde bunları, koordinat çizgilerinin $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ teğet vektörlerinin lineer kombinezonları biçiminde yazabiliriz:

$$\text{(25-1)} \qquad \vec{n}_u = a_{11}\vec{x}_u + a_{12}\vec{x}_v, \quad \vec{n}_v = a_{21}\vec{x}_u + a_{22}\vec{x}_v$$

Bunları sırа ile $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ vektörleri ile çarpar ve (24-7) denklemlerinden yararlanırsak

$$\text{(25-2)} \qquad \begin{cases} H^2 a_{11} = FM - GL, & H^2 a_{12} = FL - EM \\ H^2 a_{21} = FN - GM, & H^2 a_{22} = FM - EN \end{cases}$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(25\text{-}3)\qquad \begin{cases} \vec{n}_u = \dfrac{1}{H^2}\,[(FM - GL)\,\vec{x}_u + (FL - EM)\,\vec{x}_v] \\ \vec{n}_v = \dfrac{1}{H^2}\,[(FN - GM)\,\vec{x}_u + (FM - EN)\,\vec{x}_v] \end{cases}$$

bulunur. Bunlara : **WEINGARTEN formülleri** denilir.

Eğer koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde oluşturdukları şebeke dikse, $F = 0$ dır ve (25-3) formülleri

$$(25\text{-}4)\qquad \vec{n}_u = -\left(\frac{L}{E}\vec{x}_u + \frac{M}{G}\vec{x}_v\right),\quad \vec{n}_v = -\left(\frac{M}{E}\vec{x}_u + \frac{N}{G}\vec{x}_v\right)$$

verir.

Eğer, fazla olarak, koordinat çizgileri yüzey üzerinde

$$M = 0$$

özdeşliğini sağlayabilecek biçimde seçilebilirse, (25-4) formüllerinden,

$$(25\text{-}5)\qquad r = \frac{L}{E},\qquad \bar{r} = \frac{N}{G}$$

denildiğinde,

$$(25\text{-}6)\qquad \vec{n}_u + r\,\vec{x}_u = 0,\quad \vec{n}_v + \bar{r}\,\vec{x}_v = 0$$

olur. Bunlar da **OLINDE RODRIGUES formülleri**dir.

26. GAUSS formülleri

En az 2-nci sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen yüzeyin düzgün bir $P(u, v)$ noktasında, yer vektörünün ikinci mertebeden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{x}_{uu}, \vec{x}_{uv}, \vec{x}_{vv}$$

kısmî türev vektörleri, **lineer olarak bağımsız** $\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{n}$ vektörlerinin lineer kombinezonları biçiminde yazılabilirler:

$$(26\text{-}1)\qquad \begin{cases} \vec{x}_{uu} = \Gamma_{11}^{1}\vec{x}_u + \Gamma_{11}^{2}\vec{x}_v + \alpha_1\vec{n}, \\ \vec{x}_{uv} = \Gamma_{12}^{1}\vec{x}_u + \Gamma_{12}^{2}\vec{x}_v + \alpha_2\vec{n}, \\ \vec{x}_{vv} = \Gamma_{22}^{1}\vec{x}_u + \Gamma_{22}^{2}\vec{x}_v + \alpha_3\vec{n}. \end{cases}$$

Bunlara **GAUSS formülleri** denilir. Γ_{ij}^{k} katsayıları da **2-nci türden** CHRISTOFFEL sembolleri adını alırlar.

Önce, her üç eşitliği skaler olarak $\vec{n}$ ile çarptığımızda, (24-2) formülleri

$$(26\text{-}2)\qquad \alpha_1 = L, \quad \alpha_2 = M, \quad \alpha_3 = N$$

verir.

Öte yandan, (17-7:2) den yararlanarak yazılan

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$$

nin u ve v ye göre kısmî türevlerinden

$$(26\text{-}3)\qquad \begin{cases} F_u = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{uu} + \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{uv} = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{uu} + \dfrac{1}{2}E_u, \\ F_v = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{uv} + \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{vv} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{vv} + \dfrac{1}{2}G_u \end{cases}$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(26\text{-}4)\qquad \begin{cases} \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{uv} = F_u - \dfrac{1}{2} E_v \\ \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{vv} = F_v - \dfrac{1}{2} G_u \end{cases}$$

çıkar.

Buna göre, (26-1) denklemlerinin, skaler olarak, $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ ile çarpımları sonucunda da, (26-4) yardımiyle

$$E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} E_u \; ; \quad F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_v - \frac{1}{2} E_v ,$$

$$E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} E_v \; ; \quad F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} G_u$$

$$E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = F_v - \frac{1}{2} G_u ; \quad F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} G_v$$

bulunur. Buradan da, sıra ile

$$(26\text{-}5)\qquad \begin{cases} 2H^2\Gamma_{11}^1 = GE_u + FE_v - 2FF_u , \; 2H^2\Gamma_{11}^2 = 2EF_u - EE_v - FE_u \\ 2H^2\Gamma_{12}^1 = GE_v - FG_u , \; 2H^2\Gamma_{12}^2 = EG_u - FE_v , \\ 2H^2\Gamma_{22}^1 = 2GF_v - GG_u - FG_v , \; 2H^2\Gamma_{22}^2 = EG_v + FG_u - 2FF_v \end{cases}$$

elde edilir.

Görülüyor ki :

Teorem 26-1. En az 2-nci sınıftan bir yüzeyin düzgün bir noktasında hesaplanan GAUSS formüllerinin Γ_{ij}^k katsayıları, sadece birinci kuvadratik formun katsayılarına ve bunların birinci mertebeden kısmî türevlerine bağlıdırlar.

Yüzeyin koordinat çizgileri bir dik şebeke oluşturduklarında, $F = 0$ özdeşliği, (26-1) formüllerini, (26-5) yardımiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(26\text{-}6)\quad \begin{cases} \vec{x}_{11} = \dfrac{E_u}{2E}\,\vec{x}_u - \dfrac{E_v}{2G}\,\vec{x}_v + L\,\vec{n} \\ \vec{x}_{12} = \dfrac{E_v}{2E}\,\vec{x}_u + \dfrac{G_u}{2G}\,\vec{x}_v + M\,\vec{n} \\ \vec{x}_{22} = -\dfrac{G_u}{2E}\,\vec{x}_u + \dfrac{G_v}{2G}\,\vec{x}_v + N\,\vec{n} \end{cases}$$

biçimine sokar.

a) MONGE gösterilişinde CHRISTOFFEL sembolleri

(17-21) ve (24-8) formüllerinden, en az 2-nci sınıftan bir $g(x_1, x_2) = x_3$ fonksiyonu için

$$(26\text{-}7)\quad E_u = 2pr,\quad E_v = 2ps,\quad F_u = qr + ps,\quad F_v = qs + pt,$$
$$G_u = 2qs,\quad G_v = 2qt$$

bulunacağından,

$$(26\text{-}8)\quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \dfrac{pr}{1+p^2+q^2}\ ;\quad \Gamma_{11}^2 = \dfrac{qr}{1+p^2+q^2} \\ \Gamma_{12}^1 = \dfrac{ps}{1+p^2+q^2}\ ;\quad \Gamma_{12}^2 = \dfrac{qs}{1+p^2+q^2} \\ \Gamma_{22}^1 = \dfrac{pt}{1+p^2+q^2}\ ;\quad \Gamma_{22}^2 = \dfrac{qt}{1+p^2+q^2} \end{cases}$$

olur.

b CHRISTOFFEL sembolleri arasında bâzı bağıntılar

1) (26-5) formüllerinden

$$(26\text{-}9)\quad \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 = \frac{(H^2)_u}{2H^2} = (\lg H)_u$$

çıkar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2) Gene aynı (26-5) formülleri

(26-10) $$\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{12}^{2} = \frac{(H^2)_v}{2H^2} = (\lg H)_v$$

verir.

3) (26-9) ve (26-10) formüllerinden

(26-11) $$(\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{12}^{2})_v = (\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{22}^{2})_u$$

elde edilir.

4) Koordinat çizgileri arasındaki açı α ile gösterilirse,

(26-12) $$\alpha_u = -H\left(\frac{\Gamma_{11}^{2}}{E} + \frac{\Gamma_{12}^{1}}{G}\right) ; \quad \alpha_v = -H\left(\frac{\Gamma_{12}^{2}}{E} + \frac{\Gamma_{22}^{1}}{G}\right)$$

dir.

Her ikisinin de ispat biçimi aynı olduğundan, yalnız birincisinin doğruluğunu gösterelim.

(19-17; 3) formülüne göre

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{F}$$

olduğundan,

$$\alpha_u = \frac{FH_u - HF_u}{EG}$$

dir. Öte yandan, (26-5) formülleri gereğince

$$-H\left(\frac{\Gamma_{11}^{2}}{E} + \frac{\Gamma_{12}^{1}}{G}\right) = -\frac{1}{2H}\left(2F_u - \frac{F}{E}E_u - \frac{E}{G}G_u\right)$$

$$= -\frac{1}{2H}\left[2F_u - (F/EG)(EG)_u\right]$$

$$= \frac{F(EG)_u - 2EGF_u}{2HEG} = \frac{F(H^2+F^2)_u - 2(H^2+F^2)F_u}{2HEG} = \frac{FH_u - HF_u}{EG}$$

olduğundan, birinci formül doğrudur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

c) Özel hal: DARBOUX-RIBAUCOUR formülleri

Koordinat çizgilerinin birbirlerini dik kestikleri (26-6) formüllerinde, bunların teğet birim vektörlerini

$$\vec{t} = \frac{\vec{x}_u}{\sqrt{E}}; \quad \vec{t}^* = \frac{\vec{x}_v}{\sqrt{G}} \tag{26-13}$$

ile gösterelim. Buna göre, kolaylıkla görülür ki

$$\begin{cases} \vec{t}_u = -\dfrac{E_v}{2H}\vec{t}^* + \dfrac{L}{\sqrt{E}}\vec{n}; \quad \vec{t}_v = \dfrac{G_u}{2H}\vec{t}^* + \dfrac{M}{\sqrt{E}}\vec{n}; \\ \vec{t}^*_u = \dfrac{E_v}{2H}\vec{t} + \dfrac{M}{\sqrt{G}}\vec{n}; \quad \vec{t}^*_v = -\dfrac{G_u}{2H}\vec{t} + \dfrac{N}{\sqrt{G}}\vec{n}; \end{cases} \tag{26-14}$$

dir.

Eğer f **1-nci sınıftan skaler ya da vektörel** bir fonksiyonsa, tanım olarak

$$f_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}}; \quad f_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}} \tag{26-15}$$

der ve

$$g = -(\lg \sqrt{E})_2, \quad \bar{g} = (\lg \sqrt{G})_1, \quad \tau = \frac{M}{H} \tag{26-16}$$

eşitliklerini kullanırsak, (25-5) formülleri yardımıyle, (26-14) formüllerini

$$\begin{cases} \vec{x}_{11} = \vec{t}_1 = g\vec{t}^* + r\vec{n}, \quad \vec{x}_{12} = \vec{t}_2 = g\vec{t}^* + \tau\vec{n}, \\ \vec{x}_{21} = \vec{t}_1^* = -g\vec{t} + \tau\vec{n}, \quad \vec{x}_{22} = \vec{t}_2^* = -g\vec{t} + r\vec{n} \end{cases} \tag{26-17}$$

biçiminde yazabiliriz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Kolaylıkla görülür ki

(26-18) $$\vec{x}_{12} - \vec{x}_{21} = g\,\vec{x}_1 + \bar{g}\,\vec{x}_2$$

dir.

Uyarı 26-1.

Aynı yazılış biçimini, (25-3) WEINGARTEN formüllerine uyguladığımızda

(26-19) $$(\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2)_1 = \vec{n}_1 = -r\,\vec{t} - t\,\vec{t}^*, \quad (\vec{x}_1 \wedge \vec{x}_2)_2 = \vec{n}_2 = -t\,\vec{t} - \bar{r}\,\vec{t}^*$$

olur.

İlerde yeniden ele alacağımız (26-16, 18) formüllerine **DARBOUX - RIBAUCOUR** formülleri denilir. Şurasını da kaydedelim ki bu formüllerin alınan P(u, v) düzgün noktasında geçerli olabilmeleri için, yüzeyin 2-nci sınıftan olması yeterlidir.

27. MAINARDI - CODAZZI formülleri: İntegre edilebilme koşulları

GAUSS formüllerinin bir P(u, v) düzgün noktasında uygulandığı yüzey eğer 3-ncü sınıftansa, aynı noktada yer vektörünün

(27-1) $$(\vec{x}_{uu})_v = (\vec{x}_{uv})_u, \quad (\vec{x}_{vv})_u = (\vec{x}_{uv})_v$$

özdeşliklerini gerçekleştirmesi gerekir. O hâlde, (26-1) formüllerini kullanacak olursak

$$(\Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + L\,\vec{n})_v = (\Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + M\,\vec{n})_u,$$

$$(\Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + N\,\vec{n})_v = (\Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + M\,\vec{n})_v$$

dir.

Bu özdeşliklerde, Γ_{ij}^k ler yerine, (26-5) formülleriyle elde olunan değerler konulur ve kısmî türevler alındıktan sonra yeniden GAUSS ve WEINGARTEN formüllerinden yararlanılırsa, her iki özdeşlikten

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$A_1 \vec{x}_u + A_2 \vec{x}_v + A_3 \vec{n} = \vec{0},$$

$$B_1 \vec{x}_u + B_2 \vec{x}_v + B_3 \vec{n} = \vec{0}$$

biçiminde birer vektörel denklem çıkarılır.

Böylece; altı

$$A_j = 0, \quad B_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3)$$

denkleminin gerçekleşmesi gerekir. Bunları da açtığımızda; $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ ve $\vec{n}$ nin katsayılarını sıfıra eşit kılmakla, sıra ile

$$(27\text{-}2) \quad \begin{cases} F\,\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^1\ \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\ \Gamma_{22}^1, \\ E\,\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1\ \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2\ \Gamma_{12}^2 - \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Gamma_{11}^2\ \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^2)^2, \\ L_v - M_u = L\ \Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\ \Gamma_{11}^2, \end{cases}$$

$$(27\text{-}2)' \quad \begin{cases} G\,\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{22}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1\ \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{12}^2\ \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1\ \Gamma_{12}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2, \\ F\,\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = (\Gamma_{12}^2)_v - (\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{12}^1\ \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\ \Gamma_{12}^1, \\ M_v - N_u = L\,\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\ \Gamma_{12}^2 \end{cases}$$

denklemleri elde olunur.

İki grup formülün sonuçlarına: **MAINARDI - CODAZZI formülleri** veya **integre edilebilme koşulları** denilir. İlk ikincilere gelince, bunları § 28 de kullanacağız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a. Yüzey üzerinde $F = 0$ ise, (27-2) formülleri, (26-6) yardımiyle

$$(27\text{-}3)\qquad \begin{cases} L_v + \dfrac{E_u}{2E} M - \dfrac{E_v}{2G} N = M_u + \dfrac{E_v}{2E} L + \dfrac{G_u}{2G} M, \\ N_u - \dfrac{G_u}{2E} L + \dfrac{G_v}{2G} M = M_v + \dfrac{E_v}{2E} M + \dfrac{G_u}{2G} N \end{cases}$$

biçiminde yazılır.

b. Üstelik, yüzey üzerinde $M = 0$ ise, biraz önceki formüllerden

$$(27\text{-}4)\qquad \begin{cases} L_v - \dfrac{E_v}{2G} N = \dfrac{E_v}{2E} L, \\ N_u - \dfrac{G_u}{2E} L = \dfrac{G_u}{2G} N \end{cases}$$

çıkar.

(25-5), (26-14; 15) formülleri yardımiyle, (27-4) formüllerinden

$$(27\text{-}5)\qquad \begin{cases} r_3 = g(r - \bar{r}) \\ \bar{r}_3 = \bar{g}(r - \bar{r}) \end{cases}$$

formülleri elde edilir.

c. Eğer yüzey sıfır uzunlukta eğrilere - minimal eğrilere - nispet edilirse, yüzey üzerinde özdeş olarak $E = 0$, $G = 0$ olacağından, (26-5) formülleri

$$(27\text{-}6)\qquad \Gamma_{22}^1 = (\lg |F|)_u, \quad \Gamma_{22}^2 = (\lg |F|)_v, \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0$$

verir ve (26-1) formülleri de

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(27-7) $\vec{x}_{uu} = \{lg \mid F \mid\}_u \vec{x}_u + L\vec{n}, \; \vec{x}_{uv} = M\vec{n}, \; \vec{x}_{vv} = \{lg \mid F \mid\}_v \vec{x}_v + N\vec{n}$

biçimine girerler.

MAINARDI - CODAZZI formülleri ise,

(27-8) $L_v - M_u = -M\{lg \mid F \mid\}_u, \quad M_v - N_u = M\{lg \mid F \mid\}_v$

olur ve buradan

(27-9) $$\left(\frac{M_u - L_v}{M}\right)_v = \left(\frac{M_v - N_u}{M}\right)_u$$

çıkar.

28. Yüzeyler teorisinin temel teoremi: GAUSS karakteristik denklemi

Önce, teoremin ispatında kullanacağımız bir Lema'yı ele alacağız:

Lema 28-1.

Bir P(u, v) düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzeyin P(u, v) noktasında

(28-1) $$\vec{x}_{uu} \cdot \vec{x}_{vv} - \vec{x}_{uv}^2 = \frac{2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}}{2} = \frac{(F_u - E_v)_v + (F_v - G_u)_u}{2}$$

dir.

Gerçekten, (17-7; 2,3) bağıntılarına göre yazılan

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v, \quad G = \vec{x}_u^2$$

eşitliklerinden birincisinin önce u ya, sonra v ye göre, ikincisinin de u ya göre birinci ve ikinci mertebeden kısmî türevlerini alırsak, sıra ile

$$F_u = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{x}_v + \frac{E_v}{2}, \quad F_{uv} = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{x}_v + \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{vv} + \frac{E_u}{2},$$

$$\frac{G_u}{2} = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{uv}, \quad \frac{G_{vv}}{2} = \vec{x}_{uv}^2 + \vec{x}_{uu} \cdot \vec{x}_{vv}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olur. Buna göre, $F_{uv}^2 - \frac{G_{u^2}}{2}$ yi oluşturacak olursak, (28-1) elde edilir.

Teorem 28-1. Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzeyin ikinci temel kuvadratik formunun

$$LN - M^2$$

diskriminantı, birinci temel kuvadratik formun katsayıları ve bunların birinci ve ikinci mertebeden kısmî türevlerinden bâzıları yardımiyle ifade edilebilir.

1 inci yol

(26-1), (26-2) bağıntılarından

$$\vec{x}_{u^2} \cdot \vec{x}_{v^2} - \vec{x}_{uv}^2 = (\Gamma_{11}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{11}^2 \vec{x}_v + L\vec{n})(\Gamma_{22}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{22}^2 \vec{x}_v + N\vec{n})$$

$$-(\Gamma_{12}^1 \vec{x}_u + \Gamma_{12}^2 \vec{x}_v + M\vec{n})^2$$

$$= [\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2] E + [\Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2] F$$

$$+ [\Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - (\Gamma_{12}^2)^2] G + LN - M^2 ,$$

veya (28-1) nedeniyle

$$(28\text{-}2) \quad LN - M^2 = \frac{2F_{uv} - E_{v^2} - G_{u^2}}{2} + [(\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^1] E + [2\Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2$$

$$- \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1] F + [(\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2] G$$

çıkar. Bu son eşitlik, Teorem 26-1 dolayısiyle, Teorem 28-1 in doğruluğunu gösterir. (28-2) ye **GAUSS karakteristik denklemi** denilir.

2 inci yol

(17-16) (24-2) formüllerini kullanacak olursak, (26-4) dolayısiyle

$$H^3 (LN - M^2) = (\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{u^2})(\vec{x}_v, \vec{x}_v, \vec{x}_{v^2}) - (\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_{uv})^2$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Karma çarpımların çarpımları ve kareleri, determinantlar biçiminde açılacağından

$$H^2(LN-M^2)=\begin{vmatrix} E & F & F_v-\frac{G_v}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2} & \vec{X}_{u2}\cdot\vec{X}_{v2} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & \vec{X}_{uv} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} E & F & F_v-\frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2} & \vec{X}_{u2}\cdot\vec{X}_{v2}-\vec{X}_{uv} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

veya (28-1) nedeniyle

$$(28\text{-}3)\qquad H^2(LN-M^2)=\begin{vmatrix} E & F & F_v-\frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_u}{2} & F_u-\frac{E_v}{2} & \frac{2F_{uv}-E_{v2}-G_{u2}}{2} \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

olur. Bu sonuç da, teoremi doğrular.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Not 28-1.

Bu teoreme, KARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), 1827 de latince olarak yayınladığı **«Disquisitiones generales circa superficies curvas»** adlı yapıtında «çok önemli, her bakımdan olağanüstü» anlamına gelen «Theorema egregium» demiş, sonradan bu adlandırma, birçok matematikçiler tarafından kullanılmıştır. Teoremin bulunuşu, yayınlandığı 1827 den aşağı yukarı onbir yıl öncelerine rastlar. Bundan sonraki bölümde, GAUSS eğriliğinden söz ederken, bu teoremi yeniden ele alacağız.

Uyarı 28-1.

Teorem 28-1 in başka bir ispat biçimi, (27-2) ve(27-2)' formül gruplarının ilk ikisi yardımiyle de verilebilir, çünkü bunların sol taraflarında $LN-M^2$, sağ taraflarında ise, birinci formun katsayıları ve bunların çeşitli mertebelerden kısmî türevleri vardır.

a. Yüzey üzerinde koordinat çizgileri bir dik şebeke oluşturuyorlarsa, $F = 0$ olacağından, adı geçen formüllerden ikincisi ile dördüncüsü

$$(28\text{-}4)\qquad LN-M^2 = \frac{1}{4}\left[G_u\left(\lg\sqrt{EG}\right)_u + E_v\left(\lg\sqrt{EG}\right)_v - \frac{1}{2}\left(E_v^2 + G_u^2\right)\right]$$

bağıntısını verirler.

b. Eğer yüzey minimal eğrilere nispet edilirse

$$(28\text{-}5)\qquad LN-M^2 = F\left(\frac{F_u}{F}\right)_v = F\left(\frac{F_v}{F}\right)_u$$

olur.

29. Birinci temel kuvadratik formu verilen yüzeyler

Önce, basit bir örnekle işe başlayalım.

Örnek 29-1.

Oxyz dik koordinat sisteminde

$$\vec{x} = a\left(\cos u\ \vec{k}_1 + \sin u\ \vec{k}_2\right) + v\,\vec{k}_3$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dönel silindirinin birinci temel kuvadratik formu, kolayca görüleceği gibi, a değeri bir dik kesitin yarıçapını gösterdiğine göre

$$ds^2 = a^2\,du^2 + dv^2$$

dir.



Şekil 17.

O dan geçen dik kesitin P(a, 0, 0) noktasındaki teğeti ikinci Y ekseni, P den geçen anadoğruyu üçüncü Z ekseni olarak alalım ve birinci ekseni değiştirmeyelim. O hâlde, verilen dönel silindirin, ilk sisteme göre

$$x - a = 0$$

denklemiyle gösterilen teğet düzleminin birinci temel kuvadratik formu,

$$dY = a\,du, \quad dZ = dv$$

denildiğinde

$$ds^{*2} = dY^2 + dZ^2 = a^2\,du^2 + dv^2 = ds^2$$

olur.

Böylece görülüyor ki, düzlem ve dönel silindirin biçimleri farklı olduğu hâlde, uygun koordinat seçimiyle, ds^2 leri aynı kılınabilir. Başka deyimle, birinci temel kuvadratik formun verilmesi hâlinde, 1-nci temel formu bu olan, biçimleri değişik çeşitli ve sonsuz yüzey vardır. İlk kez EDOUARD BOUR (1832-1866) tarafından ispat edilen ve genel hâli yeteri kadar açıklayan teoremi kaydetmekle yetineceğiz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

29 - 1 BOUR teoremi

1 - nci sınıftan katsayılı, pozitif ve belirli herhangi bir

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

diferansiyel kuvadratik formu, herhangi bir noktasının gereği kadar yakınlarında 2 - nci sınıftan bir

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

yüzeyinin birinci temel kuvadratik formudur, yâni sözü edilen noktada

$$\vec{x}_u^2 = E, \quad \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = F, \quad \vec{x}_v^2 = G$$

dir. Bu koşulları sağlayan, biçimleri farklı, sonsuz yüzey vardır.

30. Birinci ve ikinci temel kuvadratik formları verilen yüzeyler.

BOUR teoreminde sözü edilen sonsuz yüzeyden birisini belirlemek için de, birinci temel kuvadratik formdan başka, birazdan göreceğimiz BONNET teoremi gereğince, ikinci temel kuvadratik formun da verilmesi gerekir. Sorunu daha iyi anlayabilmek ve ne gibi güçlüklerle karşılaşılacağını görebilmek için, bir örneği gözden geçirmekte yarar vardır.

Örnek 30 — 1.

30-1)
$$\begin{cases} I = (v^2 + h^2)\,du^2 + dv^2 \\ I = \dfrac{2h}{\sqrt{v^2 + h^2}}\,du\,dv \end{cases}$$

diferansiyel kuvadratik formları verildiğine göre, birinci ve ikinci temel kuvadratik formları bunlardan oluşan yüzeyi bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aranılan yüzey için

$$(30\text{-}2)\qquad \begin{cases} E = (v^2 + h^2), \quad F = 0, \quad G = 1 \\ L = 0, \quad M = \dfrac{2h}{\sqrt{v^2 + h^2}}, \quad N = 0 \end{cases}$$

olacağından, (26-6) nedeniyle GAUSS formülleri

$$(30\text{-}3)\qquad \begin{cases} \vec{x}_{uu} = -v\,\vec{x}_v, \\ \vec{x}_{uv} = \dfrac{v}{v^2 + h^2}\,\vec{x}_u - \dfrac{h}{\sqrt{v^2 + h^2}}\,\vec{n} \\ \vec{x}_{vv} = \vec{0} \end{cases}$$

ve WEINGARTEN formülleri de

$$(30\text{-}4)\qquad \vec{n}_u = -\frac{h}{\sqrt{v^2 + h^2}}\,\vec{x}_v, \quad \vec{n}_v = \frac{h}{(v^2 + h^2)^{3/2}}\,\vec{x}_u$$

dür.

Ayrıca, şurasını da kaydedelim ki verilen diferansiyel formların kat sayılarının (30-2) ile belirli olan değerleri, (27-3) MAINARDI-CODAZZI denklemlerini de sağlamaktadır. Buna göre, (30-3; 3) ün v ye göre iki kez integrasyonundan, önce

$$(30\text{-}5)\qquad \vec{x} = v\,\vec{a}(u) + \vec{b}(u)$$

çıkar. Buradan, u ve v ye göre birinci mertebeden kısmi türevler

$$(30\text{-}6)\qquad \vec{x}_u = v\,\vec{a}' + \vec{b}', \quad \vec{x}_v = \vec{a}$$

vereceğinden, (30-2) dolayısıyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(30\text{-}7)\qquad \begin{cases} E = \vec{x}_u^{\,2} = v^2\vec{a}'^2 + 2v\vec{a}'\cdot\vec{b}' + \vec{b}'^2 = v^2 + h^2 \\ F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = v\vec{a}'\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b}' = 0 \\ G = \vec{x}_v^{\,2} = \vec{a}^2 = 1 \end{cases}$$

dir. Buradan, $\vec{a}$ nın birim vektörü olmasından sıra ile

$$(30\text{-}8)\qquad \vec{a}\cdot\vec{a}' = 0,\quad \vec{a}'^2 = 1,\quad \vec{a}'\cdot\vec{b}' = 0,\quad \vec{b}'^2 = h^2,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}' = 0$$

çıkar.

(30-5) in u ya göre 2-nci mertebeden

$$(30\text{-}9)\qquad \vec{x}_{uu} = v\vec{a}'' + \vec{b}''$$

kısmî türev vektörünü, (30-3:1) le karşılaştırdığımızda, (30-6;2)

$$(30\text{-}10)\qquad \vec{x}_v = -\vec{a}'' = \vec{a},\quad \vec{b}'' = \vec{0}$$

olur. O halde, uzunluğu, (30-8;4) nedeniyle h ya eşit olan sabit $\vec{b}'$ vektörünü

$$(30\text{-}11)\qquad \vec{b}' = h\vec{k}_0,\quad (\vec{k}_0:\ \text{sabit birim vektörü})$$

biçiminde gösterirsek,

$$(30\text{-}12)\qquad \vec{b} = hu\,\vec{k}_0 + \vec{c}\qquad (\vec{c}:\ \text{sabit vektör})$$

bulunur.

Öte yandan, (30-10; 1) den

$$(30\text{-}13)\qquad \vec{a} + \vec{a}'' = \vec{0}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olduğundan, $\vec{b}'$ nun, yâni $\vec{k}_1$ ün (30-3) dolayısiyle hem $\vec{a}$ ya hem de $\vec{a}'$ ye dik olmasından

$$(\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \vec{a}'' = \vec{a} \wedge \vec{a}'' = \vec{0}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{a}' = \varepsilon \vec{k}_3 \qquad (\vec{a}, \vec{a}' \text{ birim vektörleri})$$

veya

(30-14) $$\vec{k}_3 \cdot \vec{a} = 0$$

çıkar.

$\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ birim vektörleri, bir dik sistem oluşturuyorlarsa, (30-5) den

$$\vec{x} = v(\vec{k}_1 \cos u + \vec{k}_2 \sin u) + hu\vec{k}_3 + \vec{c}$$

dir Buradan

$$\vec{x}_u^2 = v^2 + h^2 = v^2(-\vec{k}_1 \operatorname{Sin} u + \vec{k}_2 \operatorname{Cos} u)^2 \; \vec{u}_u^2 + h^2 = v^2 \vec{u}_v^2 + h^2,$$

yâni

(30-15) $$\bar{u}_u = \pm 1, \quad d\bar{u} = \pm du, \quad \bar{u} = \pm u \quad (\text{integ. sab.} = 0 \text{ alınabilir.})$$

olur.

Görülüyor ki, bulunan yüzeye $-\vec{c}$ ötelemesini uygularsak, vektörel denklemi

$$\vec{x}(u, v) = v(\vec{k}_1 \operatorname{Cos} u + \vec{k}_2 \operatorname{Sin} u) + hu\vec{k}_3$$

veya $v - a = \bar{v}$ dediğimizde, karteziyen denklemleri

(30-16)
$$\begin{cases} x_1 = a \operatorname{Cos} u + \bar{v} \operatorname{Cos} u \\ x_2 = a \operatorname{Sin} u + \bar{v} \operatorname{Sin} u \\ x_3 = hu \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olan yüzey söz konusudur. Bu da: (acosu, asinu, hu) **dairesel helisinin asal normallerinin oluşturdukları yüzeydir.**

Yukarıdaki örneğin nasıl çözüldüğünü gördükten sonra, biraz önce adı geçen BONNET teoreminin, ispatını vermeden, sadece ifadesini yazacağız.

30-1. BONNET teoremi

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

diferansiyel formlarının katsayıları, (u, v) bağımsız, skaler ve gerçel değişkenleriyle tanımlanan düzlemin bir (B) bölgesinde sıra ile 1-nci ve 2-nci sınıftan fonksiyonları ise ve bu katsayılar (26-5) GAUSS denklemleriyle (27-2) MAINARDI-CODAZZI denklemlerini sağlıyorlarsa, (B) bölgesinin bir noktası yakınlarında birinci ve ikinci temel kuvadratik formları, verilen I ve II diferansiyel formlarından oluşan bir

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

yüzeyi vardır. Bunun ve (u, v) koordinatlarının gerçel olmaları hâlinde

$$EG - F^2 > 0, \quad E > 0, \quad (\text{veya } G > 0)$$

olmalıdır.

Böyle bir yüzey, uzaydaki durumu farkıyla belirlidir, yâni aynı birinci ve ikinci temel kuvadratik formlu iki ayrı yüzey, bir hareketle üst üste getirilebilir.

BONNET teoreminin ispatı için, belli başlı Analiz kitaplarından birine bakılabilir.

31. Normal birim vektörünün 2-nci mertebeden kısmî türevleri

En az 3-üncü sınıftan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonu ile gösterilen bir yüzeyin bir P(u, v) düzgün noktasında, normal birim vektörünün ikinci mertebeden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{n}_{u^2},\quad \vec{n}_{uv},\quad \vec{n}_{v^2}$$

kısmi türev vektörleri, lineer olarak bağımsız $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$, $\vec{n}$ vektörlerinin lineer kombinezonları biçiminde yazılabilirler:

$$(31\text{-}1)\qquad \begin{cases} \vec{n}_{u^2} = \overset{1}{\gamma}_{11}\,\vec{x}_u + \overset{2}{\gamma}_{11}\,\vec{x}_v + \beta_1\,\vec{n}, \\ \vec{n}_{uv} = \overset{1}{\gamma}_{12}\,\vec{x}_u + \overset{2}{\gamma}_{12}\,\vec{x}_v + \beta_2\,\vec{n}, \\ \vec{n}_{v^2} = \overset{1}{\gamma}_{22}\,\vec{x}_u + \overset{2}{\gamma}_{22}\,\vec{x}_v + \beta_3\,\vec{n} \end{cases}$$

Bu üç formüldeki dokuz katsayıyı hesaplamadan önce, (25-3) WEINGARTEN formülleri yardımiyle normal birim vektörünün birinci mertebeden kısmi türevlerinin skaler karelerini ve skaler çarpımlarını, birinci ve ikinci temel kuvadratik formların katsayıları cinsinden yazalım.

$\vec{n}_u^2,\ \vec{n}_u\cdot\vec{n}_v,\ \vec{n}_v^2$ **nin değerleri**

(25-3; 1) WEINGARTEN formülünün her iki yanının skaler karesini aldığımızda

$$H^4\,\vec{n}_u^2 = [E(FM-GL)^2 + 2F(FM-GL)(FL-EM) + G(FL-EM)^2]$$
$$= (FM-GL)\,[(FM-GL)\,E + (FL-EM)\,F] + (FL-EM)\,[(FM-GL)\,F + (FL-EM)\,G]$$

$$H^2\,\vec{n}_v^2 = (EM^2 - 2FLM + GL^2)$$

olur. Aynı yol, $\vec{n}_u\cdot\vec{n}_v$ ve $\vec{n}_v^2$ için izlendiğinde; sıra ile

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(31\text{-}2)\qquad \begin{cases} \vec{n}_u^{\,2} = \dfrac{EM^2 - 2FLM + GL^2}{EG - F^2} \\ \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = \dfrac{EMN - F(LN + M^2) + GLM}{EG - F^2} \\ \vec{n}_v^{\,2} = \dfrac{GM^2 - 2FMN + EN^2}{EG - F^2} \end{cases}$$

bulunur.

Yüzey üzerinde koordinat çizgileri bir dik eğri şebekesi oluşturduklarında, $F = 0$ özdeşliği

$$(31.3)\qquad \vec{n}_u^{\,2} = \frac{M^2}{G} + \frac{L^2}{E}\,;\quad \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = \frac{MN}{G} + \frac{LM}{E}\,;\quad \vec{n}_v^{\,2} = \frac{M^2}{E} + \frac{N^2}{G}$$

verir.

Üstelik $M = 0$ ise,

$$(31\text{-}4)\qquad \vec{n}_u^{\,2} = \frac{L^2}{E}\,;\quad \vec{n}_u \cdot \vec{n}_v = 0\,;\quad \vec{n}_v^{\,2} = \frac{N^2}{G}$$

olur.

a) β_i'lerin hesabı

Açıkca görüleceği gibi, (31-1) formüllerini skaler olarak $\vec{n}$ normal birim vektörü ile çarptığımızda

$$\beta_1 = \vec{n} \cdot \vec{n}_{u^2}\,,\quad \beta_2 = \vec{n} \cdot \vec{n}_{uv}\,,\quad \beta_3 = \vec{n} \cdot \vec{n}_{v^2}$$

bulunur.

Öte yandan

$$(31.5)\qquad \vec{n} \cdot \vec{n}_u = 0,\qquad \vec{n} \cdot \vec{n}_v = 0$$

özdeşliklerinin, sıra ile, önce u ve v ye, sonra da v ve u ya göre kısmi türevlerinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(31.6) $$\beta_1 = -\vec{n}_u^{\,2}, \quad \beta_2 = -\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v, \quad \beta_3 = -\vec{n}_v^{\,2}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece, (31-2) formülleri yardımiyle, β_i'ler belirli olur.

b) Γ^k_{ij} lerin hesabı

(31-1) formülerinin ilkinden, kolaylıkla

$$\vec{n}_u \cdot \vec{n}_{u^2} = \vec{n}_u \cdot \vec{x}_u \Gamma^1_{11} + \vec{n}_u \cdot \vec{x}_v \Gamma^2_{11}$$

$$\vec{n}_v \cdot \vec{n}_{u^2} = \vec{n}_v \cdot \vec{x}_u \Gamma^1_{11} + \vec{n}_v \cdot \vec{x}_v \Gamma^2_{11}$$

eşitlikleri çıkarılır. Burada

(31-7) $$\vec{n}_u \cdot \vec{n}_{u^2} = \frac{1}{2}(\vec{n}_u^{\,2})_u$$

dır ve

$$(\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v)_u = \vec{n}_v \cdot \vec{n}_{u^2} + \vec{n}_u \cdot \vec{n}_{uv}$$

(31-8) $$\vec{n}_v \cdot \vec{n}_{u^2} = (\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v)_u - \frac{1}{2}(\vec{n}_u^{\,2})_v$$

den ve (24-7) formüllerinden

$$-L\Gamma^1_{11} - M\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}(\vec{n}_u^{\,2})_u,$$

$$-M\Gamma^1_{11} - N\Gamma^2_{11} = (\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v)_u - \frac{1}{2}(\vec{n}_u^{\,2})_v$$

lineer denklemleri elde edilir. Bunların çözümü sonucunda da

(31.9)
$$\begin{cases} \Gamma^1_{11} = \dfrac{M(\vec{n}_u^{\,2})_v + N(\vec{n}_u^{\,2})_u - 2M(\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v)_u}{2(M^2 - LN)} \\ \Gamma^2_{11} = \dfrac{2L(\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v)_u - L(\vec{n}_u^{\,2})_v - M(\vec{n}_u^{\,2})_u}{2(M^2 - LN)} \end{cases}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tıpkı bunun gibi, öteki denklemler de

$$(31\text{-}10)\quad \begin{cases} \Gamma^{1}_{11} = \dfrac{N(\vec{n}_u)_v + M(\vec{n}_v)_u}{2(M^2 - LN)} \\ \Gamma^{2}_{12} = \dfrac{L(\vec{n}_v)_u - M(\vec{n}_u)_v}{2(M^2 - LN)} \\ \Gamma^{1}_{12} = \dfrac{2N(\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v)_v - M(\vec{n}_v^2)_v - N(\vec{n}_v^2)_u}{2(M^2 - LN)} \\ \Gamma^{2}_{22} = \dfrac{M(\vec{n}_v^2)_u - 2M(\vec{n}_u \cdot \vec{n}_v)_v + L(\vec{n}_v^2)_v}{2(M^2 - LN)} \end{cases}$$

verir.

Koordinat çizgileri, yüzey üzerinde

$$F = 0, \quad M = 0$$

koşullarını sağlıyorsa, (31-4) dolayısıyle, (31-9) ve (31-10) formullerinden

$$(31\text{-}11)\quad \begin{cases} \vec{n}_{u^2} = -\dfrac{1}{2L}\left(\dfrac{L^2}{E}\right)_v \vec{x}_u + \dfrac{1}{2N}\left(\dfrac{L^2}{E}\right)_v \vec{x}_v + \dfrac{L^2}{E}\vec{n}, \\ \vec{n}_{uv} = -\dfrac{1}{2L}\left(\dfrac{L^2}{E}\right)_v \vec{x}_u - \dfrac{1}{2N}\left(\dfrac{N^2}{G}\right)_v \vec{x}_v, \\ \vec{n}_{v^2} = -\dfrac{1}{2L}\left(\dfrac{N^2}{G}\right)_u \vec{x}_u - \dfrac{1}{2N}\left(\dfrac{N^2}{G}\right)_v \vec{x}_u - \dfrac{N^2}{G}\vec{n} \end{cases}$$

çıkarılır.

Eğer (25-6) OLINDE RODRIGUES formülleri yardımıyle: $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ ler yerine $\vec{n}_u$, $\vec{n}_v$ ler kullanılırsa, (31-11) formülleri

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(31\text{-}12)\quad \begin{cases} \vec{n}_{u^2} = -\left(\lg \dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_u \vec{n}_u - \dfrac{G}{2N^2}\left(\dfrac{L^2}{E}\right)_v \vec{n}_v + \dfrac{L^2}{E}\vec{n}, \\ \vec{n}_{uv} = -\left(\lg \dfrac{L}{\sqrt{E}}\right)_v \vec{n}_u + \left(\lg \dfrac{N}{\sqrt{G}}\right) \vec{n}_v, \\ \vec{n}_{v^2} = -\dfrac{E}{2G^2}\left(\dfrac{N^2}{G}\right)_v \vec{n}_u + \left(\lg \dfrac{N}{\sqrt{G}}\right)_v \vec{n}_v - \dfrac{N^2}{G}\vec{n} \end{cases}$$

biçimine girerler.

Uyarı 31-1.

(31-1) formüllerini, (25-3) WEINGARTEN formüllerinin u ve v ye göre birinci mertebeden kısmi türevlerini alarak da bulabiliriz. Şöyle ki: (25-3) formüllerinden, sıra ile, (31-1) le karşılaştırdığımızda

$$\vec{n}_{u^2} = \left(\frac{FM-GL}{EG-F^2}\right)_u \vec{x}_u + \frac{FM-GL}{EG-F^2}\vec{x}_{u^2} + \left(\frac{FL-EM}{EG-F^2}\right)_u \vec{x}_v + \frac{FL-EM}{EG-F^2}\vec{x}_{uv}$$

$$(31\text{-}13)\quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \left(\dfrac{FM-GL}{EG-F^2}\right)_u + \dfrac{FM-GL}{EG-F^2}\Gamma_{11}^1 + \dfrac{FL-EM}{EG-F^2}\Gamma_{12}^1, \\ \Gamma_{11}^2 = \dfrac{FM-GL}{EG-F^2}\Gamma_{11}^2 + \left(\dfrac{FL-EM}{EG-F^2}\right)_u + \dfrac{FL-EM}{EG-F^2}\Gamma_{12}^2, \\ \beta_1 = \dfrac{(FM-GL)L + (FL-EM)M}{EG-F^2} = \dfrac{EM^2-2FLM+GL^2}{F^2-EG} \end{cases}$$

bulunur.

Aynı biçimde davranıldığında, görülür ki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$
(31\text{-}14)\quad
\begin{cases}
\gamma_{12}^{1} = \left(\dfrac{FM-GL}{EG-F^2}\right)_v + \dfrac{FM-GL}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{1} + \dfrac{FL-EM}{EG-F^2}\,\Gamma_{22}^{1} \\
\quad = \left(\dfrac{FN-GM}{EG-F^2}\right)_u + \dfrac{FN-GM}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{1} + \dfrac{FM-EN}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{1}, \\
\gamma_{12}^{2} = \left(\dfrac{FL-EM}{EG-F^2}\right)_v + \dfrac{FL-EM}{EG-F^2}\,\Gamma_{22}^{2} + \dfrac{FM-GL}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{2} \\
\quad = \left(\dfrac{FM-EN}{EG-F^2}\right)_u + \dfrac{FN-GM}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{2} + \dfrac{FM-EN}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{2}, \\
\beta_1 = \dfrac{-EMN + F(LN + M^2) - GLM}{EG-F^2}
\end{cases}
$$

$$
(31\text{-}15)\quad
\begin{cases}
\gamma_{12}^{1} = \left(\dfrac{FN-GM}{EG-F^2}\right)_v + \dfrac{FN-GM}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{1} + \dfrac{FM-EN}{EG-F^2}\,\Gamma_{22}^{1} \\
\gamma_{12}^{2} = \dfrac{FN-GM}{EG-F^2}\,\Gamma_{12}^{2} + \left(\dfrac{FM-EN}{EG-F^2}\right)_u + \dfrac{FM-EN}{EG-F^2}\,\Gamma_{22}^{2}, \\
\beta_1 = \dfrac{2FMN - EN^2 - GM^2}{EG-F^2}
\end{cases}
$$

dır.

Uyarı 31-2.

Başka bir yol da

$$\vec{n}_{uv} = a_1\,\vec{n}_u + a_2\,\vec{n}_v + \beta_1\,\vec{n}$$

$$\vec{n}_{uv} = b_1\,\vec{n}_u + b_2\,\vec{n}_v + \beta_2\,\vec{n}$$

$$\vec{n}_{vv} = c_1\,\vec{n}_u + c_2\,\vec{n}_v + \beta_3\,\vec{n}$$

bağıntılarının her birini $\vec{n}_u$, $\vec{n}_v$ ile skaler olarak çarpıp a_j, b_j, c_j $(j=1,2)$ leri bulmaktır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM V

YÜZEYLERİN DIŞ ÖZELLİKLERİ

I

32. Bir yüzeyin düzgün bir noktası yakınlarında biçimi. Normal eğrilik

Bir yüzeyin bir noktası yakınlarındaki biçimini incelemek için, bu noktadan geçen ve yüzey üzerinde bulunan eğrilerin aynı nokta yakınlarındaki biçimlerini, ya da aynı şey demek olan eğriliklerini bilmekte yarar vardır. Bu bakımdan, bu paragrafta, yüzeyin düzgün bir noktasından geçen ve yüzey üzerinde bulunan eğrilerinin aynı noktadaki eğriliklerini gözden geçireceğiz.

Düzgün bir P noktası yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin, P den geçen, S üzerinde bulunan ve sınıfı ≥ 2 olan bir C eğrisinin P deki yayı s, yer vektörü $\vec{x}(s)$, FRENET üçyüzlüsünün birim vektörleri $\vec{a}_p(s)$, $(p = 1, 2, 3)$ eğrilik ve burulması da $\rho(s)$, $\tau(s)$ olsun.

C eğrisinin P noktasında —FERRUH ŞEMİN, **Diferansiyel Geometri I, Eğriler,** (27-26) ve (28-2) formülleri nedeniyle-

$$\vec{x}' = \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{a}_1 \; ; \quad \vec{x}'' = \frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \rho \vec{a}_2 \tag{32-1}$$

dir.

P noktası yakınlarında **iki yanlı** olduğu varsayılan S yüzeyinin P deki normal birim vektörü $\vec{n}$ ise, C nin $\vec{a}_1$ teğet birim vektörü etrafındaki pozitif dönme yönünde hesaplanan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(32-2) $$\widehat{\vec{a}_2, \vec{n}} = \theta$$

açısı, (17-8) ve (24-3) formülleri yardımiyle

(32-3) $$\vec{n} \cdot \frac{\vec{d^2x}}{ds^2} = \frac{II}{I} = \rho \operatorname{Cos} \theta$$

verir.

Buna göre, eğer kısaca

(32-4) $$\rho_n = \rho \operatorname{Cos} \theta$$

dersek, C eğrisi boyunca hesaplanan du, dv diferansiyelleri cinsinden, (32-3) bağıntısından

(32-5) $$\rho_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

$$= \frac{N\,m^2 + 2M\,m + L}{G\,m^2 + 2F\,m + E}, \qquad m = \frac{dv}{du}$$

eşitliği elde edilir.

Bundan önce § 19 un sonunda da tanımladığımız m, bir doğrultu katsayısı olduğundan, şu teorem söz konusudur:

Teorem 32-1. Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin, P noktasında birbirlerine teğet ve sınıfları $\geqslant 2$ olan C eğrileri için ρ_n nin değeri aynı kalır. Başka deyimle, ρ_n, **bir doğrultu fonksiyonudur.**

P düzgün noktasında aynı PT teğetli ve S üzerinde bulunan ∞ eğri arasından birisi C, bunun P deki oskülatör düzlemiyle S nin kesiti C, her iki eğrinin P deki eğrilikleri de ρ, $\bar{\rho}$ olsun. C nin de P deki teğeti PT olacağından, $\bar{C}$ için de ρ_n aynıdır. Öte yandan, θ açısının değeri de, C ve $\bar{C}$ için P noktasında aynı olacağından, (32-4) nedeniyle

$$\rho_n = \rho \operatorname{Cos} \theta = \bar{\rho} \operatorname{Cos} \theta$$

yâni

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\rho = \bar{\rho}$$

dir. Buna göre:

Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin P den geçen ve P yakınlarındaki sınıfı ≥ 2 olan C eğrilerinin P noktasındaki eğriliklerini incelemek için, yüzeyin P den geçen düzgün kesitlerini almak yeterlidir.

P düzgün noktasında aynı teğetten geçen ∞ düzlem kesit arasında, normal ve teğetin tanımladığı kesiti alalım. Bu kesit için de ρ_n nin değeri aynıdır ve iki ayrı hâl söz konusudur:

1) $\vec{n}$ **ve** $\vec{a_2}$ **birim vektörleri aynı yönlüdür.**

Böyle olunca :

$$\rho > 0, \quad \text{Cos}\,\theta = 1 > 0$$

bağıntıları, (32-4) dolayısiyle

$$\rho_n = \rho\,\text{Cos}\,\theta > 0$$

verir.

2) $\vec{n}$ **ve** $\vec{a_2}$ **birim vektörleri ters yönlüdür.**

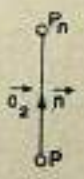
Bu kez de

$$\rho > 0, \quad \text{Cos}\,\theta = -1 < 0$$

olacağından, (32-4)

$$\rho_n = \rho\,\text{Cos}\,\theta < 0$$

verir.



Şekil 18.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Her iki hâlde, normal kesitin P deki eğrilik merkezine P_n, eğrilik yarıçapına da $R^* = \frac{1}{\rho^*}$ dersek,

$$\overrightarrow{PP_n} = R^* \vec{a}_2$$

dir. Öte yandan

$$R^* = |\frac{1}{\rho_n}| = |R_n|$$

olduğundan, her iki hâl için, P deki P_n eğrilik merkezi

(32-7) $$\overrightarrow{P P_n} = R_n \vec{n}$$

vektörel bağıntısı ile belirli olur.



Şekil 19.

Özetleyecek olursak :

Normal kesitin P düzgün noktasındaki eğriliği, her iki halde de

$$|\rho_n|$$

ye eşittir, ama normal kesitin P_n eğrilik merkezi, salt değer işareti kullanmaksızın, (32-7) vektörel bağıntısı ile belirlidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tanımlar 32-1.

P düzgün noktası yakınlarında, sınıfı ≥ 2 olan iki yanlı bir S yüzeyinin P den geçen bir teğetle belirli olan ve P deki normal üzerinde bulunan P_n noktasına, yâni normal kesitin P deki eğrilik merkezine: **normal eğrilik merkezi**, aynı teğet doğrultusu ile tanımlanan ρ_n ye de: **normal eğrilik** denir.

Şurasını da kaydedelim ki, P_n sembolündeki (n) indisi, «normal» kelimesinin ilk harfi olarak alınmıştır.

33. MEUSNIER teoremi

Bu paragrafın konusunu oluşturacak olan teoreme geçmeden önce, bir noktayı açıklığa kavuşturmamız gereklidir. Şöyle ki, bir P düzgün noktasında, teğet düzlemin bir $\vec{a}_1$ teğet birim vektörü ile belirli olan normal kesitin P deki eğrilik merkezi P_n, aynı teğetten geçen herhangi bir eğik kesitin de aynı noktadaki eğrilik merkezi P_e ise:

P_n, P_e eğrilik merkezleri, P deki teğet düzlemin farklı yanlarında bulunamazlar.

Gerçekten, eğer dediğimizin tersi olsaydı, $\vec{n}$ normal birim vektörünün yönüne göre, 20 ve 21 ile gösterilen şekillerden bir karşısında kalınırdı; bunlardan birincisinde

$$\cos\theta < 0, \quad \rho_n > 0,$$

ikincisinde de

$$\cos\theta > 0, \quad \rho_n < 0$$

olacağından, (32-4) bağıntısı, yâni

$$\rho_n = \rho \cos\theta, \quad \rho > 0$$

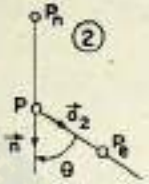
gerçekleşemezdi.

Buna göre, teğet düzlemin aynı yanında alınması gereken P_n ve P_e noktaları için, gene $\vec{n}$ normal birim vektörünün yönüne göre iki şekil düşünülebilir. Bunlara da: 22 ve 23 şekilleri diyelim.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 20.



Şekil 21.

Öte yandan, (32-4) bağıntısını

(32-8) $$R = R_n \operatorname{Cos}\theta, \quad R > 0$$

biçiminde yazabileceğimize göre; 22 hâlinde

$$\overline{PP_r} = R > 0, \quad \overline{PP_n} = R_n > 0, \quad \operatorname{Cos}\theta > 0$$

ve 23 hâlinde de

$$\overline{PP_r} = R > 0, \quad \overline{PP_n} = -R_n < 0, \quad \operatorname{Cos}\theta < 0$$

olduğundan, (32-8) bağıntısı, 22 için

$$\overline{PP_r} = \overline{PP_n} \operatorname{Cos}\theta = \overline{PP_n} \operatorname{Cos} \widehat{P_n P P}$$

ve 23 için de

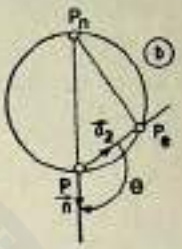
$$\overline{PP_r} = \overline{PP_n} \operatorname{Cos}\theta = -\overline{PP_n} \operatorname{Cos}(\theta + \pi) = -\overline{PP_n} \operatorname{Cos} \widehat{P_n P P_r}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 22.



Şekil 23.

Dolayısiyle, hem 22 hem de 23 hâllerinde:

P_e noktası, P_n nin PP, asal normali üzerindeki dik izdüşümüdür. Başka deyimle;

P düzgün noktasındaki bir teğetten geçen eğik kesitin P deki eğrilik ekseni, aynı teğetten geçen normal kesitin P deki eğrilik ekseninden geçer.

(32-5) denklemi gösterir ki, farklı ya da çakışık iki gerçel

$$m = \frac{dv}{du}$$

doruluşu için

$$\rho_n = 0$$

dır.

Bu iki gerçel ayrı ya da çakışık iki doğrultuya, ilerde de göreceğimiz gibi, yüzeyin P düzgün noktasındaki **asimototik doğrultuları** diyeceğiz.

Yukarıda, değişik iki biçimde ifade edilen aynı sonuç, asimptotik doğrultular dışındaki doğrultular için, yâni

$$\rho_n \neq 0$$

için doğrudur. Artık MEUSNIER teoremini ifade edebiliriz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MEUSNIER Teoremi 33-1.

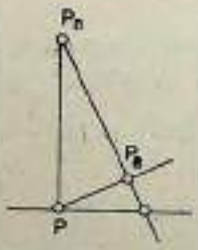
Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin P den geçen ve en az 2-nci sınıftan bir C eğrisinin P deki $\vec{a}_1$ teğeti bu noktadaki asimptotik teğetlerden farklı ise, C nin P deki $\triangle_c$ oskülatör düzlemiyle S nin C_c kesitinin P deki P_c eğrilik merkezi, aynı teğetten geçen normal kesitin P deki P_n eğrilik merkezinin, $\triangle_c$ üzerindeki dik izdüşümüdür, veya C_c nin P deki eğrilik ekseni P_n den geçer.

C_c kesiti $\vec{a}_1$ etrafında döndürüldüğünde, P_c eğrilik merkezi P den geçen ve $\vec{a}_1$ e dik olan düzlem üzerinde, bir çapını $\overline{PP_n}$ nin oluşturduğu çemberi çizer. Buna MEUSNIER çemberi denilir.

$\vec{a}_1$ den geçen C_c kesitlerinin P deki oskülatör çemberlerinin geometrik yeri de, P_n merkezli ve $\overline{P_nP}$ yarıçaplı küredir.

Tanım 33-1.

C_c nin P deki eğrilik ekseninin P deki teğet düzlemi deldiği nokta P_g ise, bu noktaya **geodezik eğrilik merkezi**, $\overline{PP_g} = \frac{1}{\rho_g}$ ye de **geodezik eğrilik yarıçapı** denilir.



Şekil 24.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Alıştırma 33-1.

P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin, P den geçen $\vec{a}_1$ teğetinin değişmesi hâlinde, $\vec{a}_1$ le tanımlanan MEUSNIER çemberinin geometrik yeri:

P düzgün noktasında koordinat çizgilerinin birbirlerine dik olduklarını varsayarsak, P de

$$(\alpha) \qquad F = 0$$

dır. Buna göre, $\vec{a}_1$ teğetinin $v =$ sâbit koordinat çizgisiyle oluşturduğu φ_1 açısının açıkatsayısı (19-15;3) veya (19-31) gereğince

$$\overline{m} = \operatorname{tg} \varphi_1 = \sqrt{\frac{\overline{G}}{E}}\, m\,, \qquad m = \frac{dv}{du}$$

dır. (Burada, $m = \dfrac{dv}{du}$ nun, $\vec{a}_1$ doğrultusunda hesaplandığını anımsamakta yarar vardır.) Öte yandan, koordinat çizgilerinin, (19-29) formülleriyle tanımlanan $\vec{t}$, $\vec{t}^*$ teğet birim vektörleri ve $\vec{n}$ normal birim vektörünün oluşturdukları $P(\vec{t}, \vec{t}^*, \vec{n})$ dik karteziyen koordinat sistemine göre P de $\vec{a}_1$ le tanımlanan MEUSNIER çemberinin denklemleri

$$\begin{cases} x_2 = \sqrt{\dfrac{\overline{G}}{E}}\; m\, x_1 \\ \sum_{\nu=1}^{3} x_\nu^2 = R_n x_3 \end{cases}$$

tür. R_n de, (31-6) dolayısiyle ve (α) nedeniyle

$$\frac{1}{R_n} = \frac{N m^2 + 2 M m + L}{G m^2 + E}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Son üç denklem arasında m ve R_n yokedildiğinde, geometrik yer olarak

$$(33\text{-}1) \qquad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\left(\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1x_2 + \frac{N}{G}x_2^2\right) - x_3(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

dördüncü derece yüzeyi elde edilir.

Uyarı 33-1.

Elde edilen 4-üncü derece yüzeyinin sonsuzdaki noktaları,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

izotrop konisi ve Px_3 ekseninden geçen ve

$$\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1x_2 + \frac{N}{G}x_2^2 = 0$$

denklemiyle tanımlanan iki düzlemle verilmiştir. Bu sonuncusu, daha önce bir yana bıraktığımız

$$\rho_n = 0$$

hâlini de kapsar, yâni P noktasındaki 2 asimptotik doğrultu ile belirli olan iki normal eğrilik merkezini de içerir.

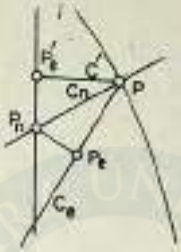
Uygulama 33-1.

Bir dönel yüzeyde, herhangi bir meridyene dik bir kesitin, meridyeni kestiği noktadaki eğrilik merkezi.

Bir dönel yüzeyin herhangi bir düzgün noktası P, bu noktadan geçen meridyen düzleme dik teğet, PT ve PT den geçen bir düzlem kesit de C_n olsun. Dönel yüzeyin, P yakınlarında en az 2-nci sınıftan olduğunu varsayıyoruz.

PT teğetinden geçen C' paralelinin, C_n normal kesitinin ve C_n nin, eğrilik merkezleri sırasıyle P'_n, P_n, P_n olsun. MEUSNIER teoremi gereğince, C' paralelinin P'_n den geçen eğrilik ekseni —dönel silindirin ekseni— P_n den geçer. O hâlde, P_n den C_n düzlemine indirilen dikmenin ayağı P_n dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 25.

34. Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen normal kesitlerin bu noktadaki eğriliklerinin değişimi.

(32-5) bağıntısının paydası, gerçel elemanlar için, daima pozitif olduğundan, ρ_n nin işareti

$$D = M^2 - LN$$

diskriminantının işaretine bağlıdır. Buna göre, dört ayrı hâl gözden geçirilir.

a) $D < O$. Düzgün bir P noktasında bu hâl gerçekleştiğinde, P den geçen hangi teğet doğrultusu seçilirse seçilsin, ρ_n nin işareti hep aynı kalır. § 24-b de, yüzeyin bu tür düzgün bir P noktasına **eliptik** denildiğini görmüştük.

b) $D > O$ Yüzeyin düzgün bir P noktasında bu hâl oluşuyorsa, P den geçen değişik teğet doğrultularıyla birlikte, ρ_n iki kez işaret değiştirir ve iki ayrı teğet doğrultusu için sıfır olur. Gene aynı § 24-b de böyle bir P düzgün noktasına **hiperbolik** denildiğini söylemiştik.

c) $D = O$. Yüzeyin düzgün bir P noktasında bu koşulun varlığı demek, ρ_n nin, çakışık bir tek teğet doğrultusu için sıfıra eşit olması ve öteki tüm doğrultular için işaretini değiştirmemesi demektir. Böyle bir noktaya da **parabolik** denildiğini, gene § 24-b de kaydetmiştik.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

d) $D = 0$, $L=M=N=0$ Böyle bir noktada II formu özdeş olarak sıfır olduğundan, ρ_n her doğrultu için sıfırdır. Bu koşullara uyan bir noktaya da **parabolik-göbek** veya **düzlük noktası** denildiğini, § 24, 3, β de görmüştük.

a_1. Eliptik noktada DUPIN göstergesi

Yüzeyin bir P noktası eliptik ise, bu noktada

$$M^2 - LN < 0$$

veya

(34-1) $$M^2 < LN$$

dir. Sonuncu eşitsizliğe göre: **L ve N kat sayılarının ikisi de aynı işaretlidir.** Bu ortak işaret, pozitif olarak seçilebilir. Gerçekten, işaret esasen pozitif değilse, yeni $\bar{u}$, $\bar{v}$ koordinatları

$$\bar{u} = v, \quad \bar{v} = u$$

biçiminde alındığında, yani u ile v nin rolleri değiştirildiğinde, (24-4) ve (23-5) formülleri gösterir ki

$$-\bar{L} = N, \; -\bar{M} = M, \; -\bar{N} = L, \; \bar{E} = G, \; \bar{F} = F, \; \bar{G} = E, \; \bar{m} = \frac{1}{m}$$

olur ve (32-5) in paydası daima pozitif kalacağından, gerektiğinde yukarıki değişiklik yapılarak, ρ_n, **eliptik noktada hep pozitif olarak alınabilir.** Bu değişim, $\vec{n}$ nin de yönünü değiştireceğinden

$$\bar{II} = -\vec{n} \cdot d^2\vec{x} = -II$$

olur.

Anımsanması gereken bir nokta da, eliptik noktada, (34-1) nedeniyle

$$L \neq 0, \quad N \neq 0$$

olmalıdır.

Bunlar anlaşıldıktan sonra, eliptik noktada, bundan böyle

$$\rho_n > 0$$

olarak alacağız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buna göre, yüzeyin P **düzgün** ve **eliptik** noktasından geçen herhangi bir C_n normal kesitinin P deki $\vec{a}_1$ teğeti üzerinde

$$(34\text{-}2) \qquad \overrightarrow{PP_1} = \sqrt{R_n}\,\vec{a}_1 = \sqrt{R_n}\left(\sqrt{E}\,\frac{du}{ds}\,\vec{t} + \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}\,\vec{t}^*\right),\ R_n > 0$$

vektörel denklemiyle tanımlanan P_1 noktasının geometrik yerini arıyalım. Koordinat çizgilerinin $\vec{t}$, $\vec{t}^*$ teğet birim vektörleriyle tanımlanan $P(\vec{t}, \vec{t}^*)$ koordinat eksenlerine göre P_1 noktasının (x_1, x_2) koordinatları

$$(34\text{-}3) \qquad x_1 = \sqrt{R_n}\,\sqrt{E}\,\frac{du}{ds};\quad x_2 = \sqrt{R_n}\,\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}$$

dir.

Bu son iki eşitlikten çıkarılacak $\frac{du}{ds}$ ve $\frac{dv}{ds}$ i, (32-5) de, yâni

$$\rho_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\,\frac{du}{ds}\,\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

de yerlerine koyduğumuzda

$$(34\text{-}4) \qquad \frac{L}{E}\,x_1^2 + 2\,\frac{M}{\sqrt{EG}}\,x_1 x_2 + \frac{N}{G}\,x_2^2 = 1$$

denkleminin gösterdiği P merkezli koniği elde ederiz. Sonsuzda gerçel noktası bulunmayan —çünkü $\rho_n \neq 0$ dır— bu konik: P **merkezli gerçel bir elipstir.** Aşağıdaki teorem, buraya kadar bulunan sonuçları özetlemektedir:

DUPIN Teoremi 34-1.

Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi için P noktası eliptik ise, P den geçen normal kesitlerin P deki eğrilik yarıçaplarının kare köküne eşit bir uzunluğun, normal kesitlerin P deki teğetleri üzerinde P den itibaren alınmalarıyla bulunan P_1 noktalarının geometrik yeri, P merkezli gerçel bir elipstir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu elipse, P eliptik noktasının DUPIN göstergesi denilir. P noktasına **eliptik** denilmesinin nedeni de budur.

Uyarı 34-1.

Koordinat çizgileri arasındaki açı α olduğuna göre, (19-17; 1) formülü gereğince

$$\cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

dir; dolayısiyle, (13-4) bağıntısında $\sqrt{EG}$ yerine $\frac{F}{\cos \alpha}$ konulduğunda

(34-4)' $$\frac{L}{E} x_1^2 + 2 \frac{M}{F} \cos \alpha \, x_1 x_2 + \frac{N}{G} x_2^2 = 1$$

olur.

MONGE gösterilişinde DUPIN göstergesi

Bir yüzeyin MONGE gösterilişinde, (17-21) ve (24-10) denklemleri nedeniyle, eksenlerin dik olmaları hâlinde, (34-4) denklemi

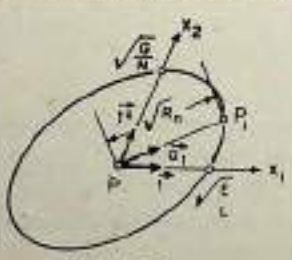
(34-5) $$\frac{r}{1+p^2} x_1^2 + 2 \frac{s}{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}} x_1 x_2 + \frac{t}{1+q^2} x_2^2 = 1$$

biçimindedir.

Alınan noktada, yüzeyin normali üçüncü koordinat eksenine paralelse, yâni $p=q=0$ ise, (34-5) denklemi

(34-6) $$r x_1^2 + 2 s \, x_1 x_2 + t \, x_2^2 = 1$$

olur. Eliptik nokta söz konusu olduğundan, P de $s^2 - rt < 0$ dır.



Şekil 26.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 34-2.

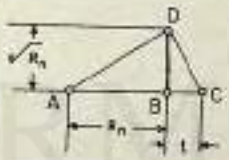
DUPIN göstergesini oluşturan elipsin boyutları, uzunluk biriminin seçimine bağlıdır. Gerçekten, bunun için, bir uzunluğun kare kökünün, geometrik olarak, nasıl alındığını anımsamamız yeterlidir. Örneğin, bu çizimlerden birisi şöyledir:

$$\overline{AB} = R_1, \quad \overline{BC} = 1$$

alınır ve $\overline{AC}$ çaplı çemberin, B den AC doğrusuna çıkılan dikmeyi kestiği iki noktadan birisi olan D alınır. Dik üçgenin belirli özeliği nedeniyle

$$\overline{BD} = \sqrt{R_1}$$

dir. Bu çizim gösterir ki: $\sqrt{R_1}$ uzunluğu, $\overline{BC}$ uzunluk biriminin seçimine bağlıdır.



Şekil 27.

O halde, seçilen uzunluk birimi ile değişen sonsuz DUPIN göstergesi vardır. Bunlardan herhangi birisinin eksen uzunluklarının oranı

$$\frac{\sqrt{R_1 \cdot BC}}{\sqrt{R_2 \cdot BC}},$$

uzunluk biriminin seçimine bağlı olmayacağından, kendi kendisinin benzeri kalacaktır. O hâlde, aşağıdaki teorem söz konusudur:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 34-2.

Yüzeyin düzgün bir P noktası yakınlarında sınıfı ≥ 2 ise, ve bu nokta eliptik ise, bu noktada sonsuz DUPIN elipsi vardır ve bunların hepsi ortak P merkezlerine göre homotetiktir.

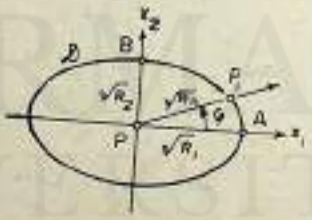
a_2. Eliptik noktada EULER formülü

Eliptik P noktasındaki sonsuz DUPIN göstergesi arasından birisini seçelim, ve bunu, D ile gösterelim. Bunun asal eksen uzunlukları $\sqrt{R_1}$ ve $\sqrt{R_2}$ asal eksenleri de Px_1, Px_2 ise, D nin bu eksenlere göre karteziyen denklemi

$$\frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2} = 1 \tag{34-7}$$

dir.

D nin herhangi bir noktasına P_1 diyelim ve $\widehat{APP_1}$ acısını φ ile gösterelim.



Şekil 28.

P_1 noktasının

$$x_1 = \sqrt{R_1}\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,,\quad x_2 = \sqrt{R_2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi \tag{34-8}$$

koordinatları, (34-7) de kullanıldıklarında, (32-4) dolayısiyle

$$\rho_n = r_1\,\mathrm{Cos}^2\varphi + r_2\,\mathrm{Sin}^2\varphi = \rho\,\mathrm{Cos}\,\theta,\ (r_1 > 0,\ r_2 > 0,\ \rho_n > 0) \tag{34-9}$$

EULER formülü elde olunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu son formülde, $\mathrm{Cos}^2\varphi$ ve $\mathrm{Sin}^2\varphi$ yerine, sırasıyla $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{Cos}\,2\varphi)$ ve $\frac{1}{2}(1 - \mathrm{Cos}\,2\varphi)$ konulduğunda

$$\rho_n = \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2}\,\mathrm{Cos}\,2\varphi \tag{34-10}$$

olur.

Tanımlar

(34-7) formülündeki R_1 ve R_2, yüzeyin P düzgün ve eliptik noktasındaki **asal eğrilik yarıçapları**dır. P noktasındaki D DUPIN göstergesinin Px_1, Px_2 eksen doğrultularına da yüzeyin P noktasındaki **asal doğrultuları** denilir. P noktasının **asal eğrilikleri** adı verilen r_1 ve r_2 ise, P deki asal doğrultulardan geçen normal kesitlerin P deki eğrilikleridir.

$$K = r_1 r_2 \quad \text{ve} \quad 2W = r_1 + r_2 \tag{34-11}$$

de sıra ile, yüzeyin P düzgün noktasındaki **GAUSS eğriliği** ve **ortalama eğriliktir.** Birincisine bazen **bütünsel eğrilik** te denilir. (34-9) EULER formülü gösterir ki:

Yüzeyin P düzgün noktasından geçen herhangi bir C eğrisinin P noktasındaki FRENET birim vektörleri $\vec{a}_\rho$, $(\rho = 1, 2, 3)$ P den geçen koordinat çizgilerinin bu noktadaki teğet birim vektörleri $\vec{t}$, $\vec{t}^*$ ve yüzeyin P deki normal birim vektörü de $\vec{n}$ ise, P noktasındaki r_1, r_2 asal eğrilikleri verildiğinde, C **nin P deki** ρ **eğriliğinin bilinmesi için**

$$\widehat{\vec{a}_2, \vec{n}} = \theta, \qquad \widehat{\vec{t}, \vec{a}_1} = \varphi$$

açılarının verilmeleri yeterlidir.

Özellikler 34-1.

a) P düzgün ve eliptik noktasından geçen normal kesitlerin P deki eğriliklerinin ekstremumları, asal doğrultularla belirli olanlardır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) P düzgün ve eliptik noktasındaki asal doğrultulara göre simetrik teğetlerden geçen normal kesitlerin P deki eğrilikleri birbirlerine eşittir.

c) φ ve $\varphi + \frac{\pi}{2}$ doğrultularındaki teğetlerden geçen normal kesitlerin P deki eğrilikleri ρ_n , $\bar{\rho}_n$ ise, (34-9) nedeniyle

$$\rho_n = r_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi + r_2 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

$$\bar{\rho}_n = r_1 \operatorname{Sin}^2 \varphi + r_2 \operatorname{Cos}^2 \varphi$$

olduğundan, bunların toplamı

(34-12) $$\rho_n + \bar{\rho}_n = r_1 + r_2 = 2W$$

dir. O halde :

Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi için P eliptik ise, P den geçen ve birbirine dik normal kesitlerin P deki eğrilikleri-nin toplamı sâbittir ve yüzeyin P deki ortalama eğriliğinin iki katına eşittir. Genellikle, P ile birlikte, söz konusu sabite de değiştir.

a₅. Eliptik noktada, yüzeyin, teğet düzleme sonsuz yakın ve paralel bir düzlemle kesiti

Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin P ye yakın bir noktası Q ise, S nin vektörel denklemi, (10-2) TAYLOR formülü yardımiyle

(34-13) $$\overrightarrow{PQ} = \Delta \vec{x} = \Delta_u \vec{x}_u + \Delta_v \vec{x}_v + \frac{1}{2}(\Delta u^2 \vec{x}_{u^2} + 2\,\Delta u\,\Delta v\,\vec{x}_{uv} + \Delta v^2 \vec{x}_{v^2} + \vec{\varepsilon}_2), \quad \lim_{\Delta u \to 0,\ \Delta v \to 0} \vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Koordinat eksenleri olarak, P noktasından geçen koordinat çizgilerinin teğetlerini ve P deki normali, yâni $P(\vec{t}, \vec{t^*}, \vec{n})$ yi aldığımızda, eliptik olduğu varsayılan P noktasındaki teğet düzleme paralel herhangi bir kesitin bir Q noktasının x_p, $(p = 1, 2, 3)$ koordinatları

(34-14) $$x_1 = \sqrt{E}\,\Delta u, \quad x_2 = \sqrt{G}\,\Delta v, \quad x_3 = \vec{n} \cdot \Delta \vec{x}$$

dir ve (24-2) dolayısıyle de

(34-15) $$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1 x_2 + \frac{N}{G}x_2^2 + \vec{n}\cdot\vec{\varepsilon}_2\right)$$

$$\lim_{\Delta u \to 0,\ \Delta v \to 0} \vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}$$

olur.

Üstelik, P eliptik noktası yakınlarında, yüzeyin, teğet düzleme göre bulunduğu yanın, $\vec{n}$ nin yönü ile belirlı olduğunu varsayarsak, Q nün üçüncü koordinatı

$$x_3 > 0$$

olur.

İstenildiği kadar küçük ve pozitif bir sayıyı ε ile gösterdiğimizde, teğet düzleme çok yakın bir kesit düzlemi için, $x_3 = \varepsilon/2$ alındığında

(34-16) $$\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1 x_2 + \frac{N}{G} = \varepsilon$$

olur. Görülüyor ki böylece elde edilen kesit, P eliptik noktasındaki sonsuz DUPIN göstergesinden birisinin eşitidir. Buna göre şu teorem söz konusudur:

Teorem 34-3.

P düzgün noktası yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi için P noktası eliptik ise, P deki teğet düzleme paralel ve sonsuz yakın bir düzlemle yüzeyi kestiğimizde, elde edilen kesit, yaklaşık olarak P deki sonsuz DUPIN göstergeleri arasından seçilen herhangi birinin benzeridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Göbek noktaları. Ombilikler.

Tanım 34-1.

P eliptik noktasında, (34-4) denklemiyle tanımlanan DUPIN göstergesi bir çemberse, P noktasına eliptik-göbek adı verilir.

P merkezli ve R yarıçaplı çemberin, koordinat çizgilerinin teğetleriyle tanımlanan $P(\vec{t}, \vec{t^*})$, $(\vec{t}, \vec{t^*} = \alpha)$ koordinat eksenlerine göre denklemi

$$x_1^2 + 2 x_1 x_2 \cos \alpha + x_2^2 = R^2$$

olduğuna göre, (34-4)' DUPIN göstergesinin bir çember olması için gerekli ve yeterli koşullar

(34-17) $$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} \left(= \frac{1}{R^2} \right)$$

dir.

Görülüyor ki: **Yüzeyin bir P eliptik noktasının, birinci tanıma göre, bir eliptik-ombilik noktası olması için gerekli ve yeterli koşullar, birinci ve ikinci temel kuvadratik formların kat sayıları, P noktasında orantılı olmalıdırlar.**

Tanım 34-2.

Yüzeyin bir P eliptik noktasından geçen normal kesitlerin eğrilikleri, teğet doğrultusu nasıl seçilirse seçilsin, hep aynı ise, böyle bir P noktasına eliptik-ombilik denilir.

(32-5) formülü gösterir ki, ρ_n nin, seçilen $m = \frac{dv}{du}$ doğrultusuna bağlı olmaması için gerekli ve yeterli koşullar,

(34-18) $$(\rho_n =) \frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = \lambda, \quad (\lambda : m = \frac{dv}{du} \text{ ya bağlı olmayan bir sayı})$$

dır.

Bir yüzeyin eliptik ombilik noktalarının (u, v) eğrisel koordinatları, (34-17) veya (34-18) dolayısiyle,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

denklemlerinin ortak çözümleridir. Böylece, bağımsız iki denklem elde edildiğinden; genelikle: **verilen bir yüzey üzerinde, gerçel ya da sanal, sonlu sayıda eliptik-ombilik nokta vardır.** İlerde, **tüm noktaları eliptik-ombilik olan tek gerçel yüzeyi, kürenin oluşturduğunu göreceğiz.**

Örnek 34-1.

Bir dik koordinat sisteminde

(34-19) $x_1 = a \operatorname{Cos} u \operatorname{Cos} v,\ x_2 = b \operatorname{Sin} u \operatorname{Cos} v,\ x_3 = c \operatorname{Sin} v,\ (a > b > c)$

kartezyen denklemleriyle verilen elipsoidin eliptik-ombilik noktaları (17-7), (17-16) ve (24-2) formülleri yardımıyla

$$E = (a^2 \operatorname{Sin}^2 u + b^2 \operatorname{Cos}^2 u) \operatorname{Cos}^2 v,\ F = \frac{1}{4}(a^2 - b^2) \operatorname{Sin} 2u \operatorname{Sin} 2v,$$

$$G = (a^2 \operatorname{Cos}^2 u + b^2 \operatorname{Sin}^2 u) \operatorname{Sin}^2 v + c^2 \operatorname{Cos}^2 v,\ HL = -abc \operatorname{Cos}^2 v,$$

$$HM = 0,\ HN = -abc \operatorname{Cos} v$$

bulunacağından, $M = 0$ dolayısıyla, (34-17 veya 18)

$$F = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{L}{E} = \frac{N}{G}$$

verir, yani

(34-20) $\operatorname{Sin} 2u \operatorname{Sin} 2v = 0,\ a^2 \operatorname{Sin}^2 u + b^2 \operatorname{Cos}^2 u =$

$$(a^2 \operatorname{Cos}^2 u + b^2 \operatorname{Sin}^2 u) \operatorname{Sin}^2 v + c^2 \operatorname{Cos}^2 v$$

olur.

İrdeleme

1) $\operatorname{Sin} 2u$ ve $\operatorname{Sin} 2v$ nin aynı zamanda sıfıra eşit olmaları hâlinde, nokta olarak elde edilen tepelerden hiçbiri, elipsoid dönel değilse, ombilik değildir.

2) $\operatorname{Sin} 2u = 0,\ \operatorname{Sin} 2v \neq 0.$ Bu hâlde u

$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$$

değerlerinden birine eşittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Eğer $u = 0$ ise, (34-2) denklemlerinden ikincisi

(34-21) $$\text{Sin } v = \varepsilon \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

verir. Öte yandan, (34-19) deki eşitsizlikler,

$$0 < \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} < 1$$

eşitsizliklerini sağlar. Buna göre, (34-21) den yararlanıldığında, ombiliklerin koordinatları için, (34-19) denklemleri

(34-22) $$a\varepsilon \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \quad , \; 0, \quad c\varepsilon \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

sonuçlarını verir. Böylece bulunan 4 **gerçel ombilik**, elipsoidin simetri düzlemlerine ve merkezine göre simetrik noktalardır ve dördü de $x_1 Ox_3$ düzlemi üzerindedir, yani **en küçük ve en büyük eksenlerin tanımladıkları simetri düzlemi üzerindedir.**

Eğer $u = \frac{\pi}{2}$ ise, (34-20) nin ikincisinden

$$\text{Sin}^2 v = \frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}$$

elde edilir. Oysa, (34-19) eşitsizlikleri nedeniyle, olanaksızlık vardır, zira

$$\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2} > 1$$

dir.

Nihayet, $u = \pi$ ise, gene (34-20) nin ikincisinden deminki olanaksızlık meydana gelir.

Başka yol

Bir elipsoidin, ombilik noktalarından birindeki teğet düzleme paralel bir düzlemle kesiti bir çember olacağından, elipsoidin çembersel kesitlerinden birini bulursak, buna paralel teğet düzlemlerine değme noktaları

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

da ombilikleri verir. Çember kesitlerden herhangi birisi yerine, elipsoidin merkezinden geçeni alalım. Bunun sonsuzdaki noktaları izotrop koni ile elipsoidin asimptot konisinin ortak noktalarıdır. Yani

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0$$

konilerinin ortak anadoğrularını aramak gerekir. Aranılan ortak anadoğruların $x_1 Ox_3$ koordinat düzlemi üzerindeki dik izdüşümleri

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x_1^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) x_3^2 = 0$$

veya

$$\frac{b^2-a^2}{a^2} x_1^2 + \frac{b^2-c^2}{c^2} x_3^2 = 0$$

dır, ve

$$b^2-a^2 < 0, \quad b^2-c^2 > 0$$

olduğundan, bu izdüşümler gerçeldir, yani elipsoidin merkezinden geçen çembersel kesit düzlemlerinin denklemleri

(34-23) $$x_3 = \varepsilon \frac{c}{a} \sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2}}\, x_1; \quad \varepsilon = \pm 1$$

dir. Bunlara paralel teğet düzlemlerin değme noktalarının koordinatları da (34-22) ile belirli olan koordinatlardır. Bir başka yol da şudur:

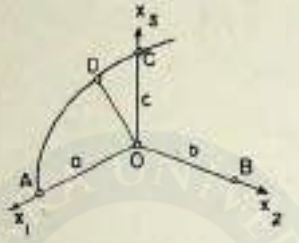
$$c < b < a$$

olarak alındığından, $x_1 Ox_3$ düzlemiyle elipsoidi keserek bulunan (a, c) eksenli elipsin çevresi üzerinde $\overline{OD} = b$ olacak biçimde bir D noktası bulunur. O ve D ve bunun $x_2 Ox_3$ koordinat düzlemine göre simetriği ile elipsoidin kesitleri, O merkezli ve b yarıçaplı çemberdir. Bu çemberden, ombiliklere, deminki gibi geçilir.

b_3. Hiperbolik noktada DUPIN göstergesi

Yüzeyin bir P düzgün noktası **hiperbolik** ise, 34, b) nedeniyle bu noktada

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 29.

$$M^2 - LN > 0$$

dır, dolayısıyla II formu, farklı iki doğrultu için, sıfıra eşittir. O halde, bu iki doğrultunun oluşturduğu bölgelerin birinden ötekine geçildiğinde, II formu işaretini değiştirecektir. P noktasına göre simetrik bölgelerde II formu aynı işaretlidir. O halde, **1** ve **3** ile gösterilen bölgelerde, örneğin $\rho_n > 0$, **2** ve **4** adı verilen bölgelerde de $\rho_n < 0$ olacağından ve bu bölgelerde P den itibaren teğetler üzerinde sıra ile $\sqrt{R_n}$ ve $\sqrt{|R_n|}$ alınacağından, hiperbolik noktadaki (34-4) ya da (34-4)' biçimlerindeki DUPIN göstergesi denklemi

$$\frac{L}{E} x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}} x_1 x_2 + \frac{N}{G} x_2^2 = \pm 1,$$

$$\frac{L}{E} x_1^2 + 2\frac{M}{F} \cos\alpha\, x_1 x_2 + \frac{N}{G} x_2^2 = \pm 1$$

olacaktır.



Şekil 30.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu denklemlerle iki **eşlenik hiperbol** tanımlanmış olur. Bu eşlenik hiperbollerin ortak asimptotlarından geçen normal kesitlerin P deki eğrilikleri sıfıra eşittir.



Şekil 31

Teorem 34-4.

Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi için P noktası hiperbolikse, P den geçen normal kesitlerin P deki eğrilik yarıçaplarının salt değerinin kare köküne eşit bir uzunluğun normal kesitlerin P deki teğetleri üzerinde P den itibaren alınmalarıyla bulunan P_1 noktalarının geometrik yeri P merkezli gerçel ve birbirinin eşleniği iki hiperboldür.

Bu hiperbollere, P hiperbolik noktasının **DUPIN göstergesi** denilir. P noktasına: **hiperbolik** denilmesinin nedeni de budur.

MONGE gösterilişinde, dik eksenlerde, DUPIN göstergesinin denklemi, (34-5) in aynıdır, yalnız bu kez $s^2 - rt > 0$ dır.

Eliptik nokta için söylediğimiz gibi: **P hiperbolik noktasında da, P ye göre homotetik, sonsuz DUPIN göstergesi vardır.**

b_1. Hiperbolik noktada EULER formülü

Hiperbolik P noktasındaki sonsuz göstergeden birisini alalım. Eliptik nokta için yapıldığı gibi davranıldığında, EULER formülü olarak, gene

(34-24) $$r_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi + r_2 \operatorname{Sin}^2 \varphi = \rho_n = \rho \operatorname{Cos} \theta$$

bulunur ama, bu kez

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

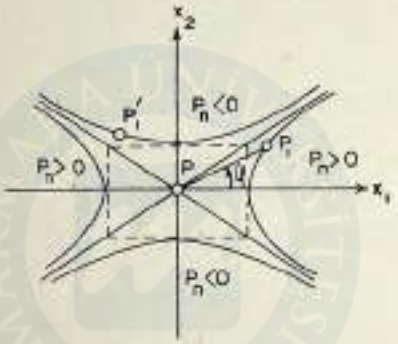
$$r_1 r_2 < 0$$

olacağından, örneğin

$$r_1 > 0, \quad r_2 < 0$$

alınabilir.

Buna göre, p_n de bölgelere göre işaret değiştirir.



Şekil 32

Hiperbolik nokta için de: **Asal doğrultu, asal eğrilik yarıçapı, asal eğrilik, ortalama eğrilik** ve **GAUSS eğriliği** terimleri aynı biçimde tanımlanır. Burada fazla olarak, göstergenin asimptotlarıyla belirli olan doğrultulara: **Asimptotik doğrultular** denilir.

Gene, P den geçen bir C eğrisinin P deki ρ eğriliği, sâdece θ ve φ ile belirlidir, elverir ki P nin asal eğrilikleri verilmiş olsun. Nihayet 34-1 özelikleri, hiperbolik nokta için de geçerlidir.

b_1. Hiperbolik noktada, yüzeyin, teğet düzleme sonsuz yakın ve paralel bir düzlemle kesiti

Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi için P **hiperbolik** ise, koordinat eksenleri olarak $P\{\vec{t}, \vec{t}^*, \vec{k}_3\}$ ü, yâni P den geçen koordinat çizgilerinin teğetlerinin birim vektörleri ve normal birim vektörüne paralel bir $\vec{k}_3$ birim vektöründen oluşan eksenleri aldığımızda, **hiperbolik** olduğu varsayılan P noktasındaki teğet düzleme paralel ve sonsuz yakın herhangi bir düzlem kesitin gelişigüzel bir Q noktasının x_p $(p=1,2,3)$ koordinatları

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x_1 = \sqrt{E}\ \Delta u,\ x_2 = \sqrt{G}\ \Delta v,\ x_3 = \vec{k}_3 \cdot \Delta \vec{x}$$

tür.

Öte taraftan, P hiperbolik noktası yakınlarında, yüzey, asimptotik doğrultuların ayırdığı bölgelere göre, teğet düzlemin farklı yanlarında bulunacağına göre, bölgelere göre

$$\vec{k}_3 = \pm \vec{n}$$

olacaktır. Dolayısıyle, (24-2) ve yukarıki eşitlik nedeniyle

$$x_3 = \pm \vec{n} \cdot \Delta \vec{x}$$

den

$$\pm x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1 x_2 + \frac{N}{G}x_2^2 + \vec{n} \cdot \vec{\varepsilon}_2\right),$$

$$\lim_{\Delta u \to 0,\ \Delta v \to 0} \vec{\varepsilon}_2 = 0$$

çıkarılır.

İstenildiği kadar küçük ve pozitif bir sayıyı ε ile gösterdiğimizde, teğet düzleme çok yakın bir kesit düzlemi için, $x_3 = \pm\varepsilon$ alındığında

$$\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1 x_2 - \frac{N}{G}x_2^2 = \pm\varepsilon \tag{34-25}$$

olur.

Görülüyor ki böylece elde edilen kesit, P hiperbolik noktasındaki sonsuz DUPIN-göstergesinden birisinin eşitidir. Söylediklerimizi şöylece özetleyebiliriz:

Teorem 34-5.

P düzgün noktası yakınlarında sınıf ≥ 2 olan bir S yüzeyi için P noktası hiperbolikse, P deki teğet düzleme paralel, bu düzlemin iki yanında ve sonsuz yakın birer düzlemle yüzeyi kestiğimizde, elde edilen kesitler, yaklaşık olarak P deki sonsuz DUPIN göstergeleri arasından seçilen herhangi birisinin benzeridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Özel hâl 34-2. Tanım 34-3.

P hiperbolik noktasında, (34-24) denklemleriyle tanımlanan eşlenik hiperbollar, ikizkenar hiperbollardan oluşuyorsa, yâni bu iki hiperbolün ortak asimptotları arasındaki açı dikse, P noktasına minima adı verilir.

Düzlemde, herhangi bir eksen sisteminde, (m_1, m_2) açıkatsayılı doğrultuların birbirlerine dik olmaları için gerekli ve yeterli koşul —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, formül (5-9)—

(34-26) $$m_1 m_2 + (m_1 + m_2) \cos \alpha + 1 = 0$$

dır.

P hiperbolik noktasındaki DUPIN göstergesinin asimptotlarının m_1, m_2 katsayılarını veren denklem de, (34-24) nedeniyle

$$\frac{N}{G} m^2 + 2 \frac{M}{\sqrt{EG}} m + \frac{L}{E} = 0 \text{ veya } \frac{N}{G} m^2 + 2 \frac{M}{F} \cos \alpha \, m + \frac{L}{E} = 0$$

olduğundan,

$$m_1 m_2 = \frac{LG}{EN} \; ; \; m_1 + m_2 = - \frac{MG}{N\sqrt{EG}} = - \frac{MG \cos \alpha}{FN}$$

değerleri, (34-26) da yerlerine konulduğunda

(34-27) $$LG + NE - MF = 0$$

bulunur.

Şu halde: **Yüzeyin bir P hiperbolik noktasının bir minima nokta olması için gerekli ve yeterli koşul, birinci ve ikinci formun katsayılarının, P noktasında (34-27) eşitliğini gerçeklemeleridir.**

(34-27) bağıntısı, u, v eğrisel koordinatları arasında bir bağıntı oluşturacağından, genellikle, herhangi bir yüzey üzerinde minima noktalardan meydan gelen bir eğri vardır.

Uyarı 34-3.

Bir eşkenar hiperbolda eksen uzunlukları birbirlerine eşit olduğundan, yüzeyin bir minima noktasında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$r_1 + r_2 = 0,$$

yâni ortalam eğrilik sıfıra eşittir.

Örnek 34-2.

Bir dik koordinat sistemine

(34-28) $$x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v, \quad x_3 = \log |uv|$$

kartezyen denklemleriyle verilen yüzey üzerinde minima noktalardan oluşan eğrinin bulunması.

(17-7) ve (24-2) formüllerini kullanarak, önce sıra ile

$$E = 1 + \frac{1}{u^2}; \quad F = \frac{1}{uv}; \quad G = u^2 + \frac{1}{v^2}; \quad HL = -\frac{1}{u},$$

$$HM = -\frac{1}{v}; \quad HN = u\left(1 - \frac{1}{v^2}\right)$$

bulunur. Buna göre, (34-27) koşulu

$$u = \pm\sqrt{v^2-1}$$

verir ve yüzey üzerinde minima noktalardan oluşan eğrilerin denklemleri, (34-28) yardımiyle

$$x_1 = c\sqrt{v^2-1}\ \cos v, \quad x_2 = c\sqrt{v^2-1}\ \sin v, \quad x_3 = \lg |v\sqrt{v^2-1}|$$

olur.

c₁) Parabolik noktada DUPIN göstergesi

Yüzeyin bir P düzgün noktası **parabolik** ise, 24, c) nedeniyle, bu noktada

(34-29) $$M^2 - LN = 0$$

dır. İki hâl ayırdedilebilir:

L, M, N katsayılarının üçü birden sıfır değildir.

Bu takdirde, II formu, yalnız bir tek çakışık teğet doğrultusu için sıfır olur ve başka doğrultular için işaretini değiştirmez. Başka deyimle, para-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bolik noktada, II formu bir tam karedir. (34-29) eşitliği, parabolik noktada, L ve N aynı zamanda sıfır olamaz. Aksi hâlde M nin de sıfır olması gerekir. Gerektiğinde u ile v nin rollerini değiştirerek, L nin işaretini

$$L > 0$$

biçiminde seçebiliriz. Buna göre

(34-30) $$II = (\sqrt{L}\,du + \sqrt{N}dv)^2$$

dir, dolayısiyle

(34-31) $$\rho_n = (\sqrt{L}\,du + \sqrt{N}\,dv)^2 / ds^2$$

yazılabileceğinden, **parabolik** noktadaki **DUPIN göstergesinin** karteziyen denklemi

(34-32) $$\sqrt{\frac{L}{E}}\,x_1 + \sqrt{\frac{N}{G}}\,x_2 = \pm 1$$

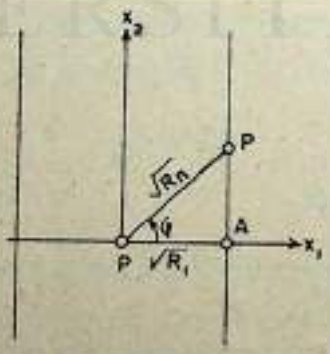
dir.

Görülüyor ki: (34-32), P ye göre simetrik, paralel iki doğru tanımlanmaktadır.

Teorem 34-6.

Bir P düzgün noktası yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi için P noktası parabolik ise, P de geçen normal kesitlerin P deki eğrilik yarıçaplarının —daima artı işaretli kılınabilir— **kare köküne eşit bir uzunluğun, normal kesitlerin P deki teğetleri üzerinde P den itibaren alınmalarıyla bulunan P_1 noktalarının geometrik yeri, P ye göre simetrik, gerçel ve birbirine paralel iki doğrudur.**

Bu iki paralel doğruya, P **parabolik** noktasının **DUPIN göstergesi** denilir. P noktasına **parabolik** denilmesinin nedeni de budur.



Şekil 33.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MONGE gösterilişinde ve dik eksenlerde, DUPIN göstergesinin denklemi, parabolik nokta için

(34-33) $$\sqrt{\frac{r}{1+p^2}}\,x_1^2 + \sqrt{\frac{t}{1+q^2}}\,x_2^2 = \pm 1 \qquad (s^2 - rt = 0)$$

dır.

Parabolik noktada da P ye göre homotetik, sonsuz DUPIN göstergesi vardır.

Parabolik noktada EULER formülü

Parabolik P noktasındaki sonsuz göstergeden birini alalım. Şekilde kolaylıkla görüleceği gibi, APP_1 üçgeninden

(34-34) $$r_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi = \rho_n \qquad (r_2 = 0)$$

eşitliği çıkarılır.

Parabolik noktada, asal doğrultular, göstergeye dik doğrultu ile, göstergenin kendi doğrultusudur. Asal eğrilik yarıçaplarının birisi R_1, ötekisi ∞ dır. Ortalama eğrilik $\frac{r_1}{2}$ GAUSS eğriliği de sıfırdır. Göstergenin kendi doğrultusu, aynı zamanda, çakışık iki asimptotik doğrultudur.

Yüzeyin P parabolik noktasındaki r_1 asal eğriliği biliniyorsa, yüzeyin P den geçen ve sınıfı en az 2 olan bir C eğrisinin P deki ρ eğriliği

(34-35) $$\rho \operatorname{Cos} \theta = r_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi$$

bağıntısıyla hesaplanacağından, sadece ρ ve θ nın bilinmesi yeterlidir. Anımsanacağı gibi, θ, C nin P deki asal normali ile yüzeyin P deki normali arasındaki açıdır.

Uyarı 34-3.

(34-34) formülü, bir eğrinin bir düzlem üzerindeki dik izdüşümünde, izdüşümün eğriliğini bulmada da kullanılır —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s III. Uyarı 1.— Eliptik nokta için sözü edilen 34-1 özelikleri, parabolik nokta için de geçerlidir. Özellikle sonuncusu, birbirine dik iki normal kesit için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(34-36) $$\rho_n + \bar{\rho}_n = r_3 = 2W$$

verir.

Örnek 34-3.

Dik koordinat sisteminde

$$x_1 = u \operatorname{Cos} v, \quad x_2 = u \operatorname{Sin} v, \quad x_3 = (a-u)^2$$

karteziyen denklemleriyle verilen yüzeyin parabolik noktaları (24-2) formülleri yardımiyle

$$HL = -2u, \quad M = 0, \quad HN = 2u^2(a-u)$$

bulunacağından, Parabolik noktaları veren denklem, L ve N aynı zamanda sıfır olmamak üzere

$$4u^3(a-u) = 0$$

dır.

$u = o$, L ve N yi de sıfır kıldığından, tek çözüm, $x_1 O x_2$ düzleminin

$$(u = a)$$

$$x_1 = a \operatorname{Cos} v, \quad x_2 = a \operatorname{Sin} v, \quad x_3 = 0$$

karteziyen denklemleriyle tanımlanan O merkezli ve a yarıçaplı çemberidir.

c_1) Parabolik noktada, yüzeyin, teğet düzleme sonsuz yakın ve paralel bir düzlemle kesiti

Bir P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin P ye yakın bir noktası Q ise, bunun $P(\vec{t}, \vec{t^*}, \vec{n})$ koordinat sistemine göre üçüncü x_3, koordinatı, (34-15) gereğince

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1x_2 + \frac{N}{G}x_2^2 + \vec{n}\cdot\vec{\varepsilon}_2\right);$$

$$\lim_{\Delta u \to 0,\ \Delta v \to 0} \vec{\varepsilon}_2 = \vec{0}$$

bağıntısını sağlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İstenildiği kadar küçük ve pozitif bir sayıyı ε ile gösterdiğimizde, parabolik noktasında $M^2-LN=0$ olduğundan ve aynı işaretli L, N ler pozitif alınabileceklerinden, teğet düzleme çok yakın bir kesit düzlemi için,

$$x_3 = \frac{\varepsilon}{2}$$

alındığında

$$\frac{L}{E}x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}}x_1x_2 + \frac{N}{G}x_2^2 = \varepsilon$$

veya

$$\left(\sqrt{\frac{L}{E}}\,x_1 + \sqrt{\frac{N}{G}}\,x_2\right)^2 = \varepsilon \quad \text{yani} \quad \sqrt{\frac{L}{E}}\,x_1 + \sqrt{\frac{N}{G}}\,x_2 = \pm\varepsilon$$

olur.

Görülüyor ki böylece elde edilen kesit, P parabolik noktasındaki sonsuz DUPIN göstergesinden birisinin yaklaşık olarak eşitidir.

Teorem 34.7. P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi için P noktası parabolik ise, P deki teğet düzleme paralel ve sonsuz yakın bir düzlemle yüzeyi kestiğimizde, elde edilen kesit, yaklaşık olarak P deki sonsuz DUPIN göstergesinden herhangi birinin benzeridir.

d_1) Parabolik-göbek-ombilik ya da düzlük noktasında DUPIN göstergesi

P düzgün noktasında L, M, N katsayılarının üçü birden sıfırsa, her (du, dv) doğrultusu için II kuvadratik formu sıfır olacağından

$$II = 0$$

dır. O hâlde, P den geçen tüm normal kesitlerin P deki eğrilikleri de sıfır dır, yâni P noktasında aynı zamanda

$$\rho_n = 0$$

dır. Buna göre, yüzeyin P den geçen tüm normal kesitler için P noktası bir **büküm** noktasıdır. Böyle bir noktaya **parabolik-ombilik** veya **düzlük noktası** denildiğini, bundan önce § 24 de görmüştük.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

S yüzeyinin P düzlük noktasında doğal olarak bundan öncekinden farklı, bir DUPIN göstergesi tanımlamak gerektiğinde, yüzeyin P deki teğet düzlemine paralel ve sonsuz yakın bir düzlemle elde edilecek kesitine, bu göstergenin benzer olmasına çalışılacaktır.

Yüzeyin P de ve P yakınlarındaki Q noktalarındaki sınıfı ≥ 3 ise, Q noktasında

$$\mathrm{II} = \vec{n} \cdot d^2\vec{x} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

den diferansiyel alarak

$$\vec{n} \cdot d^3\vec{x} = -d\vec{n} \cdot d^2\vec{x} = L_u\,du^3 + L_v\,du^2\,dv + 2M_u\,du^2\,dv + 2M_v\,du\,dv^2 + N_u\,du\,dv^2 + N_v\,dv^3 + L\,d(du^2) + 2M\,d(du\,dv) + N\,d(dv^2),$$

$$d\vec{n} = \vec{n}_u\,du + \vec{n}_v\,dv$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu bağıntılar, P **düzlük** noktasında, (24, 3, β) da söylediklerimize göre,

(34-37) $$\vec{n} \cdot d^2\vec{x} = L_u\,du^3 + 3L_v\,du^2\,dv + 3N_u\,du\,dv^2 + N_v\,dv^3,\quad d\vec{n} = 0$$

biçimine girerler.

Öte yandan, Q deki normalden geçen bir düzlem kesit için, Q noktasında hesaplanan

$$\frac{d^2\vec{x}}{ds^2} = \vec{x}'' = \rho\,\vec{a}_2,\quad \vec{x}''' = \frac{d^3\vec{x}}{ds^3} = -\rho^2\,\vec{a}_1 + \rho'\,\vec{a}_2,\quad (\tau = 0)$$

bağıntısı, P düzlük noktasında, $\rho = 0$ olduğundan

$$d^3\vec{x} = \rho'\,\vec{a}_2\,ds^3,\quad (\vec{a}_2 = \pm\,\vec{n})$$

(34-38) $$\vec{n} \cdot d^3\vec{x} = \pm\,\rho'\,ds^3$$

bulunur. O hâlde, bu son eşitlik yardımiyle, (34-35) |

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(34-39) $$L_0 u^{*3} + 3 L_1 u^{*2} v^* + 3 N_2 u^* v^{*2} + N_3 v^{*3} = \pm \rho^{*3}$$

biçiminde yazabiliriz.

P düzlük noktasında DUPIN göstergesi

Yüzeyin P **düzgün** ve **düzlük** noktasından geçen herhangi bir C_n normal kesitinin P deki $\vec{a}_1$ teğeti üzerinde

(34-40) $$\overrightarrow{PP_1} = \left(\frac{1}{\rho^*}\right)^{1/2} \vec{a}_1 = \left(\frac{1}{\rho^*}\right)^{1/2} (\sqrt{E}\, u^* \vec{t} + \sqrt{G}\, v^* \vec{t^*})$$

vektörel denklemiyle tanımlanan P_1 noktasının geometrik yeri, P düzlük noktasının, tanım gereğince, **DUPIN göstergesi**dir.

$P\{\vec{t}, \vec{t^*}\}$ koordinat eksenlerine göre, P_1 noktasının (x_1, x_2) koordinatları

(34-41) $$x_1 = \left(\frac{1}{\rho^*}\right)^{1/3} \sqrt{E}\, u^*, \quad x_2 = \left(\frac{1}{\rho^*}\right)^{1/3} \sqrt{G}\, v^*$$

olduğundan, (34-11) bağıntılarından çıkarılacak u^*, v^* değerleri, (34-39) da yerlerine konulacak olursa,

(34-42) $$\frac{L_0}{E^{3/2}} x_1^3 + 3 \frac{L_1}{E\sqrt{G}} x_1^2 x_2 + 3 \frac{N_2}{\sqrt{E}\,G} x_1 x_2^2 + \frac{N_3}{G\sqrt{G}} x_2^3 = \pm 1$$

bulunur.

Böylece elde edilen denklem, P düzlük noktasında, (34-40) eşitliği ile tanımlanan DUPIN göstergesini verir. Bu eğri, P merkezine göre simetrik iki **kübikten** oluşur.

Teorem 34-8.

P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyi için P bir düzlük noktası ise, P den geçen normal kesitlerin P deki eğrilikleri sıfıra eşittir. Bu normal kesitlerin P deki teğetleri üzerinde P den itibaren

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$(\frac{1}{\rho^\circ})^{1/3}$ **uzunluğunun alınmasıyla bulunan P_1 noktalarının geometrik yeri, P merkezine göre simetrik iki kübikten oluşur, elverir ki P düzlük noktasında L_v, L_v, N_v, N_v katsayılarının dördü birden sıfır olmasın.**

Bu kübiğin, genellikle, 3 gerçel asimptotik doğrultusu vardır. Bunların $x_2/x_1 = m$ açı katsayıları, (34-42) sol yanını sıfıra eşit kılarak bulunur:

$$(34\text{-}43) \qquad \frac{N_v}{G\sqrt{G}}m^3 + 3\frac{N_u}{\sqrt{E}\,\overline{G}}m^2 + 3\frac{L_v}{E\sqrt{G}}m + \frac{L_u}{E\sqrt{E}} = 0$$

Bunların $\frac{dv}{du}$ doğrultuları, (34-11) den

$$(34\text{-}44) \qquad \frac{dv}{du} = (\sqrt{E}/\sqrt{G})\,m$$

biçiminde çıkarılacağından, (34-43) de yerine konulduğunda

$$L_u\,du^3 + 3L_v\,du^2\,dv + 3N_u\,du\,dv^2 + N_v\,dv^3 = 0$$

denklemi, yâni (24-13) elde edilir ki, bunlar da P düzlük noktasındaki **teğet düzlemle yüzeyin arakesit doğrularıdır.** Şu hâller söz konusu olabilir:

a_1) Üç gerçel ve farklı asimptot.
a_2) 1 gerçel ve iki çakışık gerçel asimptot.
a_3) Üç gerçel çakışık asimptot.
a_4) Bir gerçel, iki farklı sanal asimptot.

d_2) Parabolik-ombilik ya da düzlük noktasında, yüzeyin, teğet düzleme sonsuz yakın ve paralel bir düzlemle kesiti

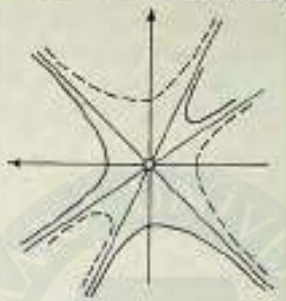
Bundan önceki eliptik, hiperbolik ya da parabolik nokta hâllerinde yapıldığı gibi hareket edildiğinde görülür ki:

Teorem 34-9.

P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı ≥ 3 bir S yüzeyi için P noktası bir düzlük noktası ise, P deki teğet iki yanında, sonsuz yakın ve para-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

lel birer düzlemle yüzeyi kestiğimizde, elde edilecek kesit, yaklaşık olarak, P noktasındaki DUPIN göstergesinin benzeridir.



Şekil 34.

Uyarı 34-4.

Eğer P düzlük noktasında L_r, L_s, N_s, N_r katsayılarının dördü birden sıfırsa,

$$\vec{n} \cdot d^q \vec{x} \neq 0, \quad (q > 3)$$

bağıntısını sağlıyan ilk q mertebesi için aynı işlemler yapılır.

35. Teğet yüzeylere uygulama

Analitik Geometri'den bilindiği gibi, bir P noktasında birbirine teğet iki S_1, S_2 yüzeyinin C_{12} arakesitinin P noktası **bir ikikat** noktadır, yâni C_{12} nin P noktasından iki kolu geçer. Bu kolların P noktasındaki eğrilik eksenleri, S_1 ve S_2 nin P noktasında ortak olan normallerini, sıra ile, C'_{12}, C''_{12} noktalarında keser. O hâlde, S_1 ve S_2 nin P deki DUPIN göstergelerini çizerken, P noktasından geçen iki kolun P deki teğetleri üzerinde

$$\overline{PP'_1} = \sqrt{\overline{PC'_{12}}}, \quad \overline{PP''_1} = \sqrt{\overline{PC''_{12}}}$$

uzunluklarını almak gerekeceğine göre, söz konusu teğetler, S_1 ve S_2 yüzeylerinin, P noktasındaki ortak teğet düzlemleri üzerinde bulunan P merkezli DUPIN göstergelerinin, P den geçen ortak kirişleridir.

Teorem 35-1.

Ortak P değme noktaları ve yakınlarında sınıfları ≥ 2 olan S_1, S_2 yüzeylerinin C_{12} arakesitlerinin, bir ikikat noktası olan P deki teğetleri, S_1 ve S_2 nin P deki DUPIN göstergelerinin P den geçen ortak kirişleridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Görülüyor ki bu teğetlerin çizimle bulunabilmeleri için, aynı merkezli iki koniğin —yani bir elips, bir çember, bir hiperbol, veya paralel iki doğrunun— ortak noktalarının çizimle elde edilmeleri söz konusudur. Aynı merkezli iki koniğin gerçel, sanal, çakışık dört ortak noktası vardır. Fakat bunlar, ikişer ikişer, ortak merkeze göre simetrik olduklarından, bir ikinci derece problemi söz konusudur, yani çizim yalnız cetvel ve pergelle yapılabilir. Noktaların türüne göre, şu kombinezonları ele almak gerekir:

1) Aynı merkezli iki elips.
2) Aynı merkezli bir elips ve bir çember.
3) Aynı merkezli iki çember.
4) Aynı merkezli iki hiperbol.
5) Aynı merkeze göre simetrik ayrı iki paralel doğru.
6) Aynı merkezli bir elipsle bir hiperbol.
7) Aynı merkezli bir elipsle paralel iki doğru.
8) Aynı merkezli bir çemberle paralel iki doğru.
9) Aynı merkezli bir hiperbolla paralel iki doğru.
10) Aynı merkezli bir çemberle bir hiperbol.

Bu 10 hâlden, (3, 5, 7, 8, 9) la gösterilenler, üzerinde durulmayacak kadar, açık olanlardır. Yalnız şunu söyleyelim ki 3 hâlinde, P noktasındaki ortak teğet düzlemin P den geçen izotrop doğruları söz konusudur.

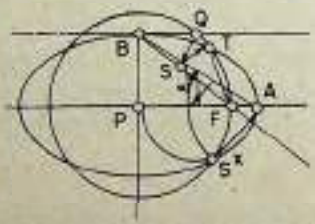
Geriye kalanları iki ana gruba ayıracağız:

I) **Aynı merkezli bir çemberle bir koniğin ortak noktaları** (2, 10).

II) **Aynı merkezli iki koniğin ortak noktaları** (1, 4, 6).

I. Aynı merkezli bir çemberle bir konik.

a) Aynı merkezli bir çemberle bir elips



Şekil 35

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

A, B tepeli, O merkezli ve a, b yarı eksen uzunluklu elips O(R), (R>b) çemberinin kestiği dört noktadan, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ bölgesinde bulunanı T olsun. Elipsin aynı bölgede bulunan odağına F, ötekine de F' dersek, bilindiği gibi

(35-1)) $\overset{\frown}{TF} = a - ex, \quad \overset{\frown}{TF'} = a + ex, \quad e = \frac{c}{b}; \quad c = \overline{BF}$

dir.

O(R) çemberinin, B tepesindeki teğeti kestiği noktalardan T ye yakın olanı Q ise,

(35-2) $\overline{BQ}^2 = R^2 - b^2$

dir. Öte yandan, analitik olarak, verilen elips ve çemberin denklemlerinden

(35-3) $R^2 - b^2 = e^2 x^2$

bulunacağından, (35-2) ve(35-3) den

(35-4) $\overline{BQ} = ex$

sonucu çıkar.

B(BQ = ex) çemberinin, BF doğrusunu, B ve F noktaları arasında olmak üzere, kestiği nokta S ise, (35-1; 1) nedeniyle,

(35-5) $\overline{FS} = a - ex = \overline{TF}$

dir. Buna göre çizim şöyledir:

Verilen O(R) çemberinin, B tepesindeki teğeti kestiği iki noktadan, F ye yakın olan Q alınır. B(BQ) çemberinin, BF yi kestiği iki noktadan, B ve F arasında bulunan S işaretlenir. F(FS) çemberi, aranılan noktalardan biri olan T den geçer.

Çizimin yapılabilmesi için

$$b \leq R \leq c$$

olmalıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Başka yol

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

çemberi ile

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

elipsinin ortak noktalarını $O = P$ merkezine birleştiren doğru demetinin denklemi

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}\right) = 0,$$

veya

$$x_2^2 = \frac{a^2 - R^2}{R^2 - b^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} x_1^2$$

dir. O hâlde bu iki doğrunun açıkatsayıları

(35-6) $$m_{1,2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{\sqrt{R^2 - b^2}}$$

olur.

Çizim şöyledir:

OAB üçgeninde

(35-7) $$\operatorname{tg} \widehat{OAB} = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$$

dir. Bundan önce görüldüğü gibi de

(35-8) $$\overline{BQ} = \sqrt{R^2 - b^2}$$

dir.

$\overline{OA}$ çaplı çemberle O(R) çemberinin S^* kesim noktası yardımiyle de

(35-9) $$\overline{AS^*} = \sqrt{a^2 - R^2}$$

dir. O halde, (35-6), (35-7), (35-8) ve (35-9) bağıntılarından

(35-10) $$m_{1,2} = \frac{\overline{AS}}{\overline{BQ}} \operatorname{tg} \alpha$$

çıkar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 36.

A(AS*) çemberinin OA yı kestiği U noktasından PB ye çizilen paralelin AB yi kestiği V noktasından PA ya paralel doğru geçirilir. Q dan PA ya indirilen dikmenin bunu kestiği Z noktası P ye birleştirildiğinde, O(R) çemberinin elipsi kestiği noktalardan biri olan T den geçen bir doğru elde edilir.

İlk çizim, görüldüğü gibi, çok daha basittir.

b) Aynı merkezli bir çemberle bir hiperbol

P merkezli, (a, b) yarı-eksen uzunluklu hiperbolü, O(R), (R > a) çemberinin kestiği 4 noktadan, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ bölgesinde bulunanı T olsun. Elipsin aynı bölgede bulunan odağına F diyelim. Buna göre

$$\overline{TF} = ex - a\,, \quad e = \frac{c}{a}$$

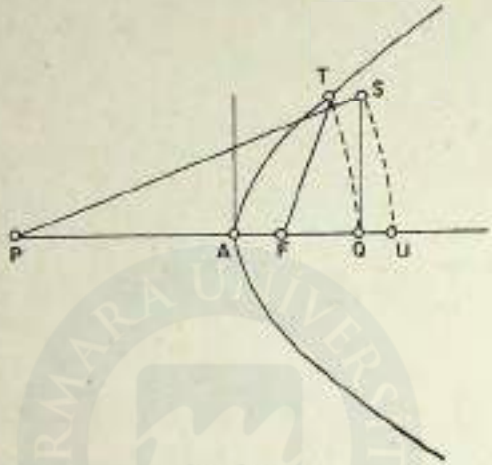
dir.

P(R) çemberiyle $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1 = 0$ hiperbolünü kestiğimizde, T kesim noktasının apsisi olarak

$$ex = \sqrt{R^2 + b^2}$$

bulunacağından, P(R) çemberinin PA eksenini kestiği ik noktadan A ya yakın olanı Q ise Q dan PA ya çıkılan dikme üzerinde $\overline{Qs} = b$ alındığında, $PS = \sqrt{R^2 + b^2}$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 37.

P(PS) çemberinin PA yı kestiği iki noktadan da Q ye yakın olan U noktası, $\overline{AU} = \overline{PU} - a = ex - a = \overline{FT}$ vereceğinden, F(AU) çemberi, P(R) çemberini T de keser.

Çizimin yapılabilmesi için $\overline{AU}$ uzunluğu

$$e - a \leqslant \overline{AU} \leqslant c + R$$

eşitsizliklerini sağlamalıdır.

Başka yol

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2$$

çemberi ile

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

hiperbolünün ortak noktalarını P merkezine birleştiren doğru demetinin denklemi

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right) = 0$$

veya

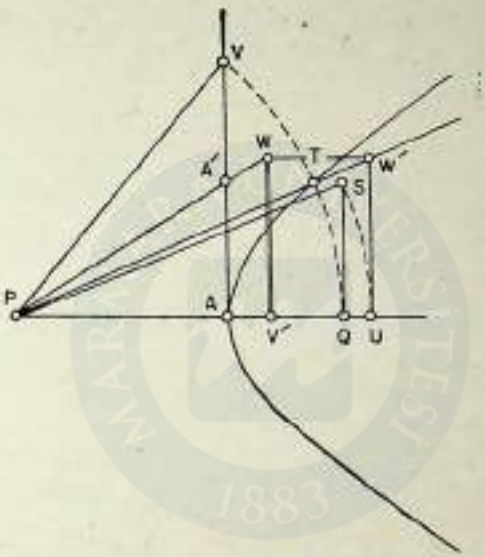
$$x_2 = \pm \frac{b}{a} \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{\sqrt{R^2 - b^2}} x_1$$

olduğundan, bunların açıkatsayıları

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$m_{1,2} = \pm \frac{b}{a} \frac{\sqrt{R^2-a^2}}{\sqrt{R^2-b^2}}$$

ye eşittir.



Şekil 38.

Çizim şöyle yapılır:

A tepesindeki teğet üzerinde

$$\overline{AA'} = b$$

alınır ve bu teğeti, P(R) çemberinin kestiği V noktası işaretlenirse,

$$\overline{AV} = \sqrt{R^2-a^2}$$

olur. Öte yandan,

$$\overline{PV'} = \overline{AV}$$

alınır ve V' den PA ya çıkılan dikmenin PA' doğrusunu kestiği W noktası bulunursa,

$$\overline{V'W} = \sqrt{R^2-a^2} \cdot \frac{b}{c}$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Demink çizimde de görüldüğü gibi

$$\overline{PS} = \sqrt{R^2 + b^2}$$

dir. O hâlde, P(PS) çemberinin PA eksenini kestiği U noktasından, aynı eksene çıkılan dikme üzerinde

$$\overline{UW'} = \overline{V'W}$$

olmak üzere bulunan W' noktasını P ye birleştirdiğimizde, bu doğru, P(R) çemberini T de keser.

Bundan önceki çizim daha kısadır.

36. Genel hâlde asal eğriliklerle ortalama ve GAUSS eğrilikleri

P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi verildiğinde, (L, M, N) katsayılarının üçü birden sıfır olmamak koşulu ile, P noktasında, (31-5) formülü gereğince

$$\frac{1}{R_n} = \frac{Nm^2 + 2Mm + L}{Gm^2 + 2Fm + E}; \quad m = \frac{dv}{du}$$

dur ve daha önce söylediğimiz gibi, $\frac{1}{R_n}$ bir **doğrultu fonksiyonu**dur. Bu denklem, m nin kuvvetlerine göre sıralanıp yazıldığında,

(36-1) $$(NR_n - G)m^2 + 2(MR_n - F)m + LR_n - E = 0$$

olur.

Özelikler 34-1, b de söylediklerimizi anımsayacak olursak: P düzgün noktasının —eliptik, hiperbolik, parabolik gibi— türü ne olursa olsun, asal doğrultulara göre simetrik iki doğrultu için $\frac{1}{R_n}$ ler aynıdır. Eğer doğrultu olarak, asal doğrultulardan birisi alınırsa, başka deyimle

$$R_n = R_1 \quad \text{veya} \quad R_n = R_2$$

olarak seçilirse, (36-1) in ikikat kökü olur, yâni bunun diskriminantı

$$(MR_n - F)^2 - (NR_n - G)(LR_n - E) = 0$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(36-2) $$(M^2-LN)\,R_n^2-(2FM-EN-GL)\,R_n-(EG-F^2)=0$$

olur. Buradan $\frac{1}{R_n}=\rho_n$ denildiğinde

(36-3) $$(EG-F^2)\,\rho_n^2-(EN+GL-2FM)\,\rho_n+(LN-M^2)=0$$

elde edilir.

O hâlde, en genel hâlde

(36-4) $$W=\frac{1}{2}(r_1+r_2)=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}\,,\quad K=r_1r_2=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

dir.

Daha önce de söylediğimiz gibi, bunlar sıra ile, S yüzeyinin P düzgün noktasındaki **ortalama eğriliği** ile **GAUSS eğriliği**dir.

İlk verilen tanımları nedeniyle, hem ortalama eğrilik, hem de GAUSS eğriliği birer **diferansiyel invariyanttır,** yâni yüzey üzerindeki eğrisel koordinatlar nasıl seçilirse seçilsin, bu değerler aynı kalır. Bu özelik, ilk tanımlara bağlı kalmadan, genel olarak da gösterilebilir.

Teorem 36-1.

Parabolik-ombilik olmayan bir P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}\,;\quad W=\frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}$$

formülleriyle tanımlanan GAUSS eğriliği ile ortalama eğrilik, birer diferansiyel invariyanttır, yâni (u, v) eğrisel koordinatları yerine, en az 1-inci sınıftan

$$\bar{u}=f(u,v),\quad \bar{v}=g(u,v)$$

fonksiyonları ile tanımlanan yeni bir $(\bar{u},\bar{v})$ eğrisel koordinat sistemi alındığında,

(36-5) $$\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{\bar{L}\bar{N}-\bar{M}^2}{\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2}\,,$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(36\text{-}6)\qquad \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}=\frac{\bar{E}\bar{N}+\bar{G}\bar{L}-2\bar{F}\bar{M}}{2(\bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2)}$$

dir.

Bu sonuçlara, (17-26) ve (24-2) formüllerini kullanarak, kolaylıkla varılır.

Uyarı 36-1.

(36-5) eşitliğindeki paydalar, (17-16) gereğince

$$(\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v)^2 = EG-F^2 > 0,\quad \vec{x}_{\bar{u}} \wedge \vec{x}_{\bar{v}} = \bar{E}\bar{G}-\bar{F}^2 > 0$$

olduğundan, paylar, hangi eğrisel koordinatlar alınırsa alınsın, aynı işaretlidirler. Dolayısıyle, yüzeyin P düzgün noktalarının —eliptik, parabolik, hiperbolik gibi— türleri, eğirisel koordinat değişiminden etkilenmez. —**Uyarı 24-4**'e bakınız.—

Aynı sonuca, (24-12) formüllerinden elde edilen

$$(36\text{-}7)\qquad \bar{E}\bar{N}-\bar{M}^2=\frac{1}{D^2}(LN-M^2),\quad D=\frac{D(f,g)}{D(u,v)}$$

bağıntısı yardımıyla da varılabilir.

36-1. GAUSS eğriliği, sadece birinci formun katsayılarına bağlıdır.

Teorem 28-1 dolayısiyle, aşağıdaki teorem söz konusudur:

Teorem 36-2. Eliptik ya da parabolik-göbek noktasından farklı düzgün bir P noktasında ve yakınlarında sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzeyin P noktasındaki GAUSS eğriliği, birinci kuvadratik formun katsayıları ve bunların birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden bazıları yardımiyle ifade edilebilir.

36-2. Birinci kuvadratik formun katsayıları cinsinden, GAUSS eğriliğinin çeşitli biçimleri

Teorem 36-1. in konusunu oluşturan GAUSS eğriliği, en genel hâlde (28-3) ve (36-4; 2) formülleri yardımiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(36\text{-}8)\qquad H^4 K = \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{G_u}{2} \\ F & G & \frac{G_v}{2} \\ \frac{E_v}{2} & F_u - \frac{F_v}{2} & \frac{2F_{uv} - E_{v^2} - G_{u^2}}{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} E & F & \frac{E_v}{2} \\ F & G & \frac{G_u}{2} \\ \frac{E_v}{2} & \frac{G_u}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

biçiminde yazılır.

Eğer (28-2) formülünü kullanırsak, gene aynı (36-4; 2) formülü yardımıyle

$$(36\text{-}9)\qquad K = \frac{2F_{uv} - E_{v^2} - G_{u^2}}{2H^2} + \frac{1}{H^2}\{[(\Gamma^1_{12})^2 - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22}]E + [2\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}]F + [(\Gamma^2_{12})^2 - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}]G\}$$

bulunur.

Koordinat çizgilerinin bir dik şebeke oluşturmaları hâlinde, K nın alacağı biçim için, daha çabuk sonuca ulaştırması bakımından, (36-9) formülünden yararlanacağız. Bu formülde, $F = 0$ eşitliği

$$(36\text{-}10)\qquad K = -\frac{E_{v^2} + G_{u^2}}{2EG} + \frac{(\Gamma^1_{12})^2 - \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22}}{G} + \frac{(\Gamma^2_{12})^2 - \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}}{E}$$

verecektir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-9) ve (16-10) formülerini kullandığımızda

$$(36\text{-}11)\qquad \begin{cases} \dfrac{(\Gamma^1_{12})^2}{G} = \dfrac{\Gamma^1_{12}}{G}\,[(\lg H)_v - \Gamma^2_{22}], \\[2ex] \dfrac{(\Gamma^2_{12})^2}{E} = \dfrac{\Gamma^2_{12}}{E}\,[(\lg H)_u - \Gamma_{11}] \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir.

Öte yandan, $\alpha = (\pi/2)$ olduğundan, (26-12) formüllerinden

$$(36\text{-}12)\qquad \frac{\Gamma^2_{11}}{E} + \frac{\Gamma^1_{12}}{G} = 0, \quad \frac{\Gamma^1_{22}}{G} + \frac{\Gamma^2_{12}}{E} = 0$$

çıkar.

Buna göre, (36-10) nun sağ yanının 4 üncü ve 6 ncı terimleriyle, (36-11) in sağ yanlarının 2-nci terimlerini aldığımızda, (36-12) nedeniyle

$$-\frac{1}{G}\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{22} - \frac{1}{E}\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} = -\Gamma^2_{22}\left(\frac{\Gamma^1_{12}}{G} + \frac{\Gamma^2_{11}}{E}\right) = 0,$$

$$-\frac{1}{E}\Gamma^2_{12}\Gamma^1_{11} - \frac{1}{G}\Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} = -\Gamma^1_{11}\left(\frac{\Gamma^2_{12}}{E} + \frac{\Gamma^1_{22}}{G}\right) = 0$$

bulunur. O hâlde, (36-10) dan

$$K = -\frac{E_v^2 + G_u^2}{2EG} + \frac{\Gamma^1_{12}(\lg H)_v}{G} + \frac{\Gamma^2_{12}(\lg H)_u}{E}$$

sonucu çıkarılır.

Eğrisel koordinat çizgilerinin bir dik şebeke oluşturmaları hâlinde, (26-6) dolayısiyle

$$\Gamma^1_{12} = \frac{E_v}{2E}, \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{G_u}{2G}$$

olacağından, yukarıki denklem

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(36-13) $$K = -\frac{1}{2H}\cdot\frac{H E_{,2} - H_{,} E_{,} + H G_{,2} - H_{,} G_{,}}{H^2} = -\frac{1}{2H}\left[\left(\frac{E_{,}}{H}\right)_{,} + \left(\frac{G_{,}}{H}\right)_{,}\right]$$

veya

(36-14) $$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\left[\frac{(\sqrt{E})_{,}}{\sqrt{G}}\right]_{,} + \left[\frac{(\sqrt{G})_{,}}{\sqrt{E}}\right]_{,}\right\}$$

klâsik biçimini verir.

36-3. Ortalama eğrilikle GAUSS eğriliği arasında bir bağıntı

Eliptik noktada $K > 0$ hiperbolik noktada $K < 0$ parabolik noktada da $K = 0$ dır. Bir eliptik-ombilik noktasında da $r_1 = r_2 = r$ olduğundan

$$W = r, \quad K = r^2 = W^2$$

dir.

Genel olarak

$$W^2 \geqslant K$$

dır, çünkü

$$\frac{1}{4}(r_1 + r_2)^2 \geqslant r_1 r_2$$

veya

$$(r_1 - r_2)^2 \geqslant 0$$

dır ve eşitlik hâlinde, bir eliptik-ombilik nokta söz konusudur. Bu sonuca asal eğrilikleri kullanmadan da varılabilir. Şöyle ki: (36-4) yardımıyle

$$W^2 \geqslant K$$

yâni

$$\frac{(EN + GL - 2FM)^2}{4(EG - F^2)^2} \geqslant \frac{LN - M^2}{EG - F^2}; \quad EG - F^2 > 0$$

yazıldığında, buradan

$$(EN + GL - 2FM)^2 - 4(EG - F^2)(LN - M^2) \geqslant 0$$

çıkar ki bu da (36-3) ün, köklerinin ya farklı gerçel ya da çakışık gerçel olduğunu gösteren diskriminantından başka bir şey değildir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buna göre şu teoremi kaydedebiliriz:

Teorem 36-3.

Bir P düzgün noktasında ve bunun yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi verildiğinde, bunun P noktasındaki W ortalama eğriliği ile K GAUSS eğriliği arasında

$$W^2 \geqslant K$$

bağıntısı vardır; eşitlik, sadece P nin eliptik-ombilik olması hâlinde gerçekleşir.

Tanım 36-1.

W ortalama eğriliği her noktasında sıfıra eşit olan yüzeylere **minima** ya da **minimal yüzeyler** denilir. Böyle bir yüzey, (36-4) nedeniyle,

(36-15) $$EN + GL - 2FM = 0$$

denklemiyle karakterize edilir.

Özellikle, en az 2-inci sınıftan $Z_3 = g(x_1, x_2)$ fonksiyonu yardımıyla, MONGE gösterilişinde, minima yüzeylerin 2-nci mertebeden kısmî türevli denklemleri, (17-21) ve (24-10) formülleri dolayısiyle

(36-16) $$(1+p^2)t - 2pq\,s + (1+q^2)\,r = 0$$

dır.

Minima olmayan yüzeyler üzerinde de (36-8) denklemini sağlayan noktalar bulunabilir. Bunların, genellikle, yüzeyin bir eğrisi üzerinde bulunduklarını, adlarına da **minima** denildiğini, **Tanım 34-3** de görmüştük.

37. Bir yüzeyin küresel görüntüsü

Bir P düzgün noktasında ve bunun yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan **yönlendirilmiş** bir S yüzeyi verildiğinde, bunun

$$\overrightarrow{OP} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel denklemiyle verilen her P(u, v) noktası yardımıyle, bu noktadaki $\vec{n}(u, v)$ normal birim vektörünü kullanarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\overrightarrow{OP^*} = \vec{n}(u, v) = \vec{x}^*(u, v)$$

vektörel denkleniyle, O(1) birim küresi üzerinde bulunan, bir $P^*(u, v)$ noktasını tanımlayalım. Tanım gereğince $P^*(u, v)$ noktası, $P(u, v)$ noktasının, O(1) birim küresi üzerindeki **küresel görüntüsü**dür.

O(1) birim küresinin $P^*(u, v)$ noktasındaki bir normal vektörü olarak

$$\vec{n}^*(u, v) = \vec{x}^*_u(u, v) \wedge \vec{x}^*_v(u, v) = \vec{n}_u(u, v) \wedge \vec{n}_v(u, v) \neq \vec{0}$$

nü alırsak, O(1) küresi üzerindeki küresel görüntü noktaları, düzgün noktalardan oluşur. Verilen S yüzeyi ile O(1) birim küresinin, $P(u, v)$ ve $P^*(u, v)$ homolog noktalarındaki normal vektörler aynı yönlü ise, her iki yüzeyin yönlenmesi aynı, aksi hâlde birbirinin tersi olur. Bâzı hallerde, $P(u, v)$ noktasında

$$\vec{n}_u(u, v) \wedge \vec{n}_v(u, v) = \vec{0}$$

ise, homolog $P^*(u, v)$ noktasındaki yönlendirme belirsiz olur.

S yüzeyi üzerinde bir σ bölgesi ile bunun O(1) üzerindeki σ^* homoloğunu alalım ve bu bölgelerin homolog alan elemanlarını $d\sigma$, $d\sigma^*$ ile gösterelim. S ve O(1) in homolog noktalarındaki normal vektörler birbirine paralel olduklarından, aynı yönlendirmeyi sağlamak üzere, O(1)in P deki normal birim vektörü olarak $\vec{n}$ yi alırsak, (20-3) formülü gereğince

$$d\sigma = (\vec{n}, \vec{x}_u, \vec{x}_v)\, du\, dv = H\, du\, dv$$

$$d\sigma^* = (\vec{n}, \vec{n}_u, \vec{n}_v)\, du\, dv$$

olur.

(25-3) WEINGARTEN formüllerini kullandığımızda, (36-4) nedeniyle

$$d\sigma^* = du\, dv\, (\vec{n}, \vec{n}_u, \vec{n}_v) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} H\, du\, dv = K\, d\sigma$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = K$$

bulunur. O hâlde:

Teorem 37-1.

Bir P düzgün noktasında ve bunun yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin, parabolik-ombilik olmayan P noktasındaki GAUSS eğriliği, küresel görüntünün alan elemanının S yüzeyi alan elemanına olan oranına eşittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM VI

YÜZEYLERİN DIŞ ÖZELLİKLERİ

II

BÂZI EĞRİLER

38. Asimptotik çizgiler

Tanım 38.1.

Yüzeyin üzerinde bulunan ve her noktasındaki teğeti, bu noktanın asimptotik doğrularının birinden ibaret olan eğrilere **asimptotik çizgiler** denilir.

Bu eğrilerin (du, dv) doğrultuları, II formunu sıfıra eşit kılacağından, **asimptotik çizgilerin diferansiyel denklemi**

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{x} = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0 \qquad (38\text{-}1)$$

dır.

Tanım ve Teorem 24-1 dolayısiyle, hangi eğrisel koordinat sistemi seçilirse seçilsin, asimptotik çizgilerin diferansiyel denklemi aynı biçimdedir. Bu diferansiyel denklemin gerçel çözümleri olabilmesi için, asmptotik çizgileri oluşturan noktaların, hiperbolik noktalardan meydana gelmeleri gereklidir. Buna göre, şu teorem söz konusudur:

Teorem 38-1.

Her hiperbolik P noktasında ve bunun hiperbolik noktalardan oluşan yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin, her P noktasından iki ayrı ve gerçel asimptotik çizgisi geçer. Eliptik noktalardan gerçel asimptotik çiz-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

gileri geçmez. Parabolik noktalardan oluşan eğriler ise, bâzen bir asimptotik çizgidir. (Örnek 38-3) **bâzen de değildir** (örnek 38-4).

Sınıfı $\geqslant 2$ olan bir yüzey üzerinde bulunan her doğru, bu yüzeyin bir asimptotik çizgisidir. Gerçekten, böyle bir doğrunun herhangi bir P noktasındaki normalden ve doğrudan geçen düzlemle yüzeyin kesilmesi sonucunda elde edilecek normal kesitin, söz konusu doğru bir parçasıdır ve dolayısıyle, P deki normal eğrilik sıfıra eşittir.

Asimptotik çizgilerin diferansiyel denkleminin değişik biçimleri

Asimptotiklerin diferansiyel denklemini yazmak için, (38-1) de olduğu gibi, II kuvadratik formunun L, M, N katsayılarını hesaplamak şart değildir. Gerçekten, bundan önce de gördüğümüz gibi, genel halde

$$\vec{n} \cdot d^2\vec{x} = -d\vec{n} \cdot d\vec{x}$$

olduğundan, asmptotiklerin diferansiyel denklemi

(38-2) $$d\vec{n} \cdot d\vec{x} = 0$$

biçiminde de yazılabilir.

Hattâ, birim vektörü olmayan ve uzunluğu $n^* = |\vec{n^*}|$ a eşit olan bir $\vec{n^*}$ normal vektörünü aldığımızda,

$$\vec{n^*} = \varepsilon\, n^*\, \vec{n}, \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad n^* \neq 0$$

eşitliğinden

$$d\vec{n^*} = \varepsilon\, n^*\, d\vec{n} + \varepsilon\, dn^*\, \vec{n}$$

yazılabileceğinden, asimptotik çizgilerin

$$d\vec{n} \cdot d\vec{x} = 0$$

diferansiyel denklemi, herhangi bir normal vektör yardımiyle

(38-3) $$d\vec{n^*} \cdot d\vec{x} = 0$$

biçiminde de yazılabilir. Bunun karşıtı da doğrudur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Asimptotiklerin küresel görüntüsü

Bir S yüzeyinin herhangi bir asimptotik çizgisi C, bunun bir P noktasındaki normal birim vektörü $\vec{n}$ ve sâbit bir O noktasından itibaren alınan

$$\overrightarrow{OP^*} = \vec{n}$$

vektörünün P* ucunun, P ye bağlı olarak O(1) birim küresi üzerinde çizdiği eğri de C* olsun. **C* eğrisi, S nin C asimptotik çizgisinin O(1) birim küresi üzerindeki küresel görüntüsüdür.**

C ve C* eğrilerinin, homolog P ve P* noktalarındaki $\vec{dx}$ ve $\vec{dn}$ teğet doğrultuları, (38.2) gereğince birbirine diktir ve bunun tersi de doğrudur. O halde:

Teorem 38-2.

Sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi üzerindeki bir C çizgisinin S nin bir asimptotik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, C ile bunun C* küresel görüntüsünün P, P* homolog noktalarındaki teğetlerin birbirine dik olmalarıdır.

Asimptotik koordinatlar

Eğer bir yüzey üzerinde u = sâbit, v = sâbit koordinat çizgileri asimptotik çizgiler ise, bu tür eğrisel koordinatlara: **Asimptotik koordinatlar,** denilir.

Böyle bir yüzey üzerinde II formu

$$II = 2M\,du\,dv, \quad (L = 0, \quad N = 0, \quad M \neq 0)$$

biçimindedir.

Genel halde, sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin hiperbolik noktalardan oluşan bir bölgesindeki bir P(u, v) hiperbolik noktasında, II formunun diskriminantı

$$M^2 - LN > 0$$

olduğundan, bu form, aşağıdaki gibi iki çarpana ayrılabilir:

$$II = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = (m_1\,du + m_2\,dv)(m_3\,du + m_4\,dv)$$

$$= m_1 m_3\,du^2 + (m_1 m_4 + m_2 m_3)\,du\,dv + m_2 m_4\,dv^2$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(38-4) $M^2-LN = (m_1 m_4 + m_2 m_3)^2 - 4 m_1 m_2 m_3 m_4$
$= (m_1 m_4 - m_2 m_3)^2 > 0$

gerektiğinde, P(u, v) noktası yakınlarını daraltarak, $(m_1 du + m_2 dv)$ ve $(m_3 du + m_4 dv)$ lineer formları için iki f(u, v), g(u, v) integre edici çarpanla öyle iki $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ fonksiyonu bulunabilir ki

(38-5) $f(m_1 du + m_2 dv) = d\varphi, \quad g(m_3 du + m_4 dv) = d\psi$

olsun.

Eğer yeni eğrisel koordinatları

(38-6) $\bar{u} = \varphi(u, v), \quad \bar{v} = \psi(u, v)$

biçiminde seçersek, koordinat değişiminin jakobiyeni, (28-4) nedeniyle

$$\frac{D(\bar{u}, \bar{v})}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} fm_1 & fm_2 \\ gm_3 & gm_4 \end{vmatrix} = fg(m_1 m_4 - m_2 m_3) \neq 0$$

dır ve düzgün bir koordinat değişimi söz konusudur.

Yeni koordinatlar cinsinden II formu da, (38-5), (38-6) dolayısiyle

(38-7) $$II = \frac{1}{fg} d\bar{u} d\bar{v} = 0$$

biçimindedir.

Böylece, aşağıdaki teorem ispat edilmiş oluyor:

Teorem 38-3.

Bir P hiperbolik noktasında ve bunun hiperbolik noktalardan oluşan yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi verildiğinde, P noktası ve yakınları için asimptotik koordinatlar bulunabilir.

38-3 **MONGE gösterilişinde asimptotik çizgilerin diferansiyel denklemi,** (24-10) yardımiyle, en az 2-nci sınıftan bir $x_3 = f(x_1, x_2)$ fonksiyonu için

(38-8) $r dx_1^2 + 2 s dx_1 dx_2 + t dx_2^2 = 0$

biçimindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

38-4. İmplisit gösterilişte asimptotiklerin diferansiyel denklemi

(17-22)' nedeniyle, implisit gösterilişte, normalin bileşenleri: $f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$ olduğundan, (38-3) yardımıyle, asimptotiklerin diferansiyel denklemi

(38-9) $$df_{x_1} \cdot dx_1 + df_{x_2} \cdot dx_2 + df_{x_3} \cdot dx_3 = 0$$

ve

$$f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0$$

dir.

Tanım 38-2.

Yüzey üzerinde bulunan ve her noktasındaki oskülatör düzlemi, bu noktada yüzeye teğet olan eğrilere **asimptotik çizgiler**, denilir.

Bu tanım, (38-1) bağıntısından, yani (38-1) tanımından derhal çıkarılabileceği gibi, 38-1 tanımı da, 38-2 den kolaylıkla elde edilir. Dolayısiyle, 38-1 tanımından çıkarılan sonuçlar, 38-2 tanımı için de geçerlidir. Tanım 38-2 ye göre, bir çember asimptotikse, düzlemi, çember boyunca yüzeye teğetir.

Bir asimptotik çizginin eğriliği

(32-4) formülünü yani

(32-4) $$\rho_n = \rho \cos\theta$$

formülünü, bir asimptotiğin eğriliğini bulmak için kullanamayız, zira bir asimptotiğin herhangi bir P noktasında

(38-10) $$\rho_n = 0, \quad \cos\theta = 0$$

olduğundan, ρ belirsizdir. Buna göre, bir asimptotiğin eğriliğini, başka türlü hesaplamamız gerekir. Örneğin, (32-1; 2) formülü yardımıyle, önce

(38-11) $$\rho = \vec{x''} \cdot \vec{a_2}$$

yazabiliriz. Öte yandan, bir asimptotik çizginin $\vec{a_2}$ asal normal birim vektörü yüzeye teğet olduğundan, yani

$$\vec{a_2} = \vec{n} \wedge \vec{x}^{\circ}$$

bulunduğundan, bu son eşitlik, (38-11) de dikkate alındığında

(38-12) $$\rho = (\vec{n}, \vec{x}^{\circ}, \vec{x}^{\circ\circ})$$

bulunur. Eğer alınan asimptotik, yüzeyin bir $v =$ sâbit çizgisi ise, $L = 0$ dır ve

(38-13) $$\rho = u^{\circ 3}(\vec{n}, \vec{x}_u, \vec{x}_{u^2}), \quad u^{\circ} = (\sqrt{E})^{-1}$$

dir.

Bu karma çarpım, (26-5; 2) formülünü kullanarak açıldığında,

(38-14) $$\rho = \frac{H}{E^{3/2}} \Gamma_{11}^2 \; ; \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2H^2}(2EF_u - EE_v - FE_u)$$

olur.

Koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde bir dik şebeke oluşturmaları hâlinde,

$$F = 0$$

olacağından, (38-13) den, (26-15) nedeniyle

(38-15) $$\rho = -\frac{1}{2E}\frac{E_v}{\sqrt{G}} = -(\lg\sqrt{E})_v = g$$

çıkar.

Bir asimptotik çizginin burulması

Bir asimptotik çizgi boyunca, asimptotiğin binormal birim vektörü yüzeyin normal birim vektörü ile çakıştığından, yâni asimptotik boyunca

$$\vec{a_3} = \vec{n},$$

olduğundan, üçüncü FRENET formülü [FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I s. 84. (29-2)] gereğince

$$\vec{n}^{\circ} = \tau \vec{a_2}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dir. Eğer alınan asimptotik, yüzeyin bir $v=$ sâbit çizgisi ise, $L = 0$ dır ve

$$\tau = (\vec{n}^*, \vec{n}, \vec{x}^*) = u^{*2}(\vec{n}_u, \vec{n}, \vec{x}_u), \quad u^{*2} = \frac{1}{E}$$

olur.

(25-3; 1) WEINGARTEN formülü kullanıldığında,

(38-16) $$\tau = -\frac{M}{H}$$

bulunur.

Eğer aynı noktadan geçen $u =$ sâbit de bir asimptotik çizgi ise, $N=0$ dır ve burulma olarak

(38-17) $$\tau^* = \frac{M}{H}, \quad (\tau^* = -\tau)$$

elde edilir.

Öte yandan, (35-4; 2) formülüne göre, alınan noktadaki GAUSS eğriliği

$$K = -\frac{M^2}{H^2}$$

olduğundan

(38-18) $$\tau^2 = \frac{M^2}{H^2} = -K$$

dir.

Teorem 38-4.

Bir P hiperbolik noktasında ve bunun hiperbolik noktalardan oluşan yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi verildiğinde, P den geçen ve $v =$ sâbit koordinat çizgisi olarak alınan bir asimptotik çizginin P deki eğriliği

(38-19) $$\rho = -\frac{1}{2E}\frac{E_v}{\sqrt{G}} = -(\lg\sqrt{E})_v = g$$

ye eşittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İlerde göreceğimiz gibi, g değeri, asimptotiğin P deki **geodezik eğriliği** dir.

Teorem 38-5. (BELTRAMI)

Bir P hiperbolik noktasında ve bunun hiperbolik noktalardan oluşan yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi verildiğinde, P den geçen asimptotiklerin bu noktadaki burulmaları, salt değer olarak, birbirine eşittir ve çarpımları P noktasındaki GAUSS eğriliğine eşittir; yâni

$$\tau = \pm\sqrt{-K}$$

dir.

Uygulama 38-1.

Bir dik koordinat sistemine göre denklemleri

$$x_1 = u\,\mathrm{Cos}\,v, \quad x_2 = u\,\mathrm{Sin}\,v, \quad x_3 = u+v$$

olan yüzeyin asimptotik çizgilerini bulunuz.

(24-2) formüllerini kullandığımızda

$$L = 0, \quad HM = -1, \quad HN = u^2$$

bulunacağından, asimptotik çizgilerin diferansiyel denklemi

$$dv = 0, \quad -2\,du + v^2\,dv = 0$$

lineer denklemlerine ayrılır.

Birincisi

$$v = a = \text{sabit}$$

$$x_1 = v\,\mathrm{Cos}\,\alpha, \quad x_2 = u\,\mathrm{Sin}\,\alpha, \quad x_3 = u + \alpha$$

denklemleriyle tanımlanan ve Ox_3 eksenini $(\pi/4)$ açısı altında kesen doğru ailesini verir.

İkincisi de

$$x_1 = -\frac{2}{v+b}\,\mathrm{Cos}\,v, \quad x_2 = -\frac{2}{v+b}\,\mathrm{Sin}\,v, \quad x_3 = v - \frac{2}{v+b}$$

eğri ailesini tanımlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uygulama 38-2.

Bir dik koordinat sisteminde

$$x_3 = \frac{x_2}{x_1} \lg |x_1|, \quad |x_1| \geqslant 1$$

denklemiyle verilen yüzeyin asimptotik çizgilerini bulunuz.

$x_1 =$ sâbit çizgileri, Ox_1 eksenini dik olarak kesen doğrulardan oluştuğu için, asimptotik çizgi ailelerinden birini meydana getirirler.

Ötekini bulmak için

$$x_1 = e^u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = \varepsilon v u e^{-u}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

diyelim.

Buna göre, (24-2) formülleri yardımiyle

$$HL = v(2u-3), \quad HM = 1-u, \quad N = 0$$

bulunacağından, asimptotik çizgilerin diferansiyel denklemi

$$v(2u-3)\,du + 2(1-u)\,dv = 0, \quad (u = \text{sabitler bulunmuştu})$$

veya

$$\frac{2u-3}{1-u}\,du = -2\,\frac{dv}{v}$$

olur. Buradan

$$v^2(u-1) = c^2 e^{2u}$$

$$x_1 = \varepsilon e^u, \quad x_2 = c\,\varepsilon^2 \frac{e^u}{\sqrt{u-1}}, \quad x_3 = c\,\varepsilon\,e^u \frac{u}{\sqrt{u-1}}, \quad u \geqslant 1$$

çıkar.

Uygulama 38-3.

Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = v \operatorname{Cos} u, \quad x_2 = v \operatorname{Sin} u, \quad x_3 = \frac{1}{2}(v-1)^2$$

denklemleriyle verilen yüzeyin asimptotik çizgilerini bulunuz.

Bu yüzey, x_2Ox_1 düzleminde Ox_3 eksenine $x_2 = 1$ noktasında teğet olan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2-1)^2$$

parabolünün Ox_3 ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzeydir. (0, 1, 0) noktası, parabolün dönmesi sonucunda, eliptik ve hiperbolik noktalar doğuran iki bölgesinin sınır noktası olan bir parabolik noktadır. Bu noktanın çizdiği çemberin noktaları paraboliktir, ve düzlemi de, çember boyunca yüzeye teğettir. Başka deyimle, kendi boyunca, yüzeye teğet bir **parabolik çember** söz konusudur. Bu çember, aynı zamanda bir asimptotik çizgidir.



Şekil 39

Gene (24-2) denklemleri yardımıyla

$$HL = (1-v)\,v^2, \quad M = 0, \quad HN = -v$$

elde edileceğinden, asimptotiklerin diferansiyel denklemi

$$v\,[v(1-v)\,du^2 - dv^2] = 0$$

olur.

$v = 0$, $(0, 0, \frac{1}{2})$ noktası düzgün değildir.

$v = 1$, demin sözü edilen parabol-çemberi belirler.

Gerçel çözüm için

$$0 < v < 1$$

dir. Buna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = \varepsilon\, du$$

diferansiyel denklemi, integre edildiğinde,

$$v = \operatorname{Sin}^2\left(\varepsilon \frac{u}{2} + a\right), \quad a : \text{sabit}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

ve dolayısıyle asimptotik çizgiler için

$$x_1 = \operatorname{Sin}^2\left(\varepsilon \frac{u}{2} + a\right) \operatorname{Cos} u, \quad x_2 = \operatorname{Sin}^2\left(\varepsilon \frac{u}{2} + a\right) \operatorname{Sin} u,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \operatorname{Cos}^4\left(\varepsilon \frac{u}{2} + a\right)$$

bulunur.

Uygulama 38-4.

Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = v \operatorname{Cos} u, \quad x_2 = v \operatorname{Sin} u, \quad x_3 = (v-1)^2$$

denklemleriyle verilen yüzeyin asimptotik çizgilerini bulunuz.

Verilen yüzey, $x_2 Ox_1$ düzleminde bulunan

$$x_1 = (x-1)^2$$

kübiğinin Ox_3 ekseni etrafında döndürülmesiyle bulunan dönel yüzeydir. (0, 1, 0) noktası, $x_2 Ox_3$ düzleminde bulunan meridyenin, eliptik ve hiperbolik noktalarının sınırında bir parabolik noktadır. Fakat, bunun doğuracağı ve parabolik noktalardan oluşacak çemberin düzlemi yüzeye teğet değildir. Bu çember bir asimptotik değildir.

(0, 0, −1) noktası ise düzgün değildir. (24-2) formüllerini kullandığımızda

$$HL = -3v^2(v-1)^2, \quad M = 0, \quad HN = -6v(v-1)$$

bulunacağından, asimptotiklerin diferansiyel denklemi

$$3v(v-1)\left[v(v-1)\,du^2 + 2\,dv^2\right] = 0$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 40.

$v=0$ ve $v=1$, demin sözü edilen noktaları verir. Bunların dışında, gerçel çözüm için, v yi

$$0 < v < 1$$

biçiminde almak gerekir. Buna göre, gerçel asimptotik çizgileri bulmak için

$$\frac{\sqrt{2}\,dv}{\sqrt{v(1-v)}} = \varepsilon\, du, \qquad \varepsilon = \pm 1$$

diferansiyel denklemini integre etmek gerekir. Bunun çözümü de

$$v = \mathrm{Sin}^2\left(\varepsilon \frac{u}{2\sqrt{2}} + b\right), \quad b = \text{sabit}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

olduğundan, asimptotik çizgilerin denklemleri

$$x_1 = \mathrm{Sin}^2\left(\varepsilon \frac{u}{2\sqrt{2}} + b\right) \mathrm{Cos}\, u, \quad x_2 = \mathrm{Sin}^2\left(\varepsilon \frac{u}{2\sqrt{2}} + b\right) \mathrm{Sin}\, u,$$

$$x_3 = -\mathrm{Cos}^2\left(\varepsilon \frac{u}{2\sqrt{2}} + b\right)$$

dir.

Uyarı 38-1.

Bazı özel yüzeylerin asimptotikleri için, bu yüzeylerin konu edildiği bölümlere bakınız.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

39. Eğrilik çizgileri

Tanım 39-1.

Yüzey üzerinde bulunan ve her noktasındaki teğeti, bu noktadaki DUPIN göstergesinin bir ekseninden oluşan eğrilere **eğrilik çizgileri** denilir. Tanıma göre, yüzey üzerinde alınan ve eliptik-göbek noktası olmayan P düzgün noktasının —eliptik, parabolik, hiperbolik gibi— türü ne olursa olsun, bu noktadan iki gerçel eğrilik çizgisi geçer. Nokta, eliptik-ombilik ise, bu noktanın asal doğrultuları belirsiz olacağından, böyle bir noktadan kaç eğrilik çizgisi geçeceği, eliptik-göbek noktasına göre değişir. Örneğin: bir elipsoidin eliptik-göbek noktalarından birer eğrilik çizgisi geçer. Buna karşılık, bir parabolü, ekseni etrafında döndürerek elde edilecek paraboloidin, eliptik-ombilik tepesinden sonsuz eğrilik çizgisi —meridyen ya da boylam çizgisi— geçer.

39-1. Eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemi

Eğrilik çizgilerinin

$$m = \frac{dv}{du}$$

teğet doğrultusu, (32-5) i, yâni

$$\rho_n = \frac{N m^2 + 2M m + L}{G m^2 + 2F m + E}$$

ifadesini ekstremum kılacağından, bu bağıntının m ye göre türevini sıfıra eşitlemekle, eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz. Bu türevi alıp sıfıra eşit kıldıktan sonra, m yerine dv/du koyduğumuzda

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0 \qquad (39\text{-}1)$$

diferansiyel denklemi bulunmuş olur. Bu denklemin

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \qquad (39\text{-}2)$$

biçiminde yazılabileceği açıktır.

(39-1) ya da (39-2) yi açtığımızda, eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(39-3) $$(EM-FL)\,du^2 + (EN-GL)\,du\,dv + (FN-GM)\,dv^2 = 0$$

olur.

(39-3) diferansiyel denkleminin çözümü öyledir ki: sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzeyde, eliptik-göbek noktasından farklı bir P düzgün noktasından birbirini dik kesen sadece iki gerçel eğrilik çizgisi geçer.

Teorem 39-1.

Eliptik veya parabolik-göbek noktası olmayan düzgün bir P noktasında ve bunun yakınlarında sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzey verildiğinde, P noktasının —eliptik, hiperbolik, parabolik gibi— türü ne olursa olsun, bu noktadan, yüzeyin gerçel ve birbirine dik iki eğrilik çizgisi geçer. Yüzeyin, eliptik-göbek noktası bulunmayan ve düzgün noktalardan meydana gelen bir bölgesinde, eğrilik çizgileri, iki eğri ailesinden oluşan bir dik eğri şebekesi vücuda getirirler. Bir eliptik-göbek noktasından geçen eğrilik çizgileri belirsizdir.

Eğrilik çizgilerinin, teorem 39-1 de belirtilen gerçelliği ve bir dik şebeke oluşturmaları, geometrik tanımlarının bir sonucudur. Bu noktalar, (39-3) bağıntısı yardımiyle, hesap yolu ile de ispatlanabilir. Şöyle ki:

(19-11) bağıntısına göre, yüzeyin bir P düzgün noktasından geçen ve bu noktadaki teğetleri m_1, m_2 değerleri ile belirli olan iki eğrinin P de birbirlerine dik olmaları için gerekli ve yeterli koşul

(39-4) $$G\,m_1 m_2 + F(m_1 + m_2) + E = 0$$

dır. Halbuki, (39-3) e göre, eğrilik çizgileri için

$$m_1 m_2 = \frac{EM-FL}{FN-GM}; \quad m_1 + m_2 = \frac{GL-EN}{FN-GM}$$

olduğundan, bu değerler (39-4) de yerlerine konulduklarında, (39-4) bağıntısı özdeş olarak sıfıra eşit olur.

$$G(EM-FL) + F(GL-EN) + E(FN-GM) = 0$$

Öte yandan, eğrilik çizgilerinin gerçelliği ve farklılığı için (39-3) ün diskriminantı sıfırdan büyük olmalıdır. Halbuki bu determinant, kolaylıkla görülebileceği gibi,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

[39-5] $$(EN-GL)^2-4(EM-FL)(FN-GM)=\left[2\frac{H}{E}(EM-FL)\right]^2+$$

$$\left[EN-GL-2\frac{F}{E}(EM-FL)\right]^2>0$$

olduğundan, L, M, N katsayıları E, F, G katsayıları ile orantılı olmadıkça, yâni alınan P noktası bir eliptik-ombilik noktasından farklı bir düzgün nokta bulundukça, [39-3] denkleminin kökleri gerçel ve farklıdır.

Eğer L, M, N katsayıları, P düzgün noktasında; E, F, G katsayıları ile orantılı ise, asal doğrultular belirsizdir.

39-2. Eğrilik çizgilerinin, koordinat çizgileri olmaları için gerekli ve yeterli koşullar

Eğrilik çizgileri koordinat çizgileri olarak alındıklarında, bunlar yüzey üzerinde bir dik şebeke oluşturacaklarından, özdeş olarak

$$F=0$$

dır.

Öte yandan, eğrilik çizgilerinin [39-3] diferansiyel denkleminin, bu özel halde, çözümleri

$$du=0 \quad \text{ve} \quad dv=0$$

olacağından, özdeş olarak

$$GM=0 \quad \text{ve} \quad EM=0$$

denklemlerinin sağlanması gerekir. Gerçel noktalarda

$$E\neq 0, \qquad G\neq 0$$

olduğundan, eğrilik çizgileri, koordinat çizgileri olarak alındıklarında yüzey üzerinde

$$F=0, \qquad M=0$$

olur.

Karşıt olarak, yüzey üzerinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$F = 0, \qquad M = 0$$

ise, eğrilik çizgilerinin (39-3) diferansiyel denklemi

$$(EN - GL)\, du\, dv = 0$$

biçimindedir.

Eğer P düzgün noktasında L, N katsayıları E, G katsayıları ile orantılı değillerse, başka deyimle P düzgün noktası bir eliptik-ombilik noktasından farklı ise, ayrıca P düzgün noktasında L, N katsayılarının ikisi birden sıfır değilse, yâni P düzgün noktası bir parabolik-ombilik noktası da değilse, koordinat çizgileri, eğrilik çizgileridir. Buna göre, şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 39-2.

Yüzeyin eliptik-ombilik ve parabolik-ombilik olmayan düzgün noktalarından oluşan bir B bölgesinde sınıfı ≥ 3 ise, B ye ait eğrilik çizgileriyle koordinat çizgilerinin çakışmaları için gerekli ve yeterli koşullar, B üzerinde özdeş olarak

$$F = 0, \qquad M = 0$$

bulunmasıdır.

Uygulama 39-1.

Yüzeyin bir düzgün noktasının eliptik, hiperbolik veya parabolik olması niteliğine bakmadan, EULER formülünün kestirme yoldan bulunuşu.

Verilen yüzeyin koordinat çizgileri olarak eğrilik çizgileri alındığında, Teorem 39-2 nedeniyle

$$F = 0, \qquad M = 0$$

dır ve II formu da

$$II = \rho_n = L\,u'^2 + N\,v'^2$$

biçimindedir.

Öte yandan, v = sâbit asal doğrultusu ile φ açısı yapan bir doğrultu alındığında, (19-30) formülleri nedeniyle

$$(\alpha) \qquad \cos\varphi = \sqrt{E}\,u', \quad \sin\varphi = \sqrt{G}\,v'$$

olacağından v asal eğrilliklerin değerleri de

$$r_1 = \frac{L}{E}, \quad r_2 = \frac{N}{G}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bulunacağından, (α) eşitliklerinden çıkarılacak u, v değerleri, II formunda kullanılırsa, her üç hal için de geçerli

$$\rho_n = r_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi + r_2 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

EULER formülü bulunur.

Eğrilik çizgilerinin (39-3) diferansiyel denkleminin başka biçimde yazılması ve bunun geometrik yorumu

(39-3) diferansiyel denkleminin elde edildiği (39-1) denklemini sıra ile (17-7), (24-7) nedeniyle, şu biçimlerde yazabiliriz:

$$0 = \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + M\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{x}_u \cdot d\vec{x} & \vec{x}_v \cdot d\vec{x} \\ -\vec{x}_u \cdot d\vec{n} & -\vec{x}_v \cdot d\vec{n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{x}_u \cdot d\vec{x} & \vec{x}_v \cdot d\vec{x} \\ 0 & -\vec{x}_u \cdot d\vec{n} & -\vec{x}_v \cdot d\vec{x} \end{vmatrix}$$

ve (17-16 bağıntısı yardımiyle de

$$= (\vec{n}, d\vec{x}, -d\vec{n})\,(\vec{n}, \vec{x}_u, \vec{x}_v) = H\,(\vec{n}, d\vec{x}, -d\vec{n}), \quad (H \neq 0)$$

veya bir eğrilik çizgisi boyunca

$$(\vec{n}, d\vec{x}, d\vec{n}) = 0 \tag{39-6}$$

dır.

Düzgün bir P noktasında $\vec{n}$ vektörü hem $d\vec{x}$ hem de $d\vec{n}$ vektörlerine dik olduğundan, bu üç vektörün aynı bir düzlem üzerinde bulunabilmeleri için $d\vec{x}$ ve $d\vec{n}$ vektörlerinin birbirlerine paralel olmaları gerekir. Karşıt olarak da, (39-6) denklemi, yüzeyin bir C eğrisi boyunca gerçekleşiyorsa, yukarıki hesapları ters yönde yaparak, (39-6) dan (39-1) e varılır. O halde:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 39-3.

Yüzeyin eliptik-ombilik ve parabolik-ombilik olmayan düzgün noktalarından oluşan bir B bölgesinde sınıfı ≥ 2 ise, B ye ait bir C eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, C boyunca hesaplanan $\vec{dx}$ ve $\vec{dn}$ vektörlerinin birbirlerine paralel olmalarıdır.

Uyarı 39-1.

Eğrilik çizgilerinin (39-6) diferansiyel denkleminde, $\vec{n}$ vektörünün birim vektörü olması zorunlu değildir. Gerçekten, uzunluğu n^* a eşit $\vec{n^*}$ normal vektörü alındığında,

$$\vec{n} = \frac{1}{n^*}\,\vec{n^*}, \quad (n^* \neq 0)$$

olacağından, (39-6) denklemi

$$(\vec{n}, \vec{dx}, \vec{dn}) = \frac{1}{n^*}\left(\vec{n^*}, \vec{dx}, \frac{1}{n^*}\vec{dn^*} - \frac{dn^*}{n^{*2}}\vec{n^*}\right)$$

$$= \frac{1}{n^{*2}}\,(\vec{n^*}, \vec{dx}, \vec{dn^*})$$

biçiminde yazılabileceğinden, $\vec{n^*}$ cinsinden diferansiyel denklem

(39-6)′ $$(\vec{n^*}, \vec{dx}, \vec{dn^*}) = 0$$

olur. Yalnız bu kez, **$\vec{dx}$ ve $\vec{dn^*}$ vektörleri birbirine paralel değildir.**

Karşıt olarak da, bir C eğrisi boyunca (39-6)′ denklemi gerçekleşirse, bu eğri, yüzeyin bir eğrilik çizgisidir.

Bu sonuca, yâni bir eğrilik çizgisi boyunca $\vec{dx}$ ve $\vec{dn}$ nin paralelliğine, OLINDE RODRIGUES'in (25-6) formüllerini kullanarak da varabiliriz. Şöyle ki: bir eğrilik çizgisi boyunca, örneğin v = sâbit olarak alınan eğrilik çizgisi boyunca

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{n}_u + r\vec{x}_u = \vec{0}$$

O. RODRIGUES formülü gösterir ki $\vec{x}_u$ ve $\vec{n}_u$, yâni $d\vec{x} = \vec{x}_u\,du$, $d\vec{n} = \vec{n}_u\,du = -r\vec{x}_u$ birbirine paraleldir.

39-3. Eğrilik çizgilerinin küresel görüntüsü

Bir S yüzeyinin herhangi bir eğrilik çizgisi C, bunun bir P noktasındaki normal birim vektörü $\vec{n}$, ve sâbit bir O noktasından itibaren alınan

$$\overrightarrow{OP^*} = \vec{n}$$

vektörünün P^* ucunun, P ye bağlı olarak O(1) birim küresi üzerinde çizdiği eğri de C^* olsun. **C^* eğrisi, S nin C eğrilik çizgisinin O(1) birim küresi üzerindeki küresel görüntüsüdür.**

C ve C^* eğrilerinin, homolog P ve P^* noktalarındaki $d\vec{x}$ ve $d\vec{n}$ teğet doğrultuları, teorem 39-3 nedeniyle birbirlerine paraleldir ve bunun tersi de doğrudur. O halde:

Teorem 39-4.

Yüzeyin eliptik-ombilik ve parabolik-ombilik olmayan düzgün noktalarından oluşan bir B bölgesinde sınıfı $\geqslant 3$ ise, B ye ait bir C eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, C ile bunun C^* küresel görüntüsünün P, P^* homolog noktalarındaki teğetlerin birbirlerine paralel olmalarıdır.

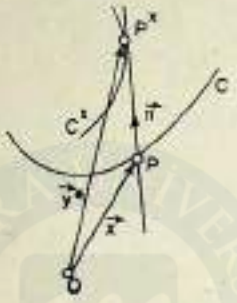
(39-6) denkleminin geometrik yorumu: Eğrilik çizgilerinin karakteristik bir özeliği

Teorem 39-5.

Yüzeyin eliptik-ombilik ve parabolik-ombilik olmayan düzgün noktalarından oluşan bir B bölgesinde sınıfı $\geqslant 3$ ise, bu bölgenin en az 2 nci sınıftan bir C eğrisinin eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, C boyunca değişen yüzey normallerinin, C nin bir normale teğet eğrisine teğet kalmalarıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

1) B bölgesine ait bir C eğrisi boyunca değişen yüzey normalleri, **C nin bir C* normale teğet eğrisine teğet kalsınlar.**



Şekil 41

C ve C* eğrilerinin P, P* homolog noktalarının yer vektörleri sırasiyle $\vec{x}$, $\vec{x^*}$ ise,

$$\vec{x^*} = \vec{x} + \lambda \vec{n}$$

yazılabilir. Buradan C* ın P* daki teğeti için

$$\vec{dx^*} = \vec{dx} + \lambda\, \vec{dn} + (d\lambda)\, \vec{n}$$

çıkar.

C* ın P* daki $\vec{dx^*}$ teğeti $\vec{n}$ ye paraleldir. $\vec{n}$ ye ayrı ayrı dik olan $\vec{dx}$ ve $\vec{dn}$ vektörlerinin

$$\vec{dx} + \lambda\, \vec{dn}$$

geometrik toplamı $\vec{n}$ ye paralel olamayacağından,

[39-7] $$\vec{dx} + \lambda\, \vec{dn} = \vec{0}$$

dır, dolayısiyle C* boyunca $\vec{dx}$ ve $\vec{dn}$ vektörleri birbirlerine paralel olacaklarından, Teorem 39-3 nedeniyle, C eğrisi eğrilik çizgisidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 39-2.

(39-7) vektörel bağıntısının her iki yanını skaler olarak $\vec{dx}$ le çarptığımızda, birinci ve ikinci kuvadratik formların tanımları dolayısiyle

$$\lambda = -\frac{\vec{dx^2}}{\vec{dx} \cdot \vec{d}} = \frac{I}{II} = R_n$$

bulunacağından, **normalin C* a değdiği nokta: normal eğrilik merkezidir.**

2) B bölgesine ait bir eğrilik çizgisi C olsun. Bu takdirde, C boyunca değişen yüzey normalleri, normal eğrilik merkezinin geometrik yerine teğet kalırlar. Gerçekten, normal eğrilik merkezinin geometrik yerinin vektörel denklemi, $R = R_n$ alındığında

$$\vec{x^*} = \vec{x} + R\vec{n}$$

olduğundan, geometrik yerin, normal eğrilik merkezindeki teğeti

$$\vec{dx} = (\vec{dx} + R\,\vec{dn}) + (dR)\,\vec{n},$$

dir. OLINDE RODRIGUES formülü dolayısiyle, parantez içindeki geometrik toplam, sıfır vektöre eşittir, dolayısiyle

$$\vec{dx^*} = (dR)\,\vec{n}$$

olur ki bu da, biraz önce ileri sürdüğümüz hususu doğrular.

39-6. JOACHIMSTHAL teoremi

Sınıfları $\geqslant 3$ olan iki yüzey birbirlerini bir eğri boyunca, sâbit bir açı altında kesiyorlarsa ve bu eğri yüzeylerden birisinin bir eğrilik çizgisi ise, ötekinin de bir eğrilik çizgisidir. Karşıt olarak, sınıfları $\geqslant 3$ olan iki yüzeyin arakesitleri, her iki yüzeyin de bir eğrilik çizgisi ise, her iki yüzey bu eğri boyunca birbirini sâbit bir açı altında keser.

Yüzeylere S_1, S_2, arakesitlerine de C diyelim. C eğrisi, örneğin, S_1 in bir eğrilik çizgisi ise, S_1 in C boyunca değişen normalleri, C nin normale teğet eğrilerinden birine teğet kalırlar. S_2 nin S_1 i C boyunca sâbit bir

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

açı altında kesmesi nedeniyle de, S_2 nin C boyunca değişen normalleri de, C nin başka bir normale teğet eğrisine teğet kalırlar. —FERRUH ŞEMİN, **Diferansiyel Geometri I**, s. 131, Teorem 41-2— O halde, teorem 39-5 nedeniyle, C eğrisi S_2 nin de bir eğrilik çizgisidir.

Şöyle de söylenebilir: C nin herhangi bir P noktasında S_1 ve S_2 nin normallerinin birim vektörleri $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$; C boyunca sâbit olan açı da θ ise,

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \cos\theta$$

dır ve bunun C boyunca hesaplanan diferansiyeli

$$\vec{n_2} \cdot d\vec{n_1} + \vec{n_1} \cdot d\vec{n_2} = 0$$

verir. C eğrisi, S_1 in eğrilik çizgisi olduğundan,

$$d\vec{n_1} + v\,d\vec{x} = 0, \quad \vec{n_2} \cdot d\vec{n_1} = \vec{n_2} \cdot (-r\,d\vec{x}) = 0$$

dır ve dolayısiyle

$$\vec{n_1} \cdot d\vec{n_2} = 0$$

olur. Hem $\vec{n_1}$, hem de $\vec{n_2}$ ye dik olan $d\vec{n_2}$, bunların ikisine de dik olan $\vec{dx}$ e paraleldir: buna göre, 39-4 sayılı teorem nedeniyle de, C eğrisi S_2 yüzeyinin de bir eğrilik çizgisidir.

Karşıt olarak, C eğrisi hem S_1 in, hem de S_2 nin eğrilik çizgisi ise, S_1 ve S_2 nin C eğrisi boyunca değişen normalleri, C nin normale teğet eğrilerinden ikisine teğet kalırlar —FERRUH ŞEMİN, **Diferansiyel Geometri I**, s 131, teorem 41-1 dolayısiyle de— S_1 ve S_2 yüzeylerinin C boyunca değişen normalleri arasındaki açı sâbittir.

Bu sonuca, şöyle de varılabilir:

S_1 ve S_2 yüzeylerinin ortak C eğrilik çizgilerinin herhangi bir P(u, v) düzgün noktasındaki $\vec{n_1}$, $\vec{n_2}$ normal birim vektörleri arasındaki açı θ ise,

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = \cos\theta$$

bağıntısının C boyunca hesaplanan diferansiyeli

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(39-8) $$\vec{n}_2 \cdot d\vec{n}_1 + \vec{n}_1 \cdot d\vec{n}_2 = -\operatorname{Sin}\theta\, d\theta$$

verir.

C eğrisi, ortak eğrilik çizgisi olduğundan, C nin S_1 ve S_2 ye göre P deki eğrilikleri sıra ile r_1 ve r_2 ise,

$$d\vec{n}_1 + r_1 d\vec{x} = 0, \quad d\vec{n}_2 + r_2 d\vec{x} = 0$$

olacağından, (39-8) in sağ yanı

$$(r_1 \vec{n}_2 + r_2 \vec{n}_1) \cdot d\vec{x} = \operatorname{Sin}\theta\, d\theta = 0, \quad d\theta = 0$$

veya

$$\theta = \text{sabit}$$

olur.

39-5 Sonuçlar

JOACHIMSTHAL teoreminden, sırasiyle, şu sonuçlar çıkarılır:

1) Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin bir C eğrilik çizgisi düzlem ya da küreselse, C den geçen düzlem ya da küre, C boyunca S yi sâbit açı altında keser.

Çünkü C eğrisi, aynı zamanda, kendisinden geçen düzlemin ya da kürenin de eğrilik çizgisidir.

2) Bir düzlem ya da bir küre, sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyini, bir C eğrisi boyunca sâbit açı altında keserse, C eğrisi S yüzeyinin de bir eğrilik çizgisidir.

3) Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin bir C eğrilik çizgisi düzlemse ve düzlemi bir P noktasında S ye teğetse, her noktasında teğettir. Dolayısiyle, C eğrisi S yüzeyinin bir asimptotik çizgisidir ve parabolik noktalardan oluşmuştur.

4) Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin bir C eğrilik çizgisi küreselse ve bu küre C nin bir P noktasında S ye teğetse, her noktasında teğettir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

34.6 Yüzey normalleriyle ilgili bâzı karakteristik özelikler

1) En az 1-nci sınıftan bir yüzeyin bir düzlem olması için gerekli ve yeterli koşul, bu yüzeyin düzgün noktalarındaki normal birim vektörlerinin sâbit bir birim vektörüne eşit bulunmalarıdır.

Bir düzlem verildiğinde, bunun normal birim vektörleri, sâbit bir birim vektörüne eşittirler.

Karşıt olarak, sınıfı $\geqslant 1$ olan bir yüzeyin düzgün noktalarındaki normal birim vektörleri

$$\vec{n}(u, v) = \vec{k} = \text{sabit}, \quad (\vec{k}^2 = 1)$$

biçiminde ise, bu eşitlik yardımıyle

$$\vec{k} \cdot \vec{x}_u = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{x}_v = 0$$

yazılabileceğinden, integrasyon sonucunda

$$\vec{k} \cdot \vec{x}(u, v) = a = \text{sabit}$$

bulunur ki bu da : $\vec{k}$ **birim vektörüne dik bir düzlemi belirler.**

2) En az birinci sınıftan bir yüzeyin bir küre olması için gerekli ve yeterli koşul, bu yüzeyin düzgün noktalarındaki normallerin sonlu uzaklıktaki sâbit bir noktadan geçmeleridir.

Bir kürenin normalleri, bunun merkezinden geçerler.

Karşıt olarak, sınıfı $\geqslant 1$ olan bir yüzeyin düzgün noktalarındaki normaller, sonlu uzaklıkta bulunan sâbit bir O noktasından geçiyorsa, yüzeyin düzgün her $P(u, v)$ noktasının $\vec{x}(u, v)$ yer vektörü

$$\vec{x}(u, v) = \lambda \vec{n}(u, v), \quad (\text{genellikle } \lambda = \lambda(u, v) \neq 0)$$

biçimindedir. Buradan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$d\vec{x} = \lambda\, d\vec{n} + (d\lambda)\,\vec{n}$$

veya $\vec{n}$ ile skaler olarak çarpmakla

$$d\lambda = 0, \quad \text{yani} \quad \lambda = c = \text{sabit}$$

çıkar ki bu da: **O merkezli ve $|a|$ yarıçaplı küreyi belirler.**

3) En az 1-nci sınıftan bir yüzeyin bir dönel yüzey olması için gerekli ve yeterli koşul, yüzeyin düzgün noktalarındaki normallerinin, sonlu uzaklıktaki sâbit bir doğruya dayanmalarıdır.

Bilindiği gibi, bir dönel yüzey verildiğinde, bunun düzgün noktalarındaki normaller dönel yüzeyin sonlu uzaklıkta bulunan eksenine dayanırlar.

Karşıt olarak, sınıfı $\geqslant 1$ olan bir yüzeyin düzgün noktalarındaki normaller, sonlu uzaklıkta bulunan bir Δ doğrusuna dayanıyorlarsa, bu yüzeyin bir dönel yüzey olduğunu göstermek üzere, yüzeyin bir P(u, v) düzgün noktasından geçen ve Δ ya dik olan bir D düzlemiyle arakesiti C olsun. C nin herhangi bir P(u, v) noktasındaki T teğeti ile, yüzeyin P den geçen normalinin oluşturdukları dikaçının T kenarı D düzlemi üzerinde bulunduğundan, yüzeyin P deki normalinin D üzerindeki dik izdüşümü T ye diktir, yâni C kesitinin P deki asal normalidir.

Böylece, C eğrisinin tüm asal normalleri, C nin üzerinde bulunduğu D düzleminin Δ yi kestiği sâbit O noktasından geçeceklerinden, C eğrisi O merkezli bir çemberdir. Yüzeyin, Δ ya dik düzlemlerle kesitleri, merkezleri Δ üzerinde bulunan çemberlerden meydana geleceğine göre, yüzey Δ eksenli bir dönel yüzeydir.

4) En az 1-inci sınıftan bir yüzeyin bir silindir olması için gerekli ve yeterli koşul, bunun düzgün noktalarındaki normallerin bir düzleme paralel kalmaları —ya da sonsuzdaki bir doğruya dayanmaları— dır.

Herhangi bir silindirin düzgün noktalarındaki normalleri, anadoğrularına dik bir düzleme paralel kalırlar.

Karşıt olarak sınıfı $\geqslant 1$ olan bir yüzeyin düzgün noktalarındaki normaller, bir düzleme paralel kalıyorlarsa, bu düzleme dik sâbit bir serbest vektör $\vec{k}$ olduğuna göre, yüzeyin her düzgün noktasında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{k} \cdot \vec{e}(u, v) = 0 \quad \text{veya} \quad (\vec{k}, \vec{x}_u(u, v), \vec{x}_v(u, v)) = 0$$

dır. Şu halde, yüzeyin düzgün her P(u, v) noktasında, teğet düzlem, $\vec{k}$ vektörüne paralel bir doğrudan geçeceğinden, yüzey; anadoğruları $\vec{k}$ ya paralel olan bir silindirdir.

Teorem 39-7.

Sadece eliptik-göbek noktalarından oluşan ve en az 3-üncü sınıftan olan tek gerçel yüzey küredir.

Bilindiği gibi, bir kürenin tüm noktaları eliptik-göbek noktalarıdır.

Karşıt olarak, sınıfı ≥ 3 olan bir yüzeyin tüm noktaları eliptik-göbek noktaları ise, her noktanın DUPIN göstergesi bir çemberdir, her teğet doğrultusu bir asal doğrultudur ve her noktanın değişik teğet doğrultularıyla belirli olan normal eğrilikler, aynıdır ve bunların değeri de bir noktadan ötekine gidildiğinde değişir.

Yüzeyin bir P(u,v) noktasında çeşitli doğrultulara göre aynı olan asal eğrilik yarıçapını R(u, v) ile gösterelim. P(u, v) noktasından geçen ve yüzey üzerinde bulunan her çizgi, eğrilik çizgisi olduğuna göre, bu noktadan geçen koordinat çizgileri de böyledir. O halde bunlara, P(u, v) noktasında (25-6) OLINDE RODRIGUES formülleri uygulandığında

$$R\,\vec{n}_u + \vec{x}_u = \vec{0}, \quad R\,\vec{n}_v + \vec{x}_v = \vec{0} \tag{39-9}$$

olur.

P(u, v) noktası düzgün olarak alındığından, bu noktada

$$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \neq \vec{0}$$

dolayısiyle

$$\vec{n}_u \wedge \vec{n}_v \neq \vec{0}$$

dır. O hâlde, $\vec{n}_u \neq \vec{0}$ olduğundan R de düzgün noktalarda ∞ olamaz.

Buna göre, (39-9) bağıntılarından birincisinin v ye ve ikincisinin de u ye göre kısmî türevlerini aldıktan sonra, birinciden ikinciyi çıkarırsak,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(39-10) $$R_u \vec{n}_u - R_v \vec{n}_v = \vec{0}$$

olur. P (u, v) düzgün noktasında, biraz önce $\vec{n}_u$ ve $\vec{n}_v$ vektörleri birbirlerine paralel olmadıklarından ve sıfır-vektörden de farklı bulunduklarından, (39-10) denkleminin gerçekleşebilmesi için

$$R_u = 0, \quad R_v = 0 \quad \text{yani} \quad R = 0 = \text{Sabit} \neq \infty$$

olması gerekir. Böyle olunca da, her P(u, v) noktasındaki P_n (u, v) normal eğrilik merkezi sabittir. Gerçekten

$$\vec{OP_n} = \vec{x_n} = \vec{x}(u, v) + R\,\vec{n}(u, v)$$

vektörel denklemiyle tanımlanan P_n noktasının $\vec{X}_n$ yer vektörünün kısmî türev vektörleri, (39-9) nedeniyle

$$\vec{x}_{nu} = \vec{0}, \quad \vec{x}_{nv} = \vec{0}$$

yâni

$$\vec{x}_n = \text{sabit vektör}$$

dur. O hâlde, yüzeyin tüm normalleri, P_n sâbit noktasından geçtiğinden, bundan önceki (karakteristik özellikler 2) nedeniyle, yüzey P_n(R) küresidir.



Şekil 42

Geometrik İspat

Böyle bir yüzeyin her eğrisi eğrilik çizgisidir. Özellikle, yüzeyin herhangi bir P(u,v) noktasındaki normalden geçen eğri düzlemlerden biriyle kesiti de bir eğrilik çizgisidir. Bu kesit, yüzeyi P(u, v) noktasında dik kestiğinden, JOACHIMSTHAL teoremi dolayısiyle, kesitin her noktasında dik keser. O hâlde, kesit düzlemi üzerinde bulunan ve yüzeye ait olan tüm normaller, P(u, v) noktasındaki normali keserler. Kesit düzlemi, P(u, v) deki normal etrafında çevirmekle görülür ki tüm normaller kesişir. Kesişen herhangi iki normalin belirttikleri düzlem üzerinde bulunmayan bir normalin ilk ikisini kesebilmesi için, bunların kesim noktalarından geçmesi gerekir. Buna göre, tüm normaller aynı bir noktada kesişeceklerinden, yüzey bir küredir.

Teorem 39-8.

Sadece parabolik-göbek noktalarından oluşan ve en az 3 üncü sınıftan olan bir yüzey bir düzlemdir.

Bir düzlem verildiğinde, bunun zâten düzgün olan her noktasındaki normal birim vektörü

$$\vec{n}(u,v) = \vec{k} = \text{sabit birim vektörü}$$

biçiminde olduğundan, her noktada

$$\vec{n}_u = \vec{0}, \quad \vec{n}_v = \vec{0}$$

dır ve dolayısiyle her noktada (24-6) bağıntıları nedeniyle

$$L = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_u = 0, \qquad M = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_u = 0,$$

$$N = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_v = 0$$

olur. Buna göre bir düzlemin tüm noktaları, parabolik-göbek noktalarından oluşur.

Karşıt olarak, sınıfı ≥ 3 olan bir yüzeyin her düzgün noktası parabolik-ombilik ise, böyle noktalarda

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$L = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_u = 0, \quad M = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_u = 0,$$

$$N = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_v = 0, \quad \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \neq \vec{0}$$

dür. Sıfır-vektörden farklı olan ve birbirlerine paralel bulunmayan $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ vektörlerinin düzlemine paralel olan $\vec{n}_u$ vektörü, bunların ikisine birden aynı zamanda dik olamayacağından, bir sıfır-vektördür. Aynı nedenlerden, $\vec{n}_v$ de bir sıfır-vektör olacağından, yüzeyin düzgün noktalarında

$$\vec{n} = \vec{k} = \text{sabit birim vektörü}$$

dur. Dolayısiyle, (karakteristik özelikler 1) nedeniyle, bir düzlemdir.

Eğrilik koordinatları

Eğer bir yüzeyin u = sabit, v = sabit koordinat çizgileri, eğrilik çizgileri ise, bu tür eğrisel koordinatlara: **eğrilik koordinatları**, denilir. Böyle bir yüzey üzerinde, eğrilik çizgilerinin (39-3) diferansiyel denklemi

$$(EN - GL)\, du\, dv = 0, \quad (F = 0,\ M = 0),\ (EN - GL \neq 0)$$

biçimindedir.

Genel halde, sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin eliptik-ombilik olmayan düzgün noktalardan oluşan bir bölgesindeki bir P(u, v) noktasında, (39-3) diferansiyel denkleminin diskriminantı, (39-5) nedeniyle sıfırdan büyük olduğundan, bu diferansiyel denklem aşağıdaki gibi iki çarpana ayrılabilir:

$$\begin{aligned}&(EM - FL)\, du^2 + (EN - GL)\, du\, dv + (FN - GM)\, dv^2 \\ &= (n_1\, du + n_2\, dv)(n_3\, du + n_4\, dv) \\ &= n_1 n_3\, du^2 + (n_1 n_4 + n_2 n_3)\, du\, dv + n_2 n_4\, dv^2\end{aligned}$$

(39-11)
$$\begin{aligned}(EN - GL)^2 - 4\,(EM - FL)(FN - GM) &= (n_1 n_4 + n_2 n_3)^2 \\ &\quad - 4\, n_1 n_2 n_3 n_4 = (n_1 n_4 - n_2 n_3)^2 > 0\end{aligned}$$

Gerektiğinde, P(u, v) düzgün noktası yakınlarını daraltarak, $(n_1\, du + n_2\, dv)$ ve $(n_3\, du + n_4\, dv)$ lineer formları için iki $\lambda(u, v)$, $\mu(u, v)$ integre edici çarpanla öyle iki $\gamma(u, v)$, $\delta(u, v)$ fonksiyonu bulunabilir ki

(39-12) $$\lambda(n_1\,du + n_2\,dv) = d\gamma\,,\quad \mu(n_3\,du + n_4\,dv) = d\delta$$

olsun.

Eğer yeni eğrisel koordinatları

(39-13) $$u^* = \gamma(u, v),\quad v^* = \delta(u, v)$$

biçiminde seçersek, koordinat değişiminin jakobyeni, (28-4) nedeniyle

$$\frac{D(u^*, v^*)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \lambda n_1 & \lambda n_2 \\ \mu n_3 & \mu n_4 \end{vmatrix} = \lambda\mu(n_1 n_4 - n_2 n_3) \neq 0$$

dır ve düzgün bir koordinat değişimi söz konusudur. Yeni koordinatlar cinsinden (39-3) diferansiyel denklemi, (39-12) ve (39-13) bağıntıları dolayısiyle

$$(EM - FL)\,du^2 + (EN - GL)\,du\,dv + (FN - GM)\,dv^2 = \frac{1}{\lambda\mu}\,du^*\,dv^* = 0$$

biçimindedir.

Böylece, şu teoremi ispat etmiş oluruz.

Teorem 39-9.

Bir P düzgün noktasında ve bunun düzgün noktalardan oluşan yakınlarında sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyi verildiğinde, P noktası ve yakınları için eğrilik koordinatları bulunabilir.

39.7. Üçüzlü dikgen yüzey sistemleri

3 u, v, w **skaler** ve **bağımsız** değişkenin, uzayın bir bölgesinde değişmeleri hâlinde, bunlara bağlı ve **tek değerli** bir vektörel fonksiyon

(39-14) $$\overrightarrow{OP} = \vec{x}(u, v, w)$$

olsun. u, v, w değişkenleriyle $\vec{x}$ fonksiyonu arasındaki bağlantıyı, gerektiğinde (B) bölgesini daraltarak, **birebir** varsayacağız.

Uzayın, (39-14) denklemi ve bir (u , v , w) değer takımı ile tanımlanan bir P(u, v, w) noktasında ve yakınlarında $\vec{X}(u, v, w)$ fonksiyonunu 1-inci

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

sınıftan alacağız ve P noktasında, $\vec{X}(u, v, w)$ fonksiyonunun birinci mertebeden kısmî türevleri arasında

$$(\vec{x}_u, \vec{x}_v, \vec{x}_w) \neq 0 \qquad (19\text{-}15)$$

bağıntısı varsa, P(u, v, w) noktasına: **uzayın bir düzgün noktası** diyeceğiz. Bundan sonraki kısımlarda, (B) bölgesinin (u, v, w) değerleri ile tanımlanan her P (u, v, w) noktasını **düzgün** varsayacağız.



Şekil 43

u, v, w değişkenlerinden birinin, örneğin w nin, değerini sâbit tuttuğumuzda, $\vec{X}$ vektörü sâdece u ve v nin fonksiyonu olacağından,

$$\vec{OP} = \vec{x}(u, v, c), \quad (w = c = \text{sabit})$$

dersek, böylece tanımlanan P noktası bir yüzey çizecektir. Buna kısaca: **w = c = sabit yüzeyi** diyeceğiz.

Aynı biçimde, u ve v nin sâbit tutulmaları ile de u=a=sâbit, v=b=sâbit yüzeyleri elde edilecektir.

a, b, c sâbitelerini, (B) bölgesinde kalmak koşulu ile, değiştirdiğimizde, (39-14) bağıntısı uzayda üç ayrı yüzey ailesi tanımlamış olacaktır. a, b, c koordinatlı P (a, b, c) noktası da: u=a, v=b, w=c yüzeylerinin ortak noktası olarak verilmiş bulunacaktır. Sözü edilen ve P den geçen üç yüzeyin ikişer ikişer arakesitleri de P den geçer. v=b, w=c eğrilerinin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

arakesitleri boyunca sâdece u değişeceğinden buna: **u-eğrisi**, ötekilerine de sıra ile: **v-eğrisi** ve **w-eğrisi** diyeceğiz. Bu üç eğrinin P noktasındaki teğetleri $\vec{X_u}$, $\vec{X_v}$, $\vec{X_w}$ vektörleriyle belirlidir. (39-15) nedeniyle, bu vektörlerin üçü de sıfır-vektörden farklı oldukları gibi, bir düzleme de paralel olmadıklarından, P noktasında bir üçyüzlü tanımlarlar. Şurasını da kaydedelim ki, gene (39-15) bağıntısı nedeniyle, P noktası, üzerinde bulunduğu üç yüzeyden her biri için **düzgündür.**

Eğer, bu üç yüzey ailesinin farklı ailelerine ait herhangi ikişer arakesitleri boyunca birbirlerini dik olarak keserlerse, (39-14) le tanımlanan yüzey sistemine **üçüzlü dikgen yüzey sistemi** denilir. (39-14) **ün böyle bir sistem tanımlaması için gerekli ve yeterli koşullar, (B) bölgesine ait (u, v, w) ler nasıl seçilirse seçilsin**

$$(39\text{-}16)\qquad (\vec{x_u}, \vec{x_v}, \vec{x_w}) \neq 0, \quad \vec{x_u} \cdot \vec{x_v} = 0, \quad \vec{x_v} \cdot \vec{x_w} = 0, \quad \vec{x_w} \cdot \vec{x_u} = 0$$

olmasıdır.

Örnekler 39-1.

1. Eksenlerinin birim vektörleri $\vec{k_j}$, $(j = 1, 2, 3)$ **olan bir dik koordinat sisteminde**

$$(39\text{-}17)\qquad \vec{x}(u, v, w) = w \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} u\, \vec{k_1} + w \operatorname{Sin} v \operatorname{Sin} u\, \vec{k_2} + w \operatorname{Cos} v\, \vec{k_3}$$

vektörel denklemleri ile verilen üç yüzey ailesinin bir dikgen sistem oluşturduğunu gösteriniz.

Önce bu sistemi oluşturan üç yüzey ailesinin ve bunların ikişer ikişer arakesitlerinin cinslerini gözden geçirelim:

w=c= sâbit yüzeyleri: O merkezli ve c yarıçaplı **O(c) küreleri**

u=a= sâbit yüzeyleri : Ox_3 eksenli düzlem demeti

v=b= sâbit yüzeyleri : O tepeli dönel koniler (Ox_3 eksenli)

u eğrileri : O(c) kürelerinin **enlem çemberleri**

v eğrileri : O(c) kürelerinin **boylam çemberleri**

w eğrileri : v=b **dönel konilerinin anadoğruları**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Geometrik olarak, bu üç yüzey ailesinin bir dikgen sistem oluşturdukları açıktır. Bununla beraber, (39-16) denklemlerini kullanarak da bunu görebiliriz; birinci mertebeden kısmî türevler, (39-17) den

$$\vec{x}_u = -w \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_1 + w \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_2 ,$$

$$\vec{x}_v = w \operatorname{Cos} v \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_1 + w \operatorname{Cos} v \operatorname{Sin} u \, \vec{k}_2 - w \operatorname{Sin} v \, \vec{k}_3$$

$$\vec{x}_w = \operatorname{Sin} v \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_1 + \operatorname{Sin} v \operatorname{Sin} u \, \vec{k}_2 + \operatorname{Cos} v \, \vec{k}_3$$

biçiminde bulunacağına göre, kolayca görülebileceği gibi

$$\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0, \quad \vec{x}_u \cdot \vec{x}_w = 0, \quad \vec{x}_w \cdot \vec{x}_v = 0$$

dır.

2. Bir dik koordinat sisteminde, koordinat düzlemlerine paralel üç ayrı düzlem ailesi de bir üçüzlü dikgen yüzey sistemi oluşturur.

Teorem 39-10. (DUPIN teoremi)

Herhangi üç yüzey ailesine ait en az ikinci sınıftan herhangi üç yüzeyin ikişer ikişer eğrilik çizgileri boyunca kesişmeleri için gerekli ve yeterli koşul, bu üç yüzey ailesinin bir üçüzlü dikgen yüzey sistemi oluşturmalarıdır.

Koşul gereklidir. Diyelim ki herhangi üç yüzey ailesinin en az 2-nci sınıftan birer yüzeyi birbirlerini ikişer ikişer eğrilik çizgileri boyunca kesmektedir. Buna göre, üç eğrilik çizgisinin P kesişme noktasındaki teğetleri bir dik üçyüzlü oluştururlar. Bu üç teğetten herhangi birisi, öteki ikisine dik olacağından, her üç yüzey, P noktasında birbirlerini ikişer ikişer dik olarak keserler. 39-6 JOACHIMSTHAL teoremine göre de, söz konusu yüzeyler, eğrilik çizgileri boyunca da birbirlerini dik olarak keserler, yâni bir üçüzlü dikgen sistem meydana getirirler.

Koşul yeterlidir. Bir üçüzlü dikgen yüzey sistemi verildiğinde, bunların her birine ait ve en az 2-nci sınıftan birer yüzey için, (39-16) bağıntıları özdeş olarak geçerli olacağından, bu bağıntılardan birincisinin w ye, ikincisinin u ya ve sonuncusunun da v ye göre birinci mertebeden kısmî türevlerini alır ve bunların da toplamını yazarsak

$$\vec{x}_{uw} \cdot \vec{x}_v + \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{vw} = 0, \quad \vec{x}_{uv} \cdot \vec{x}_w + \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{uw} = 0,$$

$$\vec{x}_{vw} \cdot \vec{x}_u + \vec{x}_w \cdot \vec{x}_{uv} = 0, \quad \vec{x}_{uw} \cdot \vec{x}_v + \vec{x}_{uv} \cdot \vec{x}_w + \vec{x}_{vw} \cdot \vec{x}_u = 0$$

olur. İlk üç eşitliği, ayrı ayrı dördüncüden çıkardığımızda da

$$\text{(19-17)} \quad \vec{x}_{uw} \cdot \vec{x}_v = 0, \quad \vec{x}_{vw} \cdot \vec{x}_u = 0, \quad \vec{x}_{uv} \cdot \vec{x}_w = 0$$

sonucuna varılır.

$w=c=$ sâbit yüzeyinin, öteki ikisiyle arakesitlerinin $P(u, v, c)$ noktasında, (39-16; 1) nedeniyle, birinci formun 2-nci katsayısı

$$F_2 = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0$$

dır. Aynı yüzeyin normal birim vektörüne de $\vec{n}_3$ dersek, (39-17; 2) dolayısiyle de, 2-nci formun M_3 katsayısı olarak

$$\vec{n}_3 = \lambda \vec{x}_w, \quad (\lambda = \frac{1}{|\vec{x}_w|} \neq 0),$$

$$M_3 = \vec{n}_3 \cdot \vec{x}_{uv} = \lambda \vec{x}_w \cdot \vec{x}_{uv} = 0$$

bulunur. Aynı sonuçlara, $u=a=$ sâbit ve $v=b=$ sâbit yüzeylerini değiştirerek, u ve v koordinat çizgileri boyunca erişileceğinden, bu koordinat çizgileri, $w=c=$ sâbit yüzeyinin eğrilik çizgileridir.

En az 2-nci sınıftan herhangi bir yüzeyin, bir üçüzlü dikgen sistemine sokulması

En az 2-nci sınıftan herhangi bir S yüzeyi verildiğinde, bunu, bir üçüzlü dikgen yüzey sisteminin bir elemanı olarak şöyle alabiliriz:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Birinci yüzey ailesini, S yüzeyinin —her noktasındaki normalleri üzerinde S den itibaren sâbit uzunluklar alarak bulunan— **paralel yüzeyleri oluştursun.** —Paralel yüzeyler bölümüne bakınız.—

İkinci ve üçüncü yüzey allelerini de, S nin eğrilik çizgileri boyunca değişen normallerinin meydana getirdikleri açılabilir yüzeyler. —Bir uzay eğrisine teğet kalan doğrularla tanımlanan yüzeyler— oluştursun.

S nin eliptik ya da parabolik-göbek noktası olmayan bir P düzgün noktasından geçen iki eğrilik çizgisi C_1, C_2 ve S nin P deki normal birim vektörü de $\vec{n}$ olsun. Söz konusu üç yüzey ailesinin P den geçen elemanlarının P noktasında birbirlerini ikişer ikişer dik kestikleri açıktır. C_1 ve C_2 den geçen açılabilir yüzeylerin P deki normal boyunca teğet düzlemleri değişmez.



Şekil 44

S nin herhangi bir S_i paralelinin P deki normali kestiği noktadaki teğet düzlemi, S nin P deki teğet düzlemine paralel kalacağından, ikişer ikişer dik kesişme değişmeyecektir. O hâlde sistem, bir üçüzlü dikgen sistemdir ve S de bunun bir elemanıdır.

Teorem 39-11.

En az 2-nci sınıftan bir yüzeyin evirtiminde, bir eğrilik çizgisinin evriği, evrik yüzeyin bir eğrilik çizgisidir.

Verilen yüzeyi S ile gösterelim ve bunu, biraz önce tanımlanan üçüzlü dikgen sistemin bir elemanı olarak alalım. Evirtim, açıları koruduğundan, böyle bir sistemin evriği de bir üçüzlü dikgen yüzey sistemi olacak-

tır. O halde, 39-10 DUPIN teoremine göre, S nin bir C eğrilik çizgisinin evriği, evrik yüzeyin bir eğrilik çizgisi olacaktır.

Teorem 39-12

En az 2-nci sınıftan bir yüzeyin bir simetri düzlemi varsa ve bu düzlemle yüzeyin, parabolik-göbek noktasından farklı düzgün noktalardan oluşan bir arakesitleri bulunuyorsa, bu arakesit, yüzeyin bir eğrilik çizgisidir.

Verilen S yüzeyinin Δ simetri düzlemiyle C arakesitinin herhangi bir noktası P olsun. C nin, düzgün varsayılan P noktalarındaki teğet düzlemler, simetri nedeniyle, ya Δ ile çakışırlar, ya da Δ ye diktirler; aksi halde, P düzgün noktalarında Δ ya göre simetrik iki normalin bulunması gerekir. Teğet düzlemlerin, C boyunca, Δ ile çakışmaları demek, P düzgün noktalarının parabolik-göbek noktaları olmaları demektir. Buna göre, yüzeyin C boyunca teğet düzlemleri, Δ simetri düzlemine diktir, yâni yüzeyin C boyunca normalleri, Δ üzerinde bulunacaklarından, C nin Δ üzerindeki normale teğet eğrisine teğet kalırlar. O hâlde C eğrisi, S nin bir eğrilik çizgisidir.

MONGE gösterilişinde eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemi

Bir dik eksen sisteminde en az 2-nci sınıftan bir yüzeyin

$$x_3 = g(x_1, x_2)$$

fonksiyonu yardımıyle MONGE gösterilişinde, eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemini yazabilmek için, (39-6)' den, yâni

(39-6)' $$(\vec{n^*}, \vec{dx}, \vec{dn^*}) = 0$$

bağıntısından yararlanabiliriz. Yüzeyin, bu gösterilişinde, her noktası düzgün olduğundan, bunlardan birisi $P(X_1, X_2, X_3)$ ise, bu noktadaki normal vektörlerden biri de $\vec{n^*}(-p, -q, +1)$ dir. O hâlde, (39-6)' dolayısiyle, aradığımız diferansiyel denklem

$$\begin{vmatrix} p & q & -1 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dp & dq & 0 \end{vmatrix} = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dır. Son sütundaki elemanları önce p, sonra da q ile çarpıp sıra ile önce birinci, sonra da ikinci sütundaki elemanlara eklersek

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ dx_1 + p dx_3 & dx_2 + q dx_3 & dx_3 \\ dp & dq & 0 \end{vmatrix} = 0$$

veya açtığımızda

$$\frac{dx_1 + p dx_3}{dp} = \frac{dx_2 + q dx_3}{dq}$$

ya da her iki yana x_3 eklemekle

(39-17) $$\frac{d(x_1 + p x_3)}{dp} = \frac{d(x_2 + q x_3)}{dq}$$

diferansiyel denklemi bulunur.

En az 2-nci sınıftan implisit gösterilişte eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemi

$F(x_1, x_2, x_3) = 0$ implisit gösterilişte düzgün bir $P(x_1, x_2, x_3)$ noktasında hesaplanan ve üçü birden sıfır olmayan

$$f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3}$$

değerleri P deki bir normalin bileşenleri olduğundan, gene (39-6) bağıntısını kullanarak eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemini

(39-18) $$\begin{vmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ df_{x_1} & df_{x_2} & df_{x_3} \end{vmatrix} = 0$$

biçiminde yazabiliriz. Bu denklemde, bir normal, değme noktasından geçen herhangi bir teğete dik olduğundan

$$f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + f_{x_3} dx_3 = 0$$

dır.

Örnekler 39-2.

1. Bir dik koordinat sistemine göre denklemleri

(39-19) $x_1 = (a+v)\,\mathrm{Cos}\,u,\quad x_2 = (a+v)\,\mathrm{Sin}\,u,\quad x_3 = b\,u,\quad$ (a, b : sabit)

olan yüzeyin eğrilik çizgilerini bulunuz.

Bu yüzeyin birinci ve ikinci kuvadratik formlarının, herhangi bir (u, v) noktasındaki katsayıları, (17-7), (17-16) ve (24-2) formüllerine göre

$E = (a+v)^2 + b^2,\quad F = 0,\quad G = 1;\quad HL = 0,\quad HM = b,\quad HN = 0$

olduğundan, eğrilik çizgilerinin (39-3) diferansiyel denklemi

$$\varepsilon\, du = \frac{dv}{[(a+v)^2+b^2]^{1/2}}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

dir.

Eğer

$$\frac{a+v}{b} = \bar{v}$$

dersek,

$$dv = b\, d\bar{v}$$

olacağından, diferansiyel denklem

$$\varepsilon\, du = \frac{d\bar{v}}{\sqrt{\bar{v}^2+1}}, \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

biçimine gireceğinden, genel çözüm

$$\varepsilon\, u + c = \mathrm{Log}\,(\bar{v} + \sqrt{\bar{v}^2+1}), \quad (c: \text{sabit})$$

$$\bar{v} = \frac{a+v}{b} = \mathrm{sh}\,(\varepsilon\, u + c),$$

$$v = b\,\mathrm{sh}\,(\varepsilon\, u + c) - a$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(39-18) dolayısiyle de, eğrilik çizgilerinin denklemleri

$x_1 = b \operatorname{sh}(\varepsilon u + c) \operatorname{Cos} u, \quad x_2 = b \operatorname{sh}(\varepsilon u + c) \operatorname{Sin} u, \quad x_3 = b u$

dir.

2. Bir dik koordinat sistemine göre MONGE gösterilişi

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$

olan yüzeyin eğrilik çizgilerini bulunuz (dönel paraboloid).

Yüzeyin veren denklemden

$$p = 2x_1, \quad q = 2x_2; \quad dp = 2\,dx_1, \quad dq = 2\,dx_2$$

bulunacağından, eğrilik çizgilerinin (39-17) diferensiyel denklemi

$$(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)\,dx_3 = 0$$

veya

$$x_3 = a = \text{sabit}, \quad x_2 = b x_1, \quad (b : \text{sabit})$$

verir. Buna göre, eğrilik çizgilerinin denklemleri

$$x_1^2 + x_2^2 = a, \quad x_3 = a, \quad (a : \text{sabit})$$ çemberleri

ve yüzeyin

$$x_2 = b x_1, \quad (b : \text{sabit})$$

düzlemleriyle olan parabol kesitleridir.

3. Bir dik koordinat sisteminde implisit gösterilişi

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0$$

olan yüzeyin (bir yaygılı dönel hiperboloid) **eğrilik çizgilerini bulunuz.**

Yüzeyi veren denklemden

$$f_{x_1} = 2x_1, \quad f_{x_2} = 2x_2, \quad f_{x_3} = -2x_3, \quad df_{x_1} = 2\,dx_1,$$

$$df_{x_2} = 2\,dx_2, \quad df_{x_3} = -2\,dx_3$$

bulunacağından, eğrilik çizgilerinin (39-18) diferensiyel denklemi

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ dx_1 & dx_2 & -dx_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & -x_3 \\ dx_1 & dx_2 & -dx_3 \\ 0 & 0 & 2dx_3 \end{vmatrix} = 0$$

veya

$$(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)\, dx_3 = 0$$

olur. Buradan

$$x_3 = a, \quad (a : \text{sabit}), \qquad x_2 = bx_1, \quad (b = \text{sabit})$$

çıkar. Buna göre eğrilik çizgilerinin denklemleri

$x_1^2 + x_2^2 = 1 + a^2$, $x_3 = a$ anlem çemberleri ile

$x_2 = bx_1$ düzlemleri ile yüzeyin kesitleri olan boylam hiperbolleridir.

40. Eşlenik doğrultular

Düzemde, herhangi bir karteziyen koordinat sistemi alındığında, merkezi başlangıç noktasında bulunan bir koniğin karteziyen denklemi

(40-1) $$b_{11} x_1^2 + 2 b_{12} x_1 x_2 + b_{22} x_2^2 - 1 = 0$$

biçimindedir.

(40-1) denkleminin $\bar{\delta}$ diskriminantı

$$\bar{\delta} = b_{12}^2 - b_{11} b_{22}$$

dir. $\bar{\delta} > 0$ ise, bir **hiperbol**; $\bar{\delta} < 0$ ise, **bir elips**; $\bar{\delta} = 0$ ise, **paralel iki doğru** söz konusudur. Verilen denklem biçimine göre, merkez, konik üzerinde bulunamayacağından, **iki paralel doğru hiç bir vakit çakışamaz.** (dx_1, dx_2) ve $(\delta x_1, \delta x_2)$ doğrultularının (40-1) koniğine göre eşlenik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu doğrultular arasında

(40-2) $$b_{11} dx_1 \delta x_1 + b_{12} (dx_1 \delta x_2 + \delta x_1 dx_2) + b_{22} dx_2 \delta x_2 = 0$$

bağıntısının bulunmasıdır. Buna, (40-1) denkleminin **polar biçimi** denilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Eğer

$$m_1 = \frac{dx_2}{dx_1} \; ; \quad m_2 = \frac{\delta x_2}{\delta x_1}$$

açıkatsayılarını alırsak, (40-2) denklemi

(40-3) $$b_{22} m_1 m_2 + b_{12} (m_1 + m_2) + b_{11} = 0$$

biçimine girer.

Tanım 40-1.

Yüzeyin, eliptik ya da parabolik-göbek noktası olmayan bir P düzgün noktasından geçen iki D, Δ teğet doğrusu, bu noktadaki DUPIN göstergesine göre eşlenik ise, D ve Δ nın doğrultularına **eşlenik** diyeceğiz.

D ve Δ nın doğrultuları, (26-12) gereğince

$$\vec{dx} = \vec{t}\,\sqrt{E}\,du + \vec{t}^{*}\sqrt{G}\,dv, \quad \vec{\delta x} = \vec{t}\,\sqrt{E}\,\delta u + \vec{t}^{*}\sqrt{G}\,\delta v$$

vektörleriyle verilmişse, P den geçen koordinat çizgilerinin teğetlerinden oluşan Px_1, Px_2 eksenlerine göre

(40-4) $$dx_1 = \sqrt{E}\,du, \quad dx_2 = \sqrt{G}\,dv, \quad \delta x_1 = \sqrt{E}\,\delta u, \quad \delta x_2 = \sqrt{G}\,\delta v$$

olacağından, P noktasındaki

$$\frac{L}{E} x_1^2 + 2\frac{M}{\sqrt{EG}} x_1 x_2 + \frac{N}{G} x_2^2 = \varepsilon, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

DUPIN göstergesine göre, D ve Δ nın iki eşlenik doğru olmaları için **gerekli ve yeterli koşul**, (40-2) ve (40-4) bağıntıları nedeniyle

(40-5) $$L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0$$

dır.

Uyarı 40-1.

Aynı sonuca, (19-31) ve (40-3) bağıntılarını kullanarak da varılabilir. Şu da söylenebilir: P den geçen koordinat çizgilerinin bu noktadaki teğet

MARMARA ÜNİVERSİTESİ KÜTÜPHANESİ

birim vektörleri olarak $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ alınırsa, DUPIN göstergesinin denklemi $L x_1^2 + 2M x_1 x_2 + N x_2^2 = \varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)$ olacağından, (du, dv) ve (δu, δv) doğrultularının eşlenik olmaları koşulu gene (40-5) dir.

Teorem 40-1.

Bir yüzeyin eliptik ya da parabolik-göbek noktası olmayan bir P düzgün noktasında iki (du, dv), (δu, δv) doğrultusunun eşlenik olması için gerekli ve yeterli koşul, P noktasında

(40-5) $$L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0$$

olmasıdır. Yukarıki bağıntının sol yanı, II kuvadratik formunun **poler biçimidir.**

Özelik 40-1.

Yüzeyin eliptik ya da parabolik-göbek noktasından farklı bir P düzgün noktasından geçen iki $d\vec{x}$, $\delta\vec{x}$ teğet doğrultusunun eşlenik iki doğrultu olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bunlardan **herhangi birisinin, ötekinin küresel görüntüsüne dik olmasıdır;** yâni

(40-6) $$-d\vec{x}, \delta\vec{n} = 0 \quad \text{veya} \quad -\delta\vec{x} \cdot d\vec{n} = 0$$

bağıntılarından birinin sağlanmış olmasıdır.

Gerçekten, (40-6) eşitliklerinden, örneğin, birinci sağlanmışsa

$$d\vec{x} = \vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv, \quad \delta\vec{n} = \vec{n}_u\,\delta u + \vec{n}_v\,\delta v$$

bağıntıları, (24-7) formülleri nedeniyle

$$-d\vec{x} \cdot \delta\vec{n} = L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0,$$

yâni (40-5) denklemini verir.

Öte yandan, (40-5) in gerçekleşmesi hâlinde, bunun da (40-6) biçimlerinde yazılabileceği açıktır.

Görülüyor ki, (40-1) özeliği, eşlenik iki doğrultuyu tanımlamakta kullanılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Özelik 40-2.

Yüzeyin eliptik ya da parabolik-göbek noktalarından geçmeyen ve P düzgün noktalarından oluşan bir eğrisi C olsun. C nin P noktasındaki teğeti ile P den geçen ve bu noktadaki teğet düzlem üzerinde bulunan bir PT doğrusunun eşlenik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, C boyunca değişen **PT doğrularının bir eğriye teğet kalmalarıdır.**



Şekil 45

Gerçekten, C boyunca değişen, P den geçen ve bu noktadaki teğet düzlem üzerinde kalan PT doğruları bir C* eğrisine P* noktalarında teğet kalırsa,

$$\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP^*}$$

vektörel bağıntısı yardımiyle

$$\overrightarrow{x^*} = \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{w}, \quad (\overrightarrow{w}^2 = 1)$$

yazabiliriz. Buradan, her iki yanın diferansiyelini alarak

$$\overrightarrow{dx^*} = \overrightarrow{dx} + d\lambda \overrightarrow{w} + \lambda \overrightarrow{dw}$$

bulunur. P noktasındaki teğet düzlem üzerinde bulunan $\overrightarrow{dx^*}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{dx}$ vektörleri P noktasındaki normal vektöre dik olacaklarından, son bağıntının her iki yanını skaler olarak $\overrightarrow{n}$ ile çarptığımızda, $\lambda \neq 0$ olduğundan

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{dw} = 0$$

elde edilir. Öte yandan, $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$ nin diferansiyeli, yukarıki bağıntı nedeniyle

$$d\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$$

vereceğinden, özelik (40-1) gereğince, $\vec{W}$ vektörü, $d\vec{x}$ in küresel görüntüsüne dik olduğundan, bunun eşlenik doğrultusunu verir.

Karşıt olarak, C nin her P noktasındaki $\vec{dx}$ doğrultusunun PT eşleniği üzerinde

(40-6)' $$\lambda^* = -\frac{d\vec{x} \cdot d\vec{w}}{dw^2}$$

ile tanımlanan, P* noktasının yer vektörü

$$\vec{OP^*} = \vec{x^*} = \vec{x} + \lambda^* \vec{w}$$

olduğundan,

$$d\vec{x^*} = d\vec{x} - \frac{d\vec{x} \cdot d\vec{w}}{dw^2} d\vec{w} + d\lambda^* \vec{w}$$

$$= \frac{(dw)^2 d\vec{x} - (d\vec{x} \cdot d\vec{w}) d\vec{w}}{dw^2} + d\lambda^* \vec{w}$$

$$= \frac{(d\vec{w}, d\vec{x}, d\vec{w})}{dw^2} + d\lambda^* \cdot \vec{w} = d\lambda^* \vec{w}$$

bulunur. Yâni **P* noktasının C geometrik yeri, PT ye P* de teğettir.**

Gene görülüyor ki: Özelik 40-2 de, eşlenik iki doğrultunun tanımı için kullanılabilir.

40-1. Sonuçlar

1) Asal doğrultuların eşlenikleri. Eşlenik iki $d\vec{x}$, $\delta\vec{x}$ doğrultusu için bulunan (40-6) bağıntılarından birini, örneğin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(40-6,2) $$\vec{\delta x} \cdot \vec{dn} = 0$$

a alalım. Eğer $\vec{dx}$ bir asal doğrultu ise, Teorem 39-4 nedeniyle, $\vec{dn}$ küresel görüntüsüne paraleldir; yâni

$$\vec{\delta x} \cdot \vec{dx} = 0$$

dır. O hâlde, bir asal doğrultu eşleniğine diktir. Karşıt olarak, birbirine dik eşlenik $\vec{dx}$, $\vec{\delta x}$ doğrultuları alındığında, (40-6;2) nedeniyle $\vec{dx}$ ve $\vec{dn}$ birbirine paraleldir. Dolayısiyle, gene aynı teorem, bu iki doğrultunun asal olduğunu gösterir.

Teorem 40-2.

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzeyin, eliptik veya parabolik-ombilik noktaları bulunmayan ve düzgün noktalardan oluşan iki dik eğri şebekesinin kesim noktalarındaki teğetlerin eşlenik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bunların eğrilik çizgileri şebekesiyle çakışmalarıdır.

2) Asimptotik doğrultuların eşlenikleri (40-6: 2) denkleminde, $\vec{dx}$ bir asimptotik doğrultu ise, Teorem 38-2 nedeniyle, $\vec{dn}$ küresel görüntüsüne diktir, yâni $\vec{\delta x}$ e paraleldir. Karşıt olarak, bir **asimptotik doğrultunun kendi kendisinin eşleniği** olduğu da bilinmektedir.

3) Koordinat çizgileri teğetlerinin eşlenik olmaları koşulu.

Koordinat çizgilerinin teğetleri eşlenikse, $du=o$, $dv \neq 0$ ve $\delta u \neq 0$, $\delta v = 0$ için (40-5) denklemi sağlanmalıdır, bu da yüzey üzerinde

(40-7) $$M = 0$$

verir.

Karşıt olarak yüzey üzerinde (40-7) koşulu varsa, (40-5) denkleminin çözümleri de koordinat çizgileridir.

Söyle de söylenebilir: DUPIN göstergesinin denkleminde, eksenler eşlenikse, eksen uçlarındaki teğetler eksenlere paralel olacaklarından, $M = 0$ dır ve bunun karşıtı da doğrudur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 40-3.

Sınıfı ≥ 3 olan bir yüzeyin eliptik veya parabolik-göbek noktaları bulunmayan ve düzgün noktalardan oluşan koordinat çizgilerinin eşlenik bir şebeke meydana getirmeleri için gerekli ve yeterli koşul, yüzey üzerinde

$$M = 0$$

olmasıdır.

Yüzeyin bir eğri ailesinin eşleniği olan eğri ailesinin bulunması

Bir yüzey üzerindeki bir eğri ailesi

(40-8) $$\varphi(u, v) = c = \text{sabit}$$

denklemiyle verildiğinde; bu aileyi oluşturan eğriler üzerinde eliptik ya da parabolik-göbek noktaları bulunmadığını, ve sadece düzgün noktalar olduğunu varsayalım.

Bu ailenin, a ile birlikte değişen, eğrilerinden birinin bir P(u, v) noktasındaki teğeti

(40-9) $$\varphi_u\,du + \varphi_v\,dv = 0, \quad \left(\varphi_u^2 + \varphi_v^2 \neq 0;\ \frac{dv}{du} = -\frac{\varphi_u}{\varphi_v}\right)$$

denklemiyle belirlidir. (40-5) i du^2 ile böler ve $\frac{dv}{du}$ yerine $-\frac{\varphi_u}{\varphi_v}$ koyarsak, verilen eğri ailesinin eşleniği olan ailenin diferansiyel denklemi olarak

(40-10) $$\frac{\delta v}{\delta u} = \frac{L\varphi_v - M\varphi_u}{N\varphi_v - M\varphi_v}$$

bulunur.

Örneğin, v=sabit koordinat çizgilerinin eşleniği olan aile için

$$\varphi_v = 1, \quad \varphi_u = 0$$

olacağından, diferansiyel denklem

(40-11) $$\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{L}{M}$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aynı biçimde, u = sabit için de

$$\varphi_u = 1, \quad \varphi_v = 0$$

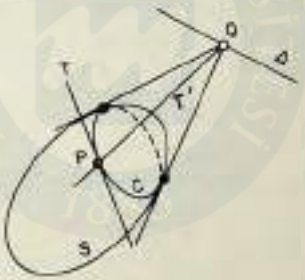
olarak

(40-12) $$\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{M}{N}$$

bulunur.

Bu son iki denklem, doğrudan doğruya (40-5) den de bulunabilirdi.

Geometrik sonuçlar 40-2.



Şekil 46

Bir S yüzeyine, bunun dışındaki bir O noktasından çizilen teğetlerle elde edilen koninin S ye değme eğrisi C, bunun eliptik ya da parabolik-göbek noktasından farklı bir düzgün noktası P, C nin P deki teğeti de PT olsun. C boyunca değişen PO teğetleri bir O noktasından (nokta-eğri) geçtiklerinden, PT ve PO doğruları eşleniktir. (Özelik 40-2 dolayısiyle).

Buna göre, **S nin düzgün bir P' noktasından geçen bir PT' teğeti verildiğinde, bunun PT eşleniğini bulmak için,** PT' üzerinde P den farklı bir O noktası alınarak, **bundan önceki çizim uygulanabilir.**

S üzerinde herhangi bir eşlenik şebeke tanımlamak için de, söyle davranılabilir:

KOENIGS (P. X. 6) Teoremi 40-3.

En az üçüncü sınıftan bir S yüzeyi ile herhangi bir Δ doğrusu verildiğinde, Δ dan geçen düzlemlerle S nin kesiti olarak bulunan C³ eğrile-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

riyle, △ üzerinde yer değiştiren Q noktalarından S ye çizilen teğetlerle elde olunan konilerin C değme eğrileri, S üzerinde bir eşlenik eğri şebekesi oluştururlar.

40-3 MONGE gösterilişinde eşleniklik

Bir dik eksen sisteminde en az 2-nci sınıftan bir yüzeyin

$$x_3 = g(x_1, x_2)$$

fonksiyonu yardımiyle MONGE gösterilişinde her nokta düzgündür. İki $\vec{dx}$, $\vec{\delta x}$ eşlenik doğrultu verildiğinde; (40-6) denklemlerinden yararlanarak, eşleniklik bağıntısını yazabiliriz. Önce şurasını kaydedelim ki, iki doğrultunun eşlenikliğini gösteren, örneğin

$$-\vec{\delta x} \cdot \vec{dn} = 0$$

bağıntısında $\vec{n}$ vektörünün birim vektörü oluşu gerekli değildir. Şöyle ki

$$\vec{n} = \lambda \vec{n^*} \quad , \quad (\lambda \neq 0)$$

dersek

$$\vec{dn} = \lambda\, d\vec{n^*} + d\lambda\, \vec{n^*}$$

in iki yanını skaler olarak $\vec{\delta x}$ teğet vektörü ile çarptığımızda

(40-13) $$-\vec{\delta x} \cdot \vec{dn} = -\vec{\delta x} \cdot \vec{dn^*} = 0$$

olur. O hâlde, bu gösterilişte, $n^*(-p, -q, 1)$ alınabileceğinden, yukarıki bağıntı

(40-14) $$dp \cdot \delta x_1 + dq \cdot \delta x_2 = 0$$

veya açarak

(40-15) $$r\,dx_1\,\delta x_1 + s\,(dx_1\,\delta x_2 + dx_2\,\delta x_1) + t\,dx_2\,\delta x_2 = 0$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aynı sonuca, doğrudan doğruya, (40-5) yardımiyle de varabilirdik.

40.4 İmplisit gösterilişte eşleniklik

En az 2-nci sınıftan $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ implisit gösterilişin düzgün bir $P(x_1, x_2, x_3)$ noktasında, $\vec{n}^*(f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3})$ olduğundan ve skaler bileşenlerin üçü birden sıfra eşit bulunmadığından, eşleniklik, (40-13) nedeniyle

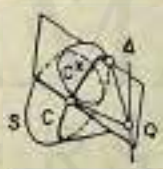
(40-16) $$df_{x_1}\,\delta x_1 + df_{x_2}\,\delta x_2 + df_{x_3}\,\delta x_3 = 0$$

bağıntısiyle ifade olunur. Bu da açıldığında

(40-17) $$f_{x_1^2}\,dx_1\,\delta x_1 + f_{x_1x_2}\,dx_2\,\delta x_2 + f_{x_2^2}\,dx_2\,\delta x_2 + f_{x_1x_2}(dx_1\,\delta x_2 + dx_2\,\delta x_1)$$
$$+ f_{x_2x_3}(dx_2\,\delta x_3 + dx_3\,\delta x_2) + f_{x_3x_1}(dx_3\,\delta x_1 + dx_1\,\delta x_3)$$

bulunur.

Örnekler 40-1.



Şekil 47

1. Bir dik eksen sistemine göre koordinatları

$$x_1 = u\,\mathrm{Cos}\,v, \quad x_2 = u\,\mathrm{Sin}\,v, \quad x_3 = u + v$$

olan yüzey veriliyor. $v = a$ = sâbit koordinat çizgilerini dik olarak kesen eğri ailesinin eşleniği olan eğri ailesini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bir yüzey üzerinde herhangi iki eğri ailesinin teğet doğrultuları (du, dv), (δu, δv) ile verildiğinde, bunların bir dik şebeke oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşul (19-11) denklemi, yâni

$$E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0 \qquad (19\text{-}11)$$

dır. Sırası gelmişken bir noktayı belirtelim: (19-11) in birinci yanı, **I kuvadratik formunun poler biçimidir.**

Yüzeyin v=a=sâbit koordinat çizgileri boyunca: du ≠ 0, dv = 0 olacağından, bu koordinat çizgilerini dik açı altında kesen eğri ailesi için, (19-11) denklemi, koordinat çizgileri esasen dik değilse, yâni F ≠ 0 ise,

$$E\,\delta u + F\,\delta v = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{v}_u = -\frac{E}{F} \qquad (40\text{-}18)$$

verir.

Bu eğrilerin eşleniklerinin doğrultusunu (du, dv) ile gösterdiğimizde, (40-5) denkleminden

$$N\,\bar{v}_u\,\frac{dv}{du} + M\left(\bar{v}_u + \frac{dv}{du}\right) + L = 0$$

veya (40-18) yardımıyle

$$EN\frac{dv}{du} - M\left(F\,\frac{dv}{du} - E\right) - FL = 0$$

yâni

$$\frac{dv}{du} = \frac{FL - EM}{EN - FM} \qquad (40\text{-}19)$$

çıkar.

Buna göre, verilen yüzeyin I inci ve II nci kuvadratik formlarının katsayılarını, (17-7) ve (24-2) formülleri yardımıyle hesaplarsak

$$E = 2,\ F = 1,\ G = 1+u^2;\ L = 0,\ HM = -1,\ HN = u^2$$

bulunacağından, (44-19) denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{dv}{du} = \frac{2}{2u^2 + 1}$$

biçimini alır. Bu diferansiyel denklemin integrasyonu ile de

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{v+c}{\sqrt{2}} \; ; \quad (c = \text{sabit})$$

elde edilir.

O hâlde, aranılan ailenin kartezyen denklemleri

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{v+c}{\sqrt{2}} \operatorname{Cos} v, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{v+c}{\sqrt{2}} \operatorname{Sin} v,$$

$$x_3 = v + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{v+c}{\sqrt{2}}$$

olur.

2. Bir dik eksen sistemine göre denklemi

$$x_3 = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 \; , \quad (\alpha, \beta : \text{sabit})$$

yüzeyi üzerinde koordinat çizgilerinin eşlenik bir şebeke oluşturduklarını gösteriniz.

Koordinat çizgilerinin eşlenik bir şebeke oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşul, teorem 40-3 dolayısiyle, $M = 0$ dır. Bu örnekte de, sıra ile

$$p = 2\alpha x_3 \; , \quad s = 0$$

dır.

3. Bir dik eksen sistemindeki denklemi

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

olan bir yaygılı hiperboloidin

$$x_3 = \alpha = \text{sabit}$$

düzlem kesitleri olarak elde edilen elips ailesinin eşleniği olan alleyi bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{1}{2} f_{x_1} = \frac{x_1}{a^2} \cdot \frac{1}{2} f_{x_2} = \frac{x_2}{b^2} \cdot \frac{1}{2} f_{x_3} = \frac{x_3}{c^2} \cdot dx_3 = 0$$

olduğundan, (40-16) bağıntısı

$$\frac{1}{a^2} dx_1 \delta x_1 + \frac{1}{b^2} dx_2 \delta x_2 = 0$$

verir. Öte yandan, verilen denklemin diferansiyelinden

$$\frac{1}{a^2} x_1 dx_1 + \frac{1}{b^2} x_2 dx_2 = 0$$

elde edileceğinden

$$\frac{\delta x_1}{x_1} = \frac{\delta x_2}{x_2}$$

veya

$$x_2 = \beta x_1 , \quad (\beta : \text{sabit})$$

bulunur. Üçüncü eksenden geçen bu son düzlemlerle hiperboloidin kesit olarak bulunacak hiperbol ailesi; $x_3 = \alpha$ elips ailesinin eşleniği olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM VII

YÜZEYLERİN İÇ ÖZELLİKLERİ

GEODEZİK ELEMANLAR

41. Geodezik eğrilik

En az 2-nci sınıftan bir S yüzeyinin, eliptik ya da parabolik-göbek noktası olmayan bir P düzgün noktasından geçen ve gene en az 2-nci sınıftan bir C eğrisinin P deki $\vec{a}_1$ teğet birim vektörünü, kağıt düzlemine dik olarak alalım.



Şekil 48.

C nin P deki eğrilik ekseninin, aynı noktadaki teğet düzlemi deldiği nokta P_g yüzey normali ile ortak noktası da P_n olsun. § 33, Tanım 33 de: P_g ye, **geodezik eğrilik merkezi** ve

$$\overline{PP_g} = \frac{1}{\rho_g} = R_g \tag{41-1}$$

ye de **geodezik eğrilik yarıçapı** demiştik. Ayrıca, ρ_g ye, **geodezik eğrilik** adının verildiğini kaydedelim.

Uyarı 41-1.

En az 2-nci sınıftan bir yüzey üzerinde, P düzgün noktası seçildiğinde, bu noktada birbirine teğet ve en az 2-nci sınıftan tüm C eğrilerinin norma-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

eğrilikleri birbirine eşittir. Başka deyimle, P düzgün noktasından geçen bir teğetin verilmesi, normal eğriliğin belirlenmesi için yeterlidir. Aynı şeyi, geodezik eğrilik için söyleyemeyiz. ρ_g nin belirlenebilmesi için, teğetten başka, oskülatör düzlemin de verilmesi gereklidir. Yani: **En az 2-nci sınıftan bir yüzeyin, bir P düzgün noktasından geçen, yüzey üzerinde bulunan en az 2-nci sınıftan C eğrilerinin P noktasındaki teğet ve oskülatör düzlemleri çakışık ise, bunların P deki geodezik eğrilikleri aynıdır.**

Görülüyor ki, **geodezik eğrilik**, normal eğrilik gibi, **bir doğrultu fonksiyonu değildir.**

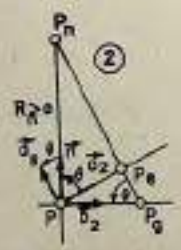
C eğrisinin teğet düzlem üzerindeki dik izdüşümüne C_T ve $(\vec{a}_1, \vec{n})$ normal düzlemi üzerindeki dik izdüşümüne de C_N diyelim. İzdüşüren silindirlere MEUSNIER teoremini uyguladığımızda, kolaylıkla görülür ki:

C eğrisinin teğet düzlem üzerindeki C_T dik izdüşümünün P deki eğrilik merkezi P_g, $(\vec{a}_1, \vec{n})$ normal düzlemi üzerindeki C_N dik izdüşümünün gene P deki eğrilik merkezi P_n dir.

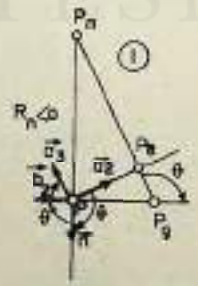
C eğrisi bir asimptotik çizgi ise, P_g noktası, bunun P deki eğrilik merkezidir.

41-1. Geodezik eğriliğin işareti

§ 33 de de gördüğümüz gibi, P_n ve P_g noktaları, teğet düzlemin aynı yanında bulunurlar ve yüzeyin P noktasındaki $\vec{n}$ normal birim vektörü için iki ayrı durum söz konusudur.



Şekil 49



Şekil 50

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bunlardan 1 ile gösterilende Şekil 50.

$$R_s > 0, \qquad \theta > 0$$

2 ile gösterilende ise Şekil 49

$$R_s < 0, \qquad \theta < 0$$

dir.

C eğrisinin P noktasındaki $\vec{a_1}$ teğet birim vektörünü, kâğıt düzlemine dik almıştık. Yönü de bize doğru olsun. Buna göre,

(41-2) $$\vec{b_2} = \vec{n} \wedge \vec{a_1}$$

birim vektörünün yönü ile $\vec{PP_s}$ nin yönü aynı ise, veya $\vec{PP_s} \cdot \vec{b_2} > 0$ olduğunda $R_s > 0$, aksi halde, yâni $\vec{PP_s} \cdot \vec{b_2} < 0$ ise, $R_s < 0$ olarak alalım. Böylece olunca,

(41-3) $$R_s \operatorname{Sin} \theta = R \quad \text{veya} \quad \rho_s = \rho \operatorname{Sin} \theta$$

eşitliği, her iki şekil için de geçerlidir. Şöyle ki:

1 için: $\rho_s > 0$, $\operatorname{Sin} \theta > 0$; 2 için de $\rho_s < 0$, $\operatorname{Sin} \theta < 0$

dır.

41-2. Geodezik eğriliğin değeri BELTRAMİ formülü

C eğrisinin P noktasında

$$\rho \vec{a_3} \cdot \vec{n} = \rho \operatorname{Sin} \theta = \rho_s, \qquad \vec{a_3} = \vec{a_1} \wedge \vec{a_2} = \vec{x}^{\circ} \wedge \frac{\vec{x}^{\circ\circ}}{\rho}$$

olduğundan

(41-4) $$\rho_s = [\vec{x}^{\circ}, \vec{x}^{\circ\circ}, \vec{n}] = \rho \operatorname{Sin} \theta$$

dir.

Herhangi bir t düzgün parametresine göre

$$\vec{x}^{\cdot} = \vec{x}'\, t^{\cdot}, \quad \vec{x}^{\cdot\cdot} = \vec{x}''\, t^{\cdot 2} + \vec{x}'\, t^{\cdot\cdot}, \quad t^{\cdot 2} = \frac{1}{s^{\cdot 2}} = \frac{1}{\vec{x}'^{2}}$$

yazılabileceğinden, (41-4)

$$\rho_g = (\vec{x}', \vec{x}'', \vec{n})\, t^{\cdot 3}$$

veya

$$\rho_g = \frac{(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{n})}{(\vec{x}'^{2})^{3/2}} = \frac{(\vec{dx}, \vec{d^2x}, \vec{n})}{(\vec{dx}^{2})^{3/2}} \tag{41-5}$$

bulunur.

Böylece elde edilen (41-5) formülü, herhangi düzgün bir t parametresi cinsinden, C eğrisinin P noktasındaki **geodezik eğriliğini** vermektedir.

(41-5) formülündeki $\vec{x}'$ ve $\vec{x}''$ yerine

$$\vec{x}' = \vec{x}_u\, u' + \vec{x}_v\, v', \quad \vec{x}'' = \vec{x}_{uu}\, u'^2 + 2\vec{x}_{uv}\, u'v' + \vec{x}_{vv}\, v'^2 + \vec{x}_u\, u'' + \vec{x}_v\, v''$$

koyar ve (26-1) GAUSS formülerini kullanırsak, C eğrisinin P düzgün noktasındaki ρ_g geodezik eğriliği için, BELTRAMI formülü denilen

$$\rho_g = H\frac{\Gamma_{11}^{2}u'^3 + (2\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1})u'^2v' + (\Gamma_{22}^{2} - 2\Gamma_{12}^{1})u'v'^2 - \Gamma_{22}^{1}v'^3 + u'v'' - v'u''}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{3/2}} \tag{41-6}$$

elde edilir.

Teorem 41-1.

Sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin gene aynı sınıftan bir C eğrisinin, bir P düzgün noktasındaki geodezik eğrilik, (41-6) formülü ile belirlidir. Bu formül gösterir ki, geodezik eğrilik sadece birinci kuvadratik formun katsayılarına, bunların birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerinden bazılarına ve C eğrisine bağlıdır. Bunun işareti de, (41-5) bağıntısı nedeniyle, yüzeyin P noktasındaki yönlendirilmesiyle birlikte değişir.

v=sâbit ve u=sâbit koordinat çizgilerinin P noktasındaki geodezik eğriliklerine sıra ile $g^*, \bar{g}^*$ dersek, (41-6) bağıntısı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(41-7) $$g^* = \frac{H}{E^{3/2}}\,\Gamma_{11}^2\,;\quad \bar{g}^* = -\frac{H}{G^{3/2}}\,\Gamma_{22}^1$$

verir.

Koordinat çizgilerinin bir dik eğri şebekesi oluşturmaları hâlinde, geodezik eğrilikleri $g, \bar{g}$ ile gösterirsek, (26-6) formülleri yardımiyle

(41-7)' $$g = -\frac{E_v}{2\sqrt{GE}} = -(\lg \sqrt{E})_2\,;\quad \bar{g} = \frac{G_u}{2\sqrt{EG}} = (\lg \sqrt{G})_1$$

olur.

Bu sonuçlar, (26-15; 1,2) formüllerinin aynıdır.

t parametresi olarak u yu alırsak,

$$u' = 1,\quad u'' = 0$$

olacağından, (41-6) formülünden

(41-8) $$\rho_g = H\,\frac{-\Gamma_{22}^1 v'^3 + (\Gamma_{22}^2 - 2\,\Gamma_{12}^1)\,v'^2 + (2\,\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\,v' + \Gamma_{11}^2 + v''}{(G\,v'^2 + 2F\,v' + E)^{3/2}}$$

$$v' = \frac{dv}{du}$$

çıkar.

Koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde birbirlerini dik kesmeleri hâlinde, (26-6) formülleri yardımiyle, (41-8) den

(41-9) $$\rho_g = \sqrt{EG}\,\frac{(G_u/2E)\,v'^3 + (G_v/2\,G - E_v/E)\,v'^2 + (G_u/G - E_u/2E)\,v' - E_v/2E + v''}{(G\,v'^2 + E)^{3/2}}$$

elde edilir.

41-3. MONGE gösterilişinde geodezik eğrilik

Bir dik koordinat sisteminde yüzeyin, sınıfı $\geqslant 2$ olan bir $x_3 = g(x_1, x_2)$ fonksiyonu ile MONGE gösterilişinde, CHRISTOFFEL sembollerini veren (26-8) formüllerini kullanırsak, geodezik eğriliği veren (41-6) formülünden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(41-10)

$$\rho_g = \frac{qr\,x_1'^3 + (2qs-pr)\,x_1''\,x_2' + (qt-2ps)\,x_1'\,x_2'' - pr\,x_2''^3 + x_1'\,x_2''^2 - x_2'\,x_1''}{(1+p^2+q^2)^{1/2}\,[(1+p^2)\,x_1''^2 + 2pq\,x_1'\,x_2' + (1+q^2)\,x_2''^2]^{3/2}}$$

sonucu çıkarılır.

Uyarı 41-2.

Bir asimptotiğin geodezik eğriliği, asimptotik boyunca $\theta = (\pi/2)$ olduğundan,

$$\rho_g = \rho$$

dır. (38-13) formülü ile de bu sonucu, yani asimptotiğin geodezik eğriliğinin, kendi eğriliğine eşit olduğunu bilmiştik.

42. Geodezik çizgiler: Tanım I Diferansiyel denklem

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin, düzgün S noktalarından oluşan ve aynı sınıftan bir C eğrisi boyunca geodezik eğriliği sıfıra eşitse, C eğrisine **geodezik çizgi** denilir.

Bu tanıma göre, geodezik çizgilerin diferansiyel denklemi, (41-8) formülü yardımıyla

(42-1) $$v'' = \Gamma_{12}^1\,v'^3 + (2\,\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)\,v'^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\,\Gamma_{12}^2)\,v' - \Gamma_{11}^2$$

biçiminde yazılır.

Bu diferansiyel denklem, 2-nci mertebeden ve $v''=f(u, v, v')$ biçimindedir.

Geodezik çizgilerin diferansiyel denklemi şöyle de bulunabilir:

Bir C geodeziğinin herhangi bir P noktasındaki $\vec{a}_2$ asal normal birim vektörü, yüzeyin P noktasındaki teğet düzlemine dik olduğundan, bu düzlemin lineer olarak bağımsız iki vektörüne, örneğin $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ vektörlerine diktir; öyleyse

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{x}_u = 0, \qquad \vec{a}_2 \cdot \vec{x}_v = 0$$

dır veya FRENET türev formüllerinden birincisi yardımıyla, C nin P deki teğet birim vektörü $\vec{a}_1$ olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{a_1''} \cdot \vec{x_u} = 0 , \qquad \vec{a_1''} \cdot \vec{x_v} = 0$$

olur. Öte yandan

$$\vec{a_1''} = (\vec{x_u} u' + \vec{x_v} v')' = \vec{x_{uu}} u'^2 + 2\vec{x_{uv}} u' v' + \vec{x_{vv}} v'^2 + \vec{x_u} u'' + \vec{x_v} v''$$

bağıntısı dolayısiyle de, yukarıki eşitliklerden

$$(\vec{x_{uu}} \cdot \vec{x_u}) u'^2 + 2(\vec{x_{uv}} \cdot \vec{x_u}) u' v' + (\vec{x_{vv}} \cdot \vec{x_u}) v'^2 + E u'' + G v'' = 0$$

$$(\vec{x_{uu}} \cdot \vec{x_v}) u'^2 + 2(\vec{x_{uv}} \cdot \vec{x_v}) u' v' + (\vec{x_{vv}} \cdot \vec{x_v}) v'^2 + F u'' + G v'' = 0$$

bulunur.

Bunlar da, (26-1) GAUSS formülleri yardımiyle

$$(\Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F) u'^2 + 2(\Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F) u' v' + (\Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F) v'^2 + E u'' + F v'' = 0$$

$$(\Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G) u'^2 + 2(\Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G) u' v' + (\Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G) v'^2 + F u'' + G v'' = 0$$

biçiminde yazılabilirler.

Bu son iki denklem arasında önce v'' yı, sonra da u'' yı yokedecek olursak, sıra ile

$$(42\text{-}2) \quad \begin{cases} \Gamma_{11}^1 u'^3 + 2\Gamma_{12}^1 u'^2 v' + \Gamma_{22}^1 u' v'^2 + u'' = 0 \\ \Gamma_{11}^2 u'^3 + 2\Gamma_{12}^2 u'^2 v' + \Gamma_{22}^2 u' v'^2 + v'' = 0 \end{cases} , \quad 1 = E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2$$

denklemleri elde edilir. İlk iki denklem arasında ds yok edildiğinde, geodezik çizgilerin (42-1) denklemi elde edilir.

Dik koordinat çizgileri hâlinde bu denklemler, (26-6) nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(42\text{-}2)' \quad \begin{cases} \dfrac{E_u}{2E}u'^2 + \dfrac{E_v}{E}u'v' - \dfrac{G_u}{2E}v'^2 + u'' = 0 \\ -\dfrac{E_v}{2G}u'^2 + \dfrac{G_u}{G}u'v' + \dfrac{G_v}{2G}v'^2 + v'' = 0 \end{cases}$$

biçimindedir.

Eğer S yüzeyi ile, üzerinde alınan C eğrisinin sınıflarının $\geqslant 3$ olduğu varsayılırsa, f fonksiyonunun $(3-2=1)$ sınıfı $\geqslant 1$ olur ve (42-1) diferansiyel denkleminin de

$$v(u_0) = v_0, \quad v'(u_0) = v'_0$$

başlangıç koşullarına uyan bir tek çözümü vardır. Bunun da geometrik anlamı şudur:

Teorem 42-1.

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin bir P düzgün noktasiyle bu noktadan geçen bir PT teğeti verildiğinde, S yüzeyinin P noktasından geçen ve bu noktada PT doğrusuna teğet olan bir tek geodeziği vardır. O hâlde, P noktasından, PT ile birlikte değişen sonsuz geodezik geçer. Bu eğrilerin tümünün sınıfı $\geqslant 3$ tür.

Görülüyor ki bir P düzgün noktasından geçenlerin sayısı bakımından, geodeziklerle, asimptotik ve eğrilik çizgileri arasında fark vardır.

Yüzey üzerinde koordinat çizgilerinin dik kesişmeleri hâlinde, (41-9) formülü dolayısiyle, geodeziklerin diferansiyel denklemi

$$(42\text{-}3) \quad v'' = -\frac{G_u}{2G}v'^3 + \left(\frac{E_v}{E} - \frac{G_v}{2G}\right)v'^2 + \left(\frac{E_u}{2E} - \frac{G_u}{G}\right)v' + \frac{E_v}{2G}$$

biçimindedir.

(42-1) diferansiyel denklemi gösterir ki, yüzeyin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$v = \text{sâbit}$$

koordinat çizgilerinin geodezik olabilmeleri için gerekli ve yeterli koşul

$$\Gamma_{11}^{2} = 0$$

veya (26-5) formüllerinden 2-ncisi nedeniyle

(42-4) $$2EF_u - EE_v - FE_u = 0$$

dır.

Eğer koordinat çizgileri yüzey üzerinde bir dik şebeke oluşturuyorlarsa, $F = 0$ olacağından, (42-4) koşulu

(42-5) $$E_v = 0 \quad \text{veya} \quad E = E(u)$$

verir.

Aynı biçimde,

$$u = \text{sâbit}$$

koordinat çizgilerinin geodezik olabilmeleri için gerekli ve yeterli koşul

$$\Gamma_{22}^{1} = 0$$

veya (26-5) formüllerinin sonuncusu yardımiyle

(42-6) $$2GF_v - GG_v - FG_u = 0$$

dır.

Koordinat çizgilerinin dik şebeke oluşturmaları halinde de, $F = 0$ nedeniyle

(42-7) $$G_v = 0 \quad \text{veya} \quad G = G(v)$$

dir.

42-1. MONGE gösterilişinde geodezik çizgilerin diferansiyel denklemi

(41-10) formülüne göre, $x_1 = t$ olarak alınırsa,

$$x_i' = 1, \quad x_i'' = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olacağından, MONGE gösterilişinde, geodezik çizgilerin diferansiyel denklemi

(42-8) $$x_3'' = p\,t\,x_3'^3 + (2ps - qt)\,x_3'^2 + (pr - 2qs)\,x_3' - qr$$

dir.

x_3 = sâbit koordinat çizgilerinin geodezik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, (42-8) denklemi nedeniyle

(42-9) $$(q \neq 0), \quad r = p_{x_1} = 0 \quad \text{veya} \quad p = p(x_2)$$

dir.

Aynı biçimde, x_1=sâbit koordinat çizgilerinin de geodezik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, (42-8) denklemi nedeniyle

(42-10) $$(p \neq 0) \quad r = p_{x_2} = 0 \quad \text{veya} \quad q = q(x_1)$$

dir.

42-2. İmplisit gösterilişte geodeziklerin diferansiyel denklemi

Yüzey

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

implisit denklemi ile verildiğinde, (16-11) ve (41-5) bağıntıları nedeniyle, geodeziklerin diferansiyel denklemi

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 \\ f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \end{vmatrix} = 0, \quad (f_{x_1}\,dx_1 + f_{x_2}\,dx_2 + f_{x_3}\,dx_3 = 0)$$

biçimindedir.

42-3. Geodezik çizgiler: Tanım II

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin, düzgün noktalardan oluşan ve gene aynı sınıftan bir C eğrisi boyunca, oskülatör düzlem, her noktada yüzeyi dik kesiyorsa, C eğrisi yüzeyin bir **geodezik çizgisi**dir.

Eğer oskülatör düzlem, C eğrisi boyunca, yüzeye dikse, C nin her P noktasındaki teğeti, asal normali ve yüzeyin P deki normali bu oskülatör

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

düzlem üzerindedir; yâni bu üç doğrunun $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$ ve $\vec{n}$ birim vektörleri arasında her P noktasında

$$(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{n}) = 0$$

bağıntısı vardır. O halde, (41-4) formülü ve tanım I nedeniyle C eğrisi bir geodezik çizgidir ve bunun tersi de doğrudur. O hâlde, tanım I de, tanım II yi gerektirir.

Şöyle de söylenebilir: Geodezik eğriliğin (41-3) değeri, yani

$$\rho_g = \rho \operatorname{Sin} \theta$$

bağıntısı gösterir ki: Tanım I e göre, bir geodezik boyunca, ya $\theta = 0$ ya da $\rho = 0$ dır. Birinci hâlde Tanım II, ikinci hâlde de bir **doğru** söz konusudur. Bir doğrudan geçen her düzlem, bu doğrunun bir oskülatör düzlemi sayılabileceğinden, bir yüzey üzerinde bulunan her doğru bir geodeziktir.

Teorem 42-2.

Bir geodeziğin düzlem olması için gerekli ve yeterli koşul, bu geodeziğin aynı zamanda bir eğrilik çizgisi olmasıdır.

Eğer yüzeyin bir C eğrisi hem geodezik, hem de düzlemse, C eğrisi boyunca asal normaller hem yüzeye normal, hem de C nin düzlemindeki normale teğet eğriye teğet kalacaklarından, teorem 39-5 dolayısiyle, C bir eğrilik çizgisidir.

Eğer yüzeyin bir C geodeziği aynı zamanda bir eğrilik çizgisi ise, gene teorem 39-5 dolayısiyle, C boyunca asal normaller bir eğriye teğet kalacaklarından, C eğrisi düzlemdir. Buna karşılık, her düzlem eğrilik çizgisi bir geodezik değildir.

42-4. Bir geodeziğin eğriliği

Bir geodeziğin bir P düzgün noktasındaki eğriliği, geodeziğin P noktasındaki teğetinden geçen ve P de yüzeyi dik olan kesitin P deki eğriliğine eşittir. Söz konusu eğriliğin değeri ise, C nin P deki teğeti ile, örneğin, r_1 asal eğrilikli asal doğrultu arasındaki φ açısı cinsinden, (34-9; 24, 34) EULER formülü, yani

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\rho_s = r_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi + r_2 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

bağıntısı ile hesaplanır. (r_1, r_2: aynı, ya da farklı işaretli, veya biri sıfır olabilir).

Bir asal doğrultuya teğet olan bir geodeziğin değme noktasındaki eğriliği, bu asal doğrultu ile belirli olan asal eğriliğe; bir asimptotiğe teğet olan bir geodeziğin değme noktasındaki eğriliği de sıfıra eşittir.

43. Geodezik paraleller ve geodezik paralel koordinatlar

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyi üzerinde, bir parametreli bir geodezik aile sini, v=sâbit koordinat çizgileri, bunların dik yörüngelerini de u=sâbit koordinat çizgileri olarak alalım. Böyle olunca, (42-3) dolayısiyle

$$E = E(u), \qquad (E > 0)$$

dır ve birinci kuvadratik form

(43-1) $$ds^2 = E(u)\,du^2 + G(u,v)\,dv^2$$

biçimindedir.

Eğer

(43-2) $$f(u) = \int_{*}^{*} \sqrt{E(u)}\,du$$

integrali ile hesaplanan f(u) yu yeni birinci eğrisel koordinat olarak seçer ve v yi de değiştirmezsek, yeni koordinatlar için (15-3) koşulu

$$\frac{D(f;v)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} f_u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{E} \neq 0$$

vereceğinden, **düzgün bir parametre değişimi** yapmış oluruz.

Yeni koordinatlarda, v ler değişmediğinden, v=sâbitler gene bir parametreli geodezik ailesidir. f(u) = sâbitler de u=sâbit sonucunu doğuracağından, ikinci koordinat çizgileri de, birinci geodezik ailesinin gene dik yörüngeleri olacaktır. Eğer birinci eğrisel koordinatı da u ile gösterirsek, yeni koordinatlar cinsinden birinci kuvadratik form, yâni (43-1)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(43-3) $$ds^2 = du^2 + G(u,v)\,dv^2$$

olacaktır.

Buna: **birinci kuvadratik formun geodezik biçimi** denilir; **bu biçim, geodezik paralel koordinatlar için karakteristiktir.** ds^2 nin bu yazılışını, daha önce (17-27) formülü ile kısaca ele almıştık.

Bu kuvadratik formda, $E=1$ olduğundan, $v=$sâbit geodeziğinin yay elemanı

$$ds = du$$

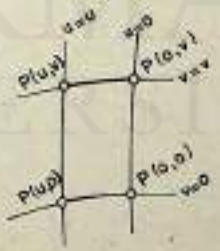
dır. Dolayısiyle, örneğin, $v=0$ geodeziğinin $u=0$ ve $u=u$ dik yörüngeleri arasında kalan

$$\overset{\frown}{P(0,0)\,P(u,0)}, \qquad \overset{\frown}{P(0,v)\,P(u,v)}, \ldots$$

parçalarının uzunluğu

$$\int_0^u du = u$$

dur, yâni **v=sâbit geodeziklerinin herhangi iki dik yörünge arasında kalan parçaları birbirine eşittir.**



Şekil 51

Bu özellik nedeniyle, $u=$sâbit dik yörüngelerine **geodezik paralel çizgiler,** bunlar arasında kalan geodezik yaylara da **geodezik uzaklıklar** denilir. Bu bakımdan, (u,v) eğrisel koordinatlarına da **geodezik paralel koordinatlar** adı verilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Birinci kuvadratik form (43-3) biçiminde ise, (36-14) formülü ile verilen GAUSS eğriliği

(43-4) $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}$$

veya

$$H^2 = G$$

bağıntısı nedeniyle

(43-5) $$K = -\frac{H_{uu}}{H}$$

biçiminde yazılır.

P(u, v) düzgün noktasından geçen u=sâbit koordinat çizgisinin P dek. $\bar{g}$ geodezik eğriliği, E=1, $G=H^2$ ve (41-7) dolayısiyle

(43-6) $$\bar{g} = (\lg H)_v = \frac{H_v}{H}$$

dir. Buna göre

(43-7) $$K = -\frac{1}{H}(H\bar{g})_v = -\frac{1}{H}[H_v\bar{g} + H\bar{g}_v] = -(\bar{g}^2 + \bar{g}_v)$$

olur.

44. Geodezik kutupsal koordinatlar

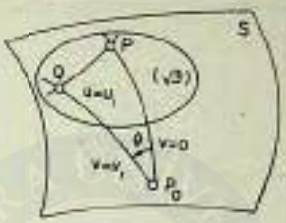
Bundan önceki paragrafla sözü edilen v=sâbit geodezik ailesinin, yüzeyin bir P_0 düzgün noktasından geçen geodeziklerden oluştuklarını varsayalım. P_0 noktası yakınlarında yüzeyin öyle bir (B) bölgesini düşünelim ki, P_0 dan geçen herhangi iki geodezik (B) bölgesinde yeniden kesişmesin ve P_0 noktası bu bölgenin dışında bulunsun. Buna göre, u=sâbit koordinat çizgilerini de, bundan önceki paragrafta yapıldığı gibi, (B) bölgesinde elde alınan geodeziklerin dik yörüngeleri olarak seçersek, birinci kuvadratik form, (43-3) biçiminde, yâni

(44-1) $$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2 = du^2 + H^2(u, v)\,dv^2$$

biçiminde olacaktır.

Gene bundan önceki paragrafta söylediklerimize göre, P_0 noktasının, herhangi bir u=u dik dik yörüngesinden, geodezik çizgiler üzerinde alınan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 52

P_0P , P_0Q , geodezik uzaklıkları u ya eşittir. Görülüyor ki her dik yörünge ya da geodezik paralel, P_0 noktasından eşit geodezik uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Bu bakımdan, tanım olarak, u=sabit geodezik paralelleri: **geodezik çemberler**dir.

P_0 noktasından geçen sonsuz geodeziği, P_0 dan geçmeyen herhangi bir geodezik çember dik olarak kesmektedir. P_0 dan geçen u=o geodezik yarıçaplı geodezik çember, bir **nokta-çember**dir. Dolayısiyle, P_0 dan geçmeyen bir geodezik çemberin (u, v) noktasındaki $\vec{x}_u(u, v)$ teğet vektörü, P_0 noktasında

(44-2) $$\vec{x}_u(o, v) = \vec{0}$$

dır. Buna göre, aynı noktada, gerçel elemanlar için

(44-3) $$G(o, v) = \vec{x}_u^2(o, v) = 0, \quad H(o, v) = \sqrt{G(o, v)} = 0$$

dır.

P_0 dan geçen herhangi bir geodeziğin bu noktadaki $\vec{x}_u(o, v)$ teğet vektörü, geodeziklerin her (u, v) noktasında

$$E(u, v) = \vec{x}_u^2(u, v) = 1$$

olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$E(o, v) = \vec{x}_u(o, v) = 1, \quad \vec{x}_u(o, v) \neq \vec{0}$$

dür.

Yüzeyin her noktasında sıfır olan $F(u, v)$ katsayısı ise, P_o da da (44-3) nedeniyle

(44-5) $$F(o, v) = \vec{x}_u(o, v) \cdot \vec{x}_u(o, v) = 0$$

dır.

P_o noktasında, lineer elemanı veren (44-1) formülü de

$$ds^2 = du^2$$

biçimindedir ve sadece geodeziklerin lineer elemanıdır.

Öte yandan, $u=u_1$ geodezik çemberinin $v=o$, $v=v_1$ geodezikleri arasında kalan $\overset{\frown}{PQ}$ yayının uzunluğu

$$\overset{\frown}{PQ} = \int_0^{v_1} \sqrt{G(u_1, v)}\, dv = \int_0^{v_1} H(u_1 v)\, dv$$

dır. u_1 in değeri sıfıra yaklaştığında $\lim_{u \to 0} \overset{\frown}{PQ} = 0$ olacağından

(44-6) $$\lim_{u \to 0} \int_0^{v_1} H(u, v)\, dv = 0$$

dır. (44-6) dan da (44-3) çıkarılabilir. u parametresi0 da çok yakınsa, u geodezik yarıçaplı çember, bayağı çember gibi düşünülebilir. O zaman P_o dan geçen iki $v=0$, $v = \Delta v$ geodezigi arasındaki $\Delta\theta$ açısı, $\overset{\frown}{PQ} = \Delta s_2 = \sqrt{G}\, \Delta v$ dolayısıyle

(44-7) $$u\, \Delta\theta = \sqrt{G(u, v)}\, \Delta v$$

bağıntısını sağlar. Buradan, P_o dan geçen $v=0$, $v=v$ geodezikleri arasındaki θ açısı için

(44-8) $$\theta = \lim_{u \to 0} \frac{\int_0^v \sqrt{G(u, v)}\, dv}{u}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Limiti bulmak için, HOPITAL kuralını uyguladığımızda da

$$\theta = \lim_{u \to 0} \frac{\int_0^v [\sqrt{G(u,v)}]_u \, dv}{1} \tag{44-9}$$

elde edilir.

$v=0$ ve $v=v$ geodezikleri arasındaki θ açısının v ye eşit olması için gerekli ve yeterli koşul da, (44-9) da θ yerine v koyup her iki yanın v ye göre türevini aldığımızda

$$[\sqrt{G(u,v)}]_u = [H(u,v)]_u = 1, \quad (u = 0 \text{ için}) \tag{44-10}$$

biçiminde çıkar.

Böylece tanımlanan $(u, v=0)$ koordinatlarına **geodezik kutupsal koordinatlar** denilir ve P_0 noktası bu koordinat sisteminin **kutup noktasıdır**.

Teorem 44-1.

Birinci temel kuvadratik formu

$$ds^2 = du^2 + H^2(u,v)\, dv^2$$

ve sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyi üzerinde $(u, 0)$ eğrisel koordinatlarının geodezik kutupsal koordinatlar olmaları için gerekli ve yeterli koşul

$$H(o,v) = 0; \quad \left[\frac{\partial}{\partial u} H(u,v)\right]_{u=0} = 1$$

dir.

Uyarı 44-1.

Yüzey üzerinde geodezik kutupsal koordinatları tanımlamak üzere alınan P_0 düzgün noktası, (44-2) bağıntısı dolayısiyle düzgün değilmiş gibi görünmektedir. Bu biçimsizlik, eğrisel koordinatların seçiminden kaynaklanmaktadır. Gerçekten, örnek olarak

$$x_1 = \text{Sin } u \text{ Cos } v, \quad x_2 = \text{Sin } u \text{ Sin } v, \quad x_3 = \text{Cos } u$$

birim küresinde

$$E(u,v) = 1, \quad F(u,v) = 0, \quad G(u,v) = H^2(u,v) = \text{Sin}^2 u$$

dür ve v = sâbit eğrileri (0, 0, 1) veya (0, 0, −1) noktasından geçen ve geodezik olan büyük çemberlerdir. Ayrıca

$$H(o,v)=0,\quad [H(u,v)]_u=\text{Cosu},\quad \left[\frac{\partial H(u,v)}{\partial u}\right]_{u=0}=1,\quad \vec{x}_v(o,v)=\vec{o}$$

dür. Böyle olmakla beraber, (0, 0, ± 1) kutupları, düzgün noktalardır.

44-1. PUISEUX-BERTRAND teoremi

Sınıfı ≥ 4 olan ve geodezik kutupsal koordinatlara nispet edilen bir S yüzeyinin, P_o kutup noktasındaki GAUSS eğriliğinin değeri K_o ise, ve U(u) da u geodezik yarıçaplı geodezik çemberin çevre uzunluğunu gösteriyorsa,

$$K_o=\frac{3}{\pi}\lim_{u\to 0}\frac{2\pi u-U(u)}{u^3};\quad \lim_{u\to 0}U(u)=0$$

dır.

Gerçekten, geodezik paralel koordinatlarda, GAUSS eğriliğinin bir P (u, v) noktasındaki değerinin, (43-5) formülü dolayısiyle

$$K(u,v)=-\frac{[H(u,v)]_{u^2}}{H(u,v)}$$

olduğunu görmüştük.

Geodezik kutupsal koordinatlar alındığında, P_o kutbunda

$$K_o H(o,v)=-\{[H(u,v)]_{u^2}\}_{u=0}$$

olacaktır. (44-3; 2) nedeniyle de

(44-11) $$\{[H(u,v)]_{u^2}\}_{u=0}=0$$

sonucu elde edilecektir. O hâlde

$$K_o=-\lim_{u\to 0}\frac{[H(u,v)]_{u^2}}{H(u,v)}$$

dır.

Limiti bulmak için HOPİTAL kuralını uygular ve (44-10) dan yararlanırsak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$K_o = -\lim_{u \to 0} [H(u,v)]_{v^3} = \{ [H(u,v)]_{v^3} \}_{u=0}$$

olur.

Öte yandan, P_o a yakın bir $P(u,v)$ noktasını alır ve $H(u,v)$ ye TAYLOR formülünü uygularsak

$$H(u,v) = H(o,v) + u\,[H(o,v)]_u + \frac{u^2}{2!}\,[H(o,v)]_{u^2}$$

$$+ \frac{u^3}{3!} \{ [H(o,v)]_{u^3} + \varepsilon_3(o,u) \},$$

$$[H(o,v)]_{u^3} = \{ [H(u,v)]_{u^3} \}_{u=0} : \lim_{u \to 0} \varepsilon_3(o,u) = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Fakat (44-3; 2), (44-10) ve (44-12) bağıntıları dikkate alındığında

$$H(u,v) = H(o,v) + u + \frac{u^3}{6}\,[-K_o + \varepsilon_3(o,u)], \tag{44-13}$$

$$\lim_{u \to 0} \varepsilon_3(o,u) = 0$$

olur.

u yarıçaplı geodezik çemberin $U(u)$ uzunluğu

$$U(u) = \int_0^{2\pi} H(u,v)\,dv$$

dir. $H(u,v)$ yerine, (40-13) konulursa, bunun sağ yanı v siz olduğundan, integrasyon işareti dışına çıkarılabilir ve

$$U(u) = 2\pi H(u,v) = 2\pi \left\{ u + \frac{u_3}{6}\,[-K_o + \varepsilon_3(o,u)] \right\} \tag{44-14}$$

olur. Buradan da

(44-15) $$K_e = \frac{3}{\pi} \lim_{u \to 0} \frac{2\pi u - U(u)}{u^3}$$

sonucu çıkarılır.

Not 44-1.

u yarıçaplı geodezik çemberin alanı A(u) ile gösterilirse, (20-13) ve (44-13) formülerine göre

$$A(u) = \int_0^u du \int_0^{2\pi} H(u, v)\, du\, dv = 2\pi \int_0^u H(u, v)\, dv =$$

$$2\pi \left\{ \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} [-K_e + \varepsilon_3(o, u)] \right\},$$

$$\lim_{u \to 0} \varepsilon_3(o, u) = 0$$

dır. Buradan da

(44-16) $$K_e = \frac{12}{\pi} \lim_{u \to 0} \frac{\pi u^2 - A(u)}{u^4}$$

eşitliğe elde edilir.

44-2. Geodezik elips ve geodezik hiperbol

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyi üzerinde, $\bar{u} = \varphi(u, v) =$ sâbit eğri ailesinin geodezik paralel çizgilerden oluştuklarını, $\bar{v} = \psi(u, v) =$ sâbit eğri ailesinin de bunların dik yörüngeleri olan geodeziklerden meydana geldiklerini varsayalım. Buna göre, birinci kuvadratik formu, § 43 de söylediklerimizden yararlanarak, hem (u, v) hem de $(\bar{u}, \bar{v})$ eğrisel koordinatları cinsinden yazarsak

(44-17) $$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = \bar{E}(\varphi)\, d\varphi^2 + \bar{G}(\varphi, \psi)\, d\psi^2$$

olur. Buradan, düzgün bir parametre değişimi yapıldığında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(44\text{-}18)\qquad \begin{cases} E = \bar{E}\,\varphi_u^2 + \bar{G}\,\psi_u^2\,, & \dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0 \\ F = \bar{E}\,\varphi_u\varphi_v + \bar{G}\,\psi_u\psi_v\,, & \\ G = \bar{E}\,\varphi_v^2 + \bar{G}\,\psi_v^2 & \end{cases}$$

eşitlikleri çıkarılır. Bu üç denklem arasında ψ_u , ψ_v yi yok edersek

$$(44\text{-}19)\qquad (E-\bar{E}\,\varphi_u^2)(G-\bar{E}\,\varphi_v^2) - (F-\bar{E}\,\varphi_u\,\varphi_v)^2 = 0$$

veya (17·27; 1) formülü nedeniyle

$$(44\text{-}20)\qquad \frac{1}{\bar{E}} = \frac{E\,\varphi_v^2 - 2F\,\varphi_u\varphi_v + G\,\varphi_u^2}{H^2} = \nabla\varphi = -\frac{1}{H^2}\begin{vmatrix} E & F & \varphi_u \\ F & G & \varphi_v \\ \varphi_u & \varphi_v & 0 \end{vmatrix}$$

bulunur.

Anımsanacağı gibi, $\nabla\varphi$ BELTRAMI'nin, $\varphi(u,v)$ fonksiyonuna uygulanan **birinci mertebeden diferansiyel operatör**'üdür.

Görülüyor ki $\bar{u} = \varphi(u,v) =$ **sâbit eğri ailesinin, geodezik paralel çizgilerden oluşması için gerekli koşul**

$$(44\text{-}21)\qquad \nabla\varphi = f(\varphi) \quad \text{veya} \quad \text{sabite}$$

olmasıdır.

(44-21) in yeterli olduğunu, yâni bu koşulun sağlanması halinde de, $\varphi(u,v) =$ sâbit eğri ailesinin geodezik paralel çizgilerden oluştuklarını görebiliriz. Gerçekten, bunun için

$$ds^2 - \bar{E}\,d\varphi^2$$

nin diferansiyel bir tam kare olduğunu göstermemiz gerekir. Halbuki, bu ifadeyi

$$ds^2 - \bar{E}\,d\varphi^2 = (E-\bar{E}\,\varphi_u^2)\,du^2 + 2(F-\bar{E}\,\varphi_u\varphi_v)\,du\,dv + (G-\bar{E}\,\varphi_v^2)dv^2$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

biçiminde yazdığımızda, (44-20) den (44-19) a geçince, yukarıki eşitliğin sağ yanının bir tam kare olduğu sonucuna varılır. O hâlde buna $\bar{G}\,d\psi$ dersek

$$ds^2 = \bar{E}\,d\varphi^2 + \bar{G}\,d\psi^2$$

olur.

$\varphi = 0$ geodezik paralelinden itibaren alınan φ nin, geodezik paraleller arasındaki geodezik parçalarının uzunluğunu gösterebilmesi için gerekli ve yeterli koşul

(44-22) $$\bar{E} = 1$$

yâni

(44-23) $$\nabla\varphi = 1$$

dir.

S yüzeyinin koordinat çizgilerinin, birbirine bağlı olmayan, iki ayrı geodezik paralel çizgi ailesinden oluştuklarını varsayalım ve (u, v) parametrelerini de

(44-24) $$u=\varphi, \quad v=\psi$$

biçiminde seçelim. Ayrıca P(u, v) noktasının $u=0$, $v=0$ geodezik paralel çizgilerinden uzaklıkları da u, v olsun. Buna göre, u ve v parametreleri

(44-25) $$\nabla u = 1 \quad \text{ve} \quad \nabla v = 1, \qquad (\bar{E}=1, \quad \bar{G}=1)$$

denklemlerinin çözümleri olacaklarından

(44-26) $$\frac{G}{H^2} = \frac{E}{H^2} = 1 \quad \text{den} \quad E = G = H^2$$

bulunur.

Koordinat çizgileri arasındaki açıyı α ile gösterdiğimizde, (19-17; 1) ve (44-25) formüllerinden

$$\frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{F}{E} = \frac{F}{H^2} = \cos\alpha, \qquad \frac{H}{F} = \operatorname{tg}\alpha$$

dan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(44-27) $$H = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}, \quad E = G = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\alpha}, \quad F = \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}^2\alpha}$$

eşitlikleri elde edilir. O hâlde, birinci kuvadratik form

(44-28) $$ds^2 = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\alpha}\,(du^2 + 2\operatorname{Cos}\alpha\, du\, dv + dv^2)$$

biçimindedir ve bunun tersi de doğrudur. Yâni:

Teorem 44-2.

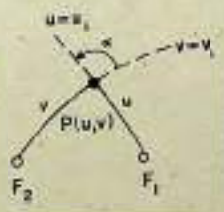
Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzey üzerinde, koordinat çizgilerinin, birbirine bağlı olmayan iki ayrı geodezik paralel çizgi ailesinden oluşmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu yüzeyin birinci kuvadratik formunun,

(44-29) $$ds^2 = \frac{du^2 + 2\operatorname{Cos}\alpha\, du\, dv + dv^2}{\operatorname{Sin}^2\alpha}$$

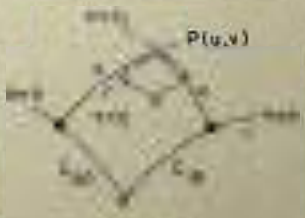
biçiminde bulunmasıdır. Bu bağıntıdaki α açısı, koordinat çizgileri arasındaki açıyı göstermektedir.

Uyarı 44-2.

Koordinat çizgilerini, birbirine bağlı olmayan, geodezik paralel çizgiler olarak alacak yerde, F_1 ve F_2 merkezli iki geodezik çember ailesi biçiminde seçtiğimizde, yukarıdakine benzer sonuçlar elde edilir.



Şekil 53



Şekil 54

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tanım

$v = 0$ veya C_{10} ve $u = 0$ veya C_{20} eğrilerinden, ya da F_1, F_2 noktalarından u, v geodezik uzaklıklarının toplamı sabit olan, yâni

$$u + v = \text{sâbit}$$

koşulunu sağlayan ve yüzey üzerinde bulunan P (u, v) noktalarının geometrik yerine **geodezik elips** denilir.

Eğer toplam yerine, eğrisel koordinatların farkı alınırsa, yâni

$$u - v = \text{sâbit}$$

koşuluna uyan ve yüzey üzerinde bulunan P (u, v) noktaları söz konusu ise, bunların geometrik yerine de **geodezik hiperbol** adı verilir.

Koordinat çizgilerinin geodezik elips ve geodezik hiperbollardan oluşması için gerekli ve yeterli koşullar

Lineer elemanı (44-28) bağıntısiyle verilen yüzey üzerinde

(44-30) $$2\bar{u} = u + v, \quad 2\bar{v} = u - v$$

koordinat değişimini ele alalım. Bu değişimde

$$\frac{D(\bar{u}, \bar{v})}{D(u, v)} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan, (15-3) gereğince, bir düzgün parametre değişimi yapılmış olur.

(44-30) dan, sırasiyle

(44-31) $$\begin{cases} u = \bar{u} + \bar{v} \quad , \quad v = \bar{u} - \bar{v} \\ du = d\bar{u} + d\bar{v} \quad , \quad dv = d\bar{u} - d\bar{v} \end{cases}$$

çıkar ve sonuçlar, (44-29) da yerlerine konulduklarında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left[(d\bar{u}+d\bar{v})^2 + 2\cos\alpha\,(d\bar{u}^2 - d\bar{v}^2) + (d\bar{u}-d\bar{v})^2\right]$$

veya

(44-32)
$$ds^2 = \frac{d\bar{u}^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{d\bar{v}^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

bulunur. $(\bar{u}, \bar{v})$ eğrisel koordinatlarında koordinat çizgileri, birbirlerini dik kesen geodezik elips ve geodezik hiperbollerdon oluşur.

Karşıt olarak, (44-31) yardımiyle (44-32) den (44-29) a geçilebileceğinden, aşağıki teorem söz konusudur:

Teorem 44-3.

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir yüzey üzerinde, aralarındaki açı α olan geodezik paralel koordinat çizgileriyle tanımlanan geodezik elips ve geodezik hiperbollerin yeni koordinat çizgilerini oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşul, yüzeyin lineer elemanının

$$ds^2 = \frac{d\bar{u}^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{d\bar{v}^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

biçiminde olması, yâni

$$\frac{1}{\bar{E}} + \frac{1}{\bar{G}} = 1 \,;\quad \bar{F} = 0$$

bulunmasıdır.

Uyarı 44-3.

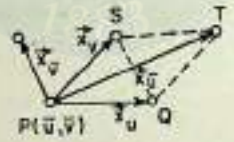
$P(\bar{u}, \bar{v})$ noktasından geçen geodezik elips ve geodezik hiperbolün bu noktadaki teğetleri: $\vec{x}_{\bar{u}}$, $\vec{x}_{\bar{v}}$ vektörleri ile belirlidir. Aynı noktadan geçen geodezik paralellerin teğetleri ise, $\vec{x}_u$, $\vec{x}_v$ vektörleri ile tanımlanır. Halbuki (44-31) tanım bağıntıları nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(44-33) $$\vec{x}_{\bar{u}} = \vec{x}_0 + \vec{x}_v \,, \quad \vec{x}_{\bar{v}} = \vec{x}_u - \vec{x}_v$$

dir. Öte yandan, (44-27) formülleri dolayısiyle, $\vec{x}_u$ ve $\vec{x}_v$ vektörlerinin uzunlukları eşit olduğundan: $\vec{x}_{\bar{u}}$, $\vec{x}_{\bar{v}}$ vektörlerinin etki çizgileri, $\widehat{OPS}$ açısının iç ve dış açıortaylarıdır. O hâlde:

Yüzeyin koordinat çizgileri, birbirine bağlı olmayan iki geodezik çizgi ailesi —ya da iki geodezik çember ailesi— ile tanımlanan geodezik elips ve geodezik hiperbollerden oluşuyorsa, bir P noktasından geçen geodezik elips ve geodezik hiperbolün bu noktadaki teğetleri aynı noktadan geçen geodezik paralellerin —ya da geodezik çemberlerin— bu noktadaki teğetleriyle tanımlanan açının açıortaylarıdır.



Şekil 55

45. Geodeziklerin minimal özeliği

Bir düzlemin herhangi iki noktası arasındaki en kısa uzaklık, bu iki noktayı birleştiren doğru, yani geodezik, üzerinde gerçekleşir. Fakat aynı problem herhangi bir yüzey üzerinde ele alındığında, benzeri sonuca varılabilmesi için, önceden bazı gerekli önlemler alınmazsa, gerçeği tam anlamiyle yansıtmayan sonuçlar bulunabilir.

45-1. Geodezik çizgi alanları

Eğer yüzeyin bir (B) bölgesinin her P düzgün noktasından, bir parametreli bir geodezik ailesinin **bir ve yalnız bir** geodeziği geçiyorsa, bu bir parametreli geodezik ailesinin: **bir geodezik alan** veya **geodezik çizgiler alanı** oluşturduğunu söyliyeceğiz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Tanıma göre, geodezik alanın herhangi iki geodezigi, (B) bölgesinde **asla** kesişmez. Yâni (B) bölgesinin herhangi bir noktasından, birden fazla geodezik geçmez.

Bundan başka, geodezik alanın tanımında, «bölge» terimi kullanıldığına göre, bir geodezik alanın tüm yüzeyi kaplaması gerekmez. Nitekim, geodezikleri sâdece doğrulardan oluşan bir düzlemde, tüm düzlemi kaplayan tek geodezik alan, paralel doğrularla tanımlanandır.

Teorem 45-1.

En az 3-üncü sınıftan bir S yüzeyinin bir P düzgün noktasından geçen ve bir (B) geodezik alanına ait olan geodeziklerinden birisi C, bunun P ye yakın bir noktası da Q olsun. C geodeziğinin PQ yayının uzunluğu, S nin P ve Q noktalarından geçen, düzgün noktalardan oluşan ve (B) bölgesinde bulunan çeşitli eğrilerin $\overset{\frown}{PQ}$ yaylarının en kısasıdır.

Gerçekten, eğer yüzey üzerinde **geodezik paralel koordinatları** alırsak —§ 43 —, (43-3) formülü gereğince, yüzeyin lineer elemanı

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2 \tag{43-3}$$

olur. Böyle olunca da, v=sâbit koordinat çizgilerinin geodeziklerden, u= sâbit koordinat çizgilerinin de geodezik paralel çizgilerden oluştuklarını anımsatalım. Ayrıca, v=sâbit koordinat çizgilerinin bir geodezik alan tanımladıklarını varsayacağız. Buna göre, v=0 geodeziğine C_0, bunun P(0, 0), $Q(u_1, 0)$ noktalarını birleştiren ve S üzerinde bulunan ve düzgün noktalardan oluşan bir eğrisine de C^* diyelim. Eğer C^* eğrisi

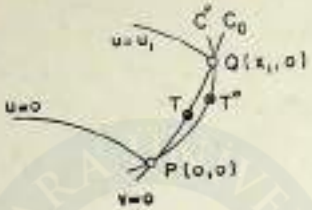
$$v = \varphi(u), \quad [\varphi(0) = 0, \quad \varphi(u_1) = 0]$$

denklemiyle verilmişse, C^* in $\overset{\frown}{PT^*Q}$ yayı, (43-3) nedeniyle

$$\overset{\frown}{PT^*Q} = \int_0^{u_1} \sqrt{du^2 + G[u, \varphi(u)]\, dv^2}$$

ye eşittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 56

C_0 geodeziğinin $\overset{\frown}{PTQ}$ yayı da u_1 e eşittir, yâni

$$\overset{\frown}{PTQ} = \int_0^{u_1} \sqrt{du^2} = u_1$$

dir.

Öte yandan, yüzey üzerinde, gerçel elemanlar için,

$$G[u, \varphi(u)] > 0$$

olduğundan,

$$\int_0^{u_1} \sqrt{du^2 + G[u, \varphi(u)]\, dv^2} \geqslant \int_0^{u_1} \sqrt{du^2}$$

veya

$$\overset{\frown}{PT^*Q} \geqslant \overset{\frown}{PTQ}$$

dür.

Uyarı 45-1.

Görülüyor ki, bir geodezik alan söz konusu olduğunda, bir geodeziğin yakın iki noktası arasındaki parçanın en kısa yolu vermesi, **yerel olarak**, doğrudur. Ama bu özelik, alan dışında, genellikle **tümel olarak** doğru değildir. Örneğin, bir kürenin geodezikleri, bundan önce de gördüğümüz gibi, bunun büyük çemberleridir. Dolayısiyle, bir kürenin, merkezine göre simetrik olmayan herhangi iki noktasından, aynı büyük çemberin iki ayrı yayı geçer ve bunlardan birisi ötekinden küçüktür. Kürenin merkezine göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

simetrik iki noktadan ise, sonsuz büyükçember geçer ve bu kez iki ayrı yayın uzunlukları eşittir.

Başka bir örnek de, dönel silindirle verilebilir. Bilindiği gibi, dönel silindirin geodezikleri anadoğruları ve dairesel helisleridir. Dönel silindirin farklı iki noktasından sonsuz dairesel helis geçer. İki farklı nokta bir anadoğru üzerinde ise, en kısa yol, bunları birleştiren ana doğru parçasıdır; değilse, sonsuz dairesel helisten birisinin yayı en kısadır.

Uyarı 45-2.

Karşıt olarak, şu problemi ele alabiliriz:

Bir yüzeyin herhangi iki noktasını birleştiren eğri yayları arasında uzunluğu en kısa olanın bulunması

Bu problemi, tam anlamiyle, çözmek güçtür. Bu, daha çok, Analiz kitaplarının (Variyasyon Hesabı) bölümünü ilgilendiren bir konudur. Şurasını da kaydedelim ki bir çözümün varlığı da hiçbir şekilde açık değildir. Aşağıki teorem, bir çözümün varlığı kabul edilerek, ispat edilmiştir.

Teorem 45-2.

Sınıfı ≥ 3 olan bir yüzeyin düzgün noktalardan oluşan bir (B) bölgesinin iki P, Q noktasını birleştiren yaylar arasında en kısa olanı varsa, bu, P ve Q noktalarından geçen geodeziğin bir yayıdır.

Diyelim ki, en az 3-üncü sınıftan bir S yüzeyi üzerinde, düzgün noktalardan oluşan bir (B) bölgesinin iki P, Q noktasını birleştiren ve P ile Q arasındaki en kısa uzunluğu gerçekleştiren 2-nci sınıftan bir C_0 eğrisi vardır.

Yüzey üzerindeki koordinat çizgilerini dik olarak seçelim ve C_0 eğrisi de $v=0$ koordinat çizgisi olsun. C_0 üzerinde alınan iki yakın nokta $P(0, 0)$, $Q(u_1, o)$ ise, u nun P ve Q noktaları arasındaki değişimi

$$0 \leq u \leq u_1 \tag{45-1}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 57.

C_0 eğrisi yakınlarında, S yüzeyinin vektörel denklemi

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \tag{45-2}$$

ise, P ve Q noktalarının yer vektörleri, C_0 ın vektörel denklemi

$$\vec{OP} = \vec{x}(0, 0), \quad \vec{OQ} = \vec{x}(u_1, 0); \quad \vec{x} = \vec{x}(u, o)$$

dır. C_0 eğrisi (B) bölgesinde düzgün olarak alındığından, u nun (45-1) aralığında değişmesi hâlinde

$$\vec{x}_u(u, o) \neq \vec{0} \tag{45-3}$$

dır.

C_0 eğrisi yakınlarında, P ve Q noktalarından geçen ve düzgün noktalar bölgesinde bulunan **bir eğri takımı da**

$$\vec{g}(u) = \vec{x}[u, \lambda f(u)], \quad f(0) = f(u_1) = 0, \quad \lambda : \text{keyfi} \tag{45-4}$$

vektörel denklemiyle tanımlanabilir. Bu eğri takımından herhangi birisini C_λ ile göstereceğiz. $f = f(u)$ fonksiyonuna gelince, bu da u nun 1-nci sınıftan keyfi bir fonksiyonudur.

Görüldüğü gibi, C_λ eğrileri, P(o, o) ve Q(u_1, 0) noktalarından geçmektedir ve $\lambda = 0$ eğrisi de C_0 eğrisini vermektedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C_λ eğrilerinden birinin u noktasındaki teğet vektörü

(45-5) $$\vec{g}_u = \vec{x}_u + \vec{x}_v \lambda f_u$$

dur.

$\lambda = 0$ değeri için, (45-3) nedeniyle

$$\vec{g}_u(u, 0) = \vec{x}_u(u, 0) \neq \vec{0}$$

dür. Buna göre, λ nın yeteri kadar küçük değerleri, örneğin $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ için, $\vec{y}_u[u, \lambda f(u)] \neq \vec{0}$ dür, yani başlangıçta kabul ettiğimiz gibi, C_λ lar düzgün eğrilerdir.

C_λ eğrisinin $P(0, 0)$ ve $Q(u_1, 0)$ noktaları arasındaki $U(\lambda)$ uzunluğu

(45-6) $$U(\lambda) = \int_0^{u_1} \sqrt{\vec{g}_u^2}\, du$$

ya eşittir.

$U(0)$ uzunluğunun, C_0 ın $P(0, 0)$ ile $Q(u_1, 0)$ arasındaki minimum uzunluğuna eşit olması için **gerekli koşul**

$$\left.\frac{dU}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0$$

eşitliğinin bulunmasıdır.

İntegral işareti altında türev olarak ve (45-5) formülünden yararlandığımızda, koordinat çizgilerinin dik kesiştiklerini anımsayarak

$$\left.\frac{dU}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \int_0^{u_1} \left.\frac{d}{d\lambda} \sqrt{(\vec{x}_u + \vec{x}_v \lambda f_u)^2}\right|_{\lambda=0} du = 0$$

$$= \int_0^{u_1} \left. \frac{(\vec{x}_u + \vec{x}_v \lambda f_u)(\vec{x}_{uv} f + \vec{x}_{vv} \lambda f f_u + \vec{x}_v f_u)}{\sqrt{(\vec{x}_u + \vec{x}_v \lambda f_u)^2}} \right|_{\lambda=0} du = 0$$

$$= \int_0^{u_1} \frac{\vec{x}_u(u,0) \cdot \vec{x}_{uv}(u,0)\, f(u)}{\sqrt{[\vec{x}_u(u,0)]^2}} du = 0$$

$$= \int_0^{u_1} \frac{E_v(u,0)}{\sqrt{E(u,0)}} f(u)\, du = 0$$

bulunur.

Bu son bağıntıda, f(u) fonksiyonu, C_0 ın değişimini karakterize eden keyfi bir fonksiyondur. f(u) fonksiyonu, büyük bir keyfilikle seçilebildiğine göre, sağ taraf ancak

$$E_v(u,0) = 0$$

olursa, yâni (42-3) formülü dolayısiyle de, v=0 bağıntısı ile tanımlanan C_0 eğrisi bir geodezik çizgi olunca, sıfıra eşittir.

Görülüyor ki, P(0, 0) ve $Q(u_1, 0)$ noktalarını birleştiren çeşitli eğriler arasında minimum yay uzunluğunu veren bir eğri varsa, bu ancak bir geodezik olabilir.

46. Uygulama

1. Bir dik karteziyen koordinat sisteminde

$$x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v, \quad x_3 = f(v)$$

denklemleriyle verilen yüzeyin herhangi bir P(u, v) noktasındaki GAUSS eğriliğini, koordinat çizgilerinin geodezik eğriliklerini ve bu çizgilerden, varsa, geodezik olanları bulunuz.

Verilen yüzeyin $v = sâbit = v_0$ eğrileri, üçüncü ekseni dik olarak kesen doğrulardır. Bu yüzden, böyle bir yüzeye **dik konoid** denilir. $u = sâbit = u_0$ eğrilerine gelince, bunlar da u_0 yarıçaplı dönel silindirin eğrileridir. Yüzeyin birinci formunun, (17-7) formülleriyle hesaplanan katsayıları

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + [f'(v)]^2$$

dir.

O hâlde, (36-14) formülüne göre, P(u, v) noktasındaki GAUSS eğriliği

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu} = -\frac{1}{\sqrt{u^2+(f')^2}}[u^2+(f')^2]_{uu}$$

$$= \frac{-(f')^2}{[u^2+(f')^2]^2}$$

olur.

Koordinat çizgilerinin geodezik eğriliklerine sıra ile g , $\bar{g}$ dersek, [41-7)' formüllerine göre

$$g = 0, \qquad \bar{g} = \frac{G_u}{2\sqrt{G}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+(f')^2}}$$

dir.

O hâlde, v=sâbit koordinat çizgileri —üçüncü eksene dik doğrular— geodezik çizgilerden oluşur.

u=sâbit koordinat çizgileri arasında da u=0 ile belirli olanı, yâni Ox_3 ekseni, bir geodezik çizgidir.

2. Bir dik karteziyen koordinat sisteminde

$$x_1 = u\,\mathrm{Cos}\,v, \quad x_2 = u\,\mathrm{Sin}\,v, \quad x_3 = \frac{u^2}{2p}; \quad (p : \text{sabit})$$

dönel paraboloidi veriliyor. P (u, v) noktasındaki GAUSS eğriliğini ve koordinat çizgilerinin geodezik eğriliklerini, ve yüzeyin geodezik çizgilerini bulunuz.

(17-7) formüleri yardımiyle

$$E = 1 + \frac{u^2}{p^2} = \frac{1}{p^2}(u^2+p^2), \quad F = 0, \quad G = u^2$$

bulunur. Buna göre, P(u, v) noktasındaki GAUSS eğriliği

$$K = -\frac{p^2}{u\sqrt{u^2+p^2}}(u^2+p^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{p^2}{(u^2+p^2)^2}$$

dir.

(41-7)' formüllerinden de

$$g = 0, \quad \bar{g} = \frac{p}{u}\,(u^2 + p^2)^{-\frac{1}{2}}$$

sonuçları elde edilir.

Görülüyor ki v=sabitler —yani boylam çizgileri— geodeziklerden oluşmaktadır.

$$\frac{G_u}{2E} = \frac{u\,p^2}{u^2 + p^2}, \quad E_v = 0, \quad G_v = 0, \quad \frac{E_u}{2E} = \frac{u}{u^2 + p^2},$$

$$\frac{G_u}{G} = \frac{2}{u}, \quad F = 0$$

olduğundan, geodeziklerin diferansiyel denklemi, (42-2)' nedeniyle

$$\frac{u}{u^2 + p^2}\,u'' - \frac{u\,p^2}{u^2 + p^2}\,v'^2 + u'^2 = 0, \quad \frac{2}{u}\,u'\,v' + v'' = 0$$

dır.

İkincisinden

$$ds = \frac{u^2}{c_1}\,dv$$

çıkar. Bu değer, lineer formda yerine konulduğunda

$$dv = \pm \frac{c_1}{pu}\sqrt{\frac{u^2 + p^2}{u^2 - c_1^2}}\,du$$

bulunacağından,

$$v = \pm \frac{c_1}{p}\int \frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2 + p^2}{u^2 - c_1^2}}\,du,$$

olur. Eğer

$$u^2 = t; \quad \frac{t + p^2}{t - c_1^2} = z^2$$

denilirse,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olacağından $$\frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2+p^2}{u^2-c_1^2}}\,du = 2\,\frac{(c_1^2-p^2)\,z^2\,dz}{(z^2-1)\,(c_1^2z^2+p^2)}$$

$$v = \pm\frac{c_1\,(c_1^2-p^2)}{p}\int\frac{z^2\,dz}{(z^2-1)\,(c_1^2z^2+p^2)}$$

$$= \pm c_1\,\frac{c_1^2-p^2}{p\,(p^2+c_1^2)}\int\left(\frac{1}{z^2-1}-\frac{p^2}{c_1^2z^2+p^2}\right)dz$$

$$= \pm c_1\,\frac{c_1^2-p^2}{p\,(p^2+c_1^2)}\left[\ \lg\sqrt{\left|\frac{z-1}{z+1}\right|}-\frac{p}{c_1}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{c_1}{p}\ \right]+c_2\ ,$$

$$z = [\,(u^2+p^2)\,/\,(u^2-c_1^2)^2\,]^{1/2}$$

bulunur.

3. Bir dik kartezlyen koordinat sisteminde

$$x_1 = u\,\mathrm{Cos}\,v,\quad x_2 = u\,\mathrm{Sin}\,v,\quad x_3 = a\,u$$

denklemleriyle verilen dönel koninin geodezik çizgilerini bulunuz.

(17-7) formüllerinin uygulanmasiyle

$$E = 1+a^2,\quad F = 0,\quad G = u^2$$

eşitlikleri bulunacağından

$$E_u = E_v = 0,\quad G_u = 2u,\quad G_v = 0$$

dır ve v=sâbit koordinat çizgileri —anadoğrular— gene geodezik çizgilerdir.

(42-2)' bağıntılarının ikincisinden gene $ds = \frac{u^2}{c_0}\,dv$ bulunacağından, lineer eleman

$$v = \pm\sqrt{1+a^2}\int\frac{du}{u\sqrt{(\frac{u}{c_1})^2-1}} =$$

$$\left(\pm\,[\sqrt{1+a^2}\ \mathrm{Arctg}\sqrt{(\frac{u}{c_1})^2-1}\,]\right)+c_1$$

verir.

4. Lineer elemanı

$$ds^2 = u\,(du^2 + dv^2)$$

biçiminde olan yüzeyin geodezik çizgilerini bulunuz.

Bu yüzey için

$$E = G = u, \quad F = 0$$

olduğundan, (42-2)' denklemlerinden ilki

$$\frac{1}{c_1} v\,du = ds$$

vereceğinden, bunun lineer elemanda kullanılmasıyle de

$$du = \pm c_1 \frac{dv}{\sqrt{v - c_1^2}}$$

bulunacağından

$$u = \pm 2 c_1 \sqrt{v - c_1^2} + c_2$$

veya

$$(u - c_2)^2 = 4 c_1^2 (v - c_1^2)$$

olur.

5. Lineer elemanı

$$ds^2 = f(u)\,(du^2 + dv^2)$$

biçiminde olan yüzeyin geodezik çizgilerini bulunuz.

Bu yüzeyde

$$E = G = f(u), \quad F = 0$$

olduğundan, (42-2)' denklemlerinin ikincisi

$$\frac{f'}{f} u' + \frac{v''}{v'} = 0 \quad \left(f' = \frac{df}{du}\right)$$

bu da

$$ds = \frac{f(u)}{c_2} dv$$

verir. Lineer elemanı kullandığımızda

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$dv = \frac{c_1}{\sqrt{1-c_1^2}}\,du,$$

ve integre ederek

$$v = \frac{c_1}{\sqrt{1-c_1^2}}\,u + c_2$$

bulunur. Bulunan sonuç, ya da $E = f(u)$ oluşu, v=sâbit çizgilerinin geodezik olduğunu gösterir.

6. Dik koordinat sisteminde

$$x_1 = u\,\mathrm{Cos}\,v,\quad x_2 = u\,\mathrm{Sin}\,v,\quad x_3 = \lg\left(u + \sqrt{u^2-1}\right),\ (u > 0)$$

denklemleriyle verilen yüzeyin —katenoid— geodeziklerini bulunuz.

(17-7) formüllerine göre, bu yüzeyde

$$E = \frac{u^2}{u^2-1},\quad F = 0,\quad G = u^2$$

olduğundan

$$E_u = \frac{-2u}{(u^2-1)^2},\quad E_v = 0,\quad G_u = u,\quad G_v = 0$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM VIII

DARBOUX-RIBEAUCOUR DEĞİŞEN DİKÜÇYÜZLÜSÜ VE TÜREV FORMÜLLERİ

47. DARBOUX-RIBEAUCOUR dikücyüzlüsü

1-inci sınıftan bir S yüzeyi üzerinde bulunan gene 1-inci sınıftanj bir C eğrisinin eliptik ya da parabolik göbek noktasından farklı her **düzgün** P noktasına, eksenlerinin birim vektörleri

$$\vec{a}_1 , \vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{a}_1 , \vec{n}$$

olan bir dikücyüzlüyü bağlayalım. İkinci birim vektörü, S nin P noktasındaki teğet düzlemi üzerinde bulunan bu dikücyüzlüye: **DARBOUX-RIBEAUCOUR dikücyüzlüsü denilir.**

47-1 Türev formülleri

Bundan sonraki hesaplarda, S yüzeyi ile C eğrisini, P noktasında ve yakınlarında en az 2-nci sınıftan varsayarsak, değişen DARBOUX-RIBEAUCOUR dikücyüzlüsünün birim vektörleri lineer bağımsız olduklarından, C nin S yayına göre bunların türevleri, [I, s. 33, formül (12-6)] nedeniyle

$$(47\text{-}1) \quad \begin{cases} \vec{a}_1' = \alpha_1^2 \vec{b} + \alpha_1^3 \vec{n} , \\ \vec{b}' = -\alpha_1^2 \vec{a}_1 + \alpha_2^3 \vec{n} , \\ \vec{n}' = -\alpha_1^3 \vec{a}_1 + \alpha_2^3 \vec{b} \end{cases}$$

biçimindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C nin P düzgün noktasındaki eğriliği ρ ise, [I, s. 84, (29-2) FRENET formülleri] nin birincisine göre yazılan

$$\vec{a}_1' = \rho\,\vec{a}_2 = \alpha_1^2\,\vec{b} + \alpha_1^3\,\vec{n}$$

vektörel bağıntısının her iki yanını önce $\vec{b}$, sonra da $\vec{n}$ ile skaler olarak çarptığımızda, (32-4) ve (41-4) eşitlikleri dolayısiyle

(47-2) $$\rho_z = \rho \operatorname{Sin}\theta = \alpha_1^2, \quad \rho_x = \rho \operatorname{Cos}\theta = \alpha_1^3$$

çıkar.



Şekil 58

Öte yanden

$$\vec{b} = \vec{a}_2 \operatorname{Sin}\theta - \vec{a}_3 \operatorname{Cos}\theta$$

$$\vec{n} = \vec{a}_2 \operatorname{Cos}\theta + \vec{a}_3 \operatorname{Sin}\theta$$

vektörel bağıntılarından birincisinin s ye göre türevi de, ikincisi, FRENET formülleri ve (47-2: 1) dolayısiyle

$$\vec{b}' = -\rho_z\,\vec{a}_1 + (\tau + \theta')\,\vec{n}$$

vereceğinden, bu son eşitliği (47-1; 2) formülü ile karşılaştırdığımızda

(47-3) $$\alpha_2^3 = \tau + \theta'$$

olur. Eğer, α_2^3 yerine

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(47-4) $\alpha_2^3 = \tau_g = \tau + \theta^\circ$, ($\tau$: C nin P deki burulması)

dersek, τ_g: C eğrisinin P düzgün noktasındaki **geodezik burulması** dır.

Uyarı 47-1.

Şu noktaya dikkati çekelim ki, **geodezik burulma** denilmekle beraber, τ_g katsayısı, bir geodezik eleman değildir. C eğrisine P düzgün noktasında teğet olan geodezik eğri alındığında, bu eğri boyunca $\theta = 0$ olduğundan, geodezik için $\tau_g = \tau$ dur. İlerde de göreceğimiz gibi, **C eğrisinin P düzgün noktasındaki geodezik burulması, C ye P de teğet geodezik eğrinin P deki burulmasına eşittir;** bu hâlde yüzeyin sınıfı en az 3 tür.

Görülüyor ki (47-1) türev formüleri, (47-2) ve (47-4) eşitlikleri yardımıyle

$$(47\text{-}5)\quad \begin{cases} \vec{a}_1^{\,\circ} = \rho_g \vec{b} + \rho_n \vec{n}, \\ \vec{b}^{\,\circ} = -\rho_g \vec{a}_1 + \tau_g \vec{n}, \\ \vec{n}^{\,\circ} = -\rho_n \vec{a}_1 - \tau_g \vec{b} \end{cases}$$

$$\rho_g = \rho \operatorname{Sin}\theta,\ \rho_n = \rho \operatorname{Cos}\theta,\ \rho^2 = \rho_g^2 + \rho_n^2,\ \tau_g = \tau + \theta^\circ$$

biçiminde yazılır.

Teorem 47-1.

Bir P düzgün noktasında ve yakınlarında S yüzeyi ile bunun P den geçen bir C eğrisi en az 2-nci sınıftan ise, C eğrisine P noktasında bağlanan DARBOUX-RIBEAUCOUR diküçyüzlüsünün $\vec{a}_1$, $\vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{a}_1$, $\vec{n}$ birim vektörlerinin, C nin s yayına göre türevleri, (47-5) formülleriyle hesaplanır.

(47-5) formüllerine, C eğrisinin P düzgün noktasındaki **DARBOUX-RIBEAUCOUR** veya **BONNET-KOVALEVSKY türev formülleri** denilir.

Bu türev formüllerinde: ρ_g, ρ_n ve τ_g ile gösterilen üç **bağımsız** katsayı vardır. Bunlara sırasıyla, C eğrisinin P düzgün noktasındaki: **geodezik eğriliği, normal eğriliği** ve **geodezik burulması** denildiğini anımsatalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

47-2. En genel hâlde geodezik burulma

Bir t parametresinin 1-inci sınıftan skaler ya da vektörel bir f(t) fonksiyonunun t ye göre 1-inci mertebeden türevini

$$\frac{df}{dt} = f'(t)$$

biçiminde gösterdiğimizde, (47-5) formüllerinin sonuncusundan, τ_g için

$$\tau_g = (\vec{a}_t, \vec{n}, \vec{n}') = \frac{(d\vec{x}, \vec{n}, d\vec{n})}{d\vec{x}^2} = \frac{(\vec{x}', \vec{n}, \vec{n}')}{\vec{x}'^2} \tag{47-6}$$

eşitlikleri elde edilir.

P düzgün noktasında ve yakınlarında yüzey ve bunun P den geçen C eğrisi 2-nci sınıftan oldukları için, (25-1) formülleri dolayısiyle

$$\vec{x}' = \vec{x}_u u' + \vec{x}_v v'$$

$$\vec{n}' = \vec{n}_u u' + \vec{n}_v v' = (a_{11} u' + a_{21} v')\,\vec{x}_u + (a_{12} u' + a_{22} v')\,\vec{x}_v$$

yazılabileceğinden, (47-6) bağıntısı

$$\tau_g = -H\,\frac{a_{12} u'^2 - (a_{11} - a_{22})\, u' v' - a_{21} v'^2}{E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2}$$

veya (25-2) eşitlikleri nedeniyle en genel hâlde

$$\tau_g = \frac{(EM - FL)\, u'^2 + (EN - GL)\, u' v' + (FN - GM)\, v'^2}{H(E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2)} \tag{47-7}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ L\,du + F\,dv & M\,du + N\,dv \end{vmatrix}}{H(E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2)}$$

verir.

Görülüyor ki, P düzgün noktası seçildiğinde, I ve II formlarının katsayıları belirli olacağından, τ_g geodezik burulması sadece u' ve v' ye bağlı-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dır: **Geodezik burulma bir doğrultu fonksiyonudur, yani yüzeyin P düzgün noktasında C eğrisine teğet tüm eğrilerin P deki geodezik burulmaları aynıdır.**

$t = u$, $\dfrac{dv}{du} = v'$ hâlinde, (47-7) formülü

$$\tau_g = \frac{(FN-GM)\,v'^2 + (EN-GL)\,v' + (EM-FL)}{H\,(G\,v'^2 + 2F\,v' + E)} \tag{47-8}$$

biçimindedir.

P düzgün noktasından geçen koordinat çizgilerinin geodezik burulmaları

P düzgün noktasından geçen koordinat çizgilerinin, P deki geodezik burulmalarına, sıra ile τ_g^u, τ_g^v ve normal eğriliklerine de r^u, r^v dersek, (47-7) formülünde, önce $v'=0$, sonra da $u'=0$ alındığında

$$\tau_g^u = \frac{1}{H}(M-Fr^u), \quad \tau_g^v = \frac{1}{H}(F\bar{r}^v - M), \tag{47-9}$$

$$\left(r^u = \frac{L}{E};\ \bar{r}^v = \frac{N}{G}\right) \quad \tau_g^u + \tau_g^v = \frac{F}{H}(\bar{r}^v - r^u)$$

olur.

Koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde **bir dik eğri şebekesi** oluşturmaları hâlinde, $F = 0$ olacağından, (47-7), (47-8) ve (47-9) formülleri

$$\begin{cases} \tau_g = \dfrac{EM\,u'^2 + (EN-GL)\,u'v' - GM\,v'^2}{\sqrt{EG}\,(E\,u'^2 + G\,v'^2)} \\ \tau_g = \dfrac{-GM\,v'^2 + (EN-GL)\,v' + EM}{\sqrt{EG}\,(G\,v'^2 + E)} \end{cases} \tag{47-10}$$

$$\tau_g^u = \frac{M}{H}, \quad \tau_g^v = -\frac{M}{H}, \quad \tau_g^u + \tau_g^v = 0, \quad H = \sqrt{EG}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(47,10) formüllerinin sonuncusu gösterir ki: **Bir P düzgün noktasında ve yakınlarında en az 2-nci sınıftan bir S yüzeyinin P den geçen, bu noktada birbirine dik ve en az 2-nci sınıftan iki eğrisinin —ya da bunların P de birbirine dik teğet doğrultularının— geodezik burulmalarının toplamı sıfırdır.**

Bu özelliği, ilerde, başka biçimde de ispat edeceğiz.

47-3. MONGE gösterilişinde geodezik burulma

(47-6) formülü, herhangi bir $\vec{n}^*$, $|\vec{n}^*| = n^*$ normali cinsinden

$$\tau_g = \frac{1}{n^{*2}} \cdot \frac{(\vec{dx}, \vec{n}^*, \vec{dn}^*)}{\vec{dx}^2} \tag{47-11}$$

biçiminde yazılabilir.

Yüzeyin en az 2-nci sınıftan bir

$$x_3 = g(x_1, x_2)$$

fonksiyonu ile MONGE gösterilişinde, $\vec{n}^*$ vektörü olarak skaler bileşenleri $(p, q, -1)$ olan normal vektörü alırsak, (x_1, x_2, x_3) düzgün noktasında dx_1, dx_2, dx_3 teğet doğrultusu ile belirli olan τ_g geodezik burulması, (47-11) formülüne göre

$$\tau_g = \frac{\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ p & q & -1 \\ dp & dq & 0 \end{vmatrix}}{(1 + p^2 + q^2)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}$$

dir. Determinantın son sütunundaki elemanları önce p, sonra da q ile çarpıp birinci ve ikinci sütunlardaki elemanlara eklersek, söz konusu determinant

$$\begin{vmatrix} dx_1 + p\,dx_3 & dx_2 + q\,dx_3 & dx_3 \\ 0 & 0 & -1 \\ dp & dq & 0 \end{vmatrix} = (dx_1 + p\,dx_3)\,dq - (dx_2 + q\,dx_3)\,dp$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$dq \cdot d(x_1 + p x_3) - dp \cdot d(x_2 + q\,dx_3)$$

e eşit olacağından, geodezik burulma

$$\tau_g = \frac{dq \cdot d(x_1 + p x_3) - dp \cdot d(x_2 + q\,dx_3)}{(1+p^2+q^2)\,[(1+p^2)\,dx_1^2 + (1+q^2)\,dx_2^2 + 2\,pq\,dx_1\,dx_2]} \tag{47-12}$$

dir.

47-4. İmplisit gösterilişte geodezik burulma

Yüzeyin en az 2-nci sınıftan bir

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

implisit fonksiyonu ile gösterilişinde, $\vec{n}^*$ vektörü olarak, skaler bileşenleri $(f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3})$ olan normal vektörü alırsak, (x_1, x_2, x_3) düzgün noktasında dx_1, dx_2, dx_3 teğet doğrultusu ile belirli olan τ_g geodezik burulması, (47-11) formülüne göre

$$\tau_g = \frac{\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \\ df_{x_1} & df_{x_2} & df_{x_3} \end{vmatrix}}{(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)\,(f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_{x_3}^2)} \tag{47-13}$$

$$f_{x_1}\,dx_1 + f_{x_2}\,dx_2 + f_{x_3}\,dx_3 = 0$$

dir.

47-5. Doğrultu açısı cinsinden geodezik burulma. Doğal bağıntılar.

P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan S yüzeyi üzerinde koordinat izgilerinin bir dik eğri şebekesi meydana getirdiklerini varsayalım. Buna göre: $v' = (dv/du)$ ile belirli olan doğrultunun geodezik burulması, (47-10; 2) formülü ile hesaplanır. O hâlde, S yüzeyinin, P düzgün noktasındaki v' doğrultusuna teğet ve bu nokta yakınlarında en az 2-nci sınıftan bir C eğrisinin s yayı cinsinden, P deki geodezik burulması

$$\tau_g = \frac{EM\,u''' + (EN - GL)\,u''v'' - GM\,v'''}{\sqrt{EG}} \tag{47-14}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Koordinat çizgilerinin P düzgün noktasındaki teğet birim vektörleri $\vec{t}$, $\vec{t^*}$. C nin P deki $\vec{a_1}$ teğet birim vektörü ile $\vec{t}$ arasındaki açı da φ ise

$$\vec{t} = \frac{\vec{x_u}}{\sqrt{E}}, \quad \vec{t^*} = \frac{\vec{x_v}}{\sqrt{G}}, \quad \vec{x^*} = \vec{a_1} = \vec{t}\cos\varphi + \vec{t^*}\sin\varphi$$

$$= \frac{\vec{x_u}}{\sqrt{E}}\sqrt{E}\,u^* + \frac{\vec{x_v}}{\sqrt{G}}\sqrt{G}\,v^*$$

bağıntıları dolayısiyle

$$\sqrt{E}\,u^* = \cos\varphi, \quad \sqrt{G}\,v^* = \sin\varphi$$

bulunacağından, koordinat çizgilerinin geodezik burulmalarını, (47-10) daki gibi

$$\tau_g^* = \frac{M}{\sqrt{EG}}, \quad \tau_{g^*}^* = -\frac{M}{\sqrt{EG}}$$

ile gösterdiğimizde, (47-10) eşitliği

(47-15) $$\tau_g = \tau_g^* \cos 2\varphi + \frac{\vec{r^*} - \vec{r^*}}{2}\sin 2\varphi$$

bağıntısını verir. Görülüyor ki,

τ_g geodezik burulması, φ açısı ile belirli olduğundan, bundan önce söylediğimiz gibi, **bir doğrultu fonksiyonudur.** (47-15) formülü gösterir ki:

Yüzeyin bir P düzgün noktasında, herhangi iki dik teğet doğrultusunun açıortaylarıyla belirli olan $\pm\tau_g^*$ geodezik burulmaları, bu iki dik teğet doğrultusunun normal eğrilikleri arasındaki farkın yarısının farklı işaretli değerlerine, yâni birincisi

$$\tau_g^* = \frac{\vec{r^*} - r}{2}$$

ye eşittir.

47-6. OSSIAN BONNET formülü

Herhangi bir dik koordinat şebekesi yerine, yüzey, eğrilik çizgilerine nispet edildiğinde. Teorem 39-2 dolayısiyle yüzey üzerinde $M=0$ olaca-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ğından, $\tau_g^* = \dfrac{M}{\sqrt{EG}} = 0$ dır ve (47-15) formülü, r ve $\bar{r}$ asal eğrilikleri göstermek üzere

(47-16) $$\tau_g = (\bar{r} - r) \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Cos} \varphi$$

verir. Buna, OSSIAN BONNET formülü denilir.

Özelikler 47-1.

(47-16) formülünden ve $\tau_g = \tau + \theta'$ bağıntısından, bir **düzgün noktada,** geodezik burulmanın şu **yerel** ve **tümel** özelikleri çıkarılır:

1. Geodezik burulmanın bir noktada sıfır olması, bu noktanın asal doğrultularını karakterize eder. Yüzeyin bir (B) bölgesinde geodezik burulmanın sıfır olması da, bu bölgenin eğrilik çizgilerini karakterize eder. Bu hâlde, yüzey, (B) bölgesinde en az 3-üncü sınıftandır.
2. Geodezik burulma, bir **doğrultu fonksiyonu**dur.
3. Asal doğrultulara göre simetrik doğrultuların geodezik burulmalarının toplamı sıfırdır.
4. Birbirine dik iki doğrultunun geodezik burulmalarının toplamı sıfırdır.
5. Asal doğrultuların açıortaylarına göre simetrik iki doğrultunun geodezik burulmaları eşittir.
6. Geodezik burulmanın

$$\pm \frac{\bar{r} - r}{2}$$

ekstremum değerlerini veren doğrultular, asal doğrultuların açıortaylarıdır.

7. Bir eliptik-göbek noktasından geçen her teğet doğrultusu için, geodezik burulma sıfırdır.
8. Aralarındaki açı 45° olan herhangi iki doğrultu ile belirli olan geodezik burulmaların kareleri toplamı sâbittir ve asal eğrilikler arasındaki farkın yarısının karesine, yâni geodezik burulmanın ekstremum değerinin karesine eşittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Gerçekten, aralarındaki açı 45° olan herhangi iki doğrultu ile belirli olan geodezik burulmalara, sıra ile, τ_g ve τ_g^* dersek, (47-16) formülüne göre

$$\tau_g = \frac{\bar{r} - r}{2} \operatorname{Sin} 2\varphi\,, \quad \tau_g^* = \frac{\bar{r} - r}{4} \operatorname{Sin} 2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\bar{r} - r}{2} \operatorname{Cos} 2\varphi$$

olacağından,

(47-17) $$\tau_g^2 + \tau_g^{*2} = \left(\frac{\bar{r} - r}{2}\right)^2$$

dir.

9. Herhangi bir doğrultuya göre, normal eğrilikle geodezik burulma arasında

(47-18) $$\rho_n^2 + \tau_g^2 = 2\,w\,\rho_n - K = r^2 \operatorname{Cos}^2\varphi + \bar{r}^2 \operatorname{Sin}^2\varphi$$

bağıntısı vardır.

Düzgün noktanın: Eliptik, hiperbolik veya parabolik olmasına göre, sıra ile (34-9), (34-24) veya (34-34) EULER formülünü ve (47-16) O. BONNET formülünü kullanarak, (47-18) formülü bulunur. Bir başka yol da, yüzeyi bir dik koordinat şebekesine nispet ederek, yâni $F = 0$ alırsak, doğrultuyu v=sâbit olarak seçmektir. Bu hâlde, (47-10) a göre

$$\rho_n = \frac{L}{E}\,, \quad \tau_g = \frac{M}{\sqrt{EG}}$$

dir.

10. Birbirine dik herhangi iki doğrultuya göre ρ_n ve $\bar{\rho}_n$ normal eğrilikleriyle τ_g, $\bar{\tau}_g$ geodezik burulmaları arasında

(47-19) $$K = \rho_n \bar{\rho}_n + \tau_g \cdot \bar{\tau}_g = \rho_n \bar{\rho}_n - \tau_g^2\,,$$

$$(\tau_g + \bar{\tau}_g = 0\,, \quad \rho_n + \bar{\rho}_n = 2W)$$

bağıntısı vardır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

En kısa ispat yolu, GAUSS eğriliğinin, $F=0$ hâlinde, (34-4) biçimini yâni

$$K = \frac{LN-M^2}{EG} = \frac{L}{E}\cdot\frac{N}{G} - \left(\frac{M}{\sqrt{EG}}\right)^2$$

$$\left[\rho_n = \frac{L}{E},\quad \bar{\rho}_n = \frac{N}{G},\quad \tau_g = \frac{M}{\sqrt{EG}}\right]$$

yi kullanmaktır.

Uygulama 47-1.

Bir asimptotiğin burulması

Birbirine dik iki doğrultudan birincisi, bir asimptotik doğrultu ise, bu doğrultuya teğet asiptotik için

$$\rho_n = 0,\quad \tau_g = r \quad \text{(asimptotiğin burulması)}$$

dir ve (47-19) formülü

$$\tau^2 = -K$$

yâni (38-17) bağıntısını verir. Buna **BELTRAMI formülü** denilir.

11. En az 2-nci sınıftan bir yüzey üzerinde, düzgün noktalardan oluşan ve sınıfı ≥ 2 olan bir C eğrisi boyunca geodezik burulma ile eğrinin burulmasının birbirlerine eşit olmaları için gerekli ve yeterli koşul, C nin oskülatör düzlemlerinin yüzey normali ile, sâbit bir açı oluşturmalarıdır.

12. Bir C eğrilik çizgisinin düzlem olması için gerekli ve yeterli koşul, bunun oskülatör düzlemlerinin C boyunca, yüzey normali ile sâbit bir açı oluşturmalarıdır.

13. İki ayrı yüzeyin bir C eğrisi boyunca sâbit bir açı altında kesişmeleri için gerekli ve yeterli koşul, C nin her iki yüzeye göre geodezik burulmalarının aynı olmalarıdır.

Gerçekten, sınıfları ≥ 2 olan S_1, S_2 yüzeyleri gene aynı sınıftan bir C eğrisi boyunca, θ = sâbit açısı altında kesişiyorlarsa, C nin S_1 ve S_2 ye göre τ_g ve $\bar{\tau}_g$ geodezik burulmaları,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\tau_g = \tau + \theta^*$$

ise,

$$\bar{\tau}_g = \tau + (\theta + \bar{\theta})^* = \tau + \theta^* = \tau_g$$

dir.

Eğer S_1, S_2 ye göre τ_g, $\bar{\tau}_g$ geodezik burulmaları eşitse,

$$\tau + \theta^* = \tau + (\theta + \bar{\theta})^*$$

$$\bar{\theta}^* = 0, \quad \bar{\theta} = \text{sâbit}$$

dir.

Uyarı 47-2.

Bir eğri boyunca, $\tau_g = 0$ bağıntısının, bir eğrilik çizgisini karakterize ettiği sonucuna, (39-1) ve (47-7) formüllerini, veya (39-6) ve (47-6) eşitliklerini karşılaştırarak da varılabilir.

Şöyle de düşünülebilir:

Bir yüzeyin bir C eğrisi boyunca $\tau_g = 0$ ise, (47-5) formüllerinin sonuncusuna göre, eğer C asimptotik değilse, yâni C boyunca $p_n \neq 0$ ise, C ile bunun küresel görüntüsünün homolog noktalarındaki teğetler birbirlerine paraleldir ve bunun tersi de doğrudur. O hâlde, Teorem 39-1 nedeniyle, C bir eğrilik çizgisidir.

Eğer C aynı zamanda bir asimptotik çizgi ise, (47-5) bağıntılarının sonuncusu, $\theta = (\pi/2)$ nedeniyle, $\tau_g = \tau = 0$ vereceğinden, C eğrisi düzlemdir ve bu düzlem C boyunca yüzeye teğettir. Yâni gene —aynı zamanda asimptotik olan— bir eğrilik çizgisi söz konusudur.

Aynı sonuca vardıran bir başka yol da şudur:

Bir C eğrisi boyunca

$$\tau_g = \tau + \theta^* = 0$$

ise, yüzeyin C boyunca değişen normalleri, [I, s. 130, formül (41-4)] nedeniyle, C nin bir normale —teğet eğrisine teğet kalırlar. O hâlde, Teorem 39-5 gereğince, C bir eğrilik çizgisidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 47-3.

Bölüm VIII den önce, eğrilik çizgileriyle ilgili olarak elde ettiğimiz birçok özeliklerin ispatı, geodezik burulma kavramını kullanarak da yapılabilir. Örnek olarak, Teorem 39-10 nun konusunu oluşturan **üçüzlü dikgen sistemleri ele alalım.** 39-10 DUPIN teoremi şöyle idi:

Herhangi üç yüzey ailesine ait ve en az 2-nci sınıftan herhangi üç yüzeyin ikişer ikişer eğrilik çizgileri boyunca kesişmeleri için gerekli ve yeterli koşul, bu üç yüzey ailesinin bir üçüzlü dikgen yüzey sistemi oluşturmalarıdır.

Koşulun **gerekliliği** aynı biçimde ispat edilir.

Koşul yeterlidir. Üç yüzey ailesi bir üçüzlü dikgen yüzey sistemini oluşturuyorlarsa, bunların her birinden ve 2-nci sınıftan birer yüzey alalım. Herhangi ikisi, arakesitleri boyunca dik kesişeceklerinden, biraz önceki 13 üncü özelik nedeniyle, arakesitin geodezik burulması, kendisinden geçen her iki yüzey için aynıdır. Buna göre, (3,3), (3,1) ve (1,2) yüzeylerinin arakesitlerine C_1, C_2, C_3; geodezik burulmalarına da τ_{31}, τ_{32}, τ_{23} diyelim. C_1, C_2, C_3 eğrileri, ortak P noktalarında, dik olarak kesiştiklerinde, özelik 4 nedeniyle, P noktasında

$$\tau_{31} + \tau_{32} = 0, \quad \tau_{32} + \tau_{23} = 0, \quad \tau_{23} + \tau_{31} = 0 \tag{47-20}$$

dır. Bunların toplamı

$$\tau_{31} + \tau_{32} + \tau_{23} = 0$$

vereceğinden, bu sonuncudan (47-20) leri çıkardığımızda, P noktasında

$$\tau_{31} = 0, \quad \tau_{32} = 0, \quad \tau_{23} = 0$$

olur. Gene, özelik 13 nedeniyle; C_1, C_2, C_3 boyunca geodezik burulmalar aynı, yâni sıfıra eşit olacaklarından, bu eğriler, kendilerinden geçen yüzeylerin eğrilik çizgileridir.

47-7. Eşlenik doğrultular

Bundan önce § 40 da gördük ki bir P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı $\geqslant 2$ olan bir yüzey alındığında, P noktasından geçen ve bu noktadaki teğet düzlem üzerinde bulunan (du, dv) ve (δu, δv) doğrultularının eşlenik olmaları için gerekli ve yeterli koşul (40-5), yâni

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(40-5) $L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0$

idi.

a) Açısal bağıntılar

1. Yüzeyi eğrilik çizgilerine nispet edelim ve eliptik ya da parabolik-göbek noktasından farklı bir P düzgün noktasından geçen iki doğrultunun birinci asal doğrultu ile oluşturdukları açılar da φ, $\bar{\varphi}$ olsun. Buna göre, $M=0$ olacağından, (40-5) bağıntısı,

$$\frac{L}{E} = r,\ \frac{G}{N} = \bar{r},\ \sqrt{E}\,\frac{du}{ds} = \cos\varphi,\ \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} = \sin\varphi,$$

$$\sqrt{E}\,\frac{\delta u}{\delta s} = \cos\bar{\varphi},\ \sqrt{G}\,\frac{\delta v}{\delta s} = \sin\bar{\varphi}$$

eşitlikleri dolayısıyle,

$$\frac{L}{E}\left(\sqrt{E}\,\frac{du}{ds}\right)\left(\sqrt{E}\,\frac{\delta u}{\delta s}\right) + \frac{N}{G}\left(\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}\right)\left(\sqrt{G}\,\frac{\delta v}{\delta s}\right) = 0$$

biçiminde yazıldığında

$$r\cos\varphi\,\cos\bar{\varphi} + \bar{r}\sin\varphi\sin\bar{\varphi} = 0$$

veya

(47-21) $$\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\bar{\varphi} = -\frac{r}{\bar{r}}$$

verir.

Karşıt olarak, eliptik ya da parabolik-göbek noktasından farklı bir P düzgün noktasından geçen ve birinci asal doğrultu ile $\bar{\varphi}$, φ açılarını oluşturan iki teğet doğrultu arasında (47-21) bağıntısı varsa, bu iki doğrultu eşleniktir. O hâlde :

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 47-2.

Parabolik veya eliptik-göbek noktasından farklı bir P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin P den geçen iki teğet doğrultusunun eşlenik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu doğrultuların, birinci asal doğrultu ile oluşturdukları $\bar{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ açıları arasında (47-21) bağıntısının bulunmasıdır.

2. $\psi = \tilde{\varphi} - \bar{\varphi}$ açısının değeri

$\bar{\varphi}$ (veya φ) açısını $\tilde{\varphi}$ (veya φ) ve ψ cinsinden yazarak trigonometri tg ını, (47-21) bağıntısını kullanmak üzere, tg $\tilde{\varphi}$ ile (veya tg φ ile) çarpalım:

$$-\frac{r}{\bar{r}} = \operatorname{tg}\bar{\varphi} \cdot \operatorname{tg}\tilde{\varphi} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}(\psi + \varphi) = \frac{(\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}\varphi)\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\psi}$$

Bu eşitlikten,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\bar{r}\operatorname{tg}^2\varphi + r}{-(\bar{r} - r)\operatorname{tg}\varphi}$$

veya EULER ve OSSIAN BONNET formülleri yardımiyle

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\rho_n}{\tau_g}$$

bağıntısı elde edilir.

Eğer $\tilde{\varphi}$ açısı alınsa ve tg $\tilde{\varphi} \cdot \operatorname{tg}(\tilde{\varphi} - \psi)$ çarpımı kullanılsaydı, sağ yanda $(\rho_n / \tilde{\tau}_g)$ bulunacaktı. Buna göre

(47-22) $$\operatorname{tg}\psi = -\frac{\rho_n}{\tau_g} = \frac{\tilde{\rho}_n}{\tilde{\tau}_g}$$

dir. (47-22) den de, kolaylıkla, (47-21) e geçilir

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 47-3.

Parabolik veya eliptik-göbek noktasından farklı bir P düzgün noktasında ve yakınlarında sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin P den geçen iki teğet doğrultusunun eşlenik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu doğrultuların, oluşturdukları φ açısının (47-22) bağıntısına uymasıdır.

Uyarı 47-4.

(47-21) formülü gösterir ki, P noktası parabolikse, r (veya $\bar{r}$) sıfıra eşittir; ve birinci asal doğrultu ile oluşturulan φ açısı (veya $\tilde{\varphi}$) sıfırdır. φ (veya $\tilde{\varphi}$) gelişigüzeldir.

(47-22) formülü de, bir asimptotik doğrultunun eşleniğinin kendisi, bir asal doğrultunun eşleniğinin de öteki asal doğrultu olduğunu vurgular.

3. Özelik 40-2 de sözü geçen P^* noktasının λ^* apsisi

Bir (B) bölgesinde, sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin, düzgün noktalardan oluşan ve üzerinde eliptik ya da parabolik-göbek noktaları bulunmayan bir eğrisi C olsun. C nin bir P noktasındaki DARBOUX-RIBEAUCOUR dik üçyüzlüsü $(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{n})$, C boyunca değişen $\vec{a}_1$ teğet doğrultularının eşleniklerinin de birim vektörü $\vec{\tilde{a}}_1$ olsun. O hâlde,

$$\vec{\tilde{a}}_1 = \vec{a}_1 \operatorname{Cos}\psi + \vec{b}\ \operatorname{Sin}\psi \tag{47-23}$$

olacağından (47-5) türev formülleri ve (47-22) ye göre

$$\vec{\tilde{a}}_1^{\,*} = (\rho_* + \psi^*)(-\vec{a}_1 \operatorname{Sin}\psi + \vec{b}\ \operatorname{Cos}\psi) \tag{47-24}$$

dir.

C boyunca değişen $\vec{\tilde{a}}_1$ eşlenik doğrultusunun teğet kaldığı C^* eğrisinin P^* değme noktasının λ^* apsisi, (40-6)' nedeniyle

$$\lambda^* = -\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{\tilde{a}}_1^{\,*}}{(\vec{\tilde{a}}_1^{\,*})^2}$$

veya (47-24) yardımiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

(47-25) $$\lambda^* = \frac{\operatorname{Sin} \psi}{\rho_s + \psi^*}$$

dır.

4. (47-21) den elde edilen aşağıki eşit iki kesrin ortak değerini $\frac{1}{\delta}$ ile gösterelim :

$$\frac{\operatorname{Sin} \tilde{\varphi}}{r \operatorname{Cos} \varphi} = -\frac{\operatorname{Cos} \tilde{\varphi}}{\bar{r} \operatorname{Sin} \varphi} = \frac{1}{\delta}$$

Buradan, kolaylıkla, (47-18) nedeniyle

(47-26) $$\delta^2 = r^2 \operatorname{Cos}^2 \varphi + \bar{r}^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi = W \rho_n - K = \rho_s^2 + \tau_s^2$$

bulunur. O hâlde:

(47-27) $$\operatorname{Sin} \tilde{\varphi} = \frac{r \operatorname{Cos} \varphi}{\delta}, \quad \operatorname{Cos} \tilde{\varphi} = -\frac{\bar{r} \operatorname{Sin} \varphi}{\delta}, \quad (\delta > 0)$$

olur. (Simetri nedeniyle, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ olarak alınacaktır.)

Eğer

$$\tilde{\delta}^2 = r^2 \operatorname{Cos}^2 \tilde{\varphi} + \bar{r}^2 \operatorname{Sin}^2 \tilde{\varphi} = W \tilde{\rho}_n - K = \tilde{\rho}_s^2 + \tilde{\tau}_s^2$$

dersek, (47-27) bağıntılarını kullandığımızda

$$\tilde{\delta}^2 = \frac{K^2}{\delta^2}$$

veya

(47-28) $$K = r \bar{r} = \delta \tilde{\delta},$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Dolayısiyle, (47-27) ve (47-28) den de

$$\text{(47-29)} \qquad \operatorname{Sin}\varphi = \frac{-r\operatorname{Cos}\bar{\varphi}}{\tilde{\delta}}, \quad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{\bar{r}}{\tilde{\delta}}\operatorname{Sin}\tilde{\varphi}$$

çıkar.

5. (47-22) bağıntısını

$$\text{(47-30)} \qquad \frac{\operatorname{Sin}\psi}{\rho_n} = -\frac{\operatorname{Cos}\psi}{\tau_g} = \frac{1}{\lambda}$$

biçiminde yazarsak, buradan EULER formülü ile OSSIAN BONNET formüllerini kullanarak

$$\lambda \operatorname{Sin}\psi = r\operatorname{Cos}^2\varphi + \bar{r}\operatorname{Sin}^2\varphi$$

$$\lambda \operatorname{Cos}\psi = (r-\bar{r})\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi$$

eşitliklerini buluruz. Bunlardan birincisini Sin φ, ikincisini de $-\operatorname{Cos}\varphi$ ile çarpıp topladığımızda

$$\lambda \operatorname{Cos}\tilde{\varphi} = -\bar{r}\operatorname{Sin}\varphi$$

olur. Cos $\tilde{\varphi}$ yerine de (47-27; 2) yi koyduğumuzda

$$\text{(47-31)} \qquad \lambda = \delta$$

çıkar. Öyleyse, (47-30)

$$\text{(47-32)} \qquad \operatorname{Sin}\psi = \frac{\rho_n}{\delta}, \quad \operatorname{Cos}\psi = -\frac{\tau_g}{\delta}$$

verir.

Eğer (47-22) yi

$$\frac{\operatorname{Sin}\psi}{\bar{\rho}_n} = \frac{\operatorname{Cos}\psi}{\tilde{\tau}_g} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$$

biçiminde yazarsak, kolaylıkla görülür ki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\widetilde{\lambda} = \widetilde{\delta}$$

dir ve

(47-33) $$\operatorname{Sin}\psi = \frac{\widetilde{\rho_n}}{\widetilde{\delta}}, \quad \operatorname{Cos}\psi = \frac{\widetilde{\tau_g}}{\widetilde{\delta}}$$

olur.

Uyarı 47-5.

Yüzeyi, eğrilik çizgileri yerine, herhangi bir dik eğri şebekesine nispet edersek, bu kez (40-5) bağıntısı

(47-34) $$\bar{r}^2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\widetilde{\varphi} + \tau_g^2 (\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\widetilde{\varphi}) + r^2 = 0$$

verir.

Bu bağıntıdaki φ ve $\widetilde{\varphi}$ açıları, eşlenik iki doğrultunun, yeni birinci eksen doğrultusu ile oluşturdukları açıları göstermektedir.

b) İki eşlenik doğrultunun normal eğrilikleri, veya geodezik burulmaları arasındaki bağıntılar.

1. (47-26), (47-32) ve (47-33) eşitliklerinden

(47-35) $$\frac{\rho_n}{\delta} = \frac{\widetilde{\rho_n}}{\widetilde{\delta}}$$

veya

$$\rho_n \sqrt{W\widetilde{\rho_n} - K} = \widetilde{\rho_n} \sqrt{W\rho_n - K}$$

elde edilir, bu da

(47-36)
$$\begin{cases} R_n + \widetilde{R_n} = R + \bar{R} \quad \text{veya} \quad \dfrac{\rho_n + \widetilde{\rho_n}}{\rho_n \widetilde{\rho_n}} = \dfrac{r + \bar{r}}{r\bar{r}} \\ K = \dfrac{\rho_n \widetilde{\rho_n}}{\operatorname{Sin}^2\psi}, \quad 2W = \dfrac{\rho_n + \widetilde{\rho_n}}{\operatorname{Sin}^2\psi} \end{cases}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aynı sonuca, merkezli bir konikte, eşlenik herhangi iki yarıçapın kareleri toplamının, yarı eksenlerin kare toplamına eşit oluşundan da varılabilir.

2. (47-32) ve (47-33) den

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\delta} = -\frac{\tilde{\tau}_\varepsilon}{\tilde{\delta}}$$

veya (47-28) yardımıyla

$$\tilde{\tau}_\varepsilon = -\frac{K}{\delta^2}\,\tau_\varepsilon \tag{47-37}$$

çıkar.

(47-26) yı kullandığımızda da

$$\tau_\varepsilon + \tilde{\tau}_\varepsilon = -(R + \tilde{R})\,\rho_n\,\tilde{\tau}_\varepsilon \tag{47-38}$$

olur.

Uygulama 47-2.

1. DARBOUX-RIBEAUCOUR türev formüllerinin türevlerini bulunuz.

(47-5) formüllerinin türevleri, gene aynı formüller yardımıyla, sıra ile:

$$\begin{cases} \vec{a}_1^{\,\circ\circ} = -\rho^2\,\vec{a}_1 + (\rho_g^{\,\circ} - \rho_n\,\tau_g)\,\vec{b} + (\rho_n^{\,\circ} + \rho_g\,\tau_g)\,\vec{n}, \\ \vec{b}^{\,\circ\circ} = -(\rho_g^{\,\circ} + \rho_n\,\tau_g)\,\vec{a}_1 + (\rho^2\tau_{gn} + \tau^2{}_g\,\tau)\,\vec{b} + (\tau_g^{\,\circ} - \rho_n\,\rho_g)\,\vec{n} \\ \vec{n}^{\,\circ\circ} = (\rho_g\,\tau_g - \rho_n^{\,\circ})\,\vec{a}_1 + (\tau_g^{\,\circ} + \rho_g\,\rho_n)\,\vec{b} - (\rho_n^{\,2} + \tau^2{}_g)\,\vec{n} \end{cases} \tag{47-39}$$

bulunur. Bu formüllerin geçerliliği için, tanım bölgesinde, hem yüzeyin hem de alınan eğrinin en az 3-üncü sınıftan olmaları gerekir. Bir **asimptotik çizgi boyunca** bu formüller

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(47\text{-}40)\qquad \begin{cases} \vec{a}_1'' = -\rho^2\,\vec{a}_1 + \rho'\,\vec{b} + \rho\tau\,\vec{n} \\ \vec{b}'' = -\rho'\,\vec{a}_1 + (\rho^2+\tau^2)\,\vec{b} + \tau'\,\vec{n} \\ \vec{n}'' = \rho\tau\,\vec{a}_1 + \tau'\,\vec{b} - (\rho^2+\tau^2)\,\vec{n} \end{cases}$$

biçimindedir.

Bir eğrilik çizgisi boyunca,

$$(47\text{-}41)\qquad \begin{cases} \vec{a}_1'' = -\rho^2\,\vec{a}_1 + \rho_g'\,\vec{b} + \rho_n'\,\vec{n}, \\ \vec{b}'' = -\rho_g'\,\vec{a}_1 + \rho_g^2\,\vec{b} - \rho_g\rho_n\,\vec{n}, \\ \vec{n}'' = -\rho_n'\,\vec{a}_1 + \rho_g\rho_n\,\vec{b} - \rho_n^2\,\vec{n} \end{cases}$$

olur.

Nihayet **bir geodezik çizgi** için

$$(47\text{-}42)\qquad \begin{cases} \vec{a}_1'' = -\rho^2\,\vec{a}_1 - \rho\tau\,\vec{b} + \rho'\,\vec{n}, \\ \vec{b}'' = -\rho\tau\,\vec{a}_1 + \tau^2\,\vec{b} + \tau'\,\vec{n}, \\ \vec{n}'' = -\rho'\,\vec{a}_1 + \tau'\,\vec{b} - (\rho^2+\tau^2)\,\vec{n} \end{cases}$$

dır.

Uygulama 47-3.

a) Genelleştirilmiş EULER formülü

r ve $\bar{r}$, P düzgün noktasındaki asal eğrilikleri göstermek üzere, P den geçen ve birinci asal doğrultu ile φ ve $\varphi + (\pi/2)$ açılarını oluşturan her-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

hangi iki dik doğrultu ile belirli olan normal eğrilikler r^*, $\bar{r}^*$, geodezik burulmalar da $\tau^*, -\bar{\tau}^*$ olsun. Buna göre, EULER ve OSSIAN BONNET formülleri

(47-43) $$r^* = r \operatorname{Cos}^2\varphi + \bar{r} \operatorname{Sin}^2\varphi\,,\quad \bar{r}^* = r \operatorname{Sin}^2\varphi + \bar{r} \operatorname{Cos}^2\varphi$$

(47-44) $$\tau^* = (\bar{r} - r) \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi$$

verir.

O hâlde, birinci asal doğrultu ile $(\varphi+\alpha)$ açısı yapan bir Δ doğrultunun belirlediği r^{**} normal eğriliği için, (47-43) ve (47-44) formülleri dolayısiyle

$$r^{**} = r \operatorname{Cos}^2(\varphi+\alpha) + \bar{r} \operatorname{Sin}^2(\varphi+\alpha)$$

$$= (r \operatorname{Cos}^2\varphi + \bar{r} \operatorname{Sin}^2\varphi) \operatorname{Cos}^2\alpha + (r \operatorname{Sin}^2\varphi + \bar{r} \operatorname{Cos}^2\varphi) \operatorname{Sin}^2\alpha +$$

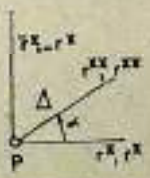
$$(\bar{r}-r) \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} 2\alpha$$

yâni

(47-45) $$r^{**} = r^* \operatorname{Cos}^2\alpha + \bar{r}^* \operatorname{Sin}^2\alpha + \tau^* \operatorname{Sin} 2\alpha$$

bulunur.

(47-45) formülü asal doğrultular yerine, **herhangi iki dik doğrultu olarak yazılan genelleştirilmiş EULER formülüdür.**



Şekil 59.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 47-6.

Δ doğrultusu ile belirli olan geodezik burulmaya gelince, (47-15) bağıntısı nedeniyle bu da

$$\tau^{**} = \tau^{*} \operatorname{Cos} 2\alpha + \frac{\bar{r}^{**} - r^{*}}{2} \operatorname{Sin} 2\alpha \tag{47-46}$$

biçimindedir. Buna da, **herhangi iki dik doğrultu olarak yazılan: Genelleştirilmiş OSSIAN BONNET formülü,** diyeceğiz.

b) Genelleştirilmiş GAUSS eğriliği

(47-19) formülüne göre, P düzgün noktasındaki GAUSS eğriliği

$$K = r^{*}\,\bar{\bar{r}}^{*} - \tau^{*2}$$

dir. Bu eşitlikte, (47-43) den yararlanarak, $\bar{\bar{r}}^{*}$ ın değerini kullandığımızda

$$K = r^{*}\,\frac{r^{**} - r^{*}\operatorname{Cos}^{2}\alpha - \tau^{*}\operatorname{Sin} 2\alpha}{\operatorname{Sin}^{2}\alpha} - \tau^{*2}$$

veya

$$K = \frac{r^{*}\,r^{**} - (r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha)^{2}}{\operatorname{Sin}^{2}\alpha} \tag{47-47}$$

olur.

Birinci doğrultu ile Δ eşlenikse, (47-22) nedeniyle, parantez içi sıfırdır ve

$$K = \frac{r^{*}\,r^{**}}{\operatorname{Sin}^{2}\alpha}$$

(47-36,3) ün aynıdır.

Özelik 47-1.

(47-45) Cos α, (47-46) yı da Sin α ile çarpıp toplarsak veya (47-46) da $\bar{r}^{*}$ yerine (47-45) den çıkarılan değeri koyarsak, kolaylıkla görülür ki

$$r^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \tau^{**}\operatorname{Sin}\alpha = r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(47-48) $$tg\alpha = \frac{r^{**} - r^{*}}{r^{**} + r^{*}}$$

dır.

c) **Genelleştirilmiş ortalama eğrilik**

$$2W = r^{*} + \bar{r}^{*}$$

bağıntısında, $\bar{r}^{*}$ yerine, (47-45) den çıkarılan değer kullanıldığında

$$2W = r^{*} + \frac{r^{**} - r^{*}\,Cos^{2}\alpha - r^{*}\,Sin^{2}\alpha}{Sin^{2}\alpha} = r^{*} + r^{**} +$$

$$+ \frac{(r^{**} - r^{*})\,Cos^{2}\alpha - r^{*}\,Sin^{2}\alpha}{Sin^{2}\alpha}$$

olur. (47-48) den de

$$(r^{**} - r^{*})\,Cos\,\alpha = (r^{**} + r^{*})\,Sin\,\alpha$$

eşitliği çıkarılacağından, bir önceki eşitlik

(47-49) $$2W = r^{**} + r^{*} + (r^{**} - r^{*})\,Cotg\,\alpha$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM IX

İNVARİYANT TÜREVLER

İNVARİYANT BİÇİMLER

48. Koordinat çizgilerinin teğetleri doğrultusunda çeşitli mertebelerden invariyant türevler

a. Birinci mertebeden invariyant türevler

Sınıfı $\geqslant 1$ olan bir S yüzeyinin bir P düzgün noktasından geçen $v=$sâbit, $u=$sâbit koordinat çizgileri arasındaki açı α olsun. En az 1-inci sınıftan, **skaler** veya **vektörel** bir $f = f(u, v)$ nokta fonksiyonu yardımıyle tanımlanan

$$f_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}} \qquad f_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}} \tag{48-1}$$

ifadelerine, **$f = f(u, v)$ nokta fonksiyonunun, P den geçen koordinat çizgilerinin P deki teğetleri doğrultusunda, birinci mertebeden invariyant türevleri**, denilir.

Bunlara **invariyant** denilmesinin nedeni,

$$u = u(\bar{u}), \quad v = v(\bar{v}) \tag{48-2}$$

biçiminde bir koordinat değişimi yapıldığında, f_1 ve f_2 nin değişmemeleridir.

Yorum

$v=v_0=$sâbit, $u=u_0=$sâbit koordinat çizgilerinin yaylarını, sırasıyle, S_1 ve S_2 ile göstердiğimizde, bu çizgilerin teğetleri doğrultusunda hesaplanan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(48\text{-}3)\quad \frac{df(u, v_0)}{ds_1} = \frac{f_u\,du}{\sqrt{E}\,du} = f_1(u, v_0),\quad \frac{df(u_0, v)}{ds_2} = \frac{f_v\,dv}{\sqrt{G}\,dv} = f_2(v_0, v)$$

bağıntıları gösterir ki:

$f = f(u, v)$ **nokta fonksiyonunun birinci mertebeden** f_1 , f_2 **invariyant türevleri, koordinat çizgilerinin** S_1 , S_2 **yaylarına göre, aynı fonksiyonun birinci mertebeden türevleridir.**

Uyarı 48-.1

Kolaylıkla görülür ki, bilinen türev alma kuralları, hiçbir değişikliğe uğramadan, birinci mertebeden invariyant türevlere de uygulanır.

b) İkinci mertebeden invariyant türevler

İkinci mertebeden invariyant türevler için, hem S yüzeyini, hem de $f = f(u, v)$ nokta fonksiyonunu en az 2-nci sınıftan varsayacağız. Buna göre, birinci mertebeden f_1 , f_2 invariyant türevlerinin de birinci mertebeden invariyant türevlerini ele alabiliriz. Sayıları 4 olan ve

$$f_{11}\ ,\ f_{12}\ ,\ f_{21}\ ,\ f_{22}$$

biçiminde gösterilen bu yeni türevlere, $f = f(u, v)$ **nokta fonksiyonunun, koordinat çizgilerinin P deki teğetleri doğrultusunda hesaplanan ikinci mertebeden invariyant türevleri denilir.**

Bu türevlerin hesaplanmasında, **işlem sırasının önemi vardır**, yani genellikle

$$f_{12} = f_{21}$$

değildir. Bu iki karışık invariyant türevin birbirlerine nasıl bağlı oldukları aşağıda gösterilmiştir.

İntegre edilebilme koşulu

(48-1) den sıra ile

$$f_{12} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2}\,\frac{E_v}{E\sqrt{G}}\,f_1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f_{11} = \frac{f_{uv}}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2}\,\frac{G_u}{G\sqrt{E}}\,f_2$$

veya

$$f_{12} + f_2 (\lg \sqrt{E})_2 = f_{11} + f_2 (\lg \sqrt{G})_1$$

bulunur.

Kısaca

(48-4) $$q = (\lg \sqrt{E})_2, \quad \bar{q} = (\lg \sqrt{G})_1$$

dersek

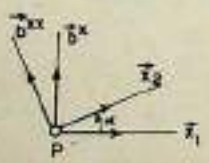
(48-5) $$f_{12} + q f_1 = f_{11} + \bar{q} f_2$$

olur.

(48-4) nedeniyle, $f = f(u, v)$ fonksiyonuna bağlı bulunmayan q, $\bar{q}$ katsayıları, **nokta fonksiyonlarıdır**, ve (48-5) bağıntısına da **integrabilite koşulu** denilir.

Yer vektörünün birinci ve ikinci mertebeden invariyant türevleri

v=sâbit, u=sâbit eğrilerinin P düzgün noktasındaki teğetleri doğrultusunda hesaplanan, **birinci mertebeden** $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ **invariyant türevleri**, (48-3) nedeniyle, **koordinat çizgilerinin** P deki **teğet birim vektörleridir.**



Şekil 60

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

v=sâbit koordinat çizgisinin P noktasındaki DARBOUX-RIBEAUCOUR dik üçyüzlüsünün birim vektörleri $(\vec{x}_1, \vec{b}^*, \vec{n})$; normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması, r^*, g^*, τ^*; u=sâbit eğrisininkiler de $(\vec{x}_2, \vec{b}^{**}, \vec{n})$ ve $r^{**}, g^{**}, \tau^{**}$ olsun. Koordinat çizgilerinin P noktasındaki teğet birim vektörleri arasındaki açıya da

$$\widehat{\vec{x}_1, \vec{x}_2} = \alpha \tag{48-6}$$

diyelim.

v=sâbit eğrisi ile u=sâbit eğrisinin P noktasına bağlanan $(\vec{x}_1, \vec{b}^*, \vec{n})$ ve $(\vec{x}_2, \vec{b}^{**}, \vec{n})$ DARBOUX-RIBEAUCOUR dik üçyüzlülerinin (47-5) türev formülerinin birincilerinden

$$\vec{x}_{11} = g^* \vec{b}^* + r^* \vec{n}, \quad \vec{x}_{22} = g^{**} \vec{b}^{**} + r^{**} \vec{n} \tag{48-7}$$

yazılabilir.

Öte yandan, Şek. 60'a göre,

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{b}^{**} \operatorname{Sin}\alpha, \quad \vec{x}_2 = \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha + \vec{b}^* \operatorname{Sin}\alpha \tag{48-8}$$

olduğundan,

$$\vec{b}^* = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}, \quad \vec{b}^{**} = \frac{\vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{x}_1}{\operatorname{Sin}\alpha} \tag{48-9}$$

bulunur.

Bu son değerler, (48-7) de yerlerine konulacak olursa

$$\begin{cases} \vec{x}_{11} = g^* \dfrac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} + r^* \vec{n}, \\ \vec{x}_{22} = g^{**} \dfrac{\vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{x}_1}{\operatorname{Sin}\alpha} + r^{**} \vec{n} \end{cases} \tag{48-10}$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(48-8) formüllerinden birisinin 2 ye, ikincisinin de 1 e göre invariyant türevlerini alıp (47-5) türev formüllerini kullanmakla da

$$(48\text{-}11)\quad \begin{cases} \vec{x}_{12} = (g^{**} - \alpha_2)\dfrac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} + (r^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \tau^{**}\operatorname{Sin}\alpha)\,\vec{n}, \\ \vec{x}_{21} = (g^{*} + \alpha_1)\dfrac{\vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{x}_1}{\operatorname{Sin}\alpha} + (r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha)\,\vec{n} \end{cases}$$

olur.

Uyarı 48-2.

(48-5) integrebilite koşulunu, $\vec{x}_{12}$, $\vec{x}_{21}$ invariyant türevleri için kullandığımızda

$$(g^{**} - \alpha_2)\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} + (r^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \tau^{**}\operatorname{Sin}\alpha)\vec{n} + q\vec{x}_1 =$$

$$(g^{*} + \alpha_1)\frac{\vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{x}_1}{\operatorname{Sin}\alpha} + (r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha)\vec{n} + \bar{q}\vec{x}_2$$

$$(48\text{-}12)\quad \begin{cases} q = \dfrac{(g^{**} - \alpha_2)\operatorname{Cos}\alpha - (g^{*} + \alpha_1)}{\operatorname{Sin}\alpha}, \\ \bar{q} = \dfrac{-(g^{*} + \alpha_1)\operatorname{Cos}\alpha + (g^{**} - \alpha_2)}{\operatorname{Sin}\alpha} \end{cases}$$

ve

$$(48\text{-}13)\qquad r^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \tau^{**}\operatorname{Sin}\alpha = r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(48-14) $$tg\,\alpha = \frac{r^{**} - r^{*}}{r^{**} + r^{*}}$$

bulunur.

(48-12) denklemlerinden

(48-15) $$g^{*} + \alpha_1 = \frac{\bar{q}\,Cos\,\alpha - q}{Sin\,\alpha}, \quad g^{**} - \alpha_1 = \frac{\bar{q} - q\,Cos\,\alpha}{Sin\,\alpha}$$

sonuçları çıkarılır.

TCHEBYCHEF şebekesi

Sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi üzerinde, en az 2-nci sınıftan skaler ya da vektörel bir $f = f(u, v)$ nokta fonksiyonu için

$$f_{\alpha} = f_{\beta}$$

eşitliğinin sağlanmasında gerekli ve yeterli koşul, (48-4), (48-5), (48-15) bağıntıları nedeniyle

(48-16) $$q = 0, \quad \bar{q} = 0$$

yâni

(48-17) $$g^{*} + \alpha_1 = 0, \quad g^{**} - \alpha_2 = 0$$

ve

(48-18) $$E = E(u), \quad G = G(v)$$

olmalıdır. Böyle olunca da, lineer eleman

$$ds^2 = E(u)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(v)\,dv^2$$

veya

$$\sqrt{E}\,du = ds_1, \quad \sqrt{G}\,dv = ds_2, \quad F = \sqrt{EG}\,Cos\,\alpha$$

dolayısiyle

(48-19) $$ds^2 = ds_1^2 + (2\,Cos\,\alpha)\,ds_1\,ds_2 + ds_2^2$$

biçimindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

Lineer elemanı (48-19) biçiminde olan yüzeylerde de, (48-4) bağıntısı dolayısiyle, (48-16) ve (48-17) sağlanmış olur.

Birinci kuvadratik formu (48-19) bağıntısıyla tanımlanan yüzeyin koordinat çizgilerinin oluşturdukları eğri ailelerine: **TCHBYCHEF şebekesi** veya **ağı**, (48-19) a da **TCHEBYCHEF lineer formu** denilir.

Son söylediklerimizi, aşağıdaki teorem özetler:

Teorem 48-1.

Sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyi üzerine, en az 2-nci sınıftan, skaler ya da vektörel bir $f=f(u,v)$ nokta fonksiyonu için, (48-5) integrabilite koşulunun

$$f_{12} = f_{21}$$

biçiminde olması için gerekli ve yeterli koşul, koordinat çizgilerinin geodezik eğriliklerinin

$$g^{*} + \alpha_1 = 0, \quad g^{**} - \alpha_2 = 0$$

bağıntılarını sağlaması veya koordinat çizgilerinin bir TCHEBYCHEF ağı oluşturmaları, yani lineer formun

$$ds^2 = ds_1^2 + (2\cos\alpha)\, ds_1\, ds_2 + ds_2^2$$

biçiminde olmasıdır.

Uyarı 48-3.

Görüldüğü gibi, türev alma kuralları, olduğu gibi, 2-nci mertebeden invariyant türevlere de uygulanır.

Normal birim vektörünün, koordinat çizgilerinin teğetleri doğrultusunda, birinci mertebeden invariyant türevleri

$v=$sâbit ve $u=$sâbit koordinat çizgilerinin ortak P düzgün noktasında ve bunların teğetleri doğrultusunda, $\vec{n}$ normal birim vektörünün birinci mertebeden invariyant türevleri, (47-5; 3) ve (48-9) formülleri yardımiyle, önce

$$\vec{n}_1 = -r^{*}\,\vec{x}_1 - \tau^{*}\,\vec{b}^{*}, \quad \vec{n}_2 = -r^{**}\,\vec{x}_2 - \tau^{**}\,\vec{b}^{**}$$

sonra da

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(48-20)

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = -r^* \vec{x}_1 - \tau^* \dfrac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} \\ \quad = \dfrac{(\tau^* \operatorname{Cos}\alpha - r^* \operatorname{Sin}\alpha)\vec{x}_1 - \tau^* \vec{x}_2}{\operatorname{Sin}\alpha} \\ \vec{n}_2 = -r^{**} \vec{x}_2 - \tau^{**} \dfrac{\vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{x}_1}{\operatorname{Sin}\alpha} \\ \quad = \dfrac{\tau^{**} \vec{x}_1 - (r^{**} \operatorname{Sin}\alpha + \tau^{**} \operatorname{Cos}\alpha)\vec{x}_2}{\operatorname{Sin}\alpha} \end{cases}$$

biçiminde elde edilir.

(48-10), (48-11) ve (48-20) formülleri: **Genelleştirilmiş DARBOUX - RIBEAUCOUR türev formülleridir.** Bunlara bir de integrabilite koşulu olan

$$\vec{x}_{12} + q\vec{x}_1 = \vec{x}_{21} + \bar{q}\vec{x}_2$$

ve (48-12) formüllerini de eklemek gerekir.

Uyarı 48-4

Daha yüksek mertebeden invariyant türevler de aynı biçimde tanımlanır.

49. Genel hâlde GAUSS ve MAINARDI-CODAZZI formüllerinin invariyant biçimleri

S yüzeyini tanımlayan

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v)$$

vektörel fonksiyonunun en az 3-üncü sınıftan olduğunu varsayalım ve v= sâbit, u=sâbit koordinat çizgilerinin P düzgün noktasındaki $\vec{x}_1$ ve $\vec{x}_2$ teget birim vektörlerine, (48-5) integrabilite koşulunu uygulayalım:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(49-1)
$$\begin{cases} \vec{x}_{112} + q\,\vec{x}_{11} = \vec{x}_{122} + q\,\vec{x}_{12} \\ \vec{x}_{212} + q\,\vec{x}_{21} = \vec{x}_{222} + q\,\vec{x}_{22} \end{cases}$$

Bu iki denklemi, (48-10) ve (48-11) bağıntılarını kullanarak açar ve elde edilen ifadeleri $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ ve $\vec{n}$ birim vektörlerine göre sıralarsak, her iki denklem, tip bakımından

$$A\vec{x}_1 + B\vec{x}_2 + C\vec{n} = \vec{0}$$

biçiminde vektörel bir bağıntı verir. Buna göre de; $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{n}$ birim vektörlerinin lineer bağımsız olmalarından yararlanarak

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

eşitliklerini çıkarmak, doğal bir davranıştır. Ancak, bu yolun seçilmesi gereksiz hesaplara neden olacaktır. Bu bakımdan, hesapları kısaltmak amaciyle, başka bir yöntem uygulanacaktır.

(48-9) formülerinden, yâni

(48-9)
$$\vec{b}^{*} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}, \qquad \vec{b}^{**} = \frac{\vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{x}_1}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

formüllerinden kolaylıkla

(49-2)
$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{b}^{*} \operatorname{Cos}\alpha - \vec{b}^{**}}{\operatorname{Sin}\alpha}, \qquad \vec{x}_2 = \frac{\vec{b}^{*} - \vec{b}^{**} \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

bağıntıları çıkarılır.

Öte yandan, (48-10) ve (48-11) bağıntıları da, (48-9) yardımiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$
(49\text{-}3)\qquad
\begin{cases}
\vec{x}_{11} = g^{*}\,\vec{b}^{*} + r^{*}\,\vec{n}\,, \quad \vec{n}_{12} = (g^{**} - \alpha_2)\,\vec{b}^{*} + \\
\qquad\qquad (r^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \tau^{**}\operatorname{Sin}\alpha)\,\vec{n}\,. \\
\vec{x}_{12} = g^{**}\,\vec{b}^{**} + r^{**}\,\vec{n}\,. \quad \vec{x}_{21} = (g^{*} + \alpha_1)\,\vec{b}^{**} + \\
\qquad\qquad (r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha)\,\vec{n}\,. \\
r^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \tau^{**}\operatorname{Sin}\alpha = r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha
\end{cases}
$$

biçiminde yazılabilir.

(49-3) formüllerini kullanmakla da, (48-9) bağıntılarından

$$
(49\text{-}4)\qquad
\begin{cases}
\vec{b}_1^{\,*} = g^{*}\,\dfrac{\vec{b}^{**} - \vec{b}^{*}\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} + \tau^{*}\,\vec{n}\,, \\
\vec{b}_2^{\,*} = (g^{**} - \alpha_2)\dfrac{\vec{b}^{**} - \vec{b}^{*}\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} + (r^{**}\operatorname{Sin}\alpha + 2\tau^{**}\operatorname{Cos}\alpha)\,\vec{n} \\
\vec{b}_1^{\,**} = (g^{*} + \alpha_1)\,\dfrac{\vec{b}^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \vec{b}^{*}}{\operatorname{Sin}\alpha} + (\tau^{*}\operatorname{Cos}\alpha - r^{*}\operatorname{Sin}\alpha)\,\vec{n}\,, \\
\vec{b}_2^{\,**} = g^{**}\,\dfrac{\vec{b}^{**}\operatorname{Cos}\alpha - \vec{b}^{*}}{\operatorname{Sin}\alpha} + \tau^{**}\,\vec{n}
\end{cases}
$$

eşitlikleri elde edilir.

Ayrıca, (48-20) formüllerinin de, (48-9) ve (49-2) yardımiyle

$$
(49\text{-}5)\qquad \vec{n}_1 = \frac{-(r^{*}\operatorname{Cos}\alpha + \tau^{*}\operatorname{Sin}\alpha)\,\vec{b}^{*} + r^{*}\,\vec{b}^{**}}{\operatorname{Sin}\alpha}\,,
$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{n}_2 = \frac{-r^{**}\vec{b}^{*} + (r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha)\vec{b}^{**}}{\sin\alpha}$$

biçimlerini alacağı açıktır.

Buna göre, (49-1) integrabilite koşullarını, (49-3) yardımiyle yazdığımızda

$$(49\text{-}6)\quad \begin{cases} (\vec{g}^{*}\vec{b}^{*} + r^{*}\vec{n})_2 + q(g^{*}\vec{b}^{*} + r^{*}\vec{n}) = \\ \quad = [(g^{**} - \alpha_2)\vec{b}^{*} (r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha)\vec{n}]_1 + \\ \quad + \bar{q}[(g^{**} - \alpha_2)\vec{b}^{*} + (r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha)\vec{n}], \\ [(g^{*} + \alpha_1)\vec{b}^{**} + (r^{*}\cos\alpha + \tau^{*}\sin\alpha)\vec{n}]_2 + \\ \quad q[(g^{*} + \alpha_1)\vec{b}^{**} + (r^{*}\cos\alpha + \tau^{*}\sin\alpha)\vec{n}] = \\ \quad = (g^{**}\vec{b}^{**} + r^{**}\vec{n})_1 + \bar{q}(g^{**}\vec{b}^{**} + r^{**}\vec{n}) \end{cases}$$

olur.

(49-6; 1) eşitliğini, (49-4) ve (49-5) den yararlanarak açar ve $\vec{b}^{*}, \vec{b}^{**}, \vec{n}$ birim vektörlerine göre sıralayarak yazarsak, görülürki $\vec{b}^{**}$ birim vektörünün katsayısı özdeş olarak sıfırdır. $\vec{b}^{*}$ ve $\vec{n}$ birim vektörlerinin sıfıra eşit kılınan katsayıları da, sırasiyle, aşağıki eşitlikleri verir:

$$(49\text{-}7)\quad \begin{cases} g_2^{*} - g_1^{**} + q g^{*} - \bar{q} g^{**} + \alpha_{21} + \bar{q}\alpha_2 \\ \qquad = \dfrac{r^{*} r^{**} - (r^{*}\cos\alpha + \tau^{*}\sin\alpha)^2}{\sin\alpha} \\ r_2^{*} + g^{*}(r^{**}\sin\alpha + \tau^{**}\cos\alpha) + q r^{*} = (g^{**} - \alpha_2) r^{*} \\ \qquad + (r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha)_1 + q(r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha) \end{cases}$$

(49-7; 1) in sağ yanı, (47-46) formülü nedeniyle, K Sin α ya eşit olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(49-8) $$K = \frac{g_2^* - g_1^{**} + q\,g^* - \bar{q}\,g^{**} + \alpha_{21} + \bar{q}\,\alpha_2}{\sin\alpha}\,;$$

$$(\alpha_{12} + q\,\alpha_1 = \alpha_{21} + \bar{q}\,\alpha_2)$$

dir.

(49-8) formülü, **en genel hâlde, GAUSS eğriliğinin invariyant biçimidir.**

Bu formül, şöyle de yazılabilir.

(49-9) $$K = \frac{(g^* + \alpha_1)_2 - (g^{**} - \alpha_2)_1 + q\,(g^* + \alpha_1) - \bar{q}\,(g^{**} - \alpha_2) - (\alpha_{12} + q\,\alpha_2)}{\sin\alpha}$$

Yüzeyin koordinat çizgileri bir TCHEBYCHEF şebekesi oluştururlarsa, (48-16) ve (48-17) bağıntıları dolayısiyle (49-9)

(49-10) $$K = -\frac{\alpha_{12}}{\sin\alpha}\,, \qquad (\alpha_{12} = \alpha_{21}).$$

verir.

(49-7; 2) ye gelince; o da kolaylıkla

$$r_2^* - r_1^{**}\cos\alpha = -(g^* + \alpha_1)(r^{**}\sin\alpha + \tau^{**}\cos\alpha) +$$

$$+ (g^{**} - \alpha_2)\,\tau^* - q\,r^* + \bar{q}\,(r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha) - r_1^{**}\sin\alpha$$

veya (48-15) ve (48-13) nedeniyle

(49-11) $$r_2^* - r_1^{**}\cos\alpha = -(g^* + \alpha_1)\,[(r^{**} - r^*)\sin\alpha + \tau^{**}\cos\alpha]$$

$$+ (g^{**} - \alpha_2)\,\tau^* + (\bar{q}\,\tau^* - r_1^{**})\sin\alpha$$

biçimine sokulabilir.

Aynı şekilde, (49-6; 2) de; $\vec{b}^*$, $\vec{b}^{**}$, $\vec{n}$ birim vektörlerine göre sıralandığında, bu kez $\vec{b}^*$ in katsayısı özdeş olarak sıfıra eşittir. $\vec{b}^{**}$ ın katsayısı ise, gene K yı verir. $\vec{n}$ nin katsayısının sıfıra eşit kılınmasiyle de, bâzı kolay hesaplardan sonra

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(49-12) $$r_1^{**} - r_2^{*} \operatorname{Cos}\alpha = -(g^{**} - \alpha_2)\,[(r^{**} - r^{*}) \operatorname{Sin}\alpha + \tau^{*} \operatorname{Cos}\alpha] + (g^{*} + \alpha_1)\,\tau^{**} - (q\,\tau^{**} - r_2^{*}) \operatorname{Sin}\alpha$$

bulunur.

(48-12) den yararlanıldığında, (49-11) ve (49-12) denklemleri, önce

$$r_2^{*} - r_1^{**} \operatorname{Cos}\alpha = -(g^{*} + \alpha_1)\,[(r^{**} - r^{*}) \operatorname{Sin}\alpha + (\tau^{**} + \tau^{*}) \operatorname{Cos}\alpha] + \tau_1^{**} \operatorname{Sin}\alpha + 2(g^{**} - \alpha_2)\,\tau^{*},$$

$$r_1^{**} - r_2^{*} \operatorname{Cos}\alpha = -(g^{**} - \alpha_2)\,[(r^{**} - r^{*}) \operatorname{Sin}\alpha + (\tau^{**} + \tau^{*}) \operatorname{Cos}\alpha] + \tau_2^{*} \operatorname{Sin}\alpha + 2(g^{*} + \alpha_2)\,\tau^{**}$$

biçiminde yazılabilir, buradan da kolaylıkla

(49-13)
$$\begin{cases} r_2^{*} = \dfrac{g^{*} + \alpha_1}{\operatorname{Sin}\alpha}\,[r^{*} - r^{**} - (\tau^{*} - \tau^{**}) \operatorname{Cotg}\alpha] + \dfrac{g^{**} - \alpha_2}{\operatorname{Sin}^2\alpha}\,(\tau^{*} - \tau^{**}) + \dfrac{\tau_2^{*} \operatorname{Cos}\alpha + \tau_1^{**}}{\operatorname{Sin}\alpha}, \\ r_1^{**} = \dfrac{g^{**} - \alpha_2}{\operatorname{Sin}\alpha}\,[r^{*} - r^{**} + (r^{*} - \tau^{**}) \operatorname{Cotg}\alpha] + \dfrac{g^{*} + \alpha_1}{\operatorname{Sin}^2\alpha}\,(\tau^{**} - \tau^{*}) + \dfrac{\tau_2^{*} + \tau_1^{**} \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} \end{cases}$$

eşitlikleri çıkar.

(49-13) formülleri, **en genel hâlde, MAINARDI-CODAZZI formüllerinin invariyant biçimleridir.**

Koordinat çizgilerinin yüzey üzerinde bir TCHEBYCHEF şebekesi oluşturmaları hâlinde,

(49-14)
$$\begin{cases} r_2^{*} \operatorname{Sin}\alpha = \tau_2^{*} \operatorname{Cos}\alpha + \tau_1^{**}, \\ r_1^{**} \operatorname{Sin}\alpha = \tau_2^{*} + \tau_1^{**} \operatorname{Cos}\alpha \end{cases}$$

dır ve bunun tersi de doğrudur, yâni aşağıdaki teorem kaydedilebilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 49-1.

Sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyi üzerinde, koordinat çizgilerinin bir TCHEBYCHEF şebekesi oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşul, MAINARDI-CODAZZI bağıntılarının (49-14) biçiminde olmalarıdır.

49-1. Özel haller

a) Koordinat çizgileri, yüzey üzerinde bir dik eğri şebekesi oluşturduklarında, özdeş olarak

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

dir ve (49-8), (49-13) formülleri

$$(49\text{-}15)\quad \begin{cases} K = g_1^* - g_1^{**} - (g^{*2} + g^{**2}), \quad (q = -g^*,\ \bar{g} = g^{**}) \\ r_2^* = (r^* - r^{**})\, g^* + 2\tau^* g^{**} + r_1^*, \\ r_1^{**} = (r^* - r^{**})\, g^{**} - 2\tau^* g^* + r_2^{**} \end{cases}$$

biçimlerinde yazılırlar.

b) Koordinat çizgileri, eğrilik çizgileriyle çakışırsa, yüzey üzerinde

$$g^* = g,\ g^{**} = \bar{g},\quad \tau^* = 0,\quad \tau^{**} = 0,\quad r^* = r,\quad r^{**} = \bar{r},$$

($r, \bar{r}$: asal eğrilikler)

olacağından, (49-15) formüllerinden sâdece son ikisi değişir:

$$(49\text{-}16)\qquad r_2^* = (r - \bar{r})\, g,\quad r_1^{**} = (r - \bar{r})\, \bar{g}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

50. Koordinat çizgilerinin teğetleri doğrultusundaki invariyant türevler cinsinden, herhangi bir doğrultuda, çeşitli mertebelerden invariyant türevler.

Sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin bir P düzgün noktasından geçen $v =$ sâbit, $u =$ sâbit koordinat çizgilerinin teğet birim vektörleri $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ ve bunlara teğet düzlem üzerinde dik birim vektörleri de $\vec{b}^*$, $\vec{b}^{**}$ idi. Bu son iki birim vektörü doğrultusundaki invariyant türevleri I, II indisleri ile gösterirsek

$$\vec{b}^* = \vec{x}_I, \quad \vec{b}^{**} = \vec{x}_{II} \tag{50-1}$$

olur.



Şekil 61

P düzgün noktasında kesişen koordinat çizgileri arasındaki açı α ise, en az 1-inci sınıftan skaler veya vektörel bir $f = f(u, v)$ nokta fonksiyonu için

$$f_2 = f_1 \operatorname{Cos}\alpha + f_2 \operatorname{Sin}\alpha, \quad f_1 = f_2 \operatorname{Cos}\alpha - f_{12} \operatorname{Sin}\alpha$$

olduğundan,

$$f_2 = \frac{f_2 - f_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}, \quad f_{12} = \frac{f_2 \operatorname{Cos}\alpha - f_1}{\operatorname{Sin}\alpha} \tag{50-2}$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu bakımdan, (50-1) yardımiyle, (48-9) da olduğu gibi

$$\vec{x}_1 = \vec{b}^* = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}, \quad \vec{x}_{11} = \vec{b}^{**} = \frac{\vec{x}_2 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{x}_1}{\operatorname{Sin}\alpha} \tag{50-3}$$

bulunur.

$\vec{x}_1$ doğrultusu ile bir φ açısı oluşturan bir Δ doğrultusundaki f_3 invariyant türevi için, (50-2; 1) dolayısiyle

$$f_3 = f_1 \operatorname{Cos}\varphi + f_2 \operatorname{Sin}\varphi = f_2 \operatorname{Cos}\varphi + \frac{f_2 - f_1 \operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} \operatorname{Sin}\varphi$$

veya

$$f_3 = \frac{f_1 \operatorname{Sin}(\alpha-\varphi) + f_2 \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\alpha} \tag{50-4}$$

elde edilir.

Uyarı 50-1.

Eğer $\alpha-\varphi$, φ, α açılarını

$$\alpha-\varphi = \overset{\frown}{3,\ 2}, \quad \varphi = \overset{\frown}{1,\ 3}, \quad \alpha = \overset{\frown}{1,\ 2}$$

sembolleri ile gösterirsek, (50-4) formülü, daha simetrik bir biçimde şöyle yazılır:

$$(\operatorname{Sin}\overset{\frown}{3,\ 2})\ f_1 + (\operatorname{Sin}\overset{\frown}{1,\ 3})\ f_2 + \operatorname{Sin}(\overset{\frown}{2,\ 1})\ f_3 = 0 \tag{50-5}$$

Yukarıda söylediklerimize göre, Δ doğrultusunu veren $\vec{x}_3$ birim vektörü, yani $\vec{x}$ yer vektörünün Δ doğrultusundaki $\vec{x}_3$ invariyant türevi, (50-4) dolayısiyle

$$\vec{x}_3 = \frac{\vec{x}_1 \operatorname{Sin}(\alpha-\varphi) + \vec{x}_2 \operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\alpha} \tag{50-6}$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(50-7) $$(\mathrm{Sin}\,\widehat{3,2})\,\vec{x}_1 + (\mathrm{Sin}\,\widehat{1,2})\,\vec{x}_2 + (\mathrm{Sin}\,\widehat{2,1})\,\vec{x}_3 = \vec{0}$$

dır.

50-1. En genel hâlde, herhangi bir doğrultudaki normal eğrilikle, geodezik eğriliğin invariyant biçimleri

Hem S yüzeyinin, hem de bunun bir P düzgün noktasından geçen ve Δ ya teğet olan bir C eğrisinin en az 2-nci sınıftan olduklarını varsayalım. C nin P deki $\vec{x}_3$ teğet birim vektörünün Δ doğrultusundaki invariyant türevi, C nin s_3 yayına göre $\vec{x}_3$ birim vektörünün türevidir. Öyleyse, C nin P deki: normal eğrilik, geodezik eğrilik ve geodezik burulması, sırasiyle, (ρ_n, ρ_g, τ_g) ve DARBOUX-RIBEAUCOUR diküçyüzlüsü de $\vec{x}_3$, $\vec{b}^*$, $\vec{n}$ birim vektörlerinin tanımladığı diküçyüzlü ise, (47-5) ve (50-6) formüllerine göre

$$\vec{x}_3^* = \rho_g\,\vec{b}^* + \rho_n\,\vec{n} = \frac{\vec{x}_{31}\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + \vec{x}_{32}\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

veya

$$= \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\left[\left(\frac{\vec{x}_1\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + \vec{x}_2\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_1 \mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + \left(\frac{\vec{x}_1\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + \vec{x}_2\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_2 \mathrm{Sin}\,\varphi\right]$$

dir.

(49-2) formüllerini kullandığımızda,

(50-8) $$\vec{x}_1\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + \vec{x}_2\,\mathrm{Sin}\,\varphi = \vec{b}^*\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \vec{b}^{**}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$

olacağından,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(50-9) $$\vec{x}_3^{\,*}\,\mathrm{Sin}\,\alpha = \left(\frac{\vec{b}^{\,*}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \vec{b}^{\,**}\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_1 \mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) +$$

$$+ \left(\frac{\vec{b}^{\,*}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \vec{b}^{\,**}\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_2 \mathrm{Sin}\,\varphi$$

bulunur.

Öte yandan,

$$\overset{\frown}{\vec{b}^{\,*},\ \vec{b}^{\,**}} = \alpha\,,\quad \overset{\frown}{\vec{x}_1,\ \vec{x}_3} = \overset{\frown}{\vec{b}^{\,*},\ \vec{b}^{\,*}} = \varphi\,,\quad \overset{\frown}{\vec{x}_3,\ \vec{b}^{\,*}} = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan, tıpkı $\vec{x}_3$ gibi

(50-10) $$\vec{\bar{b}}^{\,*} = \frac{\vec{b}^{\,*}\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + \vec{b}^{\,**}\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

dır.

(49-4) formüllerini kullanarak (50-9) açıldığında, (50-10) nedeniyle

$$\left(\frac{\vec{b}^{\,*}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \vec{b}^{\,**}\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_1 = (g^* + \varphi_1)\,\vec{\bar{b}}^{\,*} + (\tau^*\,\mathrm{Sin}\,\varphi + r^*\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,\vec{n}\,,$$

$$\left(\frac{\vec{b}^{\,*}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \vec{b}^{\,**}\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\right)_2 = (g^{**} + \varphi_2 - \alpha_2)\,\vec{\bar{b}}^{\,*}$$

$$+ [r^{**}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \tau^{**}\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)]\,\vec{n}$$

bulunacağından, (50-9) eşitliği

$$\vec{x}_3^{\,*}\,\mathrm{Sin}\,\alpha = [(g^* + \varphi_1)\,\vec{\bar{b}}^{\,*} + (r^*\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tau^*\,\mathrm{Sin}\,\varphi)\,\vec{n}]\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) +$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$+ [(g^{*\circ} + \varphi_2 - \alpha_2)\,\vec{b}^{\,*} + (r^{\circ *}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \tau^{\circ *}\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi))\,\vec{n}]\,\mathrm{Sin}\,\varphi$$

verir ve dolayısiyle

$$(50\text{-}11)\qquad \rho_g = \frac{(g^* + \varphi_1)\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + (g^{**} + \varphi_2 - \alpha_2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

veya (50-4) nedeniyle

$$(50\text{-}12)\qquad \rho_g = \varphi_3 + \frac{g^*\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + (g^{**} - \alpha_2)\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

ve

$$(50\text{-}13)\qquad \rho_n = \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\{(r^*\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \tau^*\,\mathrm{Sin}\,\varphi)\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + [r^{**}\,\mathrm{Cos}\,(\alpha-\varphi) - \tau^{**}\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)]\,\mathrm{Sin}\,\varphi\}$$

olur.

Sonuncusu

$$(50\text{-}14)\qquad \rho_n = \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\{(r^*\,\mathrm{Cos}^2\varphi + r^{**}\,\mathrm{Sin}^2\alpha)\,\mathrm{Sin}\,\alpha + \frac{r^{**} - r^*}{2}\,\mathrm{Sin}^2\varphi\,\mathrm{Cos}\,\alpha + (r^* - r^{**})\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)\}$$

biçimine de sokulabilir.

50-2. Geodezik burulmanın invariyant biçimi

(47-5; 3) ve (50-6) formüllerinden

$$(50\text{-}15)\qquad \vec{n}_3 = -\rho_n\,\vec{x}_3 - \tau_g\,\vec{b}^{\,*} = \frac{\vec{n}_1\,\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi) + \vec{n}_2\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

çıkar ve (49-5) dolayısiyle de

$$(50\text{-}16)\qquad -\rho_n\,\vec{x}_3 - \tau_g\,\vec{b}^{\,*} = \frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha-\varphi)}{\mathrm{Sin}\,\alpha}\,\frac{r^*\,\vec{b}^{\,**} - (r^*\,\mathrm{Cos}\,\alpha + \tau^*\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,\vec{b}^{\,*}}{\mathrm{Sin}\,\alpha}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$+\frac{\operatorname{Sin}\varphi}{\operatorname{Sin}\alpha}\,\frac{(r^{**}\operatorname{Cos}\alpha - r^{**}\operatorname{Sin}\alpha)\vec{b}^{**} - r^{**}\vec{b}^{*}}{\operatorname{Sin}\alpha}$$

olur.

Öte yandan, şekil gösterir ki

$$\vec{b}^{*}\cdot\vec{b}^{x} = \operatorname{Cos}\varphi, \qquad \vec{b}^{*}\cdot\vec{b}^{**} = \operatorname{Cos}(\alpha-\varphi) \tag{50-17}$$

dir. Dolayısiyle, (50-16) nın her iki yanını skaler olarak $\vec{b}^{*}$ ile çarptığımız da, (50-17) bağıntıları nedeniyle

$$\tau_g = -\vec{b}^{*}\cdot\vec{n}_3 = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}\{\tau^{**}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}(\alpha-\varphi) + r^{*}\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi) + (r^{**}-r^{*})\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi)\} \tag{50-18}$$

bulunur.

τ_g, şu biçime de sokulabilir:

$$\tau_g = \frac{1}{\operatorname{Sin}\alpha}\{(\tau^{*}\operatorname{Cos}^2\varphi + r^{**}\operatorname{Sin}^2\varphi)\operatorname{Sin}\alpha + (r^{**}-r^{*})\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\alpha + (r^{**}-r^{*})\operatorname{Sin}(\alpha-\varphi)\operatorname{Sin}\varphi\} \tag{50-18}$$

Uyarı 50-2.

$$\rho_n = -\vec{x}_3\cdot\vec{n}_3$$

tür ve gene (50-13) bulunur.

(50-12), (50-13) ve (50-18) formülleri, **en genel halde**, sırasiyle, **geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulmanın invariyant biçimleridir.**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

50-3. Özel haller

a) Koordinat çizgileri yüzey üzerinde bir dik eğri şebekesi oluşturduklarında, yüzey üzerinde

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

dir ve (50-12), (50-14), (50-18) formülleri sırasiyle

$$(50\text{-}19)\quad \begin{cases} \rho_u = \varphi_2 + g^* \operatorname{Cos}\varphi + g^{**} \operatorname{Sin}\varphi\,, \\ \rho_v = r^* \operatorname{Cos}^2\varphi + r^{**} \operatorname{Sin}^2\varphi + \tau^* \operatorname{Sin}^2\varphi\,, \quad (\tau^* + \tau^{**} = 0) \\ \tau_g = \dfrac{r^{**} - r^*}{2} \operatorname{Sin}^2\varphi + \tau^* \operatorname{Cos}^2\varphi \end{cases}$$

biçimlerinde yazılırlar.

Bunlardan ilki **LIOUVILLE formülü adını alır.** Öteki ikisini, daha önce (47-44) ve (47-15) formülleri olarak bulmuştuk.

b) Koordinat çizgilerini meydana getiren eğriler, eğrilik çizgileri ise, yüzey üzerinde

$$\tau^* = 0, \quad r^* = r, \quad r^{**} = \bar{r}\,, \quad (r, \bar{r}\,:\ \text{asal eğrilikler})$$

dir ve (50-19) formüllerinden sâdece son ikisi değişir:

$$\rho_v = r \operatorname{Cos}^2\varphi + \bar{r} \operatorname{Sin}^2\varphi$$

$$\tau_g = \frac{\bar{r} - r}{2} \operatorname{Sin}^2\varphi$$

Bundan önce de gördüğümüz gibi, bu son ikisinden birincisi EULER, sonuncusu da OSSIAN BONNET formülüdür.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

50-4. Uygulama

Verilen bir doğrultunun normal eğriliği ve geodezik burulması cinsinden, başka bir doğrultunun aynı isimli elemanlarının bulunması.

Verilen bir Δ_0 doğrultusu ile belirli olan normal eğrilik ve geodezik burulma, sırasıyle, r^* ve τ^* olsun. Δ_0'ı P düzgün noktasında α açısı altında kesen Δ_α doğrultusunun belirlediği r^{**} normal eğriliği ile, τ^{**} geodezik burulmasını arıyalım.

(47-47) ve (47-48) formüllerine göre

$$r^* \operatorname{Cos}\alpha + \tau^* \operatorname{Sin}\alpha = r^{**} \operatorname{Cos}\alpha - \tau^{**} \operatorname{Sin}\alpha$$

$$2W = r^{**} + r^* + (\tau^{**} - \tau^*) \operatorname{cotg}\alpha$$

dır. Buradan

(50-20)
$$\begin{cases} r^{**} = r^* \operatorname{Cos} 2\alpha + \tau^* \operatorname{Sin} 2\alpha + 2W \operatorname{Sin}^2 \alpha \\ \tau^{**} = -r^* \operatorname{Cos} 2\alpha - r^* \operatorname{Sin} 2\alpha + W \operatorname{Sin} 2\alpha \end{cases}$$

elde edilir. $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ için

(50-21)
$$r^{**} - \tau^* = \tau^{**} + r^* = W$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM X

DOĞRUSAL GEOMETRİ

Konu ve tanımlar. Üç boyutlu Oklid uzayında, temel eleman olarak, **nokta** yerine **doğru** alındığında, bununla geliştirilecek her türlü **geometri**'ye **doğrusal** denilir. Doğrulardan oluşan uzay da **doğrusal uzaydır**.

Bir doğrusal uzaydaki doğruların çeşitli biçimlerde birleştirilmelerinden meydana gelen geometrik varlıkların incelenmesi, doğrusal geometrinin temel konusudur. Bu incelemede, değişik yöntemler kullanılır. Örneğin: **dış diferansiyeller, düal vektörler,** PLÜCKER **vektörleri, vektörel analiz,...** gibi. Biz şimdilik, kullanageldiğimiz **vektörel hesap** yöntemiyle yetineceğiz. Bununla beraber, fırsat düştükçe, **salt geometrik düşüncelere** de yer vereceğiz.

Analitik geometride, bir doğrunun uzaydaki konumu, dört bağımsız parametrenin, başka deyişle, dört bağımsız cebirsel sayının verilmesi ile saptanır. Örneğin: koordinat düzlemlerinden herhangi ikisini, doğrunun deldiği noktaların, ikişerden dört koordinatının verilmesi gibi. Bu bakımdan, şu tanımlar söz konusudur:

Sırasıyle **üç, iki, bir bağımsız** ve **değişken parametreye bağlı doğru ailelerine: doğru kompleksleri, doğru kongrüansları, doğru simpleksleri** denilir. Sonuncular, genellikle **doğrusal yüzeyler** adını alırlar.

I. DOĞRUSAL YÜZEYLER

A. AÇILAMAYAN DOĞRUSAL YÜZEYLER

1. Örnekler ve geometrik inceleme

Biraz önce, bir doğrusal yüzeyi, bir tek değişken parametreye bağlı doğruların oluşturdukları bir yüzey olarak tanımlamıştık. Bu tanıma göre,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

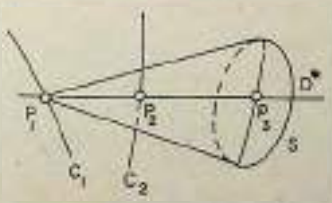
en göze çarpan örnekler: çok bilinen koni ve silindir yüzeyleridir. Daha karışıkcaları, şöyle sıralanabilir:

1. Üç ayrı yüzeyin teğetleriyle tanımlanan doğrusal yüzeyler.
2. İki ayrı yüzeye teğet kalan ve bir eğriye dayanan doğruların oluşturdukları doğrusal yüzeyler.
3. İki ayrı eğriyi kesen ve bir yüzeye teğet kalan doğrularla meydana gelen doğrusal yüzeyler
4. Üç ayrı eğriye dayanan doğruların doğurduğu doğrusal yüzeyler.
5. İki ayrı eğri ve bir doğruya dayanan doğrularla elde edilen doğrusal yüzeyler.
6. Bir eğri ve iki aykırı doğruya dayanan doğruların verdiği doğrusal yüzeyler.
7. İkişer ikişer aykırı üç doğruyu kesen doğruların tanımladıkları doğrusal yüzeyler.

Bu örneklerde, doğrusal yüzeyi oluşturan doğruların dayandıkları **eğriler**, yüzeyin **doğrultmanları**, teğet kaldıkları **yüzeyler** de, doğrusal yüzeyin **çekirdekleri**dir. Doğrusal yüzeyi meydana getiren doğrular da, **anadoğru** adını taşırlar.

Verilen örneklerden birini alalım ve yüzeyi tanımlayan doğrultmanı ya da çekirdeklerden biri üzerinde seçilen bir noktadan geçen anadoğru veya anadoğruların nasıl bulunacaklarını görelim.

İki doğrultmanlı, bir çekirdekli doğrusal yüzey



Şekil 62

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C_1, C_2 doğrultmanları ile S çekirdeği verildiğinde; örneğin C_1 in bir P_1 noktasından geçen ve doğrusal yüzeye ait olan D anadoğrusunu arıyalım. Bunun için, P_1 den geçen ve S ye teğet olan doğrularla tanımlanan konisi, C_2 nin deldiği P_2 noktalarını P_1 e birleştirmek yeterlidir.

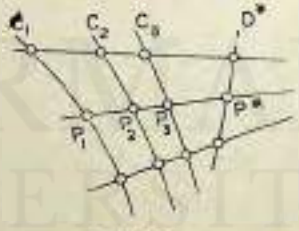
Şurasını da kaydedelim ki, yedinci örnek, bir yaygılı hiperboloiddir. Eğer bu örnekteki üç doğru, aynı bir düzleme paralelse, bir hiperbolik paraboloid söz konusudur.

1-1. SALMON formülü

İngiliz Matematikcilerinden —daha doğrusu İrlandalı— (1819-1904) GEORGE SALMON'un, 4-üncü örnek üzerine, ilginç bir formülü vardır. Bilinmesinde yarar gördüğümüz bu formül şöyledir:

Bu örnekteki C_1, C_2, C_3 doğrultmanları sıra ile d_1, d_2 ve d_3 üncü dereceden cebirsel eğriler olsun. Buna göre, bu doğrultmanlara dayanan doğruların oluşturdukları cebirsel yüzeyin, $\Delta_{d_1 d_2 d_3}$ sembolü ile gösterilen derecesini arıyalım.

a. C_p, (p=1, 2, 3) **cebirsel doğrultmanlarının ortak noktaları yoktur.**



Şekil 63

Aranılan derece, herhangi bir D* doğrusunun, söz konusu doğrusal yüzeyi deldiği noktaların sayısına, veya C_1, C_2, C_3 doğrultmanları ile D*, aynı zamanda kesen anadoğruların sayısına eşittir. Bunu bulmak için de; C_1, C_2 ve D* ı kesen doğrularla elde edilen doğrusal yüzeyi, C_3 ün deldiği noktaların sayısı aranabilir. Son doğrusal yüzeyin derecesi $\Delta_{d_1 d_2 1}$ ile gösterilirse, C_3 ün bunu deldiği noktaların sayısı: $d_3 \cdot \Delta_{d_1 d_2 1}$ olacağından,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\Delta_{d_1 d_2 d_3} = d_3 \cdot \Delta\, d_1 d_2 1$$

dir.

Aynı düşüncenin iki kez daha uygulanması ile

$$\Delta_{d_1 d_2 1} = d_2 \cdot \Delta_{d_1 11}\,, \quad \Delta_{d_1 11} = d_1 \cdot \Delta_{111}$$

bulunur.

Δ_{111} ikinci dereceden bir yüzeyin derecesini gösterdiğinden, $\Delta_{111} = 2$ dir ve

(1-1) $$\Delta_{d_1 d_2 d_3} = 2\, d_1 d_2 d_3$$

olur.

I. SALMON teoremi 1-1

Ortak noktaları bulunmayan ve dereceleri d_1, d_2, d_3 olan üç cebirsel doğrultmanla tanımlanan bir doğrusal yüzeyin derecesi $2d_1 d_2 d_3$ tür.

Uyarı 1-1.

C_1 doğrultmanının her P_1 noktasından; ortak tepeleri P_1 ve doğrultmanları C_2, C_3 olan konilerin, $d_2 \cdot d_3$ sayısı kadar ortak anadoğrusu geçeceğinden, C_1 **eğrisi, elde edilen doğrusal yüzeyin, δ_1 mertebesi**

(1-2) $$\delta_1 = d_2 d_3$$

olan bir çokkatlı eğridir.

Bunun gibi, C_2 ve C_3 **eğrilerinin de, doğrusal yüzey için çokkatlılık mertebeleri,** sırasiyle

(1-3) $$\delta_2 = d_3 d_1\,, \quad \delta_3 = d_1 d_2$$

dir.

b. C_p, $(p = 1, 2, 3)$ cebirsel doğrultmanlarının, gerçel veya sanal ortak noktaları vardır.

C_2, C_3 cebirsel doğrultmanlarının, P_{23} ile gösterilen ortak bir noktaları varsa, tepesi P_{23} ve doğrultmanı C_1 olan koni de, doğrusal yüzeyin bir

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

parçasıdır. Buna göre, bu koni bir yana bırakıldığında, doğrusal yüzeyin derecesi

$$2\,d_1\,d_2\,d_3 - d_i$$

olur ve C_i in, doğrusal yüzey için çokkatlılık mertebesi

$$\delta_i = d_2\,d_3 - 1$$

e düşer, çünkü C_i in her P_i noktasından geçen ve doğrusal yüzey üzerinde bulunan doğrulardan biri, tepesi P_{23} olan demînki koninin de üzerindedir.

Bu düşüncenin yinelenmesi, şu sonuca vardırır: C_1, C_2 cebirsel doğrultmanlarının ortak noktalarının sayısı n_{12}, aynı biçimde C_2 ve C_3 ün ortak noktalarının sayısı n_{23}, nihayet C_3 ve C_1 in ortak noktalarının sayısı da n_{31} ise, **doğrusal yüzeyin derecesi**

$$\Delta_{d_1 d_2 d_3} = 2\,d_1\,d_2\,d_3 - (n_{12}\,d_3 + n_{23}\,d_1 + n_{31}\,d_2) \tag{1-4}$$

dir.

C_1, C_2, C_3 **cebirsel doğrultmanlarının, doğrusal yüzey için, çokkatlılık mertebeleri de,** sırasiyle

$$\delta_1 = d_2\,d_3 - n_{23}, \quad \delta_2 = d_3\,d_1 - n_{31}, \quad \delta_3 = d_1\,d_2 - n_{12} \tag{1-5}$$

dir.

II. SALMON teoremi 1-2.

İkişer ikişer n_{23}, n_{31}, n_{12} ortak noktaları bulunan ve dereceleri d_1, d_2, d_3 olan üç cebirsel doğrultmanın tanımladığı doğrusal yüzeyin $\Delta_{d_1 d_2 d_3}$ derecesi

$$\Delta_{d_1 d_2 d_3} = 2\,d_1\,d_2\,d_3 - (n_{12}\,d_3 + n_{23}\,d_1 + n_{31}\,d_2),$$

ve üç doğrultmanın doğrusal yüzey için mertebeleri de

$$\delta_1 = d_2\,d_3 - n_{23}, \quad \delta_2 = d_3\,d_1 - n_{31}, \quad \delta_3 = d_1\,d_2 - n_{12}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

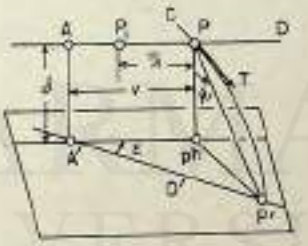
1-2. Doğrusal yüzeyin doğrultman konisi

Uzayın herhangi bir O sâbit noktasından, doğrusal yüzeyin anadoğrularına çizilen paralellerin oluşturdukları koniye, **doğrusal yüzeyin doğrultman konisi** denilir.

Doğrusal yüzeyin anadoğruları aynı bir düzleme paralel kalıyorlarsa, doğrultman koni, bir düzleme dönüşür. Böyle bir doğrusal yüzeye **doğrultman düzlemi** adı verilir.

1-3. Doğrusal yüzeyde, teğet düzlemin bir anadoğru boyunca değişme biçimi. CHASLES parametresi ve formülü. Boğaz (veya merkez) noktası, düzlemi ve eğrisi

Sınıfı ≥ 1 olan bir doğrusal yüzeyin birbirine yakın iki anadoğrusu D ve D', bunların ortak dikmesi AA', ortak dikme uzunluğu $\overline{AA'} = \delta$, D ve D' arasındaki açı, radyan cinsinden: $\widehat{D, D'} = \varepsilon$ olsun. Yüzeyin incelenen bölgesindeki tüm noktalarını düzgün varsayıyoruz.



Şekil 64

D' anadoğrusu D ye yaklaştığı zaman, hem A noktasının hem de (D, A') düzleminin birer limit durumu varsa ve

$$\lim_{D' \to D} A = P_1 \,, \quad \lim_{D' \to D} (D, A') = (\text{D den geçen}) \ \Delta \text{ düzlemi}$$

dersek; tanım gereğince: P_1, D **nin boğaz veya merkez noktası,** Δ **düzlemi** de, D den geçen boğaz düzlemi veya merkez düzlemdir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

D anadoğrusu ile birlikte değişen P_1 boğaz noktasının C_1 geometrik yerine de **boğaz** ya da **striksiyon çizgisi** denilir.

D anadoğrusu üzerinde, A noktasına, v uzaklığında bulunan nokta, P olsun. D üzerinde bir pozitif yön seçildiğinde, v apsisi artı ya da eksi işaretli olabilir. Doğrusal yüzeyin P deki teğet düzlemi, D den ve D yi P de dik kesen C kesitinin PT teğetinden geçer. Bu kesit düzleminin D' yü kestiği nokta P' ve D nin A' den geçen paralelini kestiği nokta da P'' olsun. PP''P' dik üçgeninde

$$\widehat{P'' P P'} = \varphi', \quad \overline{P'' P'} = v \operatorname{tg} \varepsilon = \delta \operatorname{tg} \varphi'$$

olduğundan,

$$\operatorname{tg} \varphi' = v \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\delta} = v \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\frac{\delta}{\varepsilon}} \tag{1-6}$$

bulunur. Öte yandan

$$\lim_{D' \to D} A = P_1, \quad \lim_{D' \to D} \varphi' = \varphi, \quad \lim_{D' \to D} v = \bar{\lambda}, \quad \lim_{D' \to D} \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\varepsilon} = 1$$

dir.

Eğer varsa,

$$\lim_{D' \to D} \frac{\delta}{2} = p \tag{1-7}$$

dersek, (1-6) bağıntısı

$$p \operatorname{tg} \varphi = \bar{\lambda} \tag{1-8}$$

verir.

Bu bağıntıya **CHASLES formülü**, p ye de **CHASLES** ya da **dağılma parametresi** denilir. p parametresi sıfırdan büyük, sıfırdan küçük, veya sıfıra eşit olabilir.

(1-7) tanımı nedeniyle, p dağılma parametresi bir **uzunluk** ölçer. Buna göre, D üzerinde P_1 boğaz noktasını başlangıç noktası olarak alalım ve ge-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ikişi güzel bir yön de pozitif yön olsun. Böylece elde edilen D ekseni etrafındaki sağdan sola dönme yönünü de, açıların hesabında pozitif dönme yönü olarak alalım.

a. $P > 0$, P noktası, D ekseni üzerinde, P_1 boğaz noktasından itibaren pozitif yönde hareket ettiğinde, hem P hem de $\bar{\lambda}$ pozitif olacaklarından, (1-8) formülüne göre $\varphi > 0$ dir, yani teğet düzlem P ile birlikte değişir ve D ekseni etrafında pozitif yönde döner.

$\bar{\lambda}$ apsisi, $-\infty$ dan $+\infty$ a değiştiğinde, teğet düzlem de D etrafında $-\frac{\pi}{2}$ den $+\frac{\pi}{2}$ ye π açısı kadar döner. Böylece görülüyor ki: **D anadoğrusundan geçen her düzlem, doğrusal yüzeyin bir teğet düzlemidir.**

b. $p < 0$, P noktası, D ekseni üzerinde, P_1 boğaz noktasından itibaren, pozitif yönde hareket ettiğinde, $p < 0$ ve $\bar{\lambda} > 0$ olduğundan (1-8) formülüne göre, $\varphi < 0$ dır, dolayısiyle teğet düzlem, D ekseni etrafında negatif yönde döner. $\bar{\lambda}$ apsisi $-\infty$ dan $+\infty$ a değiştiğinde, teğet düzlem de D ekseni etrafında, $+\frac{\pi}{2}$ den $-\frac{\pi}{2}$ ye $-\pi$ açısı kadar döner. Gene: **D anadoğrusundan geçen her düzlem, doğrusal yüzeyin bir teğet düzlemidir.**

Görülüyor ki P **nin işareti, teğet düzlemlerin D ekseni etrafındaki dönme yönünü belirlemektedir.** Ayrıca: **bu işaret, D anadoğrusu üzerinde seçilen pozitif yöne de bağlı değildir.** Yâni, D nin pozitif yönü değiştirilse bile, açıların hesabı için sağda sola dönme yönünü gene pozitif sayma koşulu ile, p nin işareti aynı kalır.

Bu söylediklerimize göre: D anadoğrusu, P_1 boğaz noktası, boğaz düzlemi, $\bar{\lambda}$ ve p nin verilmeleri ile, P noktasındaki teğet düzlem belirlenmiş olur.

Boğaz düzlemine dik olan ve **değme noktası sonsuzda bulunan teğet düzlem**, D den geçen **asimptot düzlemdir.** Öte yandan, bundan önce gördük ki boğaz düzlemi, birbirine yakın D, D' anadoğrularına paralel bir düzlemin limit durumuna diktir. Buna göre: **bu limit durum, asimptot düzleme paraleldir.**

Doğrultman koninin yakın iki anadoğrusundan geçen düzlemin limit durumu da, hem doğrultman koniye teğet hem de asimptot düzleme para-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

lel olacağından: **Doğrusal yüzeyin bir D anadoğrusundan geçen asimptot düzlem, doğrultman koninin D ye paralel anadoğrusu ile tanımlanan teğet düzleme paraleldir.**

(1-7) formülü ile tanımlanan p, biraz önce dediğimiz gibi, D üzerinde seçilen pozitif yöne bağlı olmadıktan başka, C nin seçimi ile de ilişkil değildir.

c. $p=0$. D anadoğrusu için $p = 0$ ise, (1-8) formülüne göre, $\bar{\lambda} = 0$ dan başka, $\bar{\lambda}$ nin her değeri için, $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ dir. Buna göre: **D için P = 0 ise, D nin boğaz noktasından farklı her noktasında teğet düzlem aynıdır ve asimptot düzlemle çakışır. Boğaz noktasındaki teğet düzlem belirsizdir.**

Bu durum, doğrusal yüzeyin bâzı anadoğruları için gerçekleşiyorsa, bu tür ana doğrulara **durgun** diyeceğiz. Eğer doğrusal yüzeyin tüm anadoğruları için $p = 0$ ise, böyle bir doğrusal yüzeye **açılabilen doğrusal yüzey** veya kısaca **açılabilen** diyeceğiz. Böyle olmayanlara da **açılamayan doğrusal yüzeyler** veya kısaca **doğrusal yüzeyler** denilir. Açılabilenlerin özel bir örneği **konilerdir**. Gerçekten, bir konide tüm anadoğrular kesiştiğinden, yakın iki anadoğrunun ortak dikme uzunluğu sıfırdır, dolayısiyle, (1-7) formülündeki $\frac{\delta}{\varepsilon}$ oranı, limite geçmeden sıfırdır, bu nedenle P de öyledir. Bu nedenle, bir koninin bir anadoğrusu boyunca aynı olan teğet düzlemi, söz konusu anadoğrunun asimptot düzlemidir. Boğaz noktası olan tepede, teğet düzlem belirsizdir.

d. $p = \infty$. Doğrusal yüzeyin bir D anadoğrusu için p sonsuzsa, $\bar{\lambda}$ nin ∞ değeri bir yana, (1-8) formülüne göre, her $\bar{\lambda}$ değeri için $\varphi = 0$ dır. **Bir doğrusal yüzeyin bir D anadoğrusunun sonlu uzaklıktaki her noktasında teğet düzlem boğaz düzlemiyle çakışır. Sonsuzdaki asimptot düzlem belirsizdir.**

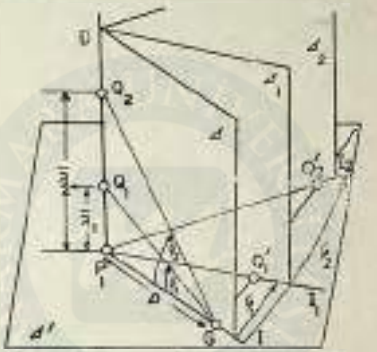
p nin ∞ oluşu, doğrusal yüzeyin bâzı anadoğruları için gerçekleşiyorsa, bu tür anadoğrulara gene **durgun** diyeceğiz. Eğer yüzeyin bütün anadoğruları için bu böyle ise, yüzeyde bir silindirdir. Gerçekten, bir doğrusal yüzeyin herhangi bir D anadoğrusunun, sonsuzdaki noktası dışında, her noktası boğaz noktası ise, yakın iki anadoğrunun sonsuz ortak dikmesi var demektir. Dolayısiyle, tüm anadoğrular birbirine paraleldir.

Aynı sonuca, p nin (1-7) tanımından da varılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu bölümü bitirmeden sırası üzerinde durmanın yararı vardır: **Bir doğrusal yüzeyin D anadoğruları, genellikle, P_1 boğaz noktasının geometrik yeri olan C_1 boğaz çizgisine teğet kalmazlar.**

1-4. AMÉDÉE MANNHEIM (1831-1906) (veya görüş) noktası



Şekil 65

Doğrusal yüzeyin bir D anadoğrusunu; P_1 boğaz noktası başlangıç olan bir eksen gibi alalım ve gelişigüzel yönlendirilen bu eksen üzerinde, apsisleri sırasiyle 0, λ_1, λ_2 olan, P_1, Q_1, Q_2 noktalarındaki teğet düzlemlere Δ_1, Δ_2, Δ_3 diyelim. Bunlardan birincisi, P_1 noktasındaki boğaz düzlemidir. Bu üç teğet düzlemin oluşturduğu şekli, P_1 boğaz noktasından geçen ve D anadoğrusuna dik olan Δ' düzlemi ile kesellim.

Elde edilen arakesitler P_1 I, P_1 I_1, P_1 I_2 olsun. Bunlardan birincisini başlangıcı P_1 olan bir eksen gibi düşünelim ve pozitif yön de gelişigüzel, örneğin P_1 den I ye doğru olsun. Bu eksen üzerinde

$$\overline{P_1 G} = p$$

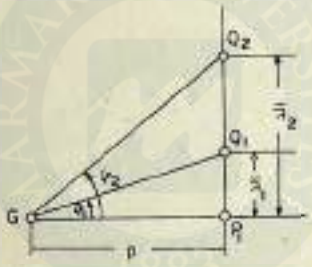
bağıntısını sağlayan G noktasını Q_1 ve Q_2 noktalarına birleştirelim. G den, Δ' düzlemi üzerinde olmak üzere, P_1 I eksenine çıkılan dikmenin P_1 I_1, P_1 I_2 doğrularını kestiği noktalara Q_1', Q_2' diyelim. (1-8) CHASLES formülü nedeniyle,

$$\widehat{G P_1 Q_1'} = \widehat{P_2 G Q_1} = \varphi_1, \quad \widehat{G P_1 Q_2'} = \widehat{P_1 G Q_2} = \varphi_2$$

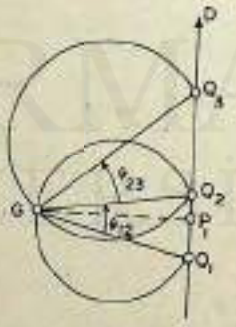
dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Görülüyor ki: G noktası, D anadoğrusunun P_1 boğaz noktası ile herhangi bir Q_1 noktası arasındaki $\overline{P_1 Q_1}$ doğru parçasını, boğaz noktasındaki teğet düzlemle, Q_1 noktasındaki teğet düzlemin oluşturdukları φ_1 açısı altında gören bir noktadır. Buna göre, **D anadoğrusunun herhangi bir $\overline{Q_1 Q_2}$ doğru parçası, G noktasından, bu iki noktanın teğet düzlemleri arasındaki açı altında görülür.** Bu özelliği nedeniyle, G noktasına: **Görüş** veya **MANNHEIM noktası** denilir.



Şekil 66



Şekil 67

MANNHEIM noktası yardımiyle gösterilebilir ki, D anadoğrusunun Q_1, Q_2, Q_3 değme noktaları ile bu noktalardaki teğet düzlemler verildiğinde, D nin herhangi bir noktasındaki teğet düzlemler arasındaki açı φ_{13}, değme noktaları Q_2, Q_3 olan teğet düzlemler arasındaki açı da φ_{23} ise, G görüş noktası, $Q_1 Q_2$ doğru parçasını φ_{12} ve $Q_2 Q_3$ doğru parçasını da φ_{23} açısı al-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

tında gören çember yaylarının ortak noktasıdır. G noktasından D ye indirilen dikmenin ayağı P_3 boğaz noktası, bunun G den uzaklığı da p dir.

Teğet düzlemlerin D üzerindeki P_3, Q_1, Q_2, ... değme noktalarından oluşan nokta dizisi ile, G görüş noktasından boğaz düzlemine çıkılan dikmenin D den geçen ve biraz önce ele alınan noktalardaki teğet düzlemlerin oluşturdukları düzlem demetinin elemanlarını deldiği G_3, Q_1', Q_2',... nokta dizisi birbirine eşittir. Buna göre şu teorem söz konusudur:

Teorem 1-4.1.

Sınıfı $\geqslant 1$ olan bir doğrusal yüzeyin durgun olmayan herhangi bir D anadoğrusundan geçen teğet düzlemlerle bunların D üzerindeki değme noktaları arasındaki geometrik ilişki bir korelasyondur. Bu korelasyonun üç homolog çifti verildiğinde, korelasyon da tamamiyle belirli olur.

Bu bakımdan:

Bir anadoğruları ortak olan iki doğrusal yüzey, bu anadoğru boyunca birbirlerine teğet değilse, anadoğrunun —gerçel, sanal, çakışık olabilen— sadece iki noktasında birbirlerine teğettirler.

İki doğrusal yüzeyin bir anadoğruları ve bu anadoğrunun üç ayrı noktasındaki teğet düzlemleri ortaksa, her iki doğrusal yüzey bu anadoğru boyunca birbirine teğettir.

1-5. Birbirlerine dik teğet düzlemler arasındaki envolüsyon

Bir eksen gibi ele alınan D anadoğrusu üzerinde, teğet düzlemleri birbirine dik değme nokta çifti Q_1, Q_2 ve bu noktaların apsisleri de $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$; bu teğet düzlemlerin boğaz düzlemiyle oluşturdukları açılar da φ_1, φ_2 olsun.

Q_1 G Q_2 dik üçgenin de

$$\overline{P_3Q_1} \cdot \overline{P_3Q_2} = -\overline{P_3G}^2$$

veya

$$\bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\lambda}_2 = -p^2 \tag{1-9}$$

dir.

Karşıt olarak, D anadoğrusu üzerinde seçilen herhangi iki Q_1, Q_2 nok-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

tasının, boğaz noktasından itibaren alınan apsisleri arasında, (1-9) eşitliği varsa, bu iki noktanın teğet düzlemleri birbirine diktir.



Şekil 68

Buna göre şu teorem söz konusudur:

Teorem 1-5.1

Sınıfı ≥ 1 olan bir doğrusal yüzeyin bir D anadoğrusu üzerinde bir geometrik bağıntı ile birbirine bağlı iki nokta dizisinin herhangi bir homolog nokta çifti ile belirli olan teğet düzlemlerin birbirlerine dik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, kuvveti $-p^2$ ve limit noktaları, D nin boğaz noktası ile sonsuzdaki noktasından oluşan bir envolüsyonla, bu iki nokta dizisinin birbirlerine bağlı bulunmalarıdır.

Özelik 1-1.

Boğaz noktasına göre simetrik iki noktanın teğet düzlemleri de G noktasına göre simetriktir.

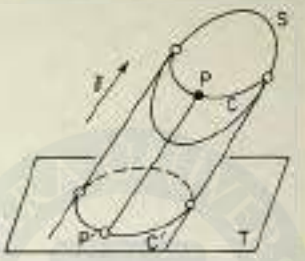
1-6. Bazı özel hâllerde, doğrusal yüzeyin görünen çevresi

Bir S yüzeyine, bir γ doğrultusuna paralel olarak çizilen teğetlerin F değme noktalarının C geometrik yeri, γ doğrultusuna göre, S nin **görünen çevresidir.**

S ye, γ doğrultusuna paralel olarak çizilen teğetler, C eğrisi boyunca S ye teğet bir silindir oluştururlar. Bu, S ye dıştan teğet **izdüşüren silindirdir.** γ doğrultusuna paralel olmayan bir T düzlemiyle izdüşüren silindirin C' arakesiti, S nin **T düzlemi üzerinde ve γ doğrultusundaki eğik izdüşü-**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

münde düşen görünen çevresi, veya C eğrisinin γ doğrultusuna paralel eğik izdüşümüdür.



Şekil 69

C boyunca S ye teğet düzlemlerin, T izdüşüm düzlemi üzerindeki izleri, C' nün teğetleridir. Aynı teğet düzlemler, S ye C boyunca teğet izdüşüren silindirin de teğet düzlemleridir. Şu da söylenebilir: C nin teğetlerinin, γ doğrultusunda ve T düzlemi üzerindeki eğik izdüsümleri, C' ye teğet kalırlar.

Bu anımsatmalardan sonra, şu teoremi ele alabiliriz:

Teorem 1-6.1.

Düzlem doğrultmanlı bir doğrusal yüzeyde, doğrultman düzleme paralel bir düzlem üzerindeki dik izdüşümde, boğaz çizgisinin dik izdüşümü, yüzeyin bu düzlem üzerindeki görünen çevresini oluşturur.

Doğrultman koni, bu özel halde, bir düzleme dönüştüğünden, verilen doğrusal yüzeyin tüm asimptot düzlemleri, bu doğrultman düzleme paraleldir. İzdüşüm düzlemi üzerinde, teğet düzlemler arasından, düşen görünen çevreyi verecek olanlar, doğrultman düzleme dik olacaklarından, bu teğet düzlemler boğaz düzlemleri, bunların değme noktaları da boğaz noktalarıdır.

Daha genel olarak, şu teorem söz konusudur:

Teorem 1-6.2.

Dönel doğrultman konili bir doğrusal yüzeyde, koninin eksenine dik bir düzlem üzerindeki dik izdüşümde, boğaz çizgisinin dik izdüşümü, düşen görünen çevreyi oluşturur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

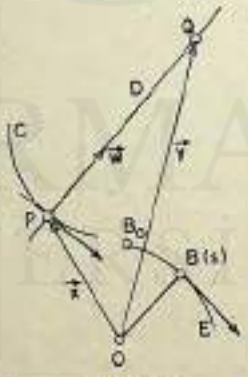
Bundan önce de gördüğümüz gibi, dönel doğrultman konin anadoğrularından ve ekseninden geçen düzlemler, yüzeyin boğaz düzlemlerinin paralelleridir ve izdüşüm düzlemine dik teğet düzlemleridir. Öyleyse, değme noktaları da, boğaz noktalarından oluşacaklarından, teorem doğrudur.

2. Vektörel inceleme

Doğrusal yüzeyin, **doğrultman** adını vereceğimiz, herhangi bir eğrisi C, bunun herhangi bir **düzgün** noktası P, bu nokta ile belirli olan ve P den geçen anadoğrusu D, P nin yer vektörü $\vec{x}$, D ye paralel serbest bir birim vektörü $\vec{\omega}$, D nin düzgün herhangi bir noktası Q ve bunun yer vektörü de $\vec{y}$ olsun. O başlangıcından itibaren, $\vec{\omega}$ birim vektörünün

$$\overrightarrow{OB} = \vec{\omega}$$

eşdeğerini aldığımızda, bunun B ucunun O(1) birim küresi üzerinde çizeceği $E = (B)$ eğrisi, doğrusal yüzeyin küresel görüntüsüdür.



Şekil 70

E üzerinde yayların başlangıç noktası B_o, gelişigüzel seçilen bir pozitif yöne göre de B nin E üzerindeki eğrisel apsisi s ise, s ile birlikte sırasiyle B, $\vec{\omega}$, D ve P de belirlenmiş olacağından, P noktası yâni X vektörü de s nin bir fonksiyonudur. Buna göre, doğrusal yüzeyin vektörel denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(2-1) $$\vec{y}(s,\lambda) = \vec{x}(s) + \lambda\,\vec{\omega}(s)$$

dır.

Bu vektörel denklemdeki

$$\vec{x} = \vec{x}(s), \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}(s)$$

vektörel fonksiyonlarının P ve B noktalarıyla yakınlarındaki sınıflarının $\geqslant 1$ olduğunu ve D nin tüm Q noktalarının düzgün noktalardan oluştuklarını varsayacağız.

2-1. E küresel görüntüsünün B noktasındaki DARBOUX-RIBEAUCOUR diküçyüzlüsü

$f = f(s)$ skaler ya da vektörel bir fonksiyonu göstermek üzere

$$f^* = \frac{df}{ds}$$

dersek, söz konusu diküçyüzlüsünün $\vec{b}_1$, $\vec{b}$, $\vec{\omega}$ birim vektörleri

(2-2)
$$\begin{cases} \vec{b}_1(s) = \vec{\omega}^*(s) \\ \vec{b}(s) = \vec{\omega}(s) \wedge \vec{\omega}^*(s) \\ \vec{\omega}(s) = \vec{\omega}(s) \end{cases}$$

dir.

2.2. Doğrusal yüzeyin Q (λ, s) noktasındaki normal vektörü

(2-1) vektörel denkleminden, Q (s, λ) noktası için

$$\vec{y}_s = \vec{x}^* + \lambda\vec{\omega}^*, \quad \vec{y}_\lambda = \vec{\omega}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edileceğinden, $Q(s, \lambda)$ düzgün noktasındaki sonsuz normal vektörden birisi

$$\vec{n}(s, \lambda) = \vec{y}_s \wedge \vec{y}_\lambda = (\vec{x}^* + \lambda \vec{\omega}^*) \wedge \vec{\omega} = \vec{x}^* \wedge \vec{\omega} + \lambda \vec{\omega}^* \wedge \vec{\omega} \tag{2-3}$$

dir.

Böylece tanımlanan normal vektörün, P ve Q_∞ düzgün noktalarındaki, yani $\lambda = 0$ ve $\lambda \to \infty$ noktalarındaki değerlerine sırasiyle $\vec{n}^*$ ve $\vec{n}_\infty$ dersek,

$$\vec{n}(s, \lambda) = \vec{n}_0 + \lambda \vec{n}_\infty, \quad \vec{n}_0 = \vec{x}^* \wedge \vec{\omega} \neq \vec{0}, \quad \vec{n}_\infty = \vec{\omega}^* \wedge \vec{\omega} \neq \vec{0} \tag{2-4}$$

olur.

Biraz önce, D anadoğrusunun tüm $Q(\lambda, s)$ noktalarını **düzgün** varsaydığımızdan, bu noktalar için

$$\vec{n}(s, \lambda) \neq \vec{0}$$

dür ve (2-4) görüleceği gibi, $\vec{n}(s, \lambda)$ normal vektörü, genellikle, λ ile, yani $Q(s, \lambda)$ nın D üzerindeki konumu ile birlikte değişir. Dolayısiyle, $Q(s, \lambda)$ noktasındaki teğet düzlem de D den geçer ve $Q(s, \lambda)$ nın D üzerinde dolanmasiyle, D etrafında döner, meğer ki $\vec{n}_0$ ve $\vec{n}_\infty$ vektörleri birbirlerine paralel bulunsun, yani (2-4) e göre

$$[\vec{x}^* \wedge \vec{\omega}] \wedge [\vec{\omega}^* \wedge \vec{\omega}] = (\vec{x}^*, \vec{\omega}^*, \vec{\omega}]\vec{\omega} = \vec{0}.$$

veya

$$\vec{\omega} \neq \vec{0}$$

olduğundan

$$[\vec{x}^*, \vec{\omega}^*, \vec{\omega}] = 0 \tag{2-5}$$

eşitliği bulunsun.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(2-5) bağıntısı sadece bir anadoğru için gerçekleşiyorsa, bu anadoğru **durgun** adını alır. —Aynı terimi, geometrik inceleme bölümünde de kullanmıştık— (2-5) eşitliği, doğrusal yüzeyin tüm anadoğruları için gerçekleşiyorsa, doğrusal yüzey bir **açılabilen** yüzeydir. Daha ilerde ele alacağımız bu tür yüzeylerde göreceğiz ki anadoğrular bir uzay eğrisine teğet kalırlar ve bir anadoğru boyunca teğet düzlem değişmez.

2-3. Boğaz noktası, düzlemi, çizgisi. CHASLES parametresi ve formülü. Teğet düzlemin bir anadoğru boyunca değişim biçimi

D anadoğrusunun Q (s, λ) noktasının D üzerinde sonsuza gitmesi hâlinde, Q ile beraber değişen teğet düzlemin limit durumuna, bundan önce, D den geçen **asimptot düzlem** demiştik. D den geçen ve asimptot düzleme dik olan teğet düzlemin P_1 değme noktası da, D anadoğrusunun **boğaz** veya **merkez** noktası idi. Doğrusal yüzeyin P_1 noktasındaki normal vektörlerinden birisi $\vec{n}_1$ ise,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_\infty = 0 \tag{2-6}$$

bağıntısı, boğaz noktasının $P(\vec{\omega})$ ekseni üzerindeki apsisine $\bar{\lambda}^*$ dediğimizde, (2-6) ve (2-4) bağıntıları

$$(\vec{n}_0 + \bar{\lambda}^* \vec{n}_\infty) \cdot \vec{n}_\infty = 0$$

veya

$$\bar{\lambda}^* = -\frac{\vec{n}_0 \cdot \vec{n}_\infty}{\vec{n}_\infty^2} = -\frac{[\vec{x}^* \wedge \vec{\omega}] \cdot [\vec{\omega}^* \wedge \vec{\omega}]}{(\vec{\omega}^* \wedge \vec{\omega})^2}$$

yâni

$$\bar{\lambda}^* = -\frac{\vec{x}^* \cdot \vec{\omega}^*}{(\vec{\omega}^* \wedge \vec{\omega})^2}, \quad (\vec{\omega}^* \wedge \vec{\omega})^2 = 1 \tag{2-7}$$

verir.

Eğer $P(\vec{W})$ ekseninin P başlangıç noktası P_1 boğaz noktası ise, (2-7) nedeniyle bu noktada

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(2-8) $$\vec{x}^{\circ} \cdot \vec{\omega}^{\circ} = 0, \qquad (\vec{x}^{\circ} \neq \vec{0})$$

dür.

Öte yandan, $\vec{W}$ doğrultu vektörüne $\vec{\omega}^{\circ}$ türev vektörü (2-8) nedeniyle, boğaz noktasında $\vec{X}^{\circ}$ türev vektörüne de dik olduğundan

(2-9) $$\mu \vec{\omega}^{\circ} = \vec{x}^{\circ} \wedge \vec{\omega} = \vec{n}_0, \qquad (\mu \neq 0)$$

biçimindedir. Böylece görülüyor ki: doğrusal yüzeyin boğaz noktasındaki normal vektörlerinden birisi $\vec{W}^{\circ}$ dır. Buna dik olan teğet düzleme, bundan önce, **boğaz düzlemi** demiştik.

P_1 boğaz noktasından itibaren $P_1(\vec{W})$ ekseni üzerinde, yeni apsislere $\bar{\lambda}$ dersek, (2-4) ve (2-9) bağıntıları dolayısiyle, herhangi bir $Q(s, \lambda)$ noktasındaki normal vektörlerden biri

$$\vec{n}(s, \bar{\lambda}) = \vec{n}_0 + \bar{\lambda}\,\vec{n}_{\infty} = \mu \vec{\omega}^{\circ} + \bar{\lambda}\,\vec{\omega}^{\circ} \wedge \vec{\omega}$$

veya doğrusal yüzeyin küresel görüntüsünün (2-2) DARBOUX-RIBEAUCOUR birim vektörleri cinsinden

(2-10) $$\vec{n} = \mu \vec{b}_1 - \bar{\lambda}\,\vec{b}$$

dir.

D anadoğrusunun herhangi bir $Q(s, -\bar{\lambda})$ noktasındaki normalle, boğaz noktasındaki normal veya bu noktaların teğet düzlemleri arasında ve $\vec{W}$ etrafındaki pozitif yönde hesaplanan açıyı φ ile gösterirsek, (2-10) formülü gösterir ki

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\bar{\lambda}}{-\mu}$$

dür. Eğer,

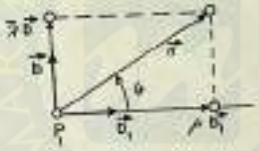
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(2-11) $$-\mu = P$$

yazış değişikliğini yapersak, son bağıntı

(2-12) $$\bar{\lambda} = p \ tg \ \varphi$$

biçimini alır.



Şekil 71

(1-8) in aynı olan (2-12) formülü, bundan önce de gördüğümüz gibi, **CHASLES bağıntısıdır.** Genel geometrik inceleme bölümünde, bu formüle göre, değme noktası anadoğru üzerinde dolandığında, anadoğrudan geçen teğet düzlemin nasıl değiştiğini gördüğümüz için, bu konuyu burada yeniden ele almayacağız.

(2-12) formülündeki P katsayısına: **CHASLES** ya da **dağılma parametresi** denildiğini de bundan önce söylemiştik.

(2-9) vektörel eşitliğinin her iki yanını, skaler olarak $\vec{W}$ vektörü ile çarptığımızda, (2-11) nedeniyle

(2-13) $$P = \frac{(\vec{x}', \vec{w}', \vec{w})}{\vec{w}^2}$$

elde edilir.

Uyarı 2-1.

Bu formül çıkarılırken, C doğrultmanın P noktası, D nin P_1 boğaz noktası olarak alınmıştır. Buna göre, (2-8) nedeniyle, bu formülde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{x}^{\circ} \cdot \vec{w}^{\circ} = 0$$

dır. Birazdan göreceğiz ki, P noktası boğaz noktası olmasa da, (2-13) doğrudur.

Uyarı 2-2.

Doğrusal yüzeyin, boğaz noktasından farklı bir P noktasındaki teğet düzlem üzerinde, P den geçen ve $\vec{W}^{\circ}$ vektörüne dik olan, D den başka hiç bir doğru yoktur.

Böyle bir doğru bulunsaydı, söz konusu teğet düzlemin, $\vec{W}$ vektörüne dik, yani boğaz düzlemi olması gerekirdi.

Uyarı 2-3.

$\vec{X} = \vec{X}(S)$ yer vektörlü C doğrultmanının P noktası boğaz noktası değilse, D nin herhangi bir $O(s, \lambda)$ noktasından geçen ve D den farklı olan gelişigüzel bir C doğrultmanının yer vektörü

$$\vec{x}^{*}(s) = \vec{x}(s) + \lambda \vec{w}(s)$$

olacağından

$$\vec{x}^{\circ} = \vec{x}^{**} - \lambda^{\circ} \vec{w} - \lambda \vec{w}$$

bağıntısı, P noktası için $(\lambda = 0,\ \vec{x}^{*} = \vec{x})$

$$\vec{x}^{\circ} = \vec{x}^{**} - \lambda^{\circ} \vec{w}$$

verir ve bu değer (2-13) de yerine konulduğunda

$$P = \frac{(\vec{x}^{**}, \vec{w}^{\circ}, \vec{w})}{\vec{w}^{\circ 2}} \qquad (2\text{-}14)$$

olur. Görülüyor ki, P noktası boğaz noktası olmasa da, P yi veren formül, biçim bakımından (2-13) ün aynıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2-4. Çeşitli durumlarda boğaz noktasını ve dağılma parametresini veren formüller.

a. $\vec{W}$ birim vektörü, doğrultman da, boğaz noktasından farklı bir P noktasından geçen herhangi bir C^* eğrisidir. Türevler, doğrusal yüzeyin E küresel görüntüsünün S yayına göre hesaplanmaktadır. C^* ın $\vec{X}^*(S)$ yer vektörü ile $\vec{W}(S)$ doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 1$ dir.

(2-7) ve (2-14) formülleri nedeniyle, P, boğaz noktasının $\bar{\lambda}$ apsisi ile P dağılma parametresinin değeri, bu özel durumda

$$(2\text{-}15)\quad \begin{cases} \bar{\lambda} = -\dfrac{\vec{x}^{*\circ}\cdot\vec{w}^{\circ}}{(\vec{w}^{\circ}\wedge\vec{w})^2}, & (\vec{w}^{\circ}\wedge\vec{w}) = 1, \\ p = \dfrac{(\vec{x}^{*\circ},\vec{w}^{\circ},\vec{w})}{\vec{w}^{*2}}, & \vec{w}^{*2} = t \end{cases}$$

dır.

b. $\vec{W}$ birim vektörü, doğrultman da herhangi bir C^* eğrisidir. Türevler, herhangi bir t parametresine göre hesaplanmaktadır. C^* ın $\vec{X}^*(t)$ yer vektörü ile $\vec{W}(t)$ doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 1$ dir.

$$\vec{w}^{\circ} = \frac{d\vec{w}}{dt}\,t^{\circ} = \vec{w}'\,t^{\circ}, \quad \vec{x}^{*\circ} = \frac{d\vec{x}^*}{dt}\,t^{\circ} = \vec{x}^{*\prime}\,t^{\circ}, \quad t^{*2} = \frac{1}{\vec{w}'^2}$$

olduğundan, bu değerler (2-15) de yerlerine konuldukta

$$(2\text{-}16)\quad \begin{cases} \bar{\lambda} = -\dfrac{\vec{x}^{*\prime}\cdot\vec{w}'}{(\vec{w}'\wedge\vec{w})^2}, \\ p = \dfrac{(\vec{x}^{*\prime},\vec{w}',\vec{w})}{\vec{w}'^2}, & (\vec{w}'\wedge\vec{w})^2 = \vec{w}'^2 \end{cases}$$

elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bunlar, biçim bakımından, (2-15) den farksızdır.

c. Genel hal

$\vec{W}^*$ doğrultu vektörü değildir, doğrultman, boğaz çizgisinden farklı, herhangi bir C^* eğrisidir. Türevler de, herhangi bir t parametresine göre alınmaktadır. C^* doğrultmanının $\vec{X}^*(t)$ yer vektörü ile $\vec{W}^*(t)$ doğrultu vektörünün sınıfları $\geqslant 1$ dir.

Uzunluğu W^* olan $\vec{W}^*$ vektörü ile aynı yönlü birim vektörü $\vec{W}$ ise,

$$\vec{w} = \frac{1}{w^*}\,\vec{w}^*, \qquad (w^* \neq 0)$$

bağıntısından, t ye göre türev almakla

$$\vec{w}' = \frac{1}{w^*}\,\vec{w}^{*\prime} + \left(\frac{1}{w^*}\right)'\vec{w}^* \tag{2-17}$$

bulunacağından,

$$\vec{w}' \wedge \vec{w} = \frac{1}{w^{*2}}\,\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^* \tag{2-17}$$

olur.

Öte yandan, (2-17) nedeniyle

$$-\vec{x}^{*\prime} \cdot \vec{w}' = -\vec{x}^{*\prime} \cdot [(\vec{w} \wedge \vec{w}') \wedge \vec{w}] = -\frac{1}{w^{*3}}$$

$$[\vec{x}^{*\prime},\ (\vec{w}^* \wedge \vec{w}^{*\prime}),\ \vec{w}^*]$$

yazılabileceğinden, (2-17) ve (2-18) formülleri, (2-16) da kullanıldığında

$$\begin{cases} \lambda = -w^* \dfrac{[\vec{x}^{*\prime},\ (\vec{w}^* \wedge \vec{w}^{*\prime}),\ \vec{w}^*]}{(\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^*)^2} \\ p = w^{*2} \dfrac{(\vec{x}^{*\prime}, \vec{w}^{*\prime}, \vec{w}^*)}{(\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^*)^2} \end{cases} \tag{2-19}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 2-4.

Eğer $\vec{w}^{*3} =$ sabit ise, (2-19); 1) den

$$\bar{\lambda} = -\,w^{*3} \cdot \frac{\vec{x}^{*\prime} \cdot \vec{w}^{*\prime}}{(\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^{*})^2} \tag{2-20}$$

çıkar.

Uyarı 2-5.

En genel durumda, C_t boğaz çizgisinin $\vec{x}_t = \vec{x}_t(t)$ vektörel denklemi

$$\vec{x}_t(t) = \vec{x} + \frac{[\vec{x}', (\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^{*}), \vec{w}^{*}]}{(\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^{*})^2} \cdot \vec{w}^{*} \tag{2-21}$$

dir.

2-5. Dağılma parametresinin (1-7) tanımının vektörel olarak doğrulanması

Teorem 2-1.

Doğrusal yüzeyin küresel görüntüsünün yay uzunluğu s olduğuna göre, herhangi bir C doğrultmanının $\vec{X} = \vec{X}(s)$ yer vektörü ile anadoğruların $\vec{W} = \vec{W}(s)$ doğrultu birim vektörünün sınıfları ≥ 1 ise, yakın iki anadoğrunun ortak dikme uzunluğunun, bu anadoğrular arasındaki açının radyan cinsinden değerine olan oranının limiti, dağılma parametresinin salt değerine eşittir.

Sınıfının ≥ 1 olduğunu varsaydığımız C doğrultmanının yakın iki noktası P(S), P'(s + h) ve bu iki noktadan geçen D,D' anadoğrularının gene en az 1-sınıftan doğrultu birim vektörleri de $\vec{W}(s)$, $\vec{W}(s+h)$ ise, D ve D' anadoğrularının AA' ortak dikmelerinin δ uzunluğu

$$\delta = \frac{|\,[\vec{PP'}, \vec{w}(s), \vec{w}(s+h)]\,|}{|\,\vec{w}(s) \wedge \vec{w}(s+h)\,|}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

D, D' anadoğruları arasındaki ε açısının radyan cinsinden değeri de,

$$\operatorname{Sin}\varepsilon = |\vec{w}(s) \wedge \vec{w}[s+h]|$$

bağıntısıyle belirli olacağından,

$$\lim_{D'\to D} \frac{\delta}{\varepsilon} = \lim_{D'\to D} \frac{\delta}{\operatorname{Sin}\varepsilon} \cdot \frac{\operatorname{Sin}\varepsilon}{\varepsilon} = \lim_{D'\to D} \frac{\delta}{\operatorname{Sin}\varepsilon} \qquad \left(\lim_{D'\to D} \frac{\operatorname{Sin}\varepsilon}{\varepsilon} = 1\right)$$

dolayısiyle

$$\lim_{D'\to D} \frac{\delta}{\varepsilon} = \lim_{D'\to D} \frac{|[\vec{PP'}, \vec{w}(s), \vec{w}[s+h]]|}{[\vec{w}(s) \wedge \vec{w}(s+h)]^2}$$

dir.

C doğrultmanının $\vec{x} = \vec{x}(s)$ yer vektörü $\vec{w}(s)$ doğrultu birim vektörünün sınıfları en az 1 olduğundan

$$\vec{PP'} = \vec{x}[s+h] - \vec{x}[s] = h[\vec{x}'(s) + \vec{\varepsilon}_1(s, h)],$$

$$\lim_{h\to 0} \vec{\varepsilon}_1(s, h) = \vec{0},$$

$$\vec{w}(s+h) = \vec{w}(s) + h[\vec{w}'(s) + \vec{\alpha}_1(s, h)],$$

$$\lim_{h\to 0} \vec{\alpha}_1(s, h) = \vec{0}$$

eşitliklerinden yararlandığımızda, (2-15; 2) nedeniyle

$$\lim_{D'\to D} \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{|[\vec{x}'(s), \vec{w}(s), \vec{w}'(s)]|}{[\vec{w}(s) \wedge \vec{w}'(s)]^2} = |p| \tag{2-22}$$

olur.

2-6. Boğaz noktasının § 1-3 tanımının vektörel olarak doğrulanması

Teorem 2-2.

Anadoğrularının $\vec{W}(s)$ doğrultu birim vektörünün sınıfı $\geqslant 1$ olan bir doğrusal yüzeyde, D ve D' yakın anadoğrularının ortak dikmelerinin D üze-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

rindeki A ayağının, D' nün D ye yaklaşması durumundaki limiti, D nin P_1 boğaz noktasıdır.

Gerçekten, D ve D' yakın anadoğrularının herhangi bir C doğrultmanı ile ortak noktaları P, P' ve C nin $\vec{X} = \vec{X}(s)$ yer vektörünün sınıfı da $\geqslant 1$ ise,

$$\vec{PA} + \vec{AA'} + \vec{A'P'} = \vec{pp'}$$

vektörel bağıntısı,

$$\lambda \vec{w}(s) + \mu \vec{w}(s) \wedge \vec{w}(s+h) + \nu \vec{w}(s+h) = \vec{x}(s+h) - \vec{x}(s)$$

veya

$$\lambda \vec{w}(s) + \mu h \vec{w}(s) \wedge [\vec{w}'(s) + \vec{\varepsilon}_1(s,h)] + \nu \{\vec{w}(s) + h[\vec{w}'(s) + \vec{\varepsilon}_1(s,h)]\} = h[\vec{x}'(s) + \vec{\alpha}_1(s,h)], \tag{2-23}$$

$$\lim_{h\to 0} \vec{\varepsilon}_1(s,h) = \vec{0}, \qquad \lim_{h\to 0} \vec{\alpha}_1(s,h) = \vec{0}$$

verir.

P_1 boğaz noktasının $\vec{P(W)}$ eksenine göre apsisi $\bar{\lambda}$ olduğundan,

$$\lim_{h\to 0} \nu = -\bar{\lambda}^*, \qquad \lim_{h\to 0} A' = \lim_{h\to 0} A$$

dersek, (2-23) ün her iki yanını skaler olarak $\vec{W(s)}$ ile çarptıktan sonra h ile böler ve limite geçersek, (2-15: 1) nedeniyle

$$\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda}$$

bulunur.

2-7. Özel durumlar

D anadoğrusunun $Q(s, \lambda)$ noktasındaki bir normal vektör olarak, (2-4) nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{n}(s,\lambda) = \vec{n}_0 + \lambda \vec{n}_\infty, \quad \vec{n}_0 = \vec{x}^* \wedge \vec{w}, \quad \vec{n}_\infty = \vec{w}^* \wedge \vec{w}$$

bulmuştuk. Buna göre, şu özel haller gözden geçirilebilir.

c. **C doğrultmanının P noktası düzgün değildir.** Böyle olunca, P noktasında

$$\vec{x}^*(s) = \vec{0}, \qquad (\vec{w}'(s) \neq \vec{0}) \tag{2-24}$$

dir ve (2-15) nedeniyle de P noktası D anadoğrusunun boğaz noktası olduğu gibi ayrıca D için $p=0$ dır. Üstelik, P noktasında, $\vec{n}(s,o)$ normal vektörü

$$\vec{n}(s,o) = \vec{n}_0 = \vec{0}$$

olacağından, **bu noktadaki teğet düzlem belirli değildir. D nin P den farklı** tüm $Q(s,\lambda)$ noktalarında

$$\vec{n}(s,\lambda) = \lambda \vec{w}^* \wedge \vec{w} = \lambda \vec{n}_\infty, \qquad (\lambda \neq 0)$$

eşitliği bulunacağından, bu noktalardaki **teğet düzlem, asimptot düzleme paraleldir.** Teğet düzlemin, boğaz noktası bir yana, D nin tüm $Q(s,\lambda)$ noktalarında aynı olduğu böyle bir anadoğruya, daha önce, **durgun** demiştik.

Eğer **C doğrultmanının her P noktası için (2-24) geçerli ise,** yâni

$$\vec{x}^*(s) = \vec{0}$$

ise, C bir nokta eğridir ve **doğrusal yüzey de bir konidir.**

Karşıt olarak, koninin tepesi, bu yüzeyin tek boğaz noktasıdır, bu noktadaki teğet düzlemler belirsizdir. Herhangi bir anadoğru boyunca aynı olan teğet düzlem, koniye bu anadoğrunun sonsuzdaki noktasında teğet olan asimptot düzlemdir. Koninin dağılma parametresi: $p = 0$ dır.

b. D anadoğrusunun doğrultu birim vektörü, yâni doğrusal yüzeyin E küresel görüntüsünün B noktası düzgün değildir.

Buna göre, D anadoğrusu için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{w}^*(s) = \vec{0}, \qquad (\vec{x}^*(s) \neq \vec{0})$$

dür. Böyle olunca da, (2-15) formülleri nedeniyle, boğaz noktası sonsuzdadır ve dağılma parametresi de sonsuzdur. Ayrıca, $Q(s, \infty)$ daki $\vec{n}_\infty$ normal vektörü

$$\vec{n}(s, \infty) = \vec{n}_\infty = \vec{w}^* \wedge \vec{w} = \vec{0}$$

olduğundan, **asimptot düzlem belirsizdir**. D anadoğrusunun, $Q(s, \infty)$ dan farklı tüm $Q(s, \lambda)$ noktalarında,

$$\vec{n}(s, \lambda) = \vec{n}_s = \vec{x}^* \wedge \vec{w}$$

olacağından, **teğet düzlem, doğrultman P noktasındaki teğet düzlemin aynıdır**, yâni doğrultmanın sonsuzdaki noktası bir yana, tüm teğet düzlemlerin D boyunca aynı olduğu anadoğru **durgundur**.

Eğer bütün anadoğrular için, küresel görüntünün B noktası, düzgün değilse, yâni

$$\vec{w}^*(s) = \vec{0}$$

ise, E küresel görüntüsü bir nokta-eğridir ve D anadoğrularının doğrultusu sâbit olacağından, **doğrusal yüzey, C doğrultmanından geçen bir silindirdir.**

Karşık olarak, silindirin sonsuzdaki noktası boğaz noktasıdır. Bu noktadaki teğet düzlem belirsizdir. Herhangi bir anadoğru boyunca, sonsuzdaki nokta bir yana, teğet düzlem aynıdır. Silindirin dağılma parametresi de sonsuzdur.

c. C doğrultmanı ile E küresel görüntüsünün P ve B homolog noktaları, aynı zamanda, düzgün değildir.

Böyle bir durumda, P ve B noktalarında

$$\vec{x}^*(s) = \vec{0}, \quad \vec{w}^*(s) = \vec{0} \tag{2-25}$$

olacağından, (2-4) nedeniyle, D anadoğrusunun tüm $Q(s, \lambda)$ noktalarında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{n}(s,\lambda) = \vec{0}$$

dür, dolayısiyle D **anadoğrusu boyunca teğet düzlem belirsizdir.** Eğer bütün anadoğrular için bu böyle ise, yani (2-25) koşulları gerçekleşiyorsa, C doğrutmanı bir nokta eğri, anadoğruların doğrultusu da aynıdır. Buna göre, **doğrusal yüzey, sabit bir P noktasından geçen aynı doğrultulu doğrulardan oluşur.**

d. **Doğrusal yüzeyin P noktası düzgün değildir.**

Bu durumda, P noktasındaki $\vec{n}_0$ normal vektörü

$$\vec{n}_0 = \vec{x}^* \wedge \vec{w} = \vec{0}$$

dür. a da $\vec{X}^* = \vec{0}$ hâlini incelediğimize göre, geriye sadece $\vec{X}^*$ vektörünün $\vec{W}$ ye paralelliğini gözden geçirmek kalır :

(2-26) $$\vec{x}^* = \gamma \vec{w}, \quad \gamma \neq 0$$

(2-15) ve (2-26) formülleri dolayısiyle, P noktasında $\bar{\lambda} = 0$ ve D anadoğrusu için $p = 0$ dır. Demek ki **P noktası boğaz noktasıdır, bu noktadaki teğet düzlem belirli değildir** ve **P den geçen D anadoğrusu için p=0 dır.**

Öte yandan, herhangi bir O (s, λ) noktasındaki normal vektör, (2-4) ve (2-26) nedeniyle

$$\vec{n}(s,\lambda) = \lambda \vec{n}_\infty = \lambda \vec{w}^* \wedge \vec{w}$$

olacağından, D anadoğrusunun, **boğaz noktası dışındaki tüm noktalarında, teğet düzlem, asimptot düzleme paraleldir.** Görülüyor ki D anadoğrusu, bu durumda **durgundur.** Ayrıca, (2-26) nedeniyle, **D anadoğrusu, boğaz noktasında, C doğrultmanına teğettir.**

Eğer (2-26) bağıntısı tüm s değerleri için geçerli ise, doğrusal yüzey **açılabilen** adını alır.

3. **Doğrusal yüzeyin C doğrultmanının $\vec{X}^*$ teğet vektörünün, E küresel görüntüsünün DARBOUX - RIBEAUCOUR diküçyüzlüsüne göre bileşenleri**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C doğrultmanının yer vektörünün $\vec{X}^*(s)$ türev vektörünü, E küresel görüntüsünün DARBOUX-RIBEAUCOUR dik üçyüzlüsünün (2-2) birim vektörlerine göre

$$\vec{x}^* = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \alpha_3 \vec{w} \tag{3-1}$$

biçiminde yazarsak, (2-15) formülleri nedeniyle

$$\begin{cases} \alpha_1 = \vec{b}_1 \cdot \vec{x}^* = \vec{x}^* \cdot \vec{w}^* = -\lambda, \\ \alpha_2 = \vec{b}_2 \cdot \vec{x}^* = \vec{x}^* \cdot (\vec{w} \wedge \vec{w}^*) = (\vec{x}^*, \vec{w}, \vec{w}^*) = -p \end{cases} \tag{3-2}$$

olacağından, şimdilik

$$\vec{x}^* = -\lambda \vec{b}_1 - p \vec{b} + \alpha_3 \vec{w} \tag{3-3}$$

bulunur.

Eğer, $\vec{n}_0 = \vec{X}^* \wedge \vec{W}$ etrafındaki pozitif dönme yönünde hesabedilen

$$\widehat{\vec{x}^*, \vec{w}} = \beta$$

açısı ile C doğrultmanın σ yayını kullanırsak

$$\vec{x}^* \cdot \vec{w} = \sigma^* \cos \beta = \alpha_3 \tag{3-4}$$

elde edilir. Birazdan α_3 ü başka biçimde değerlendireceğiz.

(3-3) formülünü C_1 boğaz çizgisine uyguladığımızda

$$\vec{x}_1^* = -p \vec{b} + \alpha_3 \vec{w} \tag{3-5}$$

olur.

Yer vektörü $\vec{X} = \vec{X}(s)$ olan herhangi bir C doğrultmanı yardımiyle

$$\vec{x}_1(s) = \vec{x}(s) + \lambda \vec{w}(s) = \vec{x}(s) - \alpha_1(s) \vec{w}(s)$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

yazar ve bu bağıntının s ye göre türevini alırsak

$$\vec{x}_1^{\,\circ} = \vec{x}^{\,\circ} + \lambda^{\circ}\vec{w} + \lambda\vec{w}^{\circ} = \vec{x}^{\circ} - \alpha_3\vec{w} - \alpha_1\vec{w}^{\circ} \tag{3-8}$$

elde edilecağinden, (3-5) in her iki yanının skaler olarak $\vec{W}$ ile çarpılması sonucunda (3-6) bağıntısı, (3-3) yardımiyle

$$\vec{x}_1^{\,\circ} \cdot \vec{w} = \alpha_3 - \alpha_1^{\circ}$$

yâni

$$\alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_1^{\circ} \tag{3-7}$$

bulunur.

Öte yandan, $\vec{X}(s)$ ve $\vec{W}(s)$ vektörel fonksiyonlarının sınıflarının ≥ 2 olmaları koşulu ile, (3-3) ve (3-2, 1) bağıntılarından

$$\alpha_3 = \vec{x}^{\circ} \cdot \vec{w} - (\vec{x}^{\circ} \cdot \vec{w}^{\circ})^{\circ} \tag{3-8}$$

sonucu çıkarılır.

Eğer $\vec{X} = \vec{X}(s)$ denklemli C doğrultmanı yerine

$$\vec{x}^{*} = \vec{x}(s) + \lambda(s)\,\vec{w}(s) \tag{3-9}$$

vektörel denklemiyle tanımlanan C^* doğrultmanı alınırsa, (3-9) da s ye göre türev alarak

$$\vec{x}^{\circ} = \vec{x}^{*\circ} - \lambda^{\circ}\vec{w} - \lambda\vec{w}^{\circ}$$

bulunacağından, her iki yanın skaler olarak $\vec{W}$ ve $\vec{W}^*$ vektörleri ile çarpılmaları sonucunda

$$\vec{w} \cdot \vec{x}^{\circ} = \vec{w} \cdot \vec{x}^{*\circ} - \lambda^{\circ}, \quad \vec{w}^{\circ} \cdot \vec{x}^{\circ} = \vec{w}^{\circ} \cdot \vec{x}^{*\circ} - \lambda, \quad \vec{w}^{*\circ} = 1$$

elde edilir. Bu iki eşitlik, (3-8) de yerlerine konuldukda

$$\alpha_3 = \vec{w} \cdot \vec{x}^{*\circ} - \lambda^{\circ} - (\vec{w}^{\circ} \cdot \vec{x}^{*\circ} - \lambda)^{\circ}$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(3-9)' $$\bar{\alpha}_3 = \vec{w} \cdot \vec{x}^{*'} - (\vec{w}^* \cdot \vec{x}^{*'})^*$$

bulunur ki, bu da, biçim bakımından (3-8) den farksızdır. Buna göre, (3-8) in yazılışı, seçilen doğrultmana bağlı değildir.

(3-8) formülü, s yerine, herhangi bir t parametresi alındığında da aynı şekilde yazılır. Gerçekten, herhangi bir t parametresine göre türevler (') ile gösterildiğinde

$$\vec{x}^{*'} = \vec{x}^{*'} \cdot t' = \frac{\vec{x}^{*'}}{s'}, \quad \vec{w}' = \vec{w}' \cdot t' = \frac{\vec{w}'}{s'}, \quad s'' = \vec{w}^{*'}$$

olacağından, (3-8)

(3-9)'' $$\bar{\alpha}_3 = \frac{\vec{x}^{*'} \cdot \vec{w} - \left(\frac{\vec{x}^{*'} \cdot \vec{w}'}{\vec{w}^{*'}} \right)}{\sqrt{\vec{w}^{*'}}}$$

biçiminde yazılır.

$\vec{W}^{*'} = 1$ olduğundan, (3-8) formülünü aynı biçimde, yâni

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{\vec{x}^{*'} \cdot \vec{w} - \left(\frac{\vec{x}^{*'} \cdot \vec{w}^{*'}}{\vec{w}^{*'}} \right)^*}{\sqrt{\vec{w}^{*'}}}$$

biçiminde yazmakta bir sakınca yoktur.

3-1. $\bar{\alpha}_3$ ile ilgili geometrik yorumlar

a. Boğaz çizgisinin $\vec{X}_i^*$ teğetiyle D anadoğrusunun $\vec{W}$ doğrultu birim vektörü arasındaki açıya $\bar{\beta}$ dersek, (3-5) bağıntısı

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(3-10) $$\overline{\alpha_3} = -\,P\,\mathrm{Cotg}\,\overline{\beta}$$

verir.

b. O anadoğrusunun P_1 boğaz noktasından itibaren alınan ve

$$\overrightarrow{P_1P^*} = \overline{\alpha_3}\,\overrightarrow{w}$$

vektörel bağıntısını sağlayan P^* noktasındaki teğet düzlemle boğaz düzlemi arasındaki açı φ^* ise, (2-12) bağıntısı

(3-11) $$\overline{\alpha_3} = p\,\mathrm{tg}\,\varphi^*$$

vereceğinden, bunu (3-10) bağıntısı ile karşılaştırdığımızda

(3-12) $$\mathrm{tg}\,\varphi^* \cdot \mathrm{tg}\,\overline{\beta} = -1$$

olur.

c. Doğrusal yüzeyin doğrultmanı C_1 boğaz çizgisi ise, (2-1) vektörel denklemi

(3-13) $$\overrightarrow{y}(s,\lambda) = \overrightarrow{x_0}(s) + \lambda\,\overrightarrow{w}(s)$$

biçimindedir.

Anadoğruların doğrusal yüzey üzerindeki dik yörüngelerinin $\overrightarrow{y}(s,\lambda)$ vektörel denklemi

$$\overrightarrow{y^*} \cdot \overrightarrow{w} = 0$$

yâni

$$\overrightarrow{x_1^*} \cdot \overrightarrow{w} + \lambda^* = 0$$

diferansiyel denkleminin çözümleridir. Bu da, (3-5) nedeniyle

(3-14) $$\overline{\alpha_3} + \lambda^* = 0$$

biçiminde yazılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(3-14) den, integre ederek, **anadoğruların dik yörüngelerini veren** λ **lar için**

(3-15) $$\lambda = -\left[\int \bar{\alpha}_3(s)\,ds\right] + \text{sabit}$$

elde edilir.

d. Doğrusal yüzeyin C_1 boğaz çizgisinden itibaren anadoğrular üzerinde sâbit a uzunluklarını alarak bulunan C eğrisinin yer vektörü $\vec{X} = \vec{X}(s)$ ise, (3-3) nedeniyle

$$\vec{x}' \cdot \vec{w} = \alpha_3 = \bar{\alpha}_3$$

dır. Gerçekten, (3-7) de $-\alpha_1$ yerine eşidi olan $-\bar{\lambda}$ konulduğunda,

$$\bar{\alpha}_3 = \alpha_3 + \bar{\lambda}'$$

olacağından, $\bar{\lambda} = a$ dolayısiyle

$$\bar{\alpha}_3 = \alpha_3$$

elde edilir.

e. Doğrusal yüzeyin herhangi iki C', C'' eğrisinin anadoğruları kestikleri P', P'' noktaları arasındaki $\overline{P'P''} = a$ uzunluğu, bu iki eğri boyunca aynı ise, C' ve C'' için

$$\alpha_3' = \alpha_3''$$

dür. Gerçekten, C' ve C'' için $\bar{\lambda}$ nin değerleri $\bar{\lambda}'$, $\bar{\lambda}''$ ise

$$\bar{\lambda}'' - \bar{\lambda}' = a = \text{sabit}$$

olacağından,

$$\bar{\alpha}_3 = \alpha_3' + \bar{\lambda}'', \quad \bar{\alpha}_3 = \alpha_3'' + \bar{\lambda}''$$

bağıntılarından, $\bar{\lambda}'' - \bar{\lambda}'' = (\bar{\lambda}'' - \bar{\lambda}')' = a' = 0$ olacağından,

$$\alpha_3' = \alpha_3''$$

çıkarılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

f. Boğaz çizgisinin yay uzunluğu σ_3 ise, (3-5) bağıntısı dolayısiyle

(3-16) $$\sigma_3^{**} = P^2 + \bar{\alpha}_3$$

dir.

g. Doğrultman olarak C_1 boğaz çizgisi alındığında, (3-4) formülü

(3-17) $$\bar{\alpha}_3 = \sigma_1^* \operatorname{Cos} \bar{\beta}$$

biçiminde yazılır.

(3-17) eşitliğini (3-10) da kullandığımızda

(3-18) $$P = -\sigma_1^* \operatorname{Sin} \bar{\beta}$$

bulunur. (3-16) bağıntısı, (3-17) ve (3-18) den de çıkarılabilir.

Bu son iki bağıntıdaki $\bar{\beta}$ açısının

$$\bar{\beta} = \overset{\frown}{\vec{x}_1^*, \vec{w}}$$

ye eşit olduğunu anımsarsak, § 2-7 deki irdeleme, (3-18) ile de yapılabilir.

3-2. $\bar{\alpha}_3 = 0$ bağıntısını sağlayan doğrusal yüzeyler

Aranılan doğrusal yüzeyler için, (3-5) nedeniyle

$$\bar{\alpha}_3 = \vec{w} \cdot \vec{x}_1^* = 0$$

olacağından, böyle yüzeylerde anadoğrular boğaz çizgisini dik kesecekler-dir.

O halde bu anadoğrular, C_1 boğaz çizgisinin her P_1 noktasında, C_1 in bu noktadaki normal düzlemi üzerinde bulunacaklardır. Aynı sonuca, (3-17) bağıntısı yardımiyle de varılabileceğini kaydedelim.

Buna göre, gelişigüzel bir C_1 doğrultmanını alalım ve anadoğruları, C_1 in her P_1 noktasındaki normal düzlemi üzerinde bulunan bir doğrusal yüzeyde, C_1 in boğaz çizgisi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşulu arayalım.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C_1 in P_1 deki FRENET birim vektörleri $\vec{a}_j$, $(j = 1, 2, 3)$ eğrilik ve burulması ρ_1, τ_1, yay uzunluğu da σ_1 olsun σ_1 e göre, skaler ya da vektörel türevleri $'$ ile gösterelim. Buna göre,

$$\vec{w} = \vec{a}_2 \operatorname{Cos}\alpha + \vec{a}_3 \operatorname{Sin}\alpha$$

bağıntısından, σ_1 e göre türev almakla

$$\vec{w}' = -\rho_1 \operatorname{Cos}\alpha\ \vec{a}_1 + (\tau_1 + \alpha')(\vec{a}_3 \operatorname{Cos}\alpha - \vec{a}_2 \operatorname{Sin}\alpha) \tag{3-19}$$

bulunacağından, C_1 eğrisinin boğaz çizgisi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, (2-16; 1) nedeniyle

$$\vec{x}_1' \cdot \vec{w}' = \vec{a}_1 \cdot \vec{w}'$$

veya (3-19) yardımıyle

$$\rho_1 \operatorname{Cos}\alpha = 0 \tag{3-20}$$

dır.

Bulunan sonucu irdelemeden önce, şurasını kaydedelim ki

$\vec{x}_1' = \vec{0}$, yâni **koni,**

$\vec{w}' = \vec{0}$, yâni silindir,

$\tau_1 + \alpha' = 0$, yâni **açılabilen yüzey**

hâllerini bir yana bırakacağız.

a. C_1 eğrisi boyunca $\rho_1 = 0$ ise, C_1 eğrisi bir doğrudur ve doğrusal yüzey, bu doğruyu dik kesen doğruların oluşturdukları bir **dik konoittir.**

b. C_1 eğrisi boyunca $\operatorname{Cos}\alpha = 0$ ise, **anadoğrular, C_1 in binormalleridir.** Kolaylıkla görülür ki bu halde, dağılma parametresinin değeri de

$$P = -\frac{1}{\tau_1} = -T_1 \tag{3-21}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Karşıt olarak, bir dik konoitle, bir uzay eğrisinin binormallerinin meydana getirdikleri doğrusal yüzde, anadoğrular, boğaz çizgisini dik olarak keserler.

Teorem 3-1.

Bir nokta-eğriden farklı ve sınıfı $\geqslant 3$ olan bir C_3 uzay eğrisinin, bunu dik kesen, kendi kendilerine paralel ya da bir eğriye teğet kalmayan ve doğrultu birim vektörlerinin sınıfı $\geqslant 1$ olan doğrularla oluşturulan doğrusal yüzeyin boğaz çizgisi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, ya söz konusu doğruların C_1 in binormallerinden meydana gelmeleri, ya da C_1 in bir doğru, doğrusal yüzeyin de bir dik konoit olmasıdır.

Yukarıki teorem

$$\bar{\alpha}_3 = 0$$

koşulunu sağlayan doğrusal yüzeyleri belirlemektedir.

Özelik 3-1.

Doğrusal yüzeyin herhangi bir C doğrultmanı ile C_1 boğaz çizgisinin anadoğrular üzerinde ayırdıkları doğru parçalarının uzunlukları birbirine eşitse, § 3-1, d dolayısıyle

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$$

tür ve (3-3) ve (3-5) formüllerinden

$$\vec{x}_1^* - \vec{x}^* = \bar{\lambda}\,\vec{w}^*, \quad \bar{\lambda} = \text{sabit}$$

elde edileceğinden, şu teorem söz konusudur:

Teorem 3-2.

Boğaz çizgisiyle, anadoğruların $\vec{W}$ doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 1$ olan bir doğrusal yüzeyde, boğaz noktalarından itibaren anadoğrular üzerinde eşit uzunluklar alarak bulunan C eğrisinin $\vec{X}^*$ teğet vektörünün (3-3) biçiminde yazılışında, $\vec{W}$ nin katsayısı $\bar{\alpha}_1$ dir. $\vec{X}^*$ vektörleri boğaz nok-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

talarından itibaren alındıklarında, bunların uçları, $\overrightarrow{W'}$ vektörüne paralel bir doğru üzerinde bulunurlar ve bu uçların D anadoğrusu üzerindeki dik izdüşümleri, P_1 den itibaren alınan $\alpha_3 \overrightarrow{w}$ vektörünün ucudur.



Şekil 72

3-3. E küresel görüntüsünün B noktasındaki DARBOUX-RIBEAUCOUR türev formülleri

Birim küresi üzerinde bulunan her eğrinin normal eğriliği -1 e, geodezik burulması da sıfıra eşit olduğundan, eğer **E küresel görüntüsünün sınıfı** $\geqslant 2$ **ise**, bunun DARBOUX-RIBEAUCOUR türev formülleri, (47-5) dolayısiyle

$$\overrightarrow{w''} = \overrightarrow{b_1}' = \rho_g \overrightarrow{b} - \overrightarrow{w}, \quad \overrightarrow{b}' = -\rho_g \overrightarrow{b_1}, \quad \overrightarrow{w}' = \overrightarrow{b_1} \tag{3-22}$$

dir.

Bu formüllerdeki ρ_g, **doğrusal yüzeyin E küresel görüntüsünün geodezik eğriliğidir.** $\overrightarrow{W}$ doğrultu birim vektörü ile bunun birinci ve ikinci mertebeden türevleri cinsinden ρ_g şöyle yazılır:

$$\rho_g = \frac{(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w'}, \overrightarrow{w''})}{[(\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{w'})^2]^{3/2}}, \qquad (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{w'})^2 = 1, \tag{3-23}$$

Herhangi bir t parametresi cinsinden ρ_g yi veren formül aynıdır:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(3\text{-}24) \qquad \rho_s = \frac{(\vec{w}, \vec{w}', \vec{w}'')}{[(\vec{w} \wedge \vec{w}')^2]^{3/2}}, \qquad \vec{w}^2 = 1.$$

$\vec{W}$ vektörü, birim vektörü değilse, kolaylıkla görülür ki

$$(3\text{-}25) \qquad \rho_s = \frac{(\vec{w}^*, \vec{w}^{*\prime}, \vec{w}^{*\prime\prime})}{[(\vec{w}^* \wedge \vec{w}^{*\prime})^2]^{3/2}}, \qquad w^{*2}$$

dır.

4. Bir doğrusal yüzeyin üç invariantı

Bunlar

$$\rho_s, \quad p \text{ ve } \bar{\alpha}_3$$

ile gösterilen büyüklüklerdir.

a. Doğrusal yüzeyin E küresel görüntüsünün geodezik eğriliğini gösteren ρ_s, herhangi bir t parametresi cinsinden (3-24) formülü ile verilmişti. Bu formül gösterir ki: Anadoğruların $\vec{W}$ doğrultu birim vektörünün, ya da E küresel görüntüsünün pozitif dolanım yönleri, ayrı ayrı değiştirildiklerinde, salt değeri aynı kalan ρ_s nin işareti değişir. Bu iki yön değiştirme aynı zamanda yapıldığında, ρ_s nin salt değeri de işareti de aynı kalır. t parametresi nasıl seçilirse seçilsin, ρ_s yi veren formül aynı kalacağından, ρ_s: **doğrusal yüzeyin bir invariyantıdır.** Bu bakımdan, parametreyi belirtmeden, ρ_s yi

$$(4\text{-}1) \qquad \rho_s = \frac{(\vec{w}, \vec{dw}, \vec{d^2w})}{[(\vec{w} \wedge \vec{dw})^2]^{3/2}}$$

biçiminde yazmak çok daha elverişlidir.

b. Dağılma veya CHASLES parametresi adı verilen P de, en genel hâlde, (2-16; 2) formülü ile, yâni

$$p = \frac{(\vec{x}^{*\prime}, \vec{w}', \vec{w})}{(\vec{w}' \wedge \vec{w})^2}$$

formülü ile verilmişti.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu formülün de göstereceği gibi, p : ne $\vec{W}$ nin yönüne, ne E küresel görüntüsü üzerinde seçilen pozitif dolanım yönüne, ne doğrusal yüzey üzerinde alınan C^* doğrultmanına, ne de t parametresine bağlı değildir. Başka deyişle, bu saydığımız elemanlardan biri ya da tümü değiştiğinde, (2-16; 2) formülü aynı değeri verecektir. Bu sonuca, p nin geometrik tanımından da varılabilir. Bu bakımlardan, p **dağılma parametresi de, doğrusal yüzeyin ikinci bir invariyantıdır** ve bunu da, parametreyi belirtmeden yazmak yararlıdır:

$$P = \frac{(\vec{dx^*}, \vec{dw}, \vec{w})}{(\vec{dw} \wedge \vec{w})^2} \tag{4-2}$$

c. (3-9) ile tanımlanan $\bar{\alpha}_3$ de, anadoğrular üzerindeki pozitif yönle, E küresel görüntüsünün yönü, ayrı ayrı değiştirildiğinde, işaretini değiştirir. Bu değişikliklerin ikisi birden aynı zamanda yapıldığında, $\bar{\alpha}_3$ nin işareti aynı kalır. Doğrusal yüzey üzerinde seçilecek doğrultmana ve t parametresine bağlı olmayan $\bar{\alpha}_3$ de **yüzeyin bir invariyantıdır.** Aynı düşünceler nedeniyle, $\bar{\alpha}_3$ yi de, değişkeni belirtmeden, (3-9) yardımıyle

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{\vec{w} \cdot \vec{dx^*} - d\left(\dfrac{\vec{dx^*} \cdot \vec{dw}}{\vec{dw^2}}\right)}{\sqrt{\vec{dw^2}}} \tag{4-3}$$

biçiminde yazmak daha uygun olur.

4-1. Doğrusal yüzeyin invariyantları yardımıyle boğaz çizgisinin eğrilik ve burulması

(3-5) denkleminden, yâni

$$\vec{x_1^*} = -p\vec{b} + \bar{\alpha}_3 \vec{w}$$

den, s ye göre iki kez türev alarak ve (3-22) formüllerini kullanarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(4\text{-}4)\quad \begin{cases} \vec{x}_i^{\,\circ} = (p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3)\,\vec{w}^{\circ} - p^{\circ}\,\vec{b} + \bar{\alpha}_3^{\circ}\,\vec{w}\,, \\ \vec{x}_i^{\,\circ\circ} = [\,(p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3)^{\circ} + p^{\circ}\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3^{\circ}]\,\vec{w}^{\circ} \\ \qquad + [\rho_\varepsilon(p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3) - p^{\circ\circ}]\,\vec{b} \\ \qquad + (\bar{\alpha}_3^{\circ\circ} - p\rho_\varepsilon - \bar{\alpha}_3)\,\vec{w} \end{cases}$$

bulunur. Buradan

$$(4\text{-}5)\quad \begin{cases} \vec{x}_i^{\,\circ 2} = p^2 + \bar{\alpha}_3^2\,, \\ \vec{x}_i^{\,\circ} \wedge \vec{x}_i^{\,\circ\circ} = (p^{\circ}\,\bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\circ})\,\vec{w}^{\circ} + (p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3)\,(\bar{\alpha}_3\,\vec{b} + p\,\vec{w}) \\ (\vec{x}_i^{\,\circ} \wedge \vec{x}_i^{\,\circ\circ})^2 = (p^{\circ}\,\bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\circ})^2 + (p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3)^2\,(\bar{\alpha}_3^2 + p^2) \\ (\vec{x}_i^{\,\circ}, \vec{x}_i^{\,\circ\circ}, \vec{x}_i^{\,\circ\circ\circ}) = (p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3)^2\,(\bar{\alpha}_3\rho_\varepsilon - p) \\ \qquad + (p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3)\,(p\,\bar{\alpha}_3^{\circ\circ} - \bar{\alpha}_3\,p^{\circ\circ}) \\ \qquad + (p^{\circ}\,\bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\circ})\,[\,(p\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3)^{\circ} + p^{\circ}\rho_\varepsilon + \bar{\alpha}_3^{\circ}] \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

elde edileceğinden, —FERRUH ŞEMİN, **Diferansiyel Geometri I**, s. 85, formül (29-9; 10) nedeniyle— C_1 boğaz çizgisinin ρ_1 eğriliği ile τ_1 burulması

$$
(4\text{-}6)\quad
\begin{cases}
\rho_1^2 = \dfrac{(\vec{x}_1^{\,\circ} \wedge \vec{x}_1^{\,\circ\circ})^2}{(\vec{x}_1^{\,\circ})^2} = \dfrac{(p^\circ \bar{\alpha}_1 - p\,\bar{\alpha}_3^{\,\circ})^2 + (p\,\rho_2 + \bar{\alpha}_3)^2\,(\bar{\alpha}_3^{\,2} + p^2)}{(p^2 + \bar{\alpha}_3^{\,2})^3} \\[2ex]
\tau_1 = \dfrac{(\vec{x}_1^{\,\circ}, \vec{x}_1^{\,\circ\circ}, \vec{x}_1^{\,\circ\circ\circ})}{(\vec{x}_1^{\,\circ} \wedge \vec{x}_1^{\,\circ\circ})^2} \\[2ex]
\quad = \dfrac{(p\,\rho_2 + \alpha_3)^3\,(\bar{\alpha}_3\,\rho_2' - p) + (p\,\rho_2 + \bar{\alpha}_3)\,(p\,\bar{\alpha}_3^{\,\circ\circ} - \bar{\alpha}_3\,p^{\circ\circ})}{(p^\circ \bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\,\circ})^2 + (p\,\rho_2 + \bar{\alpha}_3)^2\,(\bar{\alpha}_3^{\,2} + p^2)} \\[2ex]
\qquad + \dfrac{(p^\circ \bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\,\circ})\,[(p\,\rho_2 + \bar{\alpha}_3)^\circ + p^\circ \rho_2 + \bar{\alpha}_3^{\,\circ}]}{(p^\circ \bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\,\circ})^2 + (p\,\rho_2 + \bar{\alpha}_3)^2\,(\bar{\alpha}_3^{\,2} + p^2)}
\end{cases}
$$

dır.

Böylece, boğaz çizgisinin ρ_1 eğriliği ile τ_1 burulması, E küresel görüntüsünün s yayı cinsinden bulunmuş olur. Öte yandan, (3-16) formülünden, C_1 boğaz çizgisinin σ_1 yayı için

$$
(4\text{-}7)\qquad \sigma_1 = \int (p^2 + \bar{\alpha}_3^{\,2})\,ds = F(s),\quad \sigma_1[0] = F(o)
$$

bulunacağından, ρ_1 ve τ_1, σ_1 cinsinden de belirlenmiş olur.

4-2. $\vec{W}$ doğrultu birim vektörünün, C_1 boğaz çizgisinin FRENET diküçyüzlüsüne göre tanımı

C_1 boğaz çizgisinin FRENET birim vektörleri $\vec{a}_j$, $(j = 1, 2, 3)$ ise, (3-5) bağıntısı dolayısiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(4-8) $$\frac{\vec{x_1}^{\circ}}{\sigma_1^{\circ}} = \vec{a_1}' = \frac{1}{\sigma_1^{\circ}} (-p\vec{b} + \bar{\alpha}_3 \vec{w})$$

dir.

Öte yandan

63

(4-9) $$\frac{\vec{x_1}^{\circ} \wedge \vec{x_1}^{\circ\circ}}{|\vec{x_1}^{\circ} \wedge \vec{x_1}^{\circ\circ}|} = \vec{a_3}'$$

(4-10) $$\frac{\vec{x_2}^{\circ} \wedge \vec{x_1}^{\circ\circ}}{|\vec{x_2}^{\circ} \wedge \vec{x_1}^{\circ\circ}|} \wedge \frac{\vec{x_1}^{\circ}}{\sigma_1^{\circ}} = \frac{(\vec{x_1}^{\circ})^2 \cdot \vec{x_1}^{\circ\circ} - (\vec{x_1}^{\circ} \cdot \vec{x_1}^{\circ\circ}) \vec{x_1}^{\circ}}{\sigma_1^{\circ} \cdot |\vec{x_2}^{\circ} \wedge \vec{x_1}^{\circ\circ}|} = \vec{a_2}'$$

olacağından, eğer

$$\vec{w} = \alpha \vec{a_1}' + \beta \vec{a_2}' + \gamma \vec{a_3}', \quad (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$$

dersek, önce

$$\alpha = \vec{w} \cdot \vec{a_1}$$

eşitliği, (4-8) dolayısiyle

(4-11) $$\alpha = \frac{\bar{\alpha}_3}{\sigma_1^{\circ}} = \frac{\bar{\alpha}_3}{\sqrt{p^2 + \alpha_3^2}}$$

verir.

Aynı biçimde

$$\beta = \vec{w} \cdot \vec{a_2}^{\circ}$$

dır.

$\vec{w} \cdot \vec{x_1}^{\circ} = \bar{\alpha}_3$ eşitliğinden türev alarak ve $\vec{w}^{\circ} \cdot \vec{x_1}^{\circ} = 0$ ı kullanarak

$$\vec{w} \cdot \vec{x_1}^{\circ\circ} = \bar{\alpha}_3^{\circ}$$

bulunacağından, (4-10) yardımiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\beta = \frac{(\vec{x}_1^{\circ})^2 \bar{\alpha}_3^{\circ} - (\vec{x}^{\circ}_1 \cdot \vec{x}_1^{\circ\circ})\,\bar{\alpha}_3}{\sigma_1^{\circ}\,|\vec{x}_1^{\circ} \wedge \vec{x}_1^{\circ\circ}|}$$

bulunur.

(3-5) ve (4-4; 1) den

$$\vec{x}_1^{\circ} \cdot \vec{x}_1^{\circ\circ} = pp^{\circ} + \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_3^{\circ}$$

elde edileceğinden, (4-5; 1, 2, 3) bağıntıları

[4-12] $$\beta = \frac{(p^2 + \bar{\alpha}_3^2)\,\bar{\alpha}_3^{\circ} - \frac{1}{2}\,(p^2 + \bar{\alpha}_3^2)^{\circ}\,\bar{\alpha}_3}{\sqrt{p^2 + \bar{\alpha}_3^2}\;\sqrt{(p^{\circ}\,\bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\circ})^2 + (p\,\rho_g + \bar{\alpha}_3)^2\,(p^2 + \bar{\alpha}_3^2)}}$$

verir.

Nihayet, (4-9) dolayısıyle

$$\gamma = \vec{w} \cdot \vec{a}_3^{\,1} = \frac{(\vec{w}, \vec{x}_1^{\circ}, \vec{x}_1^{\circ\circ})}{|\vec{x}_1^{\circ} \wedge \vec{x}_1^{\circ\circ}|}$$

olacağından, (4-5,2; 3) nedeniyle

[4-13] $$\gamma = \frac{p\,(p\,\rho_g + \bar{\alpha}_3)}{\sqrt{(p^{\circ}\,\bar{\alpha}_3 - p\,\bar{\alpha}_3^{\circ})^2 + (p\,\rho_g + \bar{\alpha}_3)^2\,(p^2 + \bar{\alpha}_3^2)}}$$

olur.

(4-7) bağıntısını kullandığımızda da, (α, β, γ) bileşenleri, C_1 boğaz çizgisinin σ_1 yayı cinsinden belirlenmiş olurlar.

4-3. Bir doğrusal yüzeyin, üç invariyantı ile belirlenmesi. ρ_g, p ve $\bar{\alpha}_3$ invariyantları, E küresel görüntüsünün s yayı cinsinden verildiklerinde, doğrusal yüzey de uzayda, durum farkıyle belirli olur.

Gerçekten, (4-6) ve (4-7) denklemleri, C_1 boğaz çizgisini uzayda, durum farkiyle belirlerler —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, Temel Teorem II, s. 184—. Ayrıca; (4-11), (4-12) ve (4-13) bağıntıları da, ana-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

doğruların C_1 boğaz çizgisine göre durumunu saptayacaklarından, doğrusal yüzey uzayda, durum farkiyle, belirlenmiş olur.

Bir başka yol da şudur :

Birim küresi üzerinde bulunan E küresel görüntüsünün geodezik eğriliğinin

$$\rho_g = \rho_g(s)$$

biçiminde verilmesi durumunda, E nin ρ eğriliği ile τ burulması —FERRUH ŞEMİN, **Diferansiyel Geometri I**, s. 157, formül (48-18, 19) dolayısiyle—

(4-14) $$\rho = \sqrt{1 + \rho_g'^2}, \qquad \tau = -\frac{\rho_g'}{1 + \rho_g^2}$$

eşitlikleriyle belirlidirler.

Buna göre, —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 184, Temel Teorem II dolayısiyle de— birim küresi üzerinde eğrilik ve burulması (4-14) denklemleriyle verilen, birbirine eşit sonsuz E eğrisi vardır. Bunlardan birisinin vektörel denklemi

$$\vec{w} = \vec{w}(s), \qquad \vec{w}^2 = 1$$

ise, bunun yardımiyle

$$\vec{b}_1 = \vec{w}', \qquad \vec{b} = \vec{w} \wedge \vec{w}'$$

vektörleri tanımlanacağından, boğaz çizgisinin $\vec{X}_1 = \vec{X}_1(S)$ vektörel denklemi, (3-5) in, yâni

$$\vec{x}_1' = -p\,\vec{b} + \alpha_3\,\vec{w}$$

nin integre edilmesiyle bulunacaktır:

(4-15) $$\vec{x}_1(s) = [\int (-p\,\vec{b} + \alpha_3\,\vec{w})\,ds] + \vec{k}, \quad \vec{k} : \text{sabit vektör}$$

$$= [l(s)\,\vec{b}_1 + m(s)\,\vec{b} + n(s)\,\vec{w}] + \vec{k}$$

(4-15) formülündeki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$l = l(s), \quad m = m(s), \quad n = n(s)$$

fonksiyonları, (3-22) formülleri nedeniyle

$$(4\text{-}16) \qquad \begin{cases} l^{\circ} - m\rho_g + n = 0 \\ l\rho_g + m^{\circ} + p = 0 \\ -l + n^{\circ} - \bar{\alpha}_3 = 0 \end{cases}$$

denklemlerini doğrularlar.

Görülüyorki (4-14) denklemi yardımiyle, birim küresi üzerinde bulunan sonsuz E eğrisi arasından seçilen birisi, boğaz çizgisini bir öteleme farkıyle belirlemektedir.

Karşıt olarak, böylece bulunacak doğrusal yüzeyin üç invariyantı da, verilenlerin aynıdır.

4-4. Üç invariyantı sâbit olan doğrusal yüzeyler

Doğrusal yüzeyin üç invariyantı, sıfırdan farklı, birer sâbite ise, (4-6), (4-11), (4-12), (4-13) formüleri, sıra ile

$$(4\text{-}17) \qquad \rho_1^2 = \left(\frac{p\rho_g + \bar{\alpha}_3}{p^2 + \bar{\alpha}_3^2} \right)^2, \qquad \tau_1 = \frac{\bar{\alpha}_3\rho_g - p}{p^2 + \bar{\alpha}_3^2}$$

$$(4\text{-}18) \qquad \alpha = \frac{\bar{\alpha}_3}{p^2 + \alpha_3^2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{p}{p^2 + \bar{\alpha}_3^2}$$

verir.

ρ_1 = sâbit, τ_1 = sâbit olduğundan, C_1 boğaz çizgisi bir **dairesel helistir.** D anadoğruları da, C_1 in doğrulayan düzlemleri üzerindedir ve teğet —veya binormal— le sâbit açı oluşturmaktadır.

Ayrıca şurasını da ekleyelim ki, ρ_g = sâbit $\neq 0$ olması, doğrusal yüzeyin doğrultman konisinin bir dönel koni olduğunu gösterir. Karşıt olarak, görülür ki böyle bir helikoidin üç invariyantı sâbittir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 4-1.

Boğaz çizgisinin sınıfı ≥ 3 doğrultu birim vektörünün sınıfı da ≥ 2 olan bir doğrusal yüzeyin üç invariyantının sıfırdan farklı sâbitlere eşit olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu doğrusal yüzeyin bir genel helikoid olması, başka deyişle, bir dairesel helisi kesen ve bunun doğrulayan düzlemine değişmez bir biçimde bağlı bulunan bir doğrunun oluşturduğu yüzey olmalıdır.

Ayrıca şurasını da ekleyelim ki bu hâlde boğaz çizgisi, doğrusal yüzeyin bir geodezigidir.

Özel haller 4-1. Üç sâbit invariyanttan birinin ya da bir kaçının sıfıra eşit olması

a. $\rho_2 = 0, \qquad p \neq 0, \qquad \bar{\alpha}_3 \neq 0$

E küresel görüntüsü bir büyük çember olacağından, doğrusal yüzey **düzlem doğrultmanlıdır.** (4-17) formülleri

$$\rho_1^2 = \frac{\bar{\alpha}_3}{p^2 + \bar{\alpha}_3^2}, \qquad \tau_1 = -\frac{p}{p^2 + \bar{\alpha}_3^2}$$

vereceğinden, boğaz çizgisi gene bir **dairesel helistir.** (4-18) formüllerinde bir değişiklik olmayacağından, doğrusal yüzey bir **dik helikoiddir.**

b. $\bar{\alpha}_3 = 0, \quad p \neq 0, \quad \rho_2 \neq 0.$

(4-17) ve (4-18) formülleri, sıra ile

$$\rho_1^2 = \frac{\rho_2}{p}, \qquad \tau_1 = -\frac{1}{p}$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1$$

vereceğinden, bir **dairesel helisin binormallerinin oluşturacakları helikoid** söz konusudur.

c. $p = 0, \qquad \bar{\alpha}_3 \neq 0, \quad \rho_2 \neq 0$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(4-17) ve (4-18) formülleri

$$\rho_1^2 = \frac{1}{\bar{\alpha}_2}, \quad \tau_1 = \frac{g}{\bar{\alpha}_2}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

vereceğinden, bir dairesel helisin teğetleriyle elde edilen **açılabilen hell-koid** söz konusudur.

d. $\rho_2 = 0, \quad p = 0, \quad \bar{\alpha}_3 \neq 0.$

Gene aynı (4-17), (4-18) formülerine göre, bu kez

$$\rho_1 = \frac{1}{\bar{\alpha}_3}, \quad \tau_1 = 0$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

vereceğinden, C_1 **bir çemberdir** ve bunun teğetleriyle elde edilen **bir düzlem, doğrusal yüzeyi oluşturur.**

e. $p = 0, \quad \bar{\alpha}_3 = 0, \quad \rho_2 \neq 0.$

Bu hâlde, (3-5) bağıntısı

$$\vec{x}_1'' = \vec{0}$$

vereceğinden, C_1 **boğaz çizgisi bir nokta-eğri, doğrusal yüzey de bir konidir.**

f. $\bar{\alpha}_1 = 0, \quad \rho_2 = 0, \quad p \neq 0$

(4-17) ve (4-18) formülleri

$$\rho_1 = ,0 \qquad \tau_1 = -\frac{1}{p}$$

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \quad \gamma = 1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

verir. Öte yandan, $\bar{\alpha}_3 = 0$ bağıntısı, Teorem 3-1 dolayısiyle, veya son eşitlikler nedeniyle, anadoğrular, C_1 i dik keserler. Doğrusal yüzey, bir doğruyu dik kesen doğruların oluşturdukları bir **dik konoiddir.** Şöyle de söylenebilir: $\rho_s = 0$ olduğu için, E küresel görüntüsü bir büyük çemberdir. (3-5) formülü

$$\vec{a}_1 \sigma_1^* = \vec{x}_1^* = -p\vec{b}, \quad p = st,$$

eğer

$$\vec{a}_1 = -\vec{b}, \qquad \sigma_1 = ps, \qquad (\sigma_1 = 0 \to s = 0)$$

alınırsa, demînki büyük çember düzlemine dik olan $\vec{b}$, sâbit doğrultuludur. —Bu sonuca, $\vec{b}$ nin türevini alarak da varılabilir— Dolayısiyle C_1 bir doğrudur. $\vec{b}$ ye paralel olan bu doğruya da, $\vec{W}$, yâni anadoğrular diktir.

g. $\rho_s = 0, \quad p = 0, \quad \bar{\alpha}_3 = 0$

Bu hâlde, $\vec{X}_1^* = \vec{0}$ olacağından, C_1 **boğaz çizgisi bir noktaeğridir.** $\rho_s = 0$ da, doğrusal yüzeyin düzlem doğrultmanlı olduğunu, yâni yüzeyin bir düzlem olduğunu gösterir.

Teorem 4-2.

Boğaz çizgisinin sınıfının $\geqslant 3$ doğrultu birim vektörünün sınıfının da $\geqslant 2$ olduğu bir doğrusal yüzeyin üç invariyantının ayrı ayrı sıfıra eşit olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu doğrusal yüzeyin bir dik helikoid, dairesel helisin binormallerinin doğurduğu helikoid ve dairesel helisin teğetlerinin oluşturdukları açılabilen helikoid olmasıdır. İki invariyantın aynı zamanda sıfıra eşit olması için gerekli ve yeterli koşul, doğrusal yüzeyin bir dik konoid, bir koni ve bir düzlem olmasıdır. Nihayet, üç invariyantı sıfıra eşit olan bir doğrusal yüzey bir düzlemdir ve bunun karşıtı da doğrudur.

4-5. Birinci invariyantı ile son ikisinin oranı sâbit olan doğrusal yüzeyler.

$\rho_s = \text{sâbit}, \quad \dfrac{\bar{\alpha}_3}{p} = \text{sâbit}$ bağıntılarını sağlayan doğrusal yüzeyleri arıyoruz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a. Sâbitlerin ikisi de sıfırdan farklıdır.

$\rho_2 =$ sâbit $\neq 0$ olması demek, E küresel görüntüsünün bir çember, doğrultman koninin de dönel olması demektir. Buna göre, dönel koninin ekseninden geçen her düzlem, bir boğaz düzleminin paralelidir. Böyle olunca, C_1 boğaz çizgisinin çeşitli noktalarından, doğrultman koninin ekseninə çizilen paralel doğrular, bu noktalardaki boğaz düzlemleri üzerinde bulunur. Bunlardan herhangi birisi, örneğin C_1 in bir P_1 noktasından geçeni, bu noktadaki teğet düzlem olduğundan, P_1 deki teğetinden de geçer. Öte yandan, $\dfrac{\bar{\alpha}_3}{p} =$ sâbit $\neq 0$ bağıntısı da, (3-17) ve (3-18) bağıntıları nedeniyle, $\bar{\beta} =$ sâbit $\neq 0$ vereceğinden, anadoğrular C_1 boğaz çizgisini sâbit açı altında keserler, dolayısiyle, C_1 in teğetleri de doğrultman koninin eksenyle sâbit bir açı oluştururlar. Bu da C_1 in bir genel helis olduğunu gösterir. (4-6; 1) formülü, bu hâlde de (4-17; 1) i, yâni

$$\rho_1^2 = \frac{(p\,\rho_2 + \bar{\alpha}_3)^2}{(p^2 + \bar{\alpha}_1^2)^2}$$

vereceğinden, bunu

$$\rho_1^2 = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{(\rho_2 + \dfrac{\bar{\alpha}_3}{p})^2}{[1 + (\dfrac{\bar{\alpha}_1}{p})^2]^2}$$

biçiminde yazdığımızda, ρ_1 in sâbit olmadığı, yâni C_1 in dairesel helis olmadığı görülür. Ayrıca, —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 157, formül (49-2) nedeniyle— C_1 in asal normali, doğrultman koninin eksenine dik olduğundan, boğaz düzlemi, C_1 in doğrulayan düzlemidir ve C_1 boğaz çizgisi de doğrusal yüzeyin bir geodezigidir. Bu sonucun karşıtı da doğrudur.

PAUL APPEL Teoremi 4-2.

Boğaz çizgisinin ve doğrultu birim vektörünün sınıflarının ≥ 2 olduğu bir doğrusal yüzeyde, ρ_2 ve $\dfrac{\bar{\alpha}}{p}$ invariyantlarının sıfırdan farklı sâbitlere

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

eşit olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu doğrusal yüzeyin bir genel helisi kesen ve bunun doğrulayan düzlemine değişmez bir biçimde bağlı olan bir doğru tarafından meydana getirilmesidir. Ayrıca, yüzeyin boğaz çizgisi olan bu genel helis, doğrulayan yüzeyin de bir geodeziğidir.

Özel haller 4-2. ρ_g ve $(\bar{\alpha}_3/\rho)$ invariyantlarından birinin ya da ikisinin birden sıfıra eşit olması

a. $\rho_g = 0$, $\dfrac{\bar{\alpha}_3}{\rho} = \text{sâbit} \neq 0$. Doğrultman koni bir düzlemdir ve doğrusal yüzey de, deminkinin aynıdır, yalnız anadoğrular sâbit bir doğrultuya diktir.

b. $\rho_g = \text{sâbit} \neq 0$, $\dfrac{\bar{\alpha}_3}{\rho} = 0$

Doğrultman koni bir dönel konidir ve $\bar{\beta} = \dfrac{\pi}{2}$ olacağından, doğrusal yüzey bir genel helisin binormalleriyle elde edilir.

c. $\rho_g = 0$, $\dfrac{\bar{\alpha}_3}{\rho} = 0$

Yüzey, düzlem doğrultmanlıdır. Anadoğrular, C_1 boğaz çizgisini dik keserler. (4-6) formülerine göre de, C_1 in eğrilik ve burulması

$$\rho_1 = 0, \qquad \tau_1 : \text{belirsiz}$$

olduğundan, C_1 bir doğrudur. Dolayısiyle, doğrusal yüzey, bir doğruyu dik kesen doğruların oluşturdukları bir **dik konoid**dir. İspat için, özel haller 4-1, f de kullanılabilir.

Teorem 4-3.

Boğaz çizgisinin ve doğrultu birim vektörünün sınıflarının ≥ 2 olduğu bir doğrusal yüzeyde, ρ_g ve $\dfrac{\bar{\alpha}_3}{\rho_g}$ invariyantlarının sıfıra eşit olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu doğrusal yüzeyin bir genel helisi kesen ve bu-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

nun doğrulayan düzlemine değişmez bir biçimde bağlı olan ve sâbit bir doğrultuya dik kalan bir doğru veya bu helisin binormalleri tarafından meydana getirilmesi, ya da bir dik konoid olmasıdır. Genel helis hâlinde, bu helis gene, doğrulayan düzlemin bir geodeziğidir.

5. Doğrusal yüzeylerde temel kuvadratik formlar

a. Birinci form

1) Doğrultman herhangi bir eğridir.

E küresel görüntüsünün s yayı cinsinden

$$\vec{x} = \vec{x}(s)$$

vektörel denklemiyle tanımlanan C doğrultmanlı doğrusal yüzeyin

$$\vec{y}(s, \lambda) = \vec{x}(s) + \lambda \vec{w}(s)$$

vektörel denkleminden

$$\vec{dy} = (\vec{x}' + \lambda \vec{w}')\, ds + \vec{w}\, d\lambda \tag{5-1}$$

elde edileceğinden, I temel kuvadratik formu, (3-3) formülü yardımiyle

$$I = [(\lambda - \bar{\lambda})^2 + p^2]\, ds^2 + (\alpha_1 ds + d\lambda)^2 \tag{5-2}$$

biçimindedir.

Birinci formun katsayıları da

$$E = (\lambda - \bar{\lambda})^2 + p^2 + \alpha_1^2, \quad F = \alpha_1, \quad G = 1, \tag{5-3}$$

$$H^2 = (\lambda - \bar{\lambda})^2 + p^2$$

dir.

Doğrultmanı ile doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 1$ olan bir doğrusal yüzeyde, yüzeyin bir O (s, λ) noktasındaki I formu (5-2), bunun katsayıları da (5-3) formülleriyle belirlidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2) Doğrultman boğaz çizgisidir.

Doğrultman, C_1 boğaz çizgisi ise, (5-2) ve (5-3) de: $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3$, $\bar{\lambda} = 0$ dır.

(5-4) $$I = (\lambda^2 + p^2)\,ds^2 + (\alpha_3\,ds + d\lambda)^2,$$

(5-5) $$E = \lambda^2 + p^2 + \bar{\alpha}_3^2, \quad F = \bar{\alpha}_3, \quad G = 1, \quad H^2 = \lambda^2 + p^2$$

b. İkinci form

1) Doğrultman herhangi bir eğridir.

Doğrusal yüzeyin vektörel denkleminden,

$$\vec{y}_s = \vec{x}^{\,s} + \lambda \vec{w}^{\,s}, \quad \vec{y}_\lambda = \vec{w}, \quad \vec{y}_{s^2} = \vec{x}^{\,ss} + \lambda \vec{w}^{\,ss}$$

$$\vec{y}_{s\lambda} = \vec{w}^{\,s}, \quad \vec{y}_{\lambda^2} = \vec{0}$$

elde edileceğinden, (24-4) formülleri kullanıldığında

$$HL = [\vec{x}^{\,s} + \lambda \vec{w}^{\,s}, \vec{w}, \vec{x}^{\,ss} + \lambda \vec{w}^{\,ss}], \quad HM = [\vec{x}^{\,s}, \vec{w}, \vec{w}^{\,s}], \quad HN = 0$$

olur.

(3-3) ve (3-22) formülleri yardımiyle

(5-6) $$HL = -[(\lambda - \bar{\lambda})^2 + p^2]\,\rho_c + p^s\,(\lambda - \bar{\lambda}) + p\,(\bar{\lambda}^s - \alpha_3), \quad HM = -p, \quad N = 0$$

bulunur.

Doğrultmanı ile doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 2$ olan bir doğrusal yüzeyde, bir $Q(s, \lambda)$ noktasındaki II formunun katsayıları (5-6) denklemleriyle belirlidir.

2) Doğrultman boğaz çizgisidir.

Doğrultman C_1 boğaz çizgisi ise, (5-6) formüllerinde, $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3$, $\lambda = 0$ olacağından,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(5-7) $$HL = -(\lambda^2 + p^2)\rho_x + p^2\ \lambda - p\tilde{\alpha}_3, \quad HM = -p, \quad N = 0$$

dır.

Uygulama 5-1. Doğrusal yüzeylerde GAUSS eğriliği

(36-4; 2) formülü ile tanımlanan GAUSS eğriliğinin, bir doğrusal yüzey için değeri, herhangi bir C doğrultmanı hâlinde, (5-6) nedeniyle

(5-8) $$K = -\frac{M^2}{H^2} = -\frac{p^2}{[(\lambda-\bar{\lambda})^2 + p^2]^2},$$

boğaz çizgisi için de, $\bar{\lambda} = 0$ olacağından

(5-9) $$K = -\frac{p^2}{(\lambda^2 + p^2)^2}$$

dir.

6. Doğrusal yüzeylerde asimptotik çizgiler

Bir doğrusal yüzeyin iki asimptotik çizgi ailesinden birisini, § 38 de söylediklerimize göre, yüzeyin anadoğruları oluşturur. Öteki ailenin diferansiyel denklemine gelince, en genel hâlde, bu bir RICCATI diferansiyel denklemidir. Bu denklemi, doğrultmanın boğaz çizgisi ve parametrelerden birinin de, yüzeyin küresel görüntüsünün s yayı olması hâlinde, bulacağız.

Doğrusal yüzeyin asimptotik çizgilerini bulmanın bir yolu, II formunu sıfıra eşitlemektir. (5-7) formüllerine göre $N = 0$ olduğundan, aranan diferansiyel denklem

$$(L\,ds + 2M\,d\lambda)\,ds = 0$$

dır. Görüldüğü gibi, bir çözüm

$$ds = 0 \rightarrow s = \text{sabit}$$

yâni anadoğrulardır.

İkinci çözüme gelince; L ve M nin (5-7) deki değerleri, yukarıki denklemde yerlerine konuldukta.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\lambda' = -\frac{\rho_s}{2p}\lambda^2 + \frac{p'}{2p}\lambda - \frac{p\rho_s + \bar{\alpha}_3}{2} \tag{6-1}$$

RICATI denklemi elde edilir. Bilindiği gibi, genelikle, bu diferansiyel denklemin çözümü de kuvadratürlere indirgenemez.

Teorem 6-1.

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıfları ≥ 2 olan bir doğrusal yüzeyde, iki asimptotik çizgi ailesinden birisini anadoğrular oluştururlar. Öteki asimptotik çizgilerin meydana getirdikleri ailenin diferansiyel denklemi ise bir RICCATI denklemi olduğundan, genellikle, kuvadratürlerle çözülemez.

Analiz'den bilindiği gibi, (6-1) RICCATI denkleminin genel çözümü

$$\lambda(s) = \frac{k f_1(s) + f_2(s)}{k f_3(s) + f_4(s)}, \qquad k = \text{sabit} \tag{6-2}$$

biçimindedir.

Bu bağıntıdaki $f_i(s)$ ler, s değişkeninin belirli fonksiyonlarıdır. k sâbitinin her yeni değeri, anadoğrulardan farklı asimptotik çizgilerden birini verir.

k dört değişik k_j, $(j = 1, \ldots, 4)$ değeri ile elde edilen dört eğrisel asimptotik

$$\lambda_j = \lambda_j(s), \qquad (j = 1, \ldots, 4)$$

fonksiyonlarıyla tanımlanan eğriler olsun. Bunların, bir D anadoğrusunu kestikleri noktalara Q_j, $(j = 1, \ldots, 4)$ dersek ve

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_4} : \frac{a_2 - a_3}{a_2 - a_4}$$

çifte oranını kısaca

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (4\,a) \tag{6-3}$$

biçiminde gösterirsek, (6-2) eşitliğinden

$$(4\,\lambda) = (4\,k) = \text{sabit}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

çıkar. Buna göre: **Bir doğrusal yüzeyde, herhangi dört eğrisel asimptotik çizginin bir anadoğruyu kestiği dört noktanın çifte oranı, tüm anadoğrular için aynıdır.**

6-1. Eğrisel asimptotikleri veren RICCATI diferansiyel denkleminin özel halleri

a. Doğrusal yüzeyin küresel görüntüsü bir büyük çemberse, $p_* = 0$ dır ve yüzey, düzlem doğrultmanlıdır ve (6-1) diferansiyel denklemi

$$\lambda' = \frac{p'}{2p}\lambda - \frac{\bar{\alpha}_3}{2} \tag{6-4}$$

biçimine gireceğinden, bir **lineer denklem** söz konusudur. Bunun integre edilmesi sonucunda

$$\lambda = \frac{-\int \bar{\alpha}_3 \sqrt{|p|}\, ds + a}{2\sqrt{|p|}}, \quad a = \text{sabit} \tag{6-5}$$

bulunur.

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 2$ **olan bir doğrusal yüzey düzlem doğrultmanlı ise, bunun eğrisel asimptotik çizgileri kuvadratürlerle bulunur ve asimptotiklerin** λ **ları, (6-5) denklemiyle belirlidir.**

Eğer bu doğrusal yüzeylerin **dağılma parametreleri de sâbitse,** eğrisel asimptotik çizgiler

$$\lambda = -\frac{1}{2}\int \bar{\alpha}_3\, ds + b, \quad b = \text{sabit} \tag{6-6}$$

eşitliğiyle elde edilir.

Dağılma parametresi yerine, $\bar{\alpha}_3$ sâbitse, (6-5) bağıntısı λ için

$$\lambda = \frac{-\bar{\alpha}_3 \int \sqrt{|p|}\, ds + a}{2\sqrt{|p|}} \tag{6-7}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Nihayet, hem p hem de $\bar{\alpha}_3$ sâbitse, 4-3, a nedeniyle, doğrusal yüzey bir dik helikoiddir ve bunun eğrisel asimptotikleri, (6-5) dolayısiyle

$$\lambda = -\frac{\bar{\alpha}_3}{2}\, s + b, \quad b = \text{sabit} \tag{6-8}$$

denklemiyle belirlidir. Görülüyor ki: **Bir dik helikoidde, herhangi iki eğrisel asimptotiğin anadoğrular üzerinde ayırdıkları parçalar aynıdır.**

b. Boğaz çizgisi bir asimptotik çizgidir. Bu durumda, (6-1) denkleminin bir çözümü: $\lambda = 0$ olacağından, önce şu sonuca varılır:

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıflarının $\geqslant 2$ olan bir doğrusal yüzeyde, boğaz çizgisinin bir asimptotik çizgi olması için gerekli ve yeterli koşul, yüzeyin üç invariyantı arasında, (6-1) nedeniyle

$$p\,\rho_g + \bar{\alpha}_1 = 0 \tag{6-9}$$

bağıntısının bulunmasıdır.

(6-9) koşulunun sağlanması halinde, (6-1) dolayısiyle, eğrisel asimptotik çizgiler

$$l = \frac{1}{\lambda}\,, \quad l' = -\frac{p^\circ}{2p}\, l + \frac{\rho_g}{2p} \tag{6-10}$$

lineer denkleminin integral eğrileridir; yâni

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{|p|}} \int \frac{\rho_g}{\sqrt{|p|}}\, ds + a, \quad a = \text{sabit} \tag{6-11}$$

dir.

Üstelik, p dağılma parametresi de sâbitse, eğrisel asimptotikler

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2p} \int \rho_g\, ds + a, \quad a = \text{sabit} \tag{6-12}$$

denklemiyle tanımlanır.

Eğer ayrıca, p den başka, ρ_g = sâbit ise, (6-9) dolayısiyle üç invariyant sâbit olacağından ve (6-9) ile (4-17; 1) bağıntıları nedeniyle de, **boğaz çiz-**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

gisi bir doğrudur ve yüzey de bir dik konoiddir. Bu yüzeyin eğrisel asimptotiklerini veren denklem de

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{g}{2p}\, s + a \tag{6-13}$$

dir.

Uyarı 6-1.

1. Boğaz çizgisinin normal eğriliği

$$\rho_{n_0} = \frac{L}{E}$$

olduğuna göre, (5-5) ve (5-7) formüllerinden

$$\rho_{n_0} = -\frac{p\,\rho_g + \bar{\alpha}_3}{p^2 + \bar{s}_3^2} \tag{6-14}$$

elde edilir.

Boğaz çizgisinin bir asimptotik olmasını gerektiren (6-9) koşulu, $\rho_g = 0$ dan da çıkarılabilir.

2. Aynı (6-9) koşulu,

$$\vec{w}^* \cdot \vec{x}_1^{\circ\circ} = 0$$

denkleminden de çıkarılabilir, çünkü bu hâlde, C_1 bir asimptotiktir.

3. (3-17) ve (3-18) formülerine göre, anadoğrunun boğaz çizgisiyle oluşturdukları $\bar{\beta}$ açısı

$$\frac{\bar{\alpha}_3}{p} = -\operatorname{cotg} \bar{\beta} \tag{6-15}$$

bağıntısıyle belirlidir. Buna göre, (6-9) bağıntısını

$$\rho_g = \operatorname{cotg} \bar{\beta} \tag{6-16}$$

biçiminde yazabiliriz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Öte yandan —FERRUH ŞEMİN, **Diferansiyel Geometri I**, s. 156, formül (48-17) nedeniyle— (6-16)

$$\text{tg}\,\theta\,\text{tg}\,\bar{\beta} = -1 \tag{6-17}$$

verir. Buna göre (6-16) dolayısiyle:

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 2$ olan bir doğrusal yüzeyde, boğaz çizgisinin bir asimptotik çizgi olması için gerekli ve yeterli koşul, anadoğruların boğaz çizgisiyle oluşturdukları açının cotg.nın, küresel görüntüsünün geodezik eğriliğine eşit olmasıdır.

Veya (6-17) nedeniyle:

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 2$ olan bir doğrusal yüzeyde, boğaz çizgisinin bir asimptotik çizgi olması için gerekli ve yeterli koşul, C_1 teğetlerinin, E küresel görüntüsünün binormallerine paralel bulunmalarıdır.

Bu ikinci sonuca şöyle de varılabilir: C_1 boğaz çizgisinin FRENET birim vektörleri $\overset{\hookrightarrow}{a}_j$, (j = 1, 2, 3) ise, (6-9) dolayısiyle, C_1 bir doğru değilse

$$\vec{w}^{\circ} = \vec{a}_1, \quad \vec{w}^{\circ\circ} = \rho_1 \vec{a}_2 = \rho_2 \vec{b} - \vec{w}, \quad \vec{x}_1^{\circ} = -p\vec{b} + \bar{\alpha}_3 \vec{w}$$

$$\vec{x}_1^{\circ} \cdot \vec{w}^{\circ\circ} = \rho_1 \vec{x}_1^{\circ} \cdot \vec{a}_2 = -(p\,\rho_2 + \bar{\alpha}_3) = 0$$

dır.

$\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ vektörlerine dik olan $\vec{x}_1^{\circ}$, $\vec{a}_3$ binormallerine paraleldir.

7. Doğrusal yüzeylerde eğrilik çizgileri

Doğrusal yüzeylerde eğrilik çizgilerinin (39-1) diferansiyel denklemi, doğrultmanın boğaz çizgisi olması halinde, (5-5) ve (5-7) formüleri yardımiyle

$$\text{(EM—FL)}\quad ds^2 - L\,ds\,d\lambda - M\,d\lambda^2 = 0$$

yâni

$$(7\text{-}1)\quad [(\bar{\alpha}_3\rho_2 - p)(\lambda^2 + p^2) - p^{\circ}\bar{\alpha}_3\lambda]\,ds^2 - [-(\lambda^2 + p^2)\rho_2 + p^{\circ}\lambda - p\bar{\alpha}_3]\,d\lambda\,ds + p\,d\lambda^2 = 0$$

biçimindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a. Boğaz çizgisi bir eğrilik çizgisidir.

C_1 boğaz çizgisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, (7-1) denkleminde $\lambda=0$ yaparak bulunur. Açılabilenden farklı bir doğrusal yüzeyde $p \neq 0$ olacağından, bu koşul

$$\bar{\alpha}_3 \rho_g - p = 0 \tag{7-2}$$

dır.

Aynı sonuca, (39-6) bağıntısını yani

$$(\vec{x}_1^{\,*}, \vec{w}^{\,o}, \vec{w}^{\,**}) = 0 \tag{7-3}$$

ı kullanarak da varılabilir.

Karşıt olarak, C_1 boğaz çizgisi boyunca (6-19) bağıntısı sağlanıyorsa, C_1 bir eğrilik çizgisidir. Bunu şöyle gösterebiliriz: Doğrusal yüzeyin boğaz çizgisi boyunca normali $\vec{w}$ olduğundan, C_1 bir eğrilik çizgisi ise, C_1 boyunca değişen yüzey normalleri bir açılabilen oluşturacaklarından, burun dağılma parametresi sıfır olacaktır. Oysa bu dağılma parametresinin değeri, (2-13) nedeniyle

$$(\vec{x}_1^{\,*}, \vec{w}^{\,**}, \vec{w}^{\,o}) / \vec{w}^{\,o3} = 0$$

dır bu ise, (7-2) yi verir.

C_1 eğrilik çizgisi ise, (6-19) nedeniyle, doğrusal yüzeyin eğrilik çizgilerini veren diferansiyel denklem, (7-1) den

$$-p^* \bar{\alpha}_3 \lambda\, ds^2 + [(\lambda^2+p^2)\rho_g - p^* \lambda + p\bar{\alpha}_3]\, d\lambda\, ds + p\, d\lambda^2 = 0 \tag{7-4}$$

biçiminde elde edilir.

b. Dağılma parametresi sâbittir.

Böyle olunca, (6-21) diferansiyel denklemi

$$\lambda^* = -\frac{\lambda^2 + p^2 + \bar{\alpha}_3^2}{\bar{\alpha}_3} \tag{7-5}$$

biçimine girer ve ayrıca

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(7-6) $$\lambda = \text{sabit}$$

çözümü elde edilir. Buna göre,

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıfları $\geqslant 2$ olan bir doğrusal yüzeyde, boğaz çizgisi bir eğrilik çizgisi ise ve dağılma parametresi de sâbitse, bir eğrilik çizgisi ailesinin herhangi iki eğrisi, asındoğrular üzerinde eşit uzunluklar ayırır. C_2, bu aileye aittir.

Eğer ayrıca $\bar{\alpha}_3$ de sâbitse, (6-19) dolayısıyle, doğrusal yüzeyin üç invaryantı sâbittir. Öte yandan, C_1 boğaz çizgisinin eğrilik ve burulmasını veren (4-17) formülleri gösterir ki

$$\rho_1 = \text{sabit}, \quad \tau_1 = 0$$

dır, yâni C_1 **boğaz çizgisi bir çemberdir.** Teorem 4-1 nedeniyle de:

Bir doğrusal yüzeyin, birbirine (6-19) formülü ile bağlı bulunan üç invaryantı sâbitse, eğrilik çizgisi olan boğaz çizgisi bir çemberdir ve yüzey bir dönel hiperboloiddir. Bunun iki eğrilik çizgisi ailesi de yüzeyin paralelleriyle meridyenlerinden oluşur.

Zâten bu özel hâlde, (7-5) nin integre edilmesiyle de

(7-7) $$\lambda = \text{tg}\ (s - \bar{\alpha}_3 \sqrt{p^2 + \bar{\alpha}_3^2}\ s)$$

bulunur.

c. (7-2) bağıntısı, (3-17) ve (3-18) yardımiyle

(7-8) $$\rho_2 = \frac{p}{\bar{\alpha}_3} = -\text{tg}\ \bar{\beta}$$

verir. Öte yandan, —FERRUH SEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 156, formül (48-17) nedeniyle

(7-9) $$\rho_2 = -\text{tg}\ \theta$$

dır ve dolayısiyle

(7-10) $$\text{tg}\ \bar{\beta} = \text{tg}\ \theta$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıfları ≥ 2 olan bir doğrusal yüzeyde, boğaz çizgisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, anadoğruların boğaz çizgisiyle oluşturdukları açının tg. nın, küresel görüntüsünün geodezik eğriliğinin ters işaretlisine eşit olmasıdır.

Veya, (7-10) nedeniyle

Boğaz çizgisi ile doğrultu birim vektörünün sınıfları ≥ 2 olan bir doğrusal yüzeyde, boğaz çizgisinin bir eğrilik çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, boğaz çizgisinin teğetlerinin, küresel görüntüsünün asal normallerine paralel bulunmalarıdır.

Bu ikinci sonuca şöyle de varılabilir: Uyarılar 6-1 de yapıldığı gibi,

$$\vec{w}^{**} = \rho_1 \vec{a}_2 = \rho_2 \vec{b} - \vec{w}, \quad \vec{x}_1^{*} = -p\vec{b} + \alpha_1 \vec{w}, \qquad (\rho_1 \neq 0)$$

olduğundan, (7-2) nedeniyle

$$\vec{w}^{**} \wedge \vec{x}_1^{*} = (\rho_2 \alpha_3 - p)\, \vec{w}^{*} = \vec{0}$$

dür.

8. Doğrusal yüzeylerde geodezik çizgiler

Bir geodezik çizgi boyunca asal normal yüzeye de normal olacağından bir doğrusal yüzeyin geodezik çizgilerinin diferansiyel denklemi, (2-4; 1) nedeniyle

$$(8\text{-}1) \qquad (\vec{n}_0 + \lambda \vec{n}_\infty, \vec{y}^{*}, \vec{y}^{**}) = 0$$

dir.

Doğrultman olarak boğaz çizgisi aldığımızda, (3-5) ve (3-22) nedeniyle

$$\vec{n}_0 = \vec{w}^{*}, \quad \vec{n}_\infty = \vec{w}^{*} \wedge \vec{w} = -\vec{b}, \quad \vec{n} = \vec{w}^{*} - \lambda \vec{b}$$

$$\vec{y} = \vec{x}_1 + \lambda \vec{w}, \quad \vec{y}^{*} = \vec{x}_1^{*} + \lambda^{*} \vec{w} + \lambda \vec{w}^{*} = \lambda \vec{w}^{*} - p\vec{b} + (\lambda^{*} + \alpha_1)\vec{w}$$

$$\vec{y}^{**} = (2\lambda^{*} + p\rho_2 + \alpha_1)\vec{w}^{*} + (\lambda \rho_2 - p^{*})\vec{b} + (\lambda^{**} - \lambda + \alpha_1^{*})\vec{w}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

olacağından, doğrusal yüzeyin geodezik çizgilerinin diferansiyel denklemi, (8-1) dolayısiyle

$$(8\text{-}2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ \lambda & -p & \lambda' + \bar{\alpha}_3 \\ 2\lambda^* + p\rho_* + \bar{\alpha}_3 & \lambda\rho_* - p^* & \lambda'' - \lambda + \bar{\alpha}_1^* \end{vmatrix} = 0$$

dır.

C_1 boğaz çizgisi doğrultman olarak alındığında, doğrusal yüzeyin geodezik çizgilerini veren (8-2) diferansiyel denklemi, görüldüğü gibi, $\lambda = \lambda(s)$ fonksiyonuna göre 2-nci mertebedendir.

Boğaz çizgisinin bir geodezik olması için gerekli ve yeterli koşul, yukarıki diferansiyel denkleminin bir çözümünün $\lambda = 0$ olması, yâni

$$\begin{vmatrix} -p & \bar{\alpha}_3 \\ -p^* & \bar{\alpha}_3^* \end{vmatrix} = 0$$

veya açtığımızda

$$(8\text{-}3)\qquad p^* \bar{\alpha}_3 - p\bar{\alpha}_1^* = 0$$

olmasıdır.

Bunu, $p \neq 0$ için

$$(8\text{-}4)\qquad p^2 \left(\frac{\bar{\alpha}_3}{p} \right)^* = 0$$

biçiminde yazarsak, (3-17) ve (3-18) dolayısiyle

$$(8\text{-}5)\qquad (\operatorname{Cotg} \bar{\beta})^* = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{\beta} = \text{sabit}$$

çıkar.

Karşıt olarak, boğaz çizgisi anadoğruları sâbit açı altında keserse, yâni $\bar{\beta} = \text{sâbit}$se, (8-2) nin bir çözümü $\lambda = 0$ olacağından, boğaz çizgisi bir geodezikdir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Hatta herhangi bir doğrultman, anadoğruları sâbit açı altında kesiyorsa ve geodezikse, boğaz çizgisidir. Gerçekten, herhangi bir C doğrultmanının anadoğruyu kestiği P noktasındaki FRENET birim vektörleri $\vec{a}_j^*$, (j = 1, 2, 3) eğrilik ve burulması ρ^*, τ^* ve yayı da s^* olsun. Bu yaya göre türevleri de (') ile gösterelim. C bir geodezik varsayıldığından, $\vec{a}_3^*$ vektörü P de yüzeye teğettir ve doğrultman anadoğrularla sâbit açı yaptığına göre

$$\vec{w} = \vec{a}_3^* \cos\varphi + \vec{a}_1^* \sin\varphi, \quad \varphi = \text{sabit}$$

yazılabilir. Buradan

$$\vec{w}' = (\rho^* - \tau^*)\,\vec{a}_2^*, \quad \vec{x}' = \vec{a}_1^*, \quad \vec{x}' \cdot \vec{w}' = 0$$

çıkarılacağından, C doğrultmanı, (2-16; 1) nedeniyle boğaz çizgisidir. Buna göre, şu teorem söz konusudur:

BONNET Teoremi 8-1.

Bir C doğrultmanı ile doğrultu birim vektörünün sınıflarının $\geqslant 2$ olduğu bir doğrusal yüzeyde, C doğrultmanı aşağıki üç koşuldan herhangi ikisini gerçekleştirdiğinde, geriye kalanı da doğrular:

1. **Anadoğruları sâbit açı altında kesmek.**
2. **Geodezik olmak**
3. **Boğaz çizgisi olmak**

Uyarılar 8-1.

a. (6-14) formülüne göre, C_3 boğaz çizgisinin P_3 noktasındaki ρ_{3n} normal eğriliği

$$\rho_{3n} = -\frac{p\,\rho_0 + \bar{\alpha}_3}{p^2 + \bar{\alpha}_3^2} \tag{6-14}$$

dir.

Boğaz çizgisinin ρ_{1g} geodezik eğriliğine gelince, bu da (41-5) gereğince

$$\rho_{1g} = (\vec{w}^{\circ}, \vec{x}_1^{\circ}, \vec{x}_1^{\circ\circ}) / (p^2 + \vec{\alpha}_3^2)^{3/2}$$

veya

(8-6) $$\rho_{1g} = (p^{\circ}\bar{\alpha}_3 - p\bar{\alpha}_3^{\circ}) / (p^2 + \bar{\alpha}_3^2)^{3/2}$$

dir.

Öte yandan, C_1 boğaz çizgisinin ρ_1 eğriliği

$$\rho_1^2 = \rho_{1g}^2 + \rho_{1n}^2$$

bağıntısını sağladığından, (6-14) ve (8-6) formülleri yardımiyle

$$\rho_1^2 = \frac{(p^{\circ}\bar{\alpha}_3 - p\bar{\alpha}_3^{\circ})^2 + (p\rho_g + \bar{\alpha}_3)^2 (p^2 + \bar{\alpha}_3^2)}{(p^2 + \bar{\alpha}_3^2)^2}$$

bulunur ki (4-6; 1) in aynıdır.

b. C_1 boğaz çizgisinin geodezik burulması, (47-6) formülüne göre

$$\tau_{1g} = \frac{(\vec{x}_1^{\circ}, \vec{w}^{\circ}, \vec{w}^{\circ\circ})}{\vec{x}_1^{\circ\circ}}$$

veya

(8-7) $$\tau_{1g} = \frac{\bar{\alpha}_3\rho_g - p}{p^2 + \bar{\alpha}_3^2}$$

ye eşittir.

İstenirse bu değer, (47-8) bağıntısı yardımiyle

(8-7)' $$\tau_{1g} = \frac{FM - FL}{EM}$$

formülü ile de hesaplanabilir.

9. Analitik inceleme

Herhangi bir $O(\vec{k})$, $(j = 1, 2, 3)$ dik eksen sistemine göre verilen ve bir t parametresi ile birlikte değişen

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(9-1) $x_1 = a(t)\, x_3 + b(t), \quad x_2 = c(t)\, x_3 + d(t)$

düzlemlerinin arakesiti olan D(t) doğrusu, bir doğrusal yüzey doğurur.

Bu denklemlerdeki

$$a = a(t), \quad b = b(t), \quad c = c(t), \quad d = d(t)$$

fonksiyonlarının, şimdilik, sınıflarının $\geqslant 1$ olduğunu varsayacağız.

(9-1) denklemlerini

(9-2) $$\frac{x_1 - b(t)}{a(t)} = \frac{x_2 - d(t)}{c(t)} = \frac{x_3 - 0}{1}$$

biçiminde yazarsak, D(t) doğrusunun, (b, d, o) noktasından geçtiği ve (a, c, 1) doğrultusuna paralel olduğu anlaşılır. C doğrultmanı olarak, yer vektörü

(9-3) $$\vec{x}(t) = b(t)\, \vec{k}_1 + d(t)\, \vec{k}_2$$

olan eğriyi ve doğrultu vektörü olarak da

(9-4) $$\vec{w}^*(t) = a(t)\, \vec{k}_1 + c(t)\, \vec{k}_2 + \vec{k}_3$$

ü aldığımızda, doğrusal yüzeyin yer vektörü

(9-5) $$\vec{y}(t, \lambda) = \vec{x}(t) + \lambda\, \vec{w}^*(t)$$

olur.

9-1. Yüzeyin bir D(t) anadoğrusu ile belirli olan boğaz noktası ve iki invariyantı

a. Boğaz noktası

Yüzeyin P(b, d, o) noktasındaki normaline $\vec{n}_o$ ve P den geçen D anadoğrusunun sonsuzdaki normaline de $\vec{n}_\infty$ dersek, D üzerindeki P_1 boğaz noktasının λ apsisi, § 2-3 de görüldüğü gibi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

(9-6) $$\bar{\lambda} = -\frac{\vec{n}_e \cdot \vec{n}_\infty}{\vec{n}^2_\infty}$$

dir.

Öte yandan, (9-3) ve (9-4) yardımiyle

(9-7) $$\vec{n}_e = \vec{x}' \wedge \vec{w}^* = d'\vec{k}_1 - b'\vec{k}_2 + (cb' - a\,d')\vec{k}_3,$$

(9-8) $$\vec{n}_\infty = \vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w} = c'\vec{k}_1 - a'\vec{k}_2 + (c\,a' - a\,c')\vec{k}_3$$

bulunacağından, boğaz noktası, (9-6) kullanıldığında

(9-9) $$\bar{\lambda} = \frac{ac(b'c' + a'd') - (1+c^2)a'b' - (1+a^2)c'd'}{(1+c^2)a'^2 - (1+a^2)c'^2 - 2ac\,a'c'}$$

apsisi ile belirlidir.

b. Dağılma parametresi

(2-19) formülü, (9-3) ve (9-4) yardımiyle

(9-10) $$p = \frac{(a^2 + c^2 + 1)(b'c' - a'd')}{(1+c^2)a'^2 - (1+a^2)c'^2 - 2ac\,a'c'}$$

verir.

c. ρ_e invariyantının değeri

(3-25) formülünü kullandığımızda

(9-11) $$\rho_e = \frac{(a^2 + c^2 + 1)^{3/2}(a'c'' - c'a'')}{[(1+c^2)a'^2 + (1+a^2)c'^2 - 2ac\,a'c']^{3/2}}$$

olur.

10. Alıştırmalar

1. Bir $\vec{X} = \vec{X}(S)$ uzay eğrisinin asal normaleriyle tanımlanan doğrusal yüzeyin boğaz çizgisini ve dağılma parametresini bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu yüzeyin vektörel denklemi

$$\vec{y}(\lambda, \sigma) = \vec{x}(\sigma) + \lambda \vec{a}_2(\sigma)$$

olduğuna göre, (2-16) formülleri

$$\bar{\lambda} = -\frac{\vec{x}' \cdot \vec{a}_2'}{(\vec{a}_2' \wedge \vec{a}_2)^2} = \frac{\rho}{\rho^2 + \tau^2}$$

$$\beta = -\frac{(\vec{x}', \vec{a}_2', \vec{a}_2)}{\vec{a}_2'^2} = \frac{-\tau}{\rho^2 + \tau^2}$$

verir.

2. Bir doğrusal yüzeyin anadoğrusu boyunca değişen yüzey normallerinin geometrik yerini bulunuz.

(3-3) formülü nedeniyle

$$\vec{n}_s = \vec{x}^* \wedge \vec{w} = (-\bar{\lambda}\vec{w}^* - p\vec{b} + \alpha_s \vec{w}) \wedge \vec{w} = \bar{\lambda}\vec{b} - p\vec{w}^*,$$

$$\vec{n}_\infty = \vec{w}^* \wedge \vec{w} = -\vec{b}$$

olduğundan, $Q(\lambda, s)$ noktasındaki normal vektör

$$\vec{n} = \vec{n}_s + \lambda \vec{n}_\infty = (\bar{\lambda} - \lambda)\vec{b} - p\vec{w}^*$$

dır. Bir anadoğru boyunca değişen normallerin oluşturdukları doğrusal yüzeyin vektörel denklemi

$$\vec{Z}(\mu, s) = \lambda \vec{w} + \mu [(\bar{\lambda} - \lambda)\vec{b} - p\vec{w}^*]$$

dır.

$P\{\vec{W}^*, \vec{b}, \vec{W}\}$ dik eksen sistemine göre, bu doğrusal yüzeyin bir $Q^*(\mu, S)$ noktasının X_j, $(j = 1, 2, 3)$ karteziyen koordinatları

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$X_1 = -p\mu, \quad X_2 = (\bar{\lambda} - \lambda)\mu, \quad X_3 = \lambda$$

olduğundan, bunlar arasında λ ve μ yü yokedersek

$$X_1 X_3 - p X_3 - \bar{\lambda} X_1 = 0$$

bulunacaktır. P noktası yerine; başlangıç noktası olarak, D nin boğaz noktasını alırsak,

$$x_3 = X_3 + \bar{\lambda}$$

koordinat değişimi

$$x_1 x_3 - p x_2 = 0$$

verecektir. Geometrik yer, **tepe noktası, verilen doğrusal yüzeyin D üzerindeki boğaz noktası olan, bir hiperbolik paraboloiddir.**

3. Bir dik eksen sisteminde

$$x_1 + t\, x_2 = 3t(1 + t^2)$$
$$x_2 + 2t\, x_3 = t^2(3 + 4t^2)$$

denklemleriyle verilen düzlemlerin arakesiti olan doğrunun doğurduğu doğrusal yüzeyin boğaz çizgisini ve dağılma parametresini bulunuz.

Verilen denklemleri

$$\frac{x_1 - 3t(1+t^2)}{-t} = x_3 = \frac{x_3 - \frac{t}{2}(3 + 4t^2)}{-\frac{1}{2t}}$$

biçiminde yazarsak, anadoğruların doğrultusu

$$\vec{w}^* (2t^2, -2t, 1)$$

ve doğrultmanın vektörel denklemi de

$$\vec{x} = 3t(1+t^2)\vec{k}_1 + \frac{t}{2}(3 + 4t^2)\vec{k}_3$$

dir. Buna göre, boğaz noktasını veren λ değeri ile p dağılma parametresi (2-19) formüleriyle hesaplanır:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{w}^{*\prime} = 4t\vec{k}_3 - 2\vec{k}_2, \quad \vec{w}^* \wedge \vec{w}^{*\prime} = 2(\vec{k}_3 + 2t\vec{k}_2 + 2t^2\vec{k}_1),$$

$$\vec{x}' = 3(1+3t^2)\vec{k}_1 + 3\left(\frac{1}{2} + 2t^2\right)\vec{k}_3$$

$$(\vec{x}', \vec{w}^* \wedge \vec{w}^{*\prime}, \vec{w}^*) = 6t(1+2t^2)^2,$$

$$(\vec{x}', \vec{w}^{*\prime}, \vec{w}) = -6(1+2t^2)^2$$

$$\bar{\lambda} = -\vec{w}^3 \frac{(\vec{x}', \vec{w}^* \wedge \vec{w}^{*\prime}, \vec{w}^*)}{(\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^*)^2} = -\frac{3}{2} t(1+2t^2)$$

Boğaz çizgisi

$$x_3 = 3t(1+t^2) - \frac{3}{2} t(1+2t^2)3t^2 = 3t(1-4t^4)$$

$$x_2 = 3t^2(1+2t^2)$$

$$x_1 = \frac{t}{2}(3+4t^2) - \frac{3}{2} t(1+2t^2) = -t^3$$

kartezyen denklemleriyle belirlidir.

Dağılma parametresine gelince

$$p = \vec{w}^{*3} \frac{(\vec{x}', \vec{w}^{*\prime}, \vec{w})}{(\vec{w}^{*\prime} \wedge \vec{w}^*)^3} = -\frac{3}{2}(1+2t^2)^2$$

dir.

$\bar{\lambda}$ ile p nin karşılaştırılmasında

$$\bar{\lambda} = pt$$

bulunur. (1-8) formülü gösterir ki

$$t = \operatorname{tg} \varphi$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

4. Herhangi bir doğrusal helikoidde boğaz çizgisi ile dağılma parametresini bulunuz.

Bir genel helikoid doğrusalsa, parametreli denklemleri

$$x_1 = a \operatorname{Cos} u - v \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} u$$

$$x_2 = a \operatorname{Sin} u + v \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} u$$

$$x_3 = h u + v \operatorname{Sin} \alpha, \qquad (a, \alpha, h : \text{sabit})$$

dir.

Doğrultman olarak

$$\vec{x} = a \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_1 + a \operatorname{Sin} u \, \vec{k}_2 + h u \, \vec{k}_3$$

dairesel helisini ve doğrultu birim vektörü olarak da

$$\vec{w} = -\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} u \, \vec{k}_1 + \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_2 + \operatorname{Sin} \alpha \, \vec{k}_3$$

ü aldığımızda, (2-16) formülleri yardımiyle

$$\vec{x}' = -a \operatorname{Sin} u \, \vec{k}_1 + a \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_2 + h \, \vec{k}_3$$

$$\vec{w}' = -\operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} u \, \vec{k}_1 - \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Sin} u \, \vec{k}_2$$

$$\vec{x}', \vec{w}' = 0, \quad (\vec{x}', \vec{w}', \vec{w}) = \operatorname{Cos} \alpha \, (a \operatorname{Sin} \alpha - h \operatorname{Cos} \alpha),$$

$$\vec{w}'' = \operatorname{Cos}^2 \alpha$$

olduğundan, (acosu, asinu, hu) dairesel helisi, boğaz çizgisi olarak bulunur. Öte yandan,

$$p = \frac{(\vec{x}', \vec{w}', \vec{w})}{\vec{w}''} = a \operatorname{tg} \alpha - h = \text{sabit}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

5. Bir dik eksen sisteminde karteziyen denklemi

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{a^2} - \frac{x_3^2}{b^2} = 1$$

olan dönel hiperboloidin boğaz çizgisini ve dağılma parametresini bulunuz.

Verilen denklemden çıkarılan

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{b} = t\left(1 - \frac{x_2}{a}\right),$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{b} = \frac{1}{t}\left[1 + \frac{x_2}{a}\right]$$

iki düzlem denklemi arasında t yokedildiğinde gene verilen yüzey elde edileceğine göre, bu iki düzlemin arakesiti, verilen dönel hiperboloidin bir anadoğrusudur.

Yukarıki iki denklem arasında sıra ile X_1 ve X_2 yi yokettiğimizde

$$\frac{1+t^2}{a} x_2 - 2\frac{t}{b} x_3 = t^2 - 1, \quad \frac{1+t^2}{a} x_1 + \frac{t^2-1}{b} x_3 = 2t$$

veya

$$x_1 = \frac{a}{b}\frac{1-t^2}{1+t^2} x_3 + 2a\frac{t}{1+t^2},$$

$$x_2 = 2\frac{a}{b}\frac{t}{1+t^2} x_3 + a\frac{t^2-t}{1+t^2}$$

olur. Buradan

$$\vec{w}^* = a(t^2-1)\vec{k}_1 - 2at\vec{k}_2 - b(t^2+1)\vec{k}_3$$

$$\vec{x} = 2a\frac{t}{1+t^2}\vec{k}_1 + a\frac{t^2-1}{t^2+1}\vec{k}_2, \quad \vec{x}^2 = a^2$$

$$\vec{w}^{*\prime} = 2at\vec{k}_1 - 2a\vec{k}_2 - 2bt\vec{k}_3$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{x}' = 2a\,\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\,\vec{k}_1 + 4a\,\frac{t}{(1+t^2)^2}\,\vec{k}_2$$

$$\vec{w}^* \wedge \vec{w}^{*\prime} = 2ab\,(t^2-1)\,\vec{k}_1 - 4abt\,\vec{k}_2 + 2a^2(t^2-1)\,\vec{k}_3$$

Vektörel denklemi $\vec{X} = \vec{X}(t)$ olan eğri, düzlemi $\vec{k}_3$ e dik a yarıçaplı çemberdir. Anadoğrular bu çemberle sâbit açı yaparlar.

B. AÇILABİLEN DOĞRUSAL YÜZEYLER

10. Tanım ve özelikler

Bir C_1 eğrisinin teğetleriyle tanımlanan doğrusal yüzeye, kısaca, **açılabilen yüzey** diyeceğiz.

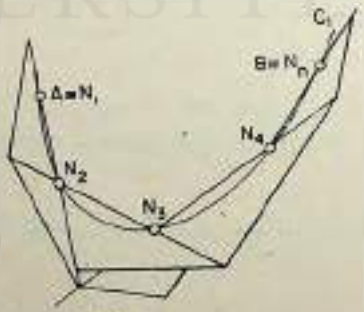
C_1, **sonlu** ya da **sonsuz uzaklıkta** bulunan bir **nokta-eğri** ise, bir **koni** veya bir **silindir** söz konusudur.

«Açılabilen» teriminin yorumu

C_1 in bir **uzay eğrisi** olması genel halinde, bunun bir $\overline{AB}$ parçasını birbirine yakın

$$A_1 = N_1,\ N_2, \cdots, N_{n-1},\ B = N_n$$

noktalarıyla işaretleyelim ve birbirini izleyen noktaları birleştiren kirişleri alalım. Birbiri ardınca gelen iki kiriş bir düzlem belirler ve böylece, yüzleri düzlemlerden oluşan bir çokyüzlü elde edilir. Bu çokyüzlünün; **katlanmadan, çekiştirilmeden** ve **yırtılmadan bi rdüzlem üzerine yayılabileceği** açıktır.



Şekil 73

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Öte yandan, deminki çokgenin kiriş uzunluklarına

$$\overline{N_p N_{p+1}} = u_p$$

der ve

$$\text{Max } u_p \to 0$$

olduğunu varsayarsak, deminki çokyüzlü, E nin tanımladığı ve teğetlerinden oluşan açılabilen yüzeye yaklaşır. Bu yüzeye neden **açılabilen** denildiği de, böylece —hiç olmazsa kabaca— anlaşılmış olur.

C_0 in teğetleri üzerinde, yayların artma ve eksilme yönlerinde, değme noktalarından itibaren alınan yarım doğrular da, yüzeyin ayrı iki **yaygısını** oluştururlar.

10.1. Vektörel tanım ve inceleme

Yayı σ_1, FRENET birim vektörleri $\vec{a}_j'$, (j = 1, 2, 3), eğrilik ve buruşması da ρ_1, τ_1 olan C_1 doğrultmanı $\vec{X}_1 = \vec{X}_1(s)$ vektörel denklemiyle verildiğinde, C_1 ile tanımlanan açılabilenin denklemi

$$\vec{y}(s, \lambda) = \vec{x}_1(s) + \lambda \vec{a}_1'(s) \tag{10-1}$$

dir.

$\vec{W} = \vec{a}_1'$ olduğundan, FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 93, formül (30-4) nedeniyle

$$\sigma_1^* = R_1(s) \tag{10-1}'$$

dir.

(2-16) formüllerine göre, C_1 eğrisi için FRENET formüllerini kullandığımızda, $R_1 = 0$ yani koni hâlini bir yana bırakırsak

$$\bar{\lambda} = 0, \quad p = 0 \tag{10-2}$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 10-1.

Sınıfı ≥ 2 olan bir C_1 uzay eğrisinin tanımladığı açılabilen yüzeyde, C_1 çizgisi yüzeyin boğaz çizgisidir, ve dağılma parametresi de özdeş olarak sıfırdır.

Karşıt olarak, bir doğrusal yüzeyde

$$p = 0$$

ise, (3-5) formülü, C_1 boğaz çizgisinin teğeti için

(10-3) $$\vec{x}_1^{\,\circ} = \alpha_1 \vec{w}$$

verir.

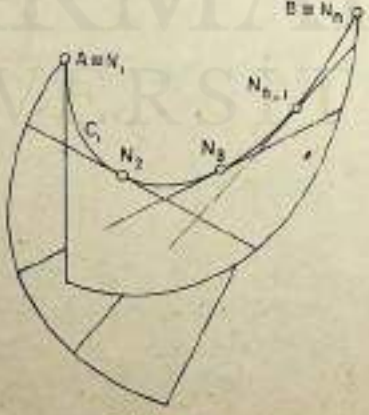
§ 4-4, e ye göre, $p = 0$, $\overline{\alpha_1} = 0$ halinde bir **koni** söz konusudur. Eğer $\vec{k} =$ sâbit, $\vec{k} \cdot \vec{w} = 0$ ise, yüzey bir **düzlemdir.** Bu iki özel hâl bir yana bırakıldığında, şu teorem elde edilir:

Teorem 10-2.

Sınıfı ≥ 2 olan bir doğrusal yüzeyde, $\alpha_1 \neq 0$ ve $\vec{k} \cdot \vec{w} \neq 0$ $\vec{k} =$ sâbit ise, yüzeyin bir açılabilen yüzey olması için gerekli ve yeterli koşul

$$p \equiv 0$$

dır.



Şekil 74

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

10-2. Açılabilen yüzeyin bir Q (S, λ) noktasındaki normal vektörü

Açılabilen yüzeyin bir Q(s, λ) normal vektörü, (10-1) formülüne göre

$$\vec{n}(s,\lambda) = \vec{y}_s \wedge \vec{y}_\lambda = -\lambda\, \vec{a}_3', \quad (\rho_1 \neq 0)$$

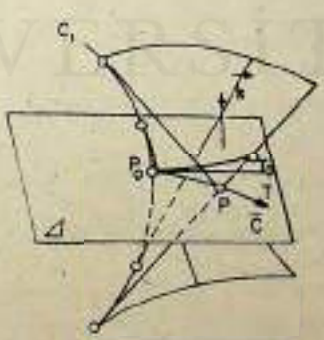
olduğundan, şu sonuca varırız:

Sınıfı $\geqslant 2$ olan bir C_1 uzay eğrisinin tanımladığı açılabilen yüzeyin $P_1(\sigma_1, o)$ boğaz noktasındaki teğet düzlemi belirsizdir, aynı noktadan geçen anadoğrunun herhangi bir noktasındaki teğet düzlem de, bu anadoğru ile belirli olan asimptot düzlemdir, yâni C_2 in $P_1(\sigma_1, o)$ noktasındaki oskülatör düzlemdir.

10-3. Dönüm ayrıtı

Bir açılabilen yüzeyin C_1 boğaz çizgisine dönüm ayrıtı da denilir. Bunun nedeni aşağıda açıklanmıştır.

Bir S açılabilen yüzeyinin herhangi bir Δ düzlemiyle elde edilen $\bar{C}$ kesitinin C_1 ile ortak P_0 noktası, genellikle, $\bar{C}$ nin bir **dönüm** noktasıdır. Bu yüzden C_1 e, S açılabilen yüzeyinin **dönüm ayrıtı** adı verilir. S nin iki ayrı **yaygısı** olduğundan, $\bar{C}$ nin P_0 da böyle bir noktası bulunacağı önceden kestirilebilir. Nitekim, koni özel hâlinde, tepeden geçen bir Δ düzlemi, yüzeye teğet değilse, koniyi, tepesinde kesişen iki doğru boyunca keser.



Şekil 75

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Genel hâlde, $\bar{C}$ nin P_0 noktasının bir dönüm noktası olduğunu, şöyle gösterebiliriz:

Açılabilen yüzeyin vektörel denklemi, (10-1) dolayısıyle

$$\vec{y}(s, \lambda) = \vec{x}_1(s) + \lambda \vec{a}_1(s) \tag{10-4}$$

olduğundan, P_0 ın yüzey üzerindeki koordinatlarını (0, 0) olarak alır ve bu noktayı başlangıç noktası seçersek, P_0 dan geçen herhangi bir Δ düzleminin denklemi

$$\vec{k} \cdot \vec{z} = 0, \quad \vec{k} = \text{sabit vektör} \tag{10-5}$$

dür.

İki yüzeyin arakesitlerinin bir noktasındaki teğeti yüzeylerin bu noktadaki normallerine dik olduğundan, C nin P deki teğeti $\vec{PT}$, P_0 daki teğeti de $\vec{P_0T_0}$ ise,

$$s = 0 \quad \text{için} \quad \vec{PT} = \vec{P_0T_0}$$

dır.

$\bar{C}$ nin $\vec{\bar{y}}$ yer vektörü, (10-4) ve (10-5) bağıntıları nedeniyle

$$\vec{y} = \vec{\bar{y}}, \quad \vec{y} \cdot \vec{k} = 0$$

eşitliklerini sağlar. İkincisi yardımıyle bulunacak λ yı, $\vec{y}$ nin (10-4) değerinde yerine koyduğumuzda

$$\vec{\bar{y}} = \vec{x}_1(s) - \frac{\vec{k} \cdot \vec{x}_1(s)}{\vec{k} \cdot \vec{a}_1'(s)} \cdot \vec{a}_1(s) = \frac{\vec{k} \wedge (\vec{x}_1 \wedge \vec{a}_1')}{\vec{k} \cdot \vec{a}_1'} \tag{10-6}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{a}_1' = 0$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$P_0(0, 0)$ noktası için $\vec{X}_1(0) = \vec{0}$ olduğundan, $\vec{y}(o) = \vec{0}$ dır, yâni $\bar{C}$ P_0 dan geçer.

C eğrisinin P(s) noktasındaki teğetini bulmak için, (10-6) ile verilen $\vec{y}$ nin s ye göre türevini alalım:

$$\vec{y}' = \rho_1(s)\left[\frac{\vec{k} \wedge (\vec{x}_1 \wedge \vec{a}_2')}{\vec{k} \cdot \vec{a}_1'} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}_2'}{(\vec{k} \cdot \vec{a}_1')^2}\,\vec{k} \wedge (\vec{x}_1 \wedge \vec{a}_1')\right]$$

veya

$$\vec{y}' = \rho_1(s)\,(\vec{k} \cdot \vec{x}_1) \cdot \frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_1'}{(\vec{k} \cdot \vec{a}_1')^2}, \quad (\vec{k} \cdot \vec{a}_1' \neq 0, \quad \rho_1 \neq 0) \tag{10-7}$$

Görülüyor ki $\vec{X}_1(o) = \vec{0}$ olduğundan,

$$\vec{y}'(o) = \vec{0}$$

dır, dolayısiyle $\bar{C}$ eğrisinin P_0 noktası düzgün değildir. Buna göre, C kesitinin düzgün olmayan P_0 noktasındaki teğetini bulmak için, bunun (10-6) ile verilen yer vektörünün, P_0 noktasında sıfır-vektörden farklı ilk türev vektörünü bulmamız gerekir. Bunun için de, (10-7) ile tanımlanan $\vec{y}'$ yardımiyle, $\vec{y}$ nin, şimdilik, ikinci ve üçüncü mertebeden türevlerini alır ve bu ifadelerde $\vec{X}_1(o) = \vec{0}$ yaparsak, sıra ile şu değerleri elde ederiz:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

$$
(10.8)\quad
\begin{cases}
\vec{y}'^{\circ}(o) = \rho_1(0)\cdot \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{a}_1'(0)}{\vec{k}\cdot\vec{a}_1'(0)}, \\[2ex]
\vec{y}''^{\circ}(0) = [2\rho_1^{\circ}(0)\,\vec{k}\cdot\vec{a}_1'(0) - 3\rho_1^{2}(0)\,\vec{k}\cdot\vec{a}_2'(0)] \\[2ex]
\qquad \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{a}_3'(0)}{[\vec{k}\cdot\vec{a}_3'(0)]^2} - 2\rho_1(0)\tau_1(0)\,\dfrac{\vec{k}\wedge\vec{a}_2'(0)}{\vec{k}\cdot\vec{a}_1'(0)}
\end{cases}
$$

Görülüyor ki eğer P_0 noktasında

$$
(10\text{-}9)\qquad \rho_1(o)\neq 0,\quad \vec{k}\cdot\vec{a}_1'(o)\neq 0,\quad \vec{k}\wedge\vec{a}_2'(o)\neq\vec{0}
$$

ise, $\bar{C}$ nin P_0 noktasındaki teğeti, ikinci mertebeden $\vec{y}''(0)$ vektörüne veya

$$\vec{k}\wedge\vec{a}_2'(0)$$

vektörüne paraleldir.

$\bar{C}$ eğrisinin P_0 noktasında, teğetine göre durumunu incelemek için, $\vec{y}''(0)$ ile vektörel çarpımı, P_0 da sıfır-vektörden farklı ilk türev vektörün mertebesini bulmamız gerekir. (10-9) koşulları altında ve ayrıca $\tau_1(o)\neq 0$ için

$$
\vec{y}''(0)\wedge\vec{y}'^{\circ\circ}(0) = 2\rho_1^{3}(0)\tau_1(0)\,\frac{\vec{k}}{\vec{k}\cdot\vec{a}_2'(0)}\neq\vec{0},\quad (p=2,\ q=3)
$$

olacağından, şu teorem elde edilir:

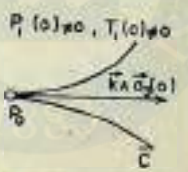
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 10-3.

C_1 boğaz çizgisinin sınıfı ≥ 4 olan bir S açılabilen yüzeyi herhangi bir $\triangle$ düzlemi ile kesildiğinde, $\triangle$ nın C_1 ile ortak P_o noktasında C_1 in eğrilik ve burulması sıfırdan farklı ise, ayrıca $\triangle$ düzlemi C_1 in P_o noktasındaki oskülatör düzlemiyle çakışmıyorsa, ve P_o daki teğetinden geçmiyorsa, $\overline{C}$ kesitinin P_o noktası, p çift ve q tek olduğundan, —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 52, (Şek. 21-4) deki gibi— birinci türden bir dönüm noktasıdır.

C_1 eğrisi de, bu yüzden, S açılabilen yüzeyinin **dönüm ayrıtıdır.**

Özel haller 10-1.



Şekil 76

a. Eğer C_1 boğaz çizgisinin P_o noktasında

$$\rho_2(0) \neq 0, \quad \tau_1(0) = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{a}_2(0) \neq 0, \quad \vec{k} \wedge \vec{a}_2'(0) \neq \vec{0}$$

ise, teğet gene $\vec{\overline{y}}_o'$ veya $\vec{k} \wedge \vec{\overline{a}}_o'(0)$ a paraleldir. Buna karşılık, $\overline{C}$ nin P_o daki teğete göre durumunu incelemek için,

$$\vec{\overline{y}}^{o3}(0) \wedge \vec{\overline{y}}^{o4}(0) = \vec{0}$$

olduğundan, mertebesi daha yüksek olan türev vektörlere bakmak gereke

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

cektir. Buna göre, önce, $\vec{\bar{y}}^{(p+q)}(0)$ ı hesaplayalım. Kolaylıkla görülür ki

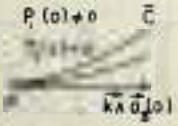
$$\vec{\bar{y}}^{(p)}(0) \wedge \vec{\bar{y}}^{(p+q)}(0) = \rho_1^{q}(0)\,\tau_1^{q}(0)\,\frac{\vec{k}}{\vec{k}\cdot\vec{a}_1'(0)},$$

$$\tau_1'(0) \neq 0, \quad (p=2,\ q=4)$$

dür.

Teorem 10-4.

C_1 boğaz çizgisinin sınıfı ≥ 5 olan bir S açılabilen yüzeyi, herhangi bir $\triangle$ düzlemi ile kesildiğinde, $\triangle$ nın C_1 ile ortak P_0 noktasında C_1 in eğriliği sıfırdan farklı ve burulması sıfıra eşitse, ayrıca $\triangle$ düzlemi C_1 in P_0 noktasındaki oskülatör düzlemiyle çakışmıyor ve P_0 daki teğetinden de geçmiyorsa, $\bar{C}$ kesitinin P_0 noktası (p ve q çift olduğundan) ikinci türden bir dönüm noktasıdır —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 52, Şek. 21-3 deki gibi—



Şekil 77

b. Eğer C_1 in P_0 noktasında

$$\rho_1(0) = 0, \quad \rho_1'(0) \neq 0, \quad \tau_1(0) \neq 0, \quad \vec{k}\cdot\vec{a}_1'(0) \neq 0,$$

$$\vec{k} \wedge \vec{a}_1'(0) \neq \vec{0}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ise, bu noktada $\bar{C}$ nin teğeti, $\vec{\bar{y}}^{\circ} = \vec{0}$ olacağından,

$$\vec{\bar{y}}^{\circ\circ\circ}(0) = 2\,\rho_1^{\circ}(0)\,\frac{\vec{k} \wedge \vec{a}_3'(0)}{\vec{k} \cdot \vec{a}_1'(0)}$$

a_1 veya gene $\vec{k} \wedge \vec{a}_3'(0)$ vektörüne paraleldir. $\bar{C}$ nin, P_0 daki teğetine göre durumunu incelemek için, önce

$$\vec{\bar{y}}^{\circ\circ}(0) \wedge \vec{\bar{y}}^{\circ\circ\circ\circ}(0)$$

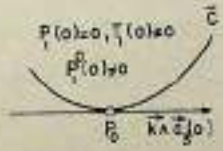
ın sıfır-vektörden farklı olup olmadığına bakmamız gerekir. Hesap sonucunda

$$\vec{\bar{y}}^{\circ\circ}(0) \wedge \vec{\bar{y}}^{\circ\circ\circ\circ}(0) = 12\,\rho_1^{\circ}(0)\,\tau_1(0)\frac{\vec{k}}{[\vec{k} \cdot \vec{a}_1'(0)]^2} \neq \vec{0}, \quad (p=3,\ q=4)$$

bulunur.

Teorem 10-5.

C_1 boğaz çizgisinin sınıfı ≥ 5 olan bir S açılabilen yüzeyi herhangi bir $\triangle$ düzlemiyle kesildiğinde, $\triangle$ nın C_1 ile ortak P_0 noktasında C_1 in eğriliği sıfıra eşit, burulması sıfırdan farklı ve eğriliğin yaya göre birinci mertebeden türevi sıfır değilse, ayrıca $\triangle$ düzlemi C_1 in P_0 noktasındaki oskülatör düzlemi ile çakışmıyor ve C_1 in P_0 daki teğetinden de geçmiyorsa, $\bar{C}$ kesitinin P_0 noktası (p: tek ve q: çift olduğundan), P_0 bir dönüm noktası değildir. —FERRUH ŞEMİN, **Diferansiyel Geometri I**, s. 52, Şek. 21-1 de olduğu gibi—



Şekil 78

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Özelik 10-1.

Teorem 10-6.

Sınıfı ≥ 2 olan bir

$$\vec{v} = \vec{v}(t)$$

vektörel fonksiyonu, özdeş olarak

$$[\vec{v}(t), \vec{v}'(t), \vec{v}''(t)] = 0$$

denklemini sağlarsa, $\vec{V}(t)$ vektörü, aşağıki hallerden birini gerçekler ve bunların karşıtları da doğrudur.

1. $\vec{v}(t) = \vec{0}$,

2. $\vec{v}'(t) = \vec{0}$ ise, $\vec{v}(t) = \vec{a}$: Sabit vektör.

3. $\vec{v}''(t) = \vec{0}$ ise, $\vec{V}(t) = \vec{a}\,t + \vec{b}, \vec{a}, \vec{b}$: Sabit vektörler. Böyle olunca, $\vec{v}(t)$ ve $\vec{v}'(t)$ vektörleri, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ sâbit vektörlerinin tanımladıkları sabit düzlem doğrultusuna paralel kalırlar. Eğer $\vec{b} = \vec{0}$ ya da $\vec{b} = \lambda \vec{a}$, $\lambda \neq 0$ ise, hem $\vec{v}(t)$ hem de $\vec{v}'(t)$ vektörü sâbit $\vec{a}$ vektörüne paralel kalır.

4. Sıfır-vektörden farklı $\vec{v}(t)$ ve $\vec{v}'(t)$ vektörleri, her t için birbirlerine paraleldir, yâni her t için

$$\vec{v}(t) \neq \vec{0}, \quad \vec{v}'(t) \neq \vec{0}, \quad \vec{v}(t) \wedge \vec{v}'(t) = \vec{0}$$

dür. —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 53, Teorem 21-1— dolayısiyle de $\vec{V}(t)$ vektörü sâbit doğrultuludur.

5. Sıfır-vektörden farklı $\vec{v}'(t)$ ve $\vec{v}''(t)$ vektörleri, her t için, birbirlerine paraleldir, yâni her t için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{v}'(t) \neq \vec{0}, \quad \vec{v}''(t) \neq \vec{0}, \quad \vec{v}'(t) \wedge \vec{v}''(t) = \vec{0}$$

dür. Biraz önceki teoreme göre $\vec{v}'(t)$ vektörü sâbit doğrultuludur. Yâni $\vec{v}'(t) = \vec{a}\,t$, $\vec{a}$: sâbit vektör biçiminde olacağından, $\vec{v}(t) = \frac{\vec{a}}{2} t^2 + \vec{b}$, $\vec{b}$: sâbit vektördür. $\vec{v}(t)$ vektörü, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ sâbit vektörlerinin tanımladıkları doğrultusuna paralel kalır. $\vec{b}$, bir sıfır-vektör ya da $\vec{a}$ ya paralel bir vektör ise, $\vec{v}(t)$ vektörü de $\vec{a}$ ya paralel kalır.

6. Sıfır-vektörden farklı $\vec{v}(t)$ ve $\vec{v}''(t)$ vektörleri, her t için birbirlerine paraleldir, yâni her t için

$$\vec{v}(t) \neq \vec{0}, \quad \vec{v}''(t) \neq \vec{0}, \quad \vec{v}(t) \wedge \vec{v}''(t) = \vec{0}$$

dür.

Bu iki vektör

$$[\vec{v}(t) \wedge \vec{v}'(t)]' = \vec{v}(t) \wedge \vec{v}''(t) = \vec{0}$$

bağıntısını sağladıklarından, $\vec{v}(t) \wedge \vec{v}'(t)$ vektörünün doğrultusu sâbittir, yâni

$$\vec{v}(t) \wedge \vec{v}'(t) = \vec{a} \text{ : sabit vektör}$$

dür. Buna göre, $\vec{v}(t)$ nin paraleli olan $\vec{v}'(t)$ vektörü ile skaler olarak yukarıki vektörel çarpımı çarptığımızda

$$[\vec{v}(t), \vec{v}'(t), \vec{v}''(t)] = 0$$

olur. Bu da, birbirine paralel $\vec{v}(t)$ ve $\vec{v}''(t)$ vektörleriyle $\vec{v}'(t)$ vektörünün, $\vec{a}$ vektörüne dik bir düzleme paralel kaldıklarını gösterir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

7. Sıfır-vektörden farklı ve 4, 5, 6 hâllerine uymayan $\vec{v}(t)$, $\vec{v}'(t)$, $\vec{v}''(t)$ vektörleri, her t için, bir düzleme paraleldirler. Buna göre, her t için

$$[\vec{v}(t) \wedge \vec{v}'(t)]' = \vec{v}(t) \wedge \vec{v}''(t) /\!\!/ \vec{v}(t) \wedge \vec{v}'(t)$$

olacağından, $\vec{v}(t) \wedge \vec{v}''(t)$ vektörü sâbit doğrultuludur. O hâlde, her t için : $\vec{v}(t)$, $\vec{v}'(t)$, $\vec{v}''(t)$ vektörlerinin paralel kaldıkları düzlem, sâbit doğrultuludur.
Bu 7 hâlin karşıtları da doğrudur.

10-4. Bir parametreli düzlem ailesi

Herhangi bir Δ düzleminin gelişigüzel bir noktası O, bunun yer vektörü, $\vec{y}$, Δ nın bir dikme vektörü de $\vec{v}$ ise, bu düzlemin vektörel denklemi

$$\vec{v} \cdot \vec{y} - f = 0 \tag{10-9}$$

dır.

$\vec{v}$ vektörü ile f skaleri aynı bir t değişkeninin fonksiyonları ise, (10-9) denklemi veya

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{y} - f(t) = 0 \tag{10-10}$$

genel olarak, **bir parametreli bir düzlem ailesini tanımlar.**

Teorem 10-7.

$\vec{v} = \vec{v}(t)$, $f = f(t)$ **fonksiyonlarının sınıfları** $\geqslant 2$ **ve**

$$[\vec{v}(t), \vec{v}'(t), \vec{v}''(t)] \not\equiv 0 \tag{10-11}$$

ise, (10-10) denklemiyle tanımlanan $\Delta(t)$ düzlemleri, bir uzay eğrisinin oskülatör düzlemleri, ya da bir koninin teğet düzlemleridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu teoremin ispatına geçmeden önce, daha çok Analiz'de verilen bir tanımı anımsayalım.

Tanım 10-1. Değişen bir düzlemin Karakteristik doğrusu

Herhangi bir $\Delta(t)$ düzlemiyle buna yakın bir $\Delta(t+\delta t)$ düzleminin arakesiti, aynı zamanda

$$\frac{[\vec{v}(t+\delta t)-\vec{v}(t)]\cdot\vec{y}-[f(t+\delta t)-f(t)]}{\delta t}=0$$

düzleminin üzerindedir.

O hâlde, bu arakesit doğrusunun, $\delta t \to 0$ için limit durumu

$$(10\text{-}12)\qquad \begin{cases} \Delta(t) & \vec{v}(t)\cdot\vec{y}-f(t)=0 \\ \Delta'(t) & \vec{v}'(t)\cdot\vec{y}-f'(t)=0 \end{cases}$$

düzlemlerinin arakesitidir.

Tanım olarak, bu doğru, $\Delta(t)$ düzleminin **Karakteristik doğrusu**dur. Karakteristik doğru, kendisinden geçen $\Delta(t)$ ve $\Delta'(t)$ düzlemlerinin dikme vektörlerine dik olduğundan, (10-11) koşulu nedeniyle, sıfır-vektörden özdeş olarak farklı

$$(10\text{-}13)\qquad \vec{v}(t)\wedge\vec{v}'(t)\neq 0$$

vektörüne paraleldir.

Karakteristik doğru ile

$$(10\text{-}14)\qquad \vec{v}''(t)\cdot\vec{y}-f''(t)=0$$

düzleminin, başka deyişle,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(10\text{-}15)\qquad \begin{cases} \vec{v}(t)\cdot\vec{y}-f(t)=0 \\ \vec{v}'(t)\cdot\vec{y}-f'(t)=0 \\ \vec{v}''(t)\cdot\vec{y}-f''(t)=0 \end{cases}$$

düzlemlerinin ortak P(t) noktalarının C geometrik yerinin yer vektörüne

$$(10\text{-}16)\qquad \vec{x}=\vec{x}(t)$$

dersek,

$$(10\text{-}17)\qquad \begin{cases} \vec{v}(t)\cdot\vec{x}(t)-f(t)=0 \\ \vec{v}'(t)\cdot\vec{x}(t)-f'(t)=0 \\ \vec{v}''(t)\cdot\vec{x}(t)-f''(t)=0 \end{cases}$$

dır.

(10-17) denklemlerinden ilk ikisinin t ye göre türevlerini alır ve son ikisini kullanırsak

$$(10\text{-}18)\qquad \vec{v}(t)\cdot\vec{x}'(t)=0,\quad \vec{v}'(t)\cdot\vec{x}'(t)=0,\quad (\vec{x}'(t)\neq\vec{o})$$

olur.

Görülüyor ki C eğrisinin P(t) noktasındaki teğetine paralel olan $\vec{x}'(t)$ vektörü, $\vec{V}(t)$ ve $\vec{V}'(t)$ vektörlerine dik olduğundan, $\Delta(t)$ düzleminin karakteristik doğrusunun (10-13) ile verilen doğrultusuna paraleldir. Dolayısıyle, **karakteristik doğru, C eğrisine P(t) noktasında teğettir.**

Eğer

$$\vec{x}'(t)=\vec{0}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ise,

$$\vec{x}(t) = \vec{a} \ : \text{ sabit vektör,}$$

olacağından, C eğrisi bir nokta-eğridir. Açılabilen yüzey bir koni, düzlem ailesi de bunun teğet düzlemleridir. (10-14) denklemlerinden ilkinin t ye göre türevi de, ikincisi nedeniyle,

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{x}''(t) = 0, \quad (\vec{x}''(t) \neq \vec{0})$$

vereceğinden, C nin oskülatör düzlemi, $\vec{v}(t)$ ye dik, yâni **verilen düzlem ailesinin düzlemleri, C nin oskülatör düzlemleridir.**

Eğer

$$\vec{x}''(t) = \vec{0}$$

ise,

$$\vec{x}'(t) = \vec{a} \ : \text{ sabit vektör}$$

olacağından, (10-18) nedeniyle

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a} = 0, \quad \vec{v}'(t) \cdot \vec{a} = 0$$

dır ve türev olarak da

$$\vec{v}''(t) \cdot \vec{a} = 0$$

bulunur. Bu ise,

$$[\vec{v}(t), \vec{v}'(t), \vec{v}''(t)] = 0$$

vereceğinden, (10-11) dolayısiyle olamez.

Özel hâller 10-2.

(10-11) koşulu gerçekleşmezse, yâni

$$[\vec{v}(t), \vec{v}'(t), \vec{v}''(t)] = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

olursa, Teorem 10-6 nın çeşitli halleri için şu düzlem aileleri söz konusu olur:

1. $\Delta(t)$ düzlem ailesi yoktur.
2. $\Delta(t)$ düzlem ailesi, paralel düzlemlerden oluşur.
3. $\Delta(t)$ düzlem ailesi, bir düzleme dik düzlemlerden oluşur. $\Delta'(t)$ düzlem ailesi ise, paralel düzlemlerden meydana gelir ve bunlar da aynı düzleme diktirler. Karakteristik doğruları, paralel doğrular tanımlar. Karakteristik doğrular üzerinde, $P(t)$ noktaları yoktur.
4. $\Delta(t)$ düzlemleri, paralel düzlemlerdir.
5. $\Delta(t)$ düzlemleri, sâbit bir düzlem doğrultusuna dik kalırlar. $\Delta'(t)$ ve $\Delta''(t)$ düzlemleri ise, aynı sâbit düzlem doğrultusuna paralel bir vektöre dik kalan paralel düzlemlerdir. $P(t)$ noktası, karakteristik üzerinde sonsuzdadır. Bir silindir söz konusudur.
6. Bundan önceki sonuç söz konusudur, yalnız bu kez $\Delta(t)$ ve $\Delta'(t)$ düzlemleri birbirine paraleldir.
7. Aynı sâbit düzleme dik üç ayrı $\Delta(t)$, $\Delta'(t)$, $\Delta''(t)$ düzlem ailesi elde edilir. Bir silindir bulunabileceği gibi, aynı bir doğrudan geçen düzlem demetleri de olabilir.

10-5. Açılabilen yüzeyin invariyantları. Temel formlar. GAUSS eğriliği. Eğrilik çizgileri ve geodezikler

a. İnvariyantlar

Açılamayan doğrusal yüzeylerde sözünü ettiğimiz üç

$$\rho_s\ ,\ p,\ \bar{\alpha}_1$$

invariyantından ikincisi, bir açılabilen yüzeyde

(10-19) $$p \equiv 0$$

dır ve bu bağıntı, bu tür yüzeyleri karakterize eder.

(3-24) formülü ile tanımlanan ρ_s, bir açılabilen yüzeyde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{w} = \vec{a}_1'$$

olduğundan, herhangi bir parametreye göre türev alarak

$$\rho_g = \frac{[\vec{a}_1', \vec{a}_1'', \vec{a}_2'']}{[|\vec{a}_1' \wedge \vec{a}_1''|^2]^{1/2}}$$

veya FRENET türev formüllerini kullanarak

(10-20) $$\rho_g = \frac{\tau_1}{\rho_1}$$

biçiminde bulunur.

Nihayet, (3-5) formülü, bir açılabilen yüzey için

$$\vec{x}_1'' = \bar{\alpha}_3 \vec{w} = \bar{\alpha}_3 \vec{a}_1'$$

biçiminde olduğundan ve (10-1)' dolayısiyle de

(10-21) $$\vec{x}_1'' = \vec{a}_1' \sigma_1'', \quad \sigma_1'' = R_1$$

yazılabileceğinden

(10-22) $$\bar{\alpha}_3 = R_1$$

dır.

b. Açılabilen yüzeyin invariyantlarıyla belirlenmesi

(10-20, 21, 22) eşitliklerinden

(10-23) $$\rho_1 = \frac{1}{\bar{\alpha}_3(s)}, \quad \tau_1 = \rho_g(s) \frac{1}{\bar{\alpha}_3(s)},$$

$$\sigma_1 = \int \bar{\alpha}_3(s)\, ds = f(s) + \text{sabit}$$

elde edileceğinden, açılabilen yüzeyin C_1 dönüm ayrıtı, dolayısiyle kendisi, uzayda durum farkıyla, belirlidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

c. Temel kuvadratik formlar

1. Birinci form

(5-4) ve (5-6) formüllerinde

(10-24) $$\rho = 0, \quad \bar{\alpha}_3 = R_1$$

alındığında, bir açılabilen yüzeyin I temel kuvadratik formu, C_1 boğaz çizgisine göre, E küresel görüntüsünün s yayı ve λ bağımsız parametreleri cinsinden

(10-25) $$I = \lambda^2 ds^2 + (R_1 ds + d\lambda)^2$$

biçimindedir.

Bunun katsayıları da

(10-26) $$E = \lambda^2 + R_1^2, \quad F = R_1, \quad G = 1, \quad H^2 = \lambda^2$$

Boğaz çizgisinin sınıfı ≥ 2 olan bir açılabilen yüzeyin herhangi bir O (s, λ) noktasında I formu (10-25), bunun katsayıları ise, (10-26) biçimindedir.

Uyarı 10-1.

Eğer E küresel görüntüsünün s yayı yerine, değişken olarak, C_1 boğaz çizgisinin σ_1 yayı alınırsa, (10-25) ve (10-26) formülleri

(10-27) $$I = (\lambda \rho_1)^2 d\sigma_1^2 + (d\sigma_1 + d\lambda)^2$$

(10-28) $$E = 1 + (\lambda \rho_1)^2, \quad F = 1, \quad G = 1, \quad H^2 = (\lambda \rho_1)^2$$

biçiminde yazılırlar.

(10-26) ve (10-28) formüllerinde, sıra ile, $F = R_1$, $F = 1$ olduğundan yüzeyin koordinat çizgileri bir dik eğri şebekesi oluşturmazlar. Bunu sağlamanın bir yolu şudur:

Yüzeyin vektörel denklemi

(10-29) $$\vec{y}(\sigma_1, \lambda) = \vec{x}_1(\sigma_1) + (\lambda - \sigma_1)\vec{a}_1'(\sigma_1)$$

biçiminde alınırsa, kolayca görülür ki, yeni koordinatlar cinsinden

(10-30) $$\bar{E} = [(\lambda - \sigma_1)\rho_1]^2, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = 1, \quad \bar{H}^2 = \bar{E}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dir ve koordinat çizgileri, anadoğrular ve bunların dik yörüngelerinden oluşurlar. Birazdan açıklayacağımız gibi, bu koordinat çizgileri, aynı zamanda, açılabilen yüzeyin **eğrilik çizgileri**dir.

2. İkinci form

(5-7) formüllerinde (10-24) koşulları kullanıldığında

$$HL = -\lambda^2 \rho_\ell \,, \quad M = 0, \quad N = 0$$

veya (10-20) yardımıyle

(10-30) $$L = -\lambda \frac{\tau_1}{\rho_1}, \quad II = -\lambda \frac{\tau_1}{\rho_1} ds^2$$

$$= -\lambda \tau_1 \rho_1 \, d\sigma_1^2, \quad M = 0 \quad N = 0$$

bulunur.

Boğaz çizgisinin sınıfı $\geqslant 3$ olan bir açılabilen yüzeyin bir Q (s, λ) veya Q (σ_1, λ) noktasında II formu ve bunun katsayıları (10-30) formülü ile belirlidir.

d. GAUSS eğriliği

(36-4; 2) formülü ile verilen GAUSS eğriliği, açılabilen yüzeyde, (10-28) ve (10-30) bağıntıları nedeniyle

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = 0$$

dır.

Şimdi şu teoremi ispat edeceğiz:

Teorem 10-8.

Sınıfı $\geqslant 2$ olan bir gerçel yüzeyin bir A parçasının bir açılabilen yüzey olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, bu parça üzerindeki her noktada K GAUSS eğriliğinin sıfıra eşit olması, yâni her noktanın parabolik bulunmasıdır.

Gerçekten, A parçası bir açılabilen yüzeyse, biraz önce de söylediğimiz gibi, bunun her noktasında K = 0 dır, yâni her noktası paraboliktir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Karşıt olarak, A nın her noktasında $K = 0$ ise, her noktada

(10-31) $$LN - M^2 = 0$$

dır.

Eğer A nın her noktasında, **özel olarak,**

$$L = M = N = 0$$

ise, (25-3) WEINGARTEN formülleri nedeniyle, A nın her noktasında

$$\vec{n}_u = 0, \quad \vec{n}_v = 0$$

olacağından, A üzerinde

$$\vec{n} = \vec{a} \ : \text{sabit birim vektörü}$$

dür ve A **bir düzlem parçasıdır.**

Sınıfı $\geqslant 2$ olan ve düzgün noktalardan oluşan, yani $\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \neq 0$ koşulunu sağlayan bir S yüzeyinde, II formunun L, M, N katsayılarının üçü birden özdeş olarak sıfır olamaz, meğer ki S bir düzlem olsun.

Bu hâli bir yana bırakalım ve (10-31) bağıntısında L, M, N katsayılarının üçünün birden aynı zamanda sıfır olmadığını varsayalım. Buna göre, asimptotik çizgilerin diferansiyel denklemini veren $II = 0$ bağıntısı, (34-30) nedeniyle

$$II = (\sqrt{L}\,du + \sqrt{N}\,dv)^2 = 0$$

biçiminde yazılır. Bu son bağıntı gösterir ki, A nın tüm noktalarının parabolik olması hâlinde, A üzerinde ikişer ikişer çakışan bir tek asimptotik çizgi ailesi vardır. Bunları

$$\bar{v} = \text{sabit}$$

koordinat çizgileri olarak alırsak, bunların diferansiyel denklemi

$$\bar{N}\,d\bar{v}^2 = 0$$

dır, yani bu yeni koordinat çizgileri sisteminde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(20-32) $\overline{L} = 0, \quad \overline{M} = 0, \quad \overline{N} \neq 0$

dır.

Buna göre, biraz önce sözü edilen (25-3) WEINGARTEN formüllerinden, A nın her noktası için

$$\overrightarrow{n_u} = \overrightarrow{0}$$

çıkacağından, bir $\overline{v}$ = sâbit asimptotik çizgisi boyunca

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{b} = \text{ sabit birim vektörü}$$

dür. O hâlde, yüzeyin bir asimptotik çizgisi boyunca değişmeyen normalleri bir silindir doğuracağından, bu asimptotik, Teorem 39-5 nedeniyle, aynı zamanda bir eğrilik çizgisidir. Hem asimptotik, hem de eğrilik çizgisi olan bir eğrinin her noktasında

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \rho_n = \rho \operatorname{Cos} \theta = 0, \quad \tau_g = \tau + \theta' = \tau = 0$$

olacağından, bu asimptotik bir düzlem eğridir ve düzlemi de asimptotik boyunca A ya teğettir. Bu söylediklerimiz, tüm asimptotikler için doğru olduğundan, A nın teğet düzlemleri, bir parametreli bir düzlem ailesi oluşturmaktadır, yâni A bir açılabilen yüzeydir.

Aynı teoremin daha kısa bir ispatı

Bir yüzeyde K GAUSS eğriliği özdeş olarak sıfıra eşitse, çakışan asimptotik çizgilerin burulmaları, 38-5 BELTRAMI teoremi çereğince, özdeş olarak sıfıra eşit bulunacaklarından, asimptotik çizgiler düzlem eğrileridir. Bir asimptotiğin her noktasındaki oskülatör düzlem, bu noktada yüzeye teğet olduğundan, düzlem olan asimptotik çizgilerin düzlemleri, asimptotikler boyunca, yüzeye teğettir. O hâlde yüzey, bir parametreli bir düzlem ailesinin zarfı olacağından, bir açılabilen yüzeydir.

e. Açılabilen yüzeylerin eğrilik çizgileri

Bir açılabilen yüzeyde, C_1 boğaz çizgisinin bir P_1 noktasındaki teğetinin her Q noktasından yüzeye bu noktada normal olarak geçirilecek doğ-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ru. C_1 in P_1 deki binormaline paraleldir. Q noktası, P_1 deki teğet üzerinde yerini değiştirdikçe, bu normaller, aynı binormale paralel kalacaklarından, bir düzlem doğuracaklardır. Buna göre, teorem 39-5 gereğince, **anadoğrularla bunların dik yörüngeleri, yâni C_1 in teğetlerine normal eğrileri, açılabilen yüzeyin eğrilik çizgileridir.**

f. Açılabilen yüzeylerin geodezik çizgileri

(10-33) $$\vec{y}(s,\lambda) = \vec{x}_1(s) + \lambda \vec{a}_1'(s)$$

vektörel denklemiyle tanımlanan açılabilen yüzeyin bir $Q(s,\lambda)$ noktasından geçen ve bir doğrudan farklı olan herhangi bir C^* eğrisi

$$\lambda^* = \lambda^*(s)$$

bağıntısıyle tanımlandığında, bunun yayı s^* ve FRENET birim vektörleri de $\vec{a}_j^*, (j = 1, 2, 3)$ ise, (10-33) ün türevinden C^* için

(10-34) $$\vec{y}^* = s^{*\prime}\,\vec{a}_1^* = (R_1 + \lambda^{*\prime})\,\vec{a}_1' + \lambda^*\,\vec{a}_2'$$

elde edilir.

Eğer

(10-35) $$\vec{a}_1^* = \vec{a}_1' \operatorname{Cos}\varphi + \vec{a}_2' \operatorname{Sin}\varphi$$

dersek, (10-34) ve (10-35) eşitliklerinden

(10-36) $$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{R_1 + \lambda^{*\prime}}{S^{*\prime}}, \quad \operatorname{Sin}\varphi = \frac{\lambda^*}{S^{*\prime}}, \quad (S^{*\prime} \neq 0)$$

çıkar.

C^* eğrisinin bir geodezik olması için gerekli ve yeterli koşul, bunun her Q noktasında

(10-37) $$\vec{a}_2^* /\!/ \vec{a}_3'$$

olmasıdır.

$\vec{a}_1^*$ in türevinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(10-38) $\rho^* s^{**} \vec{a}_2^* = -(1+\varphi')(\vec{a}_1' \operatorname{Sin}\varphi - \vec{a}_2' \operatorname{Cos}\varphi) + R_1 \tau_1 \operatorname{Sin}\varphi \vec{a}_3'$

bulunacağından, geodezikler

(10-39) $$1 + \varphi' = 0, \quad \operatorname{tg}\varphi = \lambda^* / (R_1 + \lambda^{**})$$

denklemleriyle belirlidir.

Buradan, birincinin integre edilmesiyle

(10-40) $$\varphi = -s + a, \quad (a : \text{sabit})$$

çıkacağından, (10-39; 2) yardımiyle bulunan

(10-41) $$\lambda^{**}(s) - \lambda^*(s) \operatorname{Cotg}(a-s) + R_1(s) = 0$$

lineer denklemi, geodeziklerin diferansiyel denklemi olur. Bunun da genel çözümü

(10-42) $$\lambda^*(s) = \frac{b - \int R_1(s) \operatorname{Sin}(a-s)\, ds}{\operatorname{Sin}(a-s)}, \quad b : \text{sabit}$$

dir.

Eğer C_1 boğaz çizgisi bir MONGE eğrisi ise, $R_1 =$ sabit dir ve (10-42),

(10-43) $$\lambda^*(s) = \frac{b}{\operatorname{Sin}(a-s)} - R_1 \operatorname{Cotg}(a-s)$$

verir.

Teorem 10-9.

Boğaz çizgisinin sınıfı ≥ 2 olan bir açılabilen yüzeyde, geodezikler kuvadratürlerle bulunur ve bunları veren $\lambda^* = \lambda^*(s)$ koordinatının değeri, (10-42) formülü ile belirlidir.

g. Doğrusal olmayan bir geodeziği bilinen açılabilen yüzeyde öteki geodeziklerin bulunması

Eğer açılabilen yüzeyin doğrusal olmayan bir C^* geodeziği biliniyorsa, öteki geodezikler şöyle de bulunabilir:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C^* ın düzgün bir O^* noktasındaki yayı s^*, FRENET birim vektörleri $\vec{a}_j^*$, $(j = 1, 2, 3)$ eğrilik ve burulması da ρ^*, τ^* ise, bir geodeziği C^* olan S^* açılabilen yüzeyi, C^* ın O^* P_1^* doğrularının oluşturdukları yüzeydir.



Şekil 79

O^* P_1^* doğrusunun $\vec{a}_3^*$ ile yaptığı ve $\vec{a}_3^*$ etrafındaki pozitif dönme yönünde hesaplanan α^* açısı, —FERRUH ŞEMİN, Diferansiyel Geometri I, s. 170, formül (51-7) dolayısiyle—

$$\text{tg } \alpha^* = \frac{\tau^*}{\rho^*}, \qquad (\rho^* \neq 0) \tag{10-44}$$

bağıntısını gerçekler.

C^* eğrisinin vektörel denklemi

$$\vec{x}^* = \vec{x}^*(s^*)$$

ise, S^* açılabilen yüzeyinin vektörel denklemi

$$\vec{y}^* = \vec{x}^*(s^*) + \lambda^* [\vec{a}_1^*(s^*) \text{ Sin } \alpha^* + \vec{a}_3^*(s^*) \text{ Cos } \alpha^*] \tag{10-45}$$

dır.

O^* dan geçen, S^* üzerinde bulunan ve doğrudan farklı olan herhangi bir $\bar{C}^* \neq C^*$ eğrisinin O^* noktasındaki $\vec{a}_1^*$ teğet birim vektörü

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(10-46) $$\vec{a_1}^* = \vec{a_1}^* \operatorname{Sin} \varphi^* + \vec{a_2}^* \operatorname{Cos} \varphi^*$$

biçimindedir. Bu $\bar{C}^*$ eğrisinin

$$\vec{\bar{r}}^* = \vec{x}^* (s^*) + \bar{\lambda}^* [\vec{a_1}^* (s^*) \operatorname{Sin} \alpha^* + \vec{a_2}^* (s^*) \operatorname{Cos} \alpha^*]$$

vektörel denkleminden, s^* a göre türev alındığında, (10-44) nedeniyle ve $\frac{df}{ds^*} = f'$ denilirse,

(10-47) $$\vec{a_1}^* \bar{s}^{*\prime} = [1 + (\bar{\lambda}^* \operatorname{Sin} \alpha^*)'] \vec{a_1}^* + (\bar{\lambda}^* \operatorname{Cos} \alpha^*)' \vec{a_2}^*$$

bulunacağından, (10-46) ile karşılaştırırsak

(10-48) $$\operatorname{tg} \bar{\varphi}^* = \frac{[1 + (\bar{\lambda}^* \operatorname{Sin} \alpha^*)']}{(\bar{\lambda}^* \operatorname{Cos} \alpha^*)'}$$

olur.

$\bar{C}^*$ eğrisinin, S^* ın bir geodeziği olması için gerekli ve yeterli koşul, $\bar{C}^*$ ın O^* noktasındaki $\vec{a_2}^*$ asal normal birim vektörünün S^* ın aynı noktadaki normaline paralel olması, yani

$$\vec{a_1}^* /\!/ \vec{a_2}^*$$

bulunmasıdır. (10-46) nın S^* a göre türevini aldığımızda, $\vec{a_1}^*$ ve $\vec{a_2}^*$ ın katsayıları sıfıra eşit olacaklarından

(10-49) $$\bar{\varphi}^{*\prime} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{\varphi}^* = \text{sabit}$$

çıkar.

Buna göre, (10-48) ve (10-49) bağıntıları nedeniyle, S^* ın geodezikle rinin diferansiyel denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(10-50) $1 + (\bar{\lambda}^* \operatorname{Sin} \alpha^*)' = \operatorname{tg} \bar{\varphi}^* (\bar{\lambda} \operatorname{Cos} \alpha^*)'$, $(\operatorname{tg} \bar{\varphi}^* = \operatorname{tg} a : \text{sabit})$ dır ve bunun integre edilmesi sonucunda da

$$\bar{\lambda}^* = \frac{s^* - b}{\operatorname{tg} a \operatorname{Cos} \alpha^* - \operatorname{Sin} \alpha^*}, \quad \operatorname{tg} \alpha^* = \frac{\tau^*}{\rho^*} \tag{10-51}$$

elde edilir.

C^* eğrisi, $a = \frac{\pi}{2}$ olarak bulunur.

Teorem 10-10.

Bir açılabilen yüzeyin sınıfı ≥ 2 olan bir geodeziği biliniyorsa, öteki geodeziklerin tümü, integrasyonla bulunabilir ve bunlar (10-51) formülü ile belirlidir.

10-6. Açılabilen yüzeylerin karakteristik bir özeliği

Herhangi bir v=sâbit, u=sâbit koordinat sistemine nispet edilen bir S yüzeyinin bir P(u, v) düzgün noktasındaki GAUSS eğriliğini ve S nin P den geçen bir C eğrisinin P deki geodezik eğriliğini invariyant biçimde veren (49-8) ve (50-12) formüllerini

$$K = \frac{g_2^* - g_1^{**} + q g^* - \bar{q} g^{**} + \alpha_{21} + \bar{q} \alpha_2}{\operatorname{Sin} \alpha}, \quad (S \text{ nin sınıfı} \geq 3) \tag{49-8}$$

$$\rho_* = \frac{g^* \operatorname{Sin} (\alpha - \varphi) + (g^{**} - \alpha_2) \operatorname{Sin} \varphi}{\operatorname{Sin} \alpha} + \varphi_0, \quad (S \text{ nin sınıfı} \geq 2) \tag{50-12}$$

ele alalım.

Bu formüllerdeki çeşitli sembollerin anlamlarını anımsayalım:

g^*, g^{**} : v=sâbit koordinat çizgilerinin P noktasındaki geogeodezik eğrilikleri.

α : Koordinat çizgilerinin P noktasında oluşturdukları açı.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

φ : P den geçen bir C eğrisinin bu noktada, v=sâbit koordinat çizgisiyle yaptığı açı.

1, 2, 3 indisleri : v=sâbit, u=sâbit ve φ doğrultularında invariyant türevler.

q , $\bar{q}$: (48-4) ve (48-12) formülleriyle şöyle verilmişlerdir.

(48-4) $$q = [\text{Log } \sqrt{E}]_2 , \quad q = [\text{Log } \sqrt{G}]_1 ,$$

(48-12) $$q = \frac{(g^{**} - \alpha_2)\,\text{Cos}\,\alpha - (g^{*} + \alpha_1)}{\text{Sin}\,\alpha} ,$$

$$\bar{q} = \frac{-(g^{*} + \alpha_1)\,\text{Cos}\,\alpha + (g^{**} - \alpha_2)}{\text{Sin}\,\alpha}$$

Teorem 10-11.

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinde, koordinat çizgileri geodeziklerden oluşuyorsa ve bunlar birbirini sâbit açı altında kesiyorsa, S yüzeyi bir açılabilen yüzeydir ve herhangi bir geodezik, koordinat çizgilerini sâbit açı altında keser.

Gerçekten, teoremdeki koşullara göre, yüzey üzerindeki düzgün noktalarda

$$g^{*} = g^{**} = 0, \quad \alpha = \text{sabit}$$

olacağından, (49-8) de, her düzgün noktada

$$K = 0$$

dır, yâni S bir açılabilen yüzeydir ve (50-12) de aynı koşullarda

$$\rho_g = \varphi_3$$

verir. Her düzgün noktada $\rho_g = 0$ ise, φ = sâbittir ve φ = sâbitse $\rho_g = 0$ dır.

Uyarı 10-2.

Açılabilen yüzeyleri ele almadan önce bulduğumuz bâzı teoremlerde, özellikle Teorem 39-5 de:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

«Doğrular bir uzay eğrisine teğet kalırlar»

biçimindeki cümleler yerine

«Doğrular bir açılabilen yüzey doğururlar»

cümlesi kullanılabilir.

II. DOĞRU KONGRÜANSLARI

11. Tanım ve örnekler

2 bağımsız parametreye bağlı doğru ailelerine **doğru kongrüansı** denilir.

Bu tanıma uygun bazı örnekler şöyle sıralanabilir:

1. İki ayrı yüzeye teğet doğruların oluşturdukları kongrüanslar.
2. İki ayrı eğriyi veya doğruyu veyahut bir eğri ile bir doğruyu kesen doğruların meydana getirdikleri kongrüanslar.
3. Bir yüzeye teğet olan ve bir eğriye dayanan doğruların tanımladıkları kongrüanslar.
4. Bir yüzeyin normallerinin doğurduğu normaller kongrüansı.
5. Bir uzay eğrisinin kirişlerinin verdiği kongrüans.

11-1. Vektörel tanım



Şekil 82

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bir doğru kongrüansı, vektörel olarak

$$\vec{y}(u, v, \lambda) = \vec{x}(u, v) + \lambda \vec{w}(u, v), \quad \vec{w}^2 = 1 \tag{11-1}$$

biçiminde tanımlanabilir.

Bu vektörel denklemde, u ve v bağımsız iki parametreyi, $\vec{W}(u, v)$ de, kongrüansın bir D doğrusunun **doğrultu birim vektörünü** göstermektedir. D nin bir P (u, v) noktasının çizdiği

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v) \tag{11-2}$$

yüzeyi, kongrüansın **doğrultman yüzeyi**dir.

λ ya gelince, bu da, P $(\vec{w})$ ekseninin herhangi bir Q noktasının bu eksen üzerindeki apsisidir.

Hem $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ **hem de** $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ **fonksiyonlarının sınıflarının, şimdilik,** ≥ 1 olduğunu varsayacağız.

Ayrıca, **doğrultman yüzeyin tüm noktalarını düzgün olarak alacağız.** Buna göre, tanım bölgesinde, u ve v değerleri nasıl seçilirse seçilsin,

$$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \neq \vec{0} \tag{11-3}$$

olacaktır. Dolayısiyle, hiçbir zaman

$$\vec{x}(u, v) = \vec{a}, \quad (\vec{a} : \text{sabit vektör})$$

olamayacağından, **verilen kongrüans, sabit bir noktadan geçen doğrulardan oluşamayacaktır.**

Ayrıca

$$\vec{w}(u, v) \neq \vec{b}, \quad (\vec{b} : \text{sabit birim vektörü}) \tag{11-4}$$

varsayımı, **kongrüansı oluşturan doğruların biribirlerine paralel kalmamalarını sağlar.**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11-2. Kongrüansın küresel görüntüsü

O başlangıç noktasından itibaren, kongrüansın her D doğrusunun $\vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörünün

$$\vec{OD_1} = \vec{w}(u, v)$$

eşdeğerini alarak bulunan D_1 noktası, D değiştikçe, O(1) birim küresi üzerinde bir Σ bölgesi meydana getirir. Tanım gereğince Σ, verilen doğru kongrüansının **küresel görüntüsü**dür.

Σ küresel görüntüsünün tüm noktalarının da, O(1) birim küresinin düzgün noktalarından oluştuklarını, yani

$$\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v \neq \vec{0} \tag{11-5}$$

bulunduğunu varsayacağız.

11-3. Birinci temel kuvadratik form

Σ küresel görüntüsünün lineer elemanını $d\sigma$ ile gösterir ve

$$\vec{w}_u^2 = e, \quad \vec{w}_u \cdot \vec{w}_v = f, \quad \vec{w}_v^2 = g \tag{11-6}$$

dersek, verilen doğru kongrüansının birinci temel kuvadratik formu

$$d\sigma^2 = I = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = d\vec{w}^2 \tag{11-7}$$

dir.

(11-5) eşitsizliği nedeniyle, (11-6) daki birinci ve üçüncü eşitlikler

$$e > 0, \quad g > 0 \tag{11-8}$$

verir.

Öte yandan, O(1) birim küresinin yer vektörü ile normal birim vektörü çakıştığından, (11-6) dan

$$(\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v)^2 = \vec{w}_u^2\,\vec{w}_v^2 - (\vec{w}_u \cdot \vec{w}_v)^2 = eg - f^2 = h^2 > 0 \tag{11-9}$$

çıkarılacağından, h nın işaretini uygun biçimde seçerek

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-10) $$\vec{w}(u,v) = \frac{1}{h}(\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v)$$

yazılabilir.

11-4. İkinci temel kuvadratik form

II sembolü ile gösterilen bu form, tanım gereğince

(11-11) $$II = -d\vec{x} \cdot d\vec{w} = -(\vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv)(\vec{w}_u\,du + \vec{w}_v\,dv)$$

dir. Eğer

(11-12) $$\vec{x}_u \cdot \vec{w}_u = -l \quad \vec{x}_u \cdot \vec{w}_v = -m, \quad \vec{x}_v \cdot \vec{w}_v = -n,$$

$$\vec{x}_v \cdot \vec{w}_v = -n$$

dersek,

(11-13) $$II = l\,du^2 + (m+\bar{m})\,du\,dv + n\,dv^2$$

olur.

Uyarı 11-1.

(11-3) ve (11-5) eşitsizlikleri nedeniyle, **II formu** hiçbir zaman **özdeş olarak sıfıra eşit değildir.**

Gerçekten, II formu özdeş olarak sıfırsa,

(11-14) $$l = 0, \quad \bar{m} = 0, \quad m = 0, \quad n = 0$$

dır. Buna göre, (11-3) nedeniyle, sıfır-vektörden farklı $\vec{x}_u$ vektörü ile, (11-5) dolayısiyle sıfır-vektörden farklı $\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v$ vektörünü vektörel olarak çarptığımızda, (11-14) özdeşliklerinden

$$\vec{x}_u \wedge (\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v) = -\bar{m}\,\vec{w}_u - l\,\vec{w}_v = \vec{0}$$

çıkacağından, $\vec{x}_u$ vektörü $\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v$ veya $\vec{w}$ vektörüne paraleldir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-15) $\vec{x}_u = \alpha \vec{w}, \qquad (\alpha \neq 0)$

Aynı biçimde,

$$\vec{x}_v \wedge (\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v) = -n\vec{w}_u - m\vec{w}_v = 0$$

$$\vec{x}_v = \beta \vec{w}, \qquad (\beta \neq 0$$

olacağından,

$$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v = \vec{0}$$

olur ki bu da, (11-3) dolayısiyle olanaksızdır.

Teorem 11-1.

Doğrultmen yüzeyi ile doğrultu birim vektörünün sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir doğru kongrüansında,

$$\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v \neq \vec{0}, \quad \vec{w}_u \wedge \vec{w}_v \neq \vec{0}$$

oldukça, II formu hiçbir zaman özdeş olarak sıfır olamaz.

11-5. Kongrüansın doğrusal yüzeyleri

P(u, v) noktası, doğrultman yüzey üzerinde bir C eğrisi çizdiğinde u ve v değişkenleri arasında

$$\phi(u, v) = 0$$

biçiminde bir bağıntı bulunacağından, kongrüansın P den geçen doğruları bir S doğrusal yüzeyi doğururlar. Bu sonsuz sayıda doğrusal yüzeye, **kongrüansın doğrusal yüzeyleri** denilir. Kongrüansın her doğrusal $\bar{S}$ yüzeyinin de, O(1) birim küresi üzerinde, bir E **küresel görüntüsü** vardır. E eğrisi, verilen kongrüansın Σ küresel görüntüsünün tanımladığı bölgenin bir eğrisidir.

11-6. E küresel görüntüsünün $\vec{b}_1 = \vec{w}^\circ$ teğet birim vektörü

E nin s yayına göre türevleri, skaler veya vektörel f=f(s) için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{df}{ds} = f^*$$

biçiminde gösterirsek,

(11-16) $$\vec{w}^* = \vec{b}_i = \vec{w}_u \cdot u^* + \vec{w}_v \, v^*$$

dır.

Bunu, (18-4) formülü yardımiyle, şöyle de yazabiliriz:

O(1) birim küresi üzerinde, koordinat çizgilerinin teğet birim vektörleri $\vec{t}$, $\vec{t}^*$ ise,

(11-17)
$$\begin{cases} \vec{w}^* = \vec{b}_i = \dfrac{\vec{w}_u}{\sqrt{e}} \sqrt{e}\, u^* + \dfrac{\vec{w}_v}{\sqrt{g}} \sqrt{g}\, v^* \\ \quad = \vec{t}\, \sqrt{e}\, u^* + \vec{t}^*\, \sqrt{g}\, v^* \\ t = \dfrac{\vec{w}_u}{\sqrt{e}} \qquad t^* = \dfrac{\vec{w}_v}{\sqrt{g}} \end{cases}$$

dir.

Teorem 11-2.

Anadoğrularının $\vec{W}$ doğrultu birim vektörlerinin sınıfı ≥ 1 olan bir doğru kongrüansında, bunun bir $\bar{S}$ doğrusal yüzeyinin $\bar{E}$ küresel görüntüsünün bir D_i (u, v) noktasındaki $\vec{W}^*$ teğet birim vektörü, $\bar{S}$ nin D ile belirli olan merkez düzlemine diktir, yâni $\bar{S}$ nin sözü geçen noktasındaki normaline paraleldir.

Bu sonuç, (2-4; 2) formülünden çıkar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11-7. Kongrüansın $\bar{S}$ doğrusal yüzeyinin, D doğrusu ile tanımlanan merkez noktası ve dağılma parametresi

$\bar{S}$ doğrusal yüzeyinin D doğrusu üzerindeki boğaz noktası P_1, bu noktanın $P(\vec{w})$ ekseni üzerindeki apsisi $\bar{\lambda}$, D nin belirlediği dağılma parametresi de p ise, (2-15) formülleri nedeniyle

$$\bar{\lambda} = -\frac{\vec{dx}\cdot\vec{dw}}{\vec{dw}^2}, \quad p = \frac{(\vec{dx}, d\vec{w}, \vec{w})}{\vec{dw}^2} \tag{11-18}$$

dir.

$\bar{\lambda}$ apsisi, (11-7) ve (11-11) formülleri yardımıyle

$$\bar{\lambda} = \frac{II}{I} = \frac{l\,du^2 + (m + \bar{m})\,du\,dv + n\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2} \tag{11-19}$$

biçiminde yazılır.

p ye gelince, bu da

$$p = \frac{(\vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv, \vec{w}_u\,du + \vec{w}_v\,dv, \vec{w})}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

ye eşittir..

Karma çarpım açıldığında,

$$p = \frac{1}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}\{(\vec{x}_u, \vec{w}_u, \vec{w})\,du^2 + [(\vec{x}_u, \vec{w}_v, \vec{w}) + (\vec{x}_v, \vec{w}_u, \vec{w})]\,du\,dv + (\vec{x}_v, \vec{w}_v, \vec{w})\,dv^2\} \tag{11-20}$$

olur. Öte yandan, (11-6), (11-9) ve (11-12) formülleri nedeniyle

$$(\vec{x}_u, \vec{w}_u, \vec{w}) = \vec{x}_u\left[\vec{w}_u \wedge \frac{\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v}{h}\right] = \frac{\vec{x}_u}{h}(f\vec{w}_u - e\vec{w}_v) = \frac{\bar{e}m - fl}{h}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(\vec{x}_u, \vec{w}_v, \vec{w}) = \vec{x}_u \cdot \left[\vec{w}_v \wedge \frac{\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v}{h}\right] = \frac{\vec{x}_u}{h}(g\vec{w}_u - f\vec{w}_v) = \frac{f\bar{m} - g\bar{l}}{h}$$

$$(\vec{x}_v, \vec{w}_u, \vec{w}) = \vec{x}_v \cdot \left[\vec{w}_u \wedge \frac{\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v}{h}\right] = \frac{\vec{x}_v}{h}(f\vec{w}_u - e\vec{w}_v) = \frac{en - fm}{h}$$

$$(\vec{x}_v, \vec{w}_v, \vec{w}) = \vec{x}_v \cdot \left[\vec{w}_v \wedge \frac{\vec{w}_u \wedge \vec{w}_v}{h}\right] = \frac{\vec{x}_v}{h}(g\vec{w}_u - f\vec{w}_v) = \frac{fn - gm}{h}$$

olduğundan, (11-20) formülü

$$(11\text{-}21)\quad p = \frac{1}{h}\,\frac{(em - f\bar{l})\,du^2 + [en + (\bar{m} - m)f - g\bar{l}]\,du\,dv + (fn - gm)\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

veya

$$(11\text{-}22)\quad p = \frac{\begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & f\,du + g\,dv \\ l\,du + m\,dv & \bar{m}\,du + n\,dv \end{vmatrix}}{h\,(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2)} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} e + fv' & f + gv' \\ l + mv' & \bar{m} + nv' \end{vmatrix}}{h\,(e + 2fv' + gv'^2)}, \quad v' = \frac{dv}{du}$$

biçiminde yazılabilir.

Uyarı 11-2.

I ve II kuvadratik formlarının $e, f, g, l, m, \bar{m}, n$ katsayıları, u, v bağımsız değişkenlerinin fonksiyonlarıdır. Yâni doğrultman yüzeyin $P(u, v)$ noktası seçildiğinde, bunların belirli değerleri olacaktır. Bu bakımdan, adı geçen katsayılar **nokta fonksiyonları**dır.

Buna karşılık, boğaz çizgisinin $\bar{\lambda}$ apsisi ile p dağılma parametresi için bulduğumuz (11-19) ve (11-22) formülleri gösterir ki u ve v nin de-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

gerlerini saptadığımızda, hem $\bar{\lambda}$ hem de p sadece $v' = \frac{dv}{du}$ nun fonksiyonlarıdır, başka deyişle $\bar{\lambda}$ **ve** p **de doğrultu fonksiyonlarıdır.** Dolayısiyle şu teorem söz konusudur:

Teorem 11-3.

Anadoğrularının $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ **doğrultu birim vektörü ile doğrultman yüzeyin** $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ **yer vektörünün sınıfları** ≥ 1 **olan bir doğru kongrüansında, doğrultman yüzeyin bir** P(u, v) **noktasında birbirine teğet** C', C'' **eğrileriyle belirlenen, yani** P(u, v) **deki teğet düzlemleri aynı olan** $\bar{S}'$, $\bar{S}''$ **doğrusal yüzeylerinin** D **anadoğrusu için hem boğaz noktaları, hem de dağılma parametreleri aynıdır, dolayısiyle merkez düzlemleri de aynıdır** $\bar{S}'$, $\bar{S}''$ **doğrusal yüzeyleri, ortak** D **anadoğruları boyunca, birbirlerine teğettirler.**

11-8. Limit noktalar. Asal yüzeyler, düzlemler ve doğrultular

$\bar{\lambda}$ yi veren (11-19) formülünü, $v' = \frac{dv}{du}$ eşitliği yardımiyle

$$\bar{\lambda} = \frac{n v'^2 + (m + \bar{m}) v' + l}{g v'^2 + 2 f v' + e} \tag{11-23}$$

biçiminde yazalım. doğrultman yüzeyin bir P(u, v) noktasını seçtiğimizde, bu nokta ile birlikte, kongrüansın bu noktadan geçen bir D(u, v) anadoğrusu da saptanmış olur. İşte bu D(u, v) doğrusu üzerinde, v' ile birlikte değişen λ apsisinin ekstremumlarını arıyacağız. Bu ekstremumları veren v' doğrultuları, (11-23) ün v' ye göre türevini sıfıra eşitliyerek bulunur.

$$[2fn - (m + \bar{m})g] v'^2 + 2(en - gl) v' + e(m + \bar{m}) - 2fl = 0 \tag{11-24}$$

veya

$$\begin{vmatrix} e + f v' & f + g v' \\ 2l + (m + \bar{m}) v' & m + \bar{m} + 2n v' \end{vmatrix} = 0 \tag{11-25}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Görülüyor ki (11-24) ya da (11-25) denklemi, $\bar{\lambda}$ nin ekstremumları için iki doğrultu vermektedir. Ekstremumların değerlerine gelince, ilk akla gelen, (11-23) ve (11-25) formülleri arasında v' yü yoketmektir. Fakat işlem bakımından bu, biraz uzuncadır. Buna karşılık, $\bar{\lambda}$ nin ekstremumları, daha kısa olarak şöyle bulunur:

(11-23) bağıntısını

$$(g\bar{\lambda}-n)v'^2+(2f\bar{\lambda}-m-\bar{m})v'+e\bar{\lambda}-l=0 \qquad (11\text{-}26)$$

biçiminde yazdığımızda görürüz ki aynı $\bar{\lambda}$ değeri iki ayrı v' belirler. $\bar{\lambda}$ nin ekstremum değerleri için, sözü edilen iki ayrı v' değeri birbirinin aynı olacağından, (11-26) denkleminin diskriminantını sıfıra eşit kılmakla, $\bar{\lambda}$ nin ekstremumlarını bulmuş oluruz:

$$(2f\bar{\lambda}-m-\bar{m})^2-4(e\bar{\lambda}-l)(g\bar{\lambda}-n)=0$$

veya

$$h^2\bar{\lambda}^2+[f(m+\bar{m})-g\bar{l}-en)\bar{\lambda}+\bar{l}n-(\frac{m+\bar{m}}{2})^2=0 \qquad (11\text{-}27)$$

Bu denklemin kökleri olan $\bar{\lambda}$ ekstremumlarını $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ ile gösterirsek

$$(11\text{-}28)\quad \begin{cases} \bar{\lambda}_1+\bar{\lambda}_2=\dfrac{g\bar{l}+en-f(m+\bar{m})}{h^2} \\ \bar{\lambda}_1\cdot\bar{\lambda}_2=\dfrac{\bar{l}n-(\dfrac{m+\bar{m}}{2})^2}{h^2} \end{cases}$$

olur.

Tanımlar 11-1.

$\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ ekstremum değerlerinin D üzerinde belirledikleri boğaz noktalarına: D **anadoğrusunun limit noktaları**; doğrultman yüzeyin (11-25) dife-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ransiyel denklemiyle tanımlanan iki eğri ailesine: **doğrultman yüzeyin asal eğrileri;** bu sonuncularla elde edilin doğrusal yüzeylere: **doğru kongrüansının asal yüzeyleri;** bunların boğaz noktalarındaki teğet düzlemlerine: **asal düzlemler;** asal eğrilerin teğetlerine de: **asal teğetler** denilir.

11-9. S doğrultman yüzeyi üzerinde, asal çizgilerin, koordinat çizgilerini oluşturabilmeleri için gerekli ve yeterli koşullar

S doğrultman yüzeyi üzerinde asal çizgilerin koordinat çizgisi olabilmeleri için, (11-24) denkleminin

$$du\,dv = 0$$

biçiminde olması gerekir. Bunun için de

$$2fn - g(m + \bar{m}) = 0$$

$$2f\ell - e(m + \bar{m}) = 0$$

$$en - g\ell \neq 0$$

koşulları gereklidir.

(11-8) nedeniyle,

$$e > 0, \qquad g > 0$$

olduğundan, yukarıki üç eşitliğin ilk ikisinden

$$f\left(\frac{n}{g} - \frac{\ell}{e}\right) = 0$$

çıkar ve sonuncusu nedeniyle de, parantezin içi sıfırdan farklı bulunduğundan

$$f = 0$$

olur. Dolayısiyle

$$m + \bar{m} = 0$$

dır.

Karışık olarak, S doğrultman yüzeyi üzerinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$f = 0, \quad m + \bar{m} = 0$$

ise, (11-24) denklemi

$$du\, dv = 0$$

biçimindedir, elverir ki, S üzerinde

$$en - gl \neq 0$$

olsun.

Uyarı 11-3.

S doğrultman yüzeyinin koordinat çizgileri asal çizgilerden oluşuyorsa, O(1) birim küresinin koordinat çizgileri de bir dik eğri şebekesi meydana getirirler. Ama bunun tersi doğru değildir, yâni birim küresinin koordinat çizgilerinin birbirlerini dik kesmeleri, doğrultman yüzey üzerindeki koordinat çizgilerinin asal çizgilerden oluşmalarını gerektirmez.

Teorem 11-4.

S doğrultman yüzeyi ile D anadoğrularının $\vec{w}$ doğrultu birim vektörlerinin sınıfları ≥ 1 olan bir doğru kongrüansında, asal çizgilerin S üzerindeki koordinat çizgilerini oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşullar, uyarı 11-1 ve (11-8) eşitsizlikleri nedeniyle

(11-29) $$f = 0, \quad m + \bar{m} = 0, \quad en - gl \neq 0$$

dır.

Uyarı 11-4.

(11-29) koşulları gerçekleştiğinde, limit noktaların apsislerini veren (11-28) formüllerinden

(11-30) $$\bar{\lambda}_1 = \frac{l}{e}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{n}{g}$$

çıkar ve (11-29) koşullarının sonuncusu nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-31) $$\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$$

dir.

(11-30) formülleri (11-23) de v=sâbit, u=sâbit alarak da bulunabilir. (11-31) eşitsizliği dolayısiyle, Teorem 11-4 ün ifadesinde, (11-29) koşullarının sonuncusu yerine, **limit noktalarının farklı olacağı kaydı** kullanılabilir.

Uyarı 11-5.

(11-6) formülerinden ikincisi gösterir ki, f = 0 olduğu zaman, asal yüzeylerin O(1) birim küresi üzerindeki küresel görüntülerini oluşturan iki eğri birbirini dik keser. Buna göre, Teorem 11-2 dolayısiyle, asal düzlemler birbirine diktir. Böyle olunca da, şu teoremi yazabiliriz:

Teorem 11-5.

S doğrultman yüzeyi ile D anadoğrularının $\vec{w}$ doğrultu birim vektörlerinin sınıfları $\geqslant 1$ olan bir doğru kongrüansında, aynı bir D anadoğrusu ile tanımlanan asal düzlemler birbirine diktir.

11-10. Doğru kongrüansının bir D anadoğrusundan geçen herhangi bir S doğrusal yüzeyinin D ile belirli olan merkez doğrusunun doğrultusu

Anımsanacağı gibi, bir doğrusal yüzeyin verilen bir D anadoğrusunun boğaz noktasından geçen merkez doğrusu, bu noktadaki merkez düzlemi üzerindedir ve D ye diktir. Buna göre, D den geçen asimptot düzlemin normaline paraleldir. Böyle olunca da, Teorem 11-2 dolayısiyle, söz konusu merkez doğrusunun $\vec{b}$ doğrultu birim vektörü, (11-10) ve (11-16) formülleri nedeniyle

$$\vec{b} = \vec{w} \wedge \vec{w'} = \vec{w} \wedge \vec{b_1} = \frac{1}{h} \left(\vec{w_u} \wedge \vec{w_v}\right) \wedge \left(\vec{w_u} u' + \vec{w_v} v'\right)$$

veya (11-6) yardımiyle

(11-32) $$\vec{b} = \frac{-(f\,du + g\,dv)\,\vec{w_u} + (e\,du + f\,dv)\,\vec{w_v}}{h\,d\sigma}$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

O(1) birim küresinin koordinat çizgileri bir dik şebeke oluşturularsa, küre üzerinde f = 0 olacağından, (11-32) formülü

$$\vec{b} = -\frac{g}{h}\frac{dv}{d\sigma}\vec{w}_u + \frac{e}{h}\frac{du}{d\sigma}\vec{w}_v$$

veya

$$\vec{b} = -\frac{\vec{w}_u}{\sqrt{e}}\sqrt{g}\,v^* + \frac{\vec{w}_v}{\sqrt{g}}\sqrt{e}\,u^* \qquad (11\text{-}33)$$

olur.

(11-17) ve (11-33) formüllerinin invariyant türevler cinsinden yazılışı

O(1) birim küresi üzerinde koordinat çizgileri bir dik şebeke oluşturduklarında, v=sâbit ve u=sâbit koordinat çizgilerinin $\vec{t}$, $\vec{t}^*$ teğet birim vektörleri, invariyant türevler cinsinden

$$\vec{t} = \vec{w}_1 = \frac{\vec{w}_u}{\sqrt{e}}, \qquad \vec{t}^* = \vec{w}_2 = \frac{\vec{w}_v}{\sqrt{g}}$$

biçiminde yazılacağından,

$$\cos\varphi = \widehat{\vec{t}, \vec{b}_t} = \sqrt{e}\,u^*, \quad \sin\varphi = \widehat{\vec{b}_t, \vec{t}^*} = \sqrt{g}\,v^*$$

bağıntıları nedeniyle, (11-17) ve (11-33) formüleri

$$\begin{cases} \vec{w}^* = \vec{b}_t = \vec{t}\cos\varphi + \vec{t}\sin\varphi \\ \vec{w} \wedge \vec{w}^* = \vec{b} = -\vec{t}\sin\varphi + \vec{t}\cos\varphi, \\ \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{g}{e}}\,v', \quad v' = \frac{v^*}{u^*} \end{cases} \qquad (11\text{-}34)$$

biçiminde yazılırlar.

Uygulama11-1.

Bir doğru kongrüansının verilen bir D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeylerin D yi kesen merkez doğrularının geometrik yeri.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

S doğrultman yüzeyi üzerinde, koordinat çizgileri olarak, S nin asal çizgilerini alırsak, (11-29) koşulları gereğince

(11-29) $$f = 0, \quad m + \bar{m} = 0, \quad en - gl \neq 0$$

dır.

Koordinat çizgilerinin üçüncü ekseni olarak $P(\vec{W})$ eksenini, yani yönlendirilmiş ve üzerinde bir başlangıç noktası seçilmiş olan D anadoğrusunu, birinci ve ikinci eksen olarak da $P(\vec{t})$, $P(\vec{t^*})$ ı, başka deyişle, $P(\vec{t}, \vec{t^*}, \vec{w})$ sistemini alalım (11-29) un ilk koşulu nedeniyle, bir dik sistem söz konusudur.

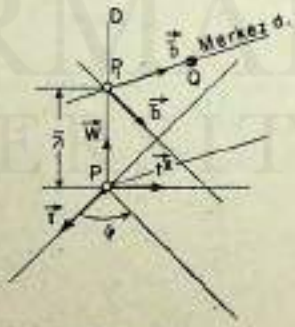
Merkez doğrusunun doğrultusu, (11-33) veya (11-34; 2) ile, yani

(11-30) $$\vec{b} = -\vec{t}\,\mathrm{Sin}\,\varphi + \vec{t^*}\,\mathrm{Cos}\,\varphi, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{g}{e}}\,v$$

ile verilmiştir. Bunun D anadoğrusunu kestiği P_1 noktasının $\bar{\lambda}$ apsisi, (11-19) nedeniyle

(11-31) $$\bar{\lambda} = x_3 = \frac{n v^2 + l}{g v^2 + e}$$

dir.



Şekil 81

Merkez doğrusunun herhangi bir Q noktasının koordinatları x_j, (j=1, 2, 3) ise, (11-30) nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-32) $$\frac{x_2}{x_1} = -\operatorname{Cotg}\varphi = -\sqrt{\frac{e}{g}}\cdot\frac{1}{v'}$$

olacağından, (11-31) ve (11-32) arasında v' yü yokeder ve (11-30) u kullanırsak, aranılan geometrik yerin karteziyen denklemi olarak

(11-33) $$(x_1^2 + x_2^2)\, x_3 - (\bar{\lambda}_2 x_1^2 + \bar{\lambda}_1 x_2^2) = 0$$

bulunur ki bu da **PLÜCKER konoidi**, ya da **silindroiddir**.

Teorem 11-5.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ ve $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının sınıflarının ≥ 1 olduğu bir doğru kongrüansında, D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeylerin D ile belirli olan merkez doğrularının geometrik yeri, bir PLÜCKER konoididir.

11-11. HAMILTON formülü

(11-34; 1) formülü ile tanımlanan $\vec{W}^* = \vec{b}$ vektörü, φ veya v' ile birlikte değişmektedir. Bu vektör, D den geçen ve gene φ veya v' ile beraber değişen doğrusal yüzeyin D den geçen merkez düzlemine, Teorem 11-2 nedeniyle, diktir $\vec{t}$, $\vec{t}^*$ vektörlerine gelince; bunlar da D den geçen asal düzlemlere diktir. Öte yandan, $\vec{W}$ vektörü ile yönlendirilmiş D anadoğrusu etrafındaki pozitif dönme yönünde hesabedilen φ açısı da, (11-34) formüllerinin çıkarılışında da görüldüğü gibi,

(11-34) $$\operatorname{Cos}\varphi = \widehat{\vec{t}, \vec{b}_1} = \sqrt{e}\, u^*, \quad \operatorname{Sin}\varphi = \widehat{\vec{b}_1, \vec{t}^*} = \sqrt{g}\, v^*$$

dir.

S doğrultman yüzeyi üzerinde, asal çizgiler koordinat çizgisi olduğuna göre, (11-29) koşulları geçerlidir ve (11-19)

(11-35) $$\bar{\lambda} = n v^{*1} + \ell u^{*1}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu son eşitlikteki u^* ve v^* yerine, (11-34) den çıkarılan değerler konulur ve (11-30) formüllerinden yararlanılırsa

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi + \bar{\lambda}_2 \operatorname{Sin}^2 \varphi \qquad (11\text{-}36)$$

HAMILTON formülü elde edilir.

Teorem 11-6.

S doğrultman yüzeyini tanımlayan $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ vektörel fonksiyonu ile, D anadoğrularının $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörlerinin sınıfları $\geqslant 1$ olan bir doğru kongrüansında, D den geçen bir S' doğrusal yüzeyinin D den geçen merkez düzleminin, D den geçen birinci asal düzlemle, $\vec{W}$ etrafındaki pozitif dönme yönünde hesaplanan açısı φ ise, D üzerindeki limit noktaların $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$ apsisleri, φ açısı ve S' nün D üzerindeki boğaz noktasının λ apsisi arasında, HAMILTON formülü denilen

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi + \bar{\lambda}_2 \operatorname{Sin} \varphi \qquad (11\text{-}36)$$

bağıntısı vardır.

Bu formül, limit noktalarla merkez noktalarına bağlı olarak, aynı bir D anadoğrusundan geçen çeşitli merkez düzlemlerinin değişim kanunu vermektedir.

Özelikler 11-1.

a. (11-36) formülünün biçimi, doğrultman yüzeye bağlı değildir. Gerçekten, (11-36) formülünde, yeni doğrultman yüzeye göre

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda} + a, \quad \bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_1' + a, \quad \bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_2' + a,$$

değerleri konulacak olursa

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_1' \operatorname{Cos}^2 \varphi + \bar{\lambda}_2' \operatorname{Sin}^2 \varphi \qquad (11\text{-}37)$$

elde edilir ki bu da, biçim bakımından, (11-36) dan farksızdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Özelikle, doğrultman yüzey olarak, **limit noktaların tanımladığı doğru parçasının Ω orta noktasının geometrik yeri olan yüzey** alınacak olursa,

(11-37)' $$\bar{\lambda}_1' + \bar{\lambda}_2' = 0$$

olacağından, (11-37) formülü

(11-37)' $$\bar{\lambda}' + \bar{\lambda}_1' \operatorname{Cos} 2\varphi$$

verir.

Ω noktasının geometrik yerine **orta yüzey**, bu noktanın kendisine de D anadoğrusunun **orta noktası** diyeceğiz.

b. **HAMILTON formülü, u ve v bağımsız parametrelerinin seçimine bağlı değildir.**

c. **Bir asal düzleme göre simetrik olan iki merkez düzleminin boğaz noktalarının apsisleri eşittir.**

Bu özelik, (11-36) formülüne göre açıktır.

d. **φ ve $\varphi + \frac{\pi}{2}$ doğrultularındaki merkez düzlemlerinin boğaz noktalarının $\bar{\lambda}'$, $\bar{\lambda}''$ apsislerinin toplamı sâbittir ve**

(11-39) $$\bar{\lambda}' + \bar{\lambda}'' = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2$$

dir.

Gerçekten, (11-36) formülüne göre, φ ve $\varphi + \frac{\pi}{2}$ doğrultuları için

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_1 \operatorname{Cos}^2 \varphi + \bar{\lambda}_2 \operatorname{Sin}^2 \varphi$$

$$\bar{\lambda}'' = \bar{\lambda}_1 \operatorname{Sin}^2 \varphi + \bar{\lambda}_2 \operatorname{Cos}^2 \varphi$$

olacağından, bunların toplamı, (11-39) u verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

e. Birinci asal düzlemle oluşturduğu açı: $\varphi = 45^\circ$ olan merkez düzlemin boğaz noktasının λ^* apsisi

$$\bar{\lambda}^* = \frac{1}{2}(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2)$$

dir.

11-12. Bir doğru kongrüansının odak yüzeyleri

Bir doğru kongrüansının doğrusal yüzeyleri arasında bulunan açılabilenleri, (11-22) nin payını sıfıra eşitlemekle elde edilebilirler. Böylece, doğrultman yüzey üzerinde, açılabilen yüzey veren eğrilerin diferansiyel denklemi bulunur. Bu diferansiyel denklem, (11-22) nedeniyle

$$(11\text{-}39) \qquad (fn-gm)\,v'^2 + [en - g\bar{l} + f(\bar{m} - m)]\,v' + e\bar{m} - f\bar{l} = 0$$

dir.

D anadoğrularının dönüm ayrıtlarına değdikleri noktaların $\bar{\lambda}$ apsislerine gelince, bunlar da

$$(11\text{-}19) \qquad \bar{\lambda} = \frac{n v'^2 + (m + \bar{m})\,v' + l}{g v'^2 + 2f v' + e}$$

biçiminde yazılan (11-19) formülü ile (11-39) arasında v' yü yokederek elde edilirler. Yalnız, böyle davranmakla, hesapları biraz uzatmış oluruz. Sonuca daha çabuk vardırması bakımından, aşağıdaki yol daha elverişlidir.

(11-1) denklemi, bir açılabilen yüzeyin dönüm ayrıtını tanımlıyorsa, $\vec{dy}$ vektörü, $\vec{w}$ doğrultu birim vektörüne paralel olacağından, $\vec{w}$ ye dik olan $\vec{w}_u$ ve $\vec{w}_v$ vektörleri

$$(11\text{-}40) \qquad \vec{dy} \cdot \vec{w}_u = 0, \quad \vec{dy} \cdot \vec{w}_v = 0$$

eşitliklerini sağlarlar

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Öte yandan

$$\vec{dy} = \vec{x}_\lambda\, du + \vec{x}_\mu\, dv + \bar{\lambda}(\vec{w}_\lambda\, du + \vec{w}_\mu\, dv) + \vec{w}\, d\bar{\lambda}$$

vektörel bağıntısı; (11-40), (11-6) ve (11-12) formüleri yardımiyle

$$(11\text{-}41) \qquad (\bar{\lambda} e - \bar{l})\, du + (\bar{\lambda} f - m)\, dv = 0, \quad (\bar{\lambda} f - \bar{m})\, du + (\bar{\lambda} g - n)\, dv = 0$$

verir.

Bu iki denklem arasında du, dv leri yokedersek, D doğrularının dönüm ayrıtlarına değdikleri noktaların $\bar{\lambda}$ apsislerini, $\bar{\lambda}$ leri ortadan kaldırırsak, doğrultman yüzeyin açılabilen yüzey veren eğrilerinin diferansiyel denklemini elde ederiz. Bunlar, sırasiyle,

$$\begin{vmatrix} \bar{\lambda} e - \bar{l} & \bar{\lambda} f - m \\ \bar{\lambda} f - \bar{m} & \bar{\lambda} g - n \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} e\, du + f\, dv & f\, dv + g\, du \\ \bar{l}\, du + m\, dv & \bar{m}\, dv + n\, dv \end{vmatrix} = 0$$

denklemleridir. Bunları da açtığımızda

$$(11\text{-}42) \qquad h^2 \bar{\lambda}^2 + [f(m + \bar{m}) - (en + g\bar{l})]\, \bar{\lambda} + \bar{l} n - m \bar{m} = 0$$

$$(11\text{-}43) \qquad (e\bar{m} - f\bar{l})\, du^2 + [en - g\bar{l} + f(\bar{m} - m)]\, du\, dv + (fn - gm)\, dv^2 = 0$$

denklemlerini buluruz.

İkincisi, kolaylıkla kestirilebileceği gibi, (11-39) un aynıdır. Bu diferansiyel denklem, birinci mertebeden ve ikinci dereceden bir diferansiyel denklem olduğundan, kongrüansın her D doğrusundan, gerçel veya sanal iki ayrı açılabilen yüzey geçer. Bu demektir ki kongrüansın her D anadoğrusu iki ayrı uzay eğrisine teğet kalır. D nin bu eğrilere değdiği noktalar, D anadoğrusunun **odaklarıdır**. Bu odakların geometrik yerleri de, kongrüansın **odak yüzeyleridir**. Sözü edilen iki açılabilen yüzeyin her biri için ayrı, D boyunca aynı olan teğet düzlemlerine de **odak düzlemleri** denilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 11-7.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ **vektörel fonksiyonlarının sınıfları** $\geqslant 1$ **olan bir doğru kongrüansında, bir D anadoğrusu üzerinde bulunan odaklar, D nin limit noktalarının** Ω **orta noktasına göre simetriktir**

Gerçekten, (11-42) denkleminin kökleri $\bar{\lambda}'$, $\bar{\lambda}''$ ise, bu denkleme göre,

$$\bar{\lambda}' + \bar{\lambda}'' = \frac{en + gl - 2f(m + \bar{m})}{h^2} \tag{11-44}$$

olduğundan, (11-28; 1) nedeniyle

$$\bar{\lambda}' + \bar{\lambda}'' = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 \tag{11-45}$$

dir.

Limit noktaların apsisleri, $\bar{\lambda}$ lerin ekstremumlarını verdiğinden, **odaklarla belirli olan doğru parçası, limit noktaların içindedir.**

Teorem 11-8.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ **vektörel fonksiyonlarının sınıfları** $\geqslant 1$ **olan bir doğru kongrüansında, bir D anadoğrusundan geçen asal düzlemlerle odak düzlemlerin simetri düzlemleri aynıdır, yâni bunların açıortay düzlemleri ortaktır.**

Gerçekten, doğrultman yüzey olarak, Ω orta noktasının geometrik yeri olan orta yüzey alınırsa, (11-38) formülüne göre,

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_1' \operatorname{Cos} 2\varphi', \quad \bar{\lambda}'' = \bar{\lambda}_1' \operatorname{Cos} 2\varphi'', \quad \bar{\lambda}_1' \neq 0 \tag{11-45}$$

den, $\bar{\lambda}' + \bar{\lambda}'' = 0$ bağıntısı dolayısiyle

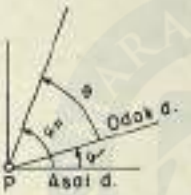
$$\operatorname{Cos} 2\varphi' + \operatorname{Cos} 2\varphi'' = 0$$

veya

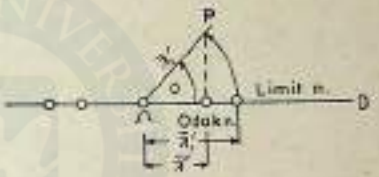
MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-46) $$2(\varphi' + \varphi'') = \pi \rightarrow \varphi' + \varphi'' = \frac{\pi}{2}$$

çıkar ki bu da teoremi doğrular.



Şekil 82



Şekil 83

Odak düzlemleri arasındaki açıyı θ ile gösterirsek,

$$\text{Sin}\,\theta = \text{Sin}\,(\varphi'' - \varphi') = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi'\right) = \text{Cos}\,2\varphi'$$

ve (11-45; 1) nedeniyle de

(11-47) $$\text{Sin}\,\theta = \frac{\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}_1'}$$

bulunur.

Uyarılar 11-6.

a. (11-38) formülü gösterir ki φ ve $-\varphi$ açıları için aynı $\bar{\lambda}'$ bulunur. Buna göre:

D anadoğrusunun aynı bir P_1 boğaz noktasiyle bulunan iki merkez düzlemi, asal düzlemlere göre simetriktir.

b. φ_1 ve $-\varphi_1$ açıları için bulunan ve $\overline{\Omega P_1} = \bar{\lambda}'$ bağıntısını sağlayan P_1 boğaz noktasının Ω orta noktasına göre P_2 simetriğini alırsak, bu nokta için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 84

$$\overline{\Omega P_2} = -\bar{\lambda}'$$

olur. Bu nokta ile belirli olan φ_2 ve $-\varphi_2$ açılarına gelince, (11-46) formülü dolayısiyle, **P_2 ile belirli olan ve birinci asal düzlemle φ_1 ve $-\varphi_1$ açılarını yapan merkez düzlemler, P_2 ile belirli olan ve birinci asal düzlemi $-\varphi_2$, φ_2 açılarını oluşturan merkez düzlemlerine diktir.**

c. **Ω orta noktası ile**, yâni $\bar{\lambda}' = 0$ ile **belirli olan merkez düzlemleri**, $\cos 2\varphi = 0$ bağıntısını sağlayacaklarından,

$$2\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad 3\frac{\pi}{2}$$

bağıntıları nedeniyle, **asal düzlemlerin açıortay düzlemleridir.**

11-13. Dağılma parametresini veren (11-22) formülünün başka bir biçime sokulması

Doğrultman yüzeyin asal çizgileri, koordinat çizgileri olarak alındığında, (11-29) nedeniyle

$$t = 0, \quad m + \bar{m} = 0 \qquad en - g\ell \neq 0$$

dır ve (11-34) formülleri yardımiyle (11-22) yi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$p = \frac{\bar{m}}{\sqrt{eg}} + \frac{en - g\bar{l}}{eg} \sin\varphi \cos\varphi$$

biçiminde yazabiliriz. (11-30) bağıntıları kullanıldığında da

(11-48) $$p = \frac{\bar{m}}{\sqrt{eg}} + (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \sin\varphi \cos\varphi$$

olur.

Bu formül gösterir ki u=sâbit ve v=sâbit veya $\varphi = 0$ ve $\varphi = \frac{\pi}{2}$ koordinat çizgilerinin, yâni asal çizgilerin ikisi için, dağılma parametrelerinin değerleri aynıdır. Bu ortak değeri $\bar{p}$ ile gösterecek olursak

(11-49) $$\bar{p} = \frac{\bar{m}}{\sqrt{eg}}$$

dir ve (11-48) formülü

(11-50) $$p = \bar{p} + (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \sin\varphi \cos\varphi$$

olur.

Üstelik, doğrultman yüzey olarak orta yüzey alındığında,

$$\bar{\lambda}_1' + \bar{\lambda}_2' = 0$$

olacağından, (11-50) formülü

(11-51) $$p = \bar{p} - \bar{\lambda}_1 \sin 2\varphi$$

biçimine girer.

Teorem 11-9.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ fonksiyonlarının en az birinci sınıftan oldukları bir doğru kongrüansında, asal çizgileri koordinat çizgileri olarak

aldığımızda, bir D anadoğrusundan geçen iki asal yüzeyin D ile belirli olan dağılma parametreleri aynıdır ve (11-49) formülü ile belirlidir. D den geçen herhangi bir doğrusal yüzeyin D ile tanımlanan dağılma parametresi de (11-50) formülü ile verilmiştir. Eğer doğrultman yüzey olarak orta yüzey alınırsa, (11-50) formülü yerine (11-51) formülü kullanılabilir.

Uyarı 11-7.

C(1) birim küresinin koordinat çizgileri dik şebeke oluşturduklarında, $f = 0$ dır ve (11-22) formülü gösterir ki: D den geçen ve doğrultman yüzeyle kesitlerinin P(u, v) deki teğetleri, koordinat çizgilerinin aynı noktadaki teğetleriyle çakışan iki doğrusal yüzeyin D ile belirli olan dağılma parametreleri, v=sâbit ve u=sâbit sırasında

$$\frac{\overline{m}}{\sqrt{eg}} \quad - \frac{m}{\sqrt{eg}}$$

dir.

Bunların birbirlerine eşit olmaları demek,

$$m + \overline{m} = 0$$

koşulunun sağlanması demektir. Buna göre, Teorem 11-4 nedeniyle, doğrultman yüzeyin koordinat çizgileri, asal çizgilerdir. Dolayısiyle, şu teorem söz konusudur:

Teorem 11-10.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının en az birinci sınıftan oldukları bir doğru kongrüansında, birim küresinin koordinat çizgileri bir dik şebeke oluşturuyorlarsa, D den geçen doğrusal yüzeylerin D ile belirli olan ve v=sâbit, u=sâbit ile tanımlanan dağılma parametrelerinin birbirlerine eşit olmaları için gerekli ve yeterli koşul, doğrultman yüzeyin koordinat çizgilerinin, asal çizgilerden meydana gelmeleridir.

Özellikler 11-2.

a., (11-50) formülü gösterir ki φ yerine $\frac{\pi}{2} - \varphi$ alındığında, p nin değeri değişmez. Buna göre:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 11-11.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının sınıflarının ≥ 1 olduğu bir doğru kongrüansında, bir D anadoğrusundan geçen çeşitli doğrusal yüzeyler arasında, D ile belirli olan merkez düzlemleri, D den geçen asal düzlemlerin açıortay düzlemlerine göre simetrikse, bu iki doğrusal yüzeyin D ile tanımlanan dağılma parametreleri birbirine eşittir.

Bu iki düzlem birbirine dikse, asal düzlemlerle çakışırlar. Bu da Teorem 11-10 un başka bir ispatını oluşturur.

b. (11-50) formülünde, φ ve $\varphi + \frac{\pi}{2}$ doğrultularının belirledikleri dağılma parametrelerine p', p'' dersek,

$$p' = \bar{p} + (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \cos\varphi \sin\varphi,$$

$$p'' = \bar{p} - (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \sin\varphi \cos\varphi$$

olacağından, bunların toplamı

$$p' + p'' = 2\bar{p} \tag{11-52}$$

dir.

Teorem 11-12.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının en az birinci sınıftan oldukları bir doğru kongrüansında, bir D anadoğrusundan geçen iki doğrusal yüzeyin D ile belirli olan merkez düzlemleri birbirine dikse, bunların D ile tanımlanan dağılma parametrelerinin toplamı sâbittir ve D den geçen asal yüzeylerden herhangi birinin D ile belirli olan dağılma parametresinin iki katına eşittir.

c. (11-50) formülünde, φ ve $-\varphi$ doğrultularının belirledikleri dağılma parametrelerinin toplamı da $2\bar{p}$ olduğundan, şu teorem elde edilir:

Teorem 11-13.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının sınıflarının ≥ 1

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

olduğu bir doğru kongrüansında, bir D anadoğrusundan geçen iki doğrusal yüzeyin D ile belirli olan merkez düzlemleri, D den geçen asal düzlemlere göre simetrikse, bunların D ile tanımlanan dağılma parametrelerinin toplamı sâbittir ve D den geçen asal yüzeylerden herhangi birisinin D ile belirli olan dağılma parametresinin iki katına eşittir.

d. Gene aynı (11-50) formülünde, φ ve $\varphi + \frac{\pi}{4}$ doğrultularının belirledikleri dağılma parametreleri p ve $\tilde{p}$ ise,

$$p = \bar{p} + (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \cos \varphi \sin \varphi ,$$

$$\tilde{p} = \bar{p} + (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \frac{\cos 2\varphi}{2}$$

olduğundan

$$(p - \bar{p})^2 + (\tilde{p} - \bar{p})^2 = \left(\frac{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}{2} \right)^2 \tag{11-53}$$

dir.

Teorem 11-14.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir doğru kongrüansında, D anadoğrusundan geçen iki doğrusal yüzeyin D ile belirli olan merkez düzlemleri arasındaki açı $45°$ ise, bunların D ile tanımlanan p, $\tilde{p}$ dağılma parametreleri arasında (11-53) bağıntısı vardır.

11-14. Kongrüansın doğrusal yüzeylerinin dağılma parametrelerinin ekstremumları

(11-50) formülüne göre, p dağılma parametresinin ekstremumlarını veren φ değerleri

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4} \tag{11-54}$$

dür ve p_1, p_2 ile gösterilecek ekstremumların değerleri de

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-55) $$p_1 = \bar{p} + \frac{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}{2}, \quad p_1 = \bar{p} - \frac{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}{2}$$

eşitlikleriyle belirlidir.

φ açısının (11-50) değerleri, (11-36) HAMILTON formülünde kullanıldığında, boğaz noktasının apsisi olarak, her ikisi için de

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2}{2}$$

yani Ω orta noktası bulunur.

Doğru kongrüansının bir D anadoğrusundan geçen ve P nin ekstremum değerleriyle belirli olan doğrusal yüzeylere **ortalama yüzeyler** diyeceğiz. Buna göre, (11-54) den şu sonuçlar çıkarılır:

Teorem 11-15.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir doğru kongrüansında, bir D anadoğrusundan geçen ortalama yüzeylerin D ile belirli olan merkez düzlemleri, D den geçen asal düzlemlerin açıortay düzlemleridir.

Teorem 11-16.

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$, $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ vektörel fonksiyonlarının sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir doğru kongrüansında, bir D anadoğrusundan geçen ortalama yüzeylerin boğaz çizgileri, D nin Ω orta noktasında birbirini keser ve iki ortalama yüzey bu noktada birbirine diktir.

Doğrultman yüzey olarak, Ω orta noktasının geometrik yeri olan orta yüzey alındığında, bu yüzey üzerinde ortalama yüzeyleri verecek olan eğrilerin diferansiyel denklemi, (11-34) ve (11-54) formülleri nedeniyle

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{g}{e}} \quad \checkmark, \quad \operatorname{tg}\varphi = \pm 1$$

olacağından,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-55) $$v' = \pm \sqrt{\frac{e}{g}}$$

biçiminde bulunur.

11-15. Dağılma parametresini, ekstremumları cinsinden veren MANNHEIM formülü

(11-55) formüllerinden

(11-56) $$\bar{p} = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1 = p_1 - p_2$$

elde edileceğinden,

(11-57) $$\varphi = \frac{\pi}{4} + \alpha$$

dersek, (11-50) bağıntısını

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} + \left(\frac{p_1 - p_2}{2}\right) \cos 2\alpha$$

veya

(11-58) $$p = p_1 \cos^2 \alpha + p_2 \sin^2 \alpha$$

biçiminde yazabiliriz. Böylece **MANNHEIM formülü** elde edilmiş olur.

Bu bağıntıdaki α açısı, D anadoğrusunun $\vec{w}$ doğrultu birim vektörü etrafındaki pozitif dönme yönünde hesabedilmek üzere, D anadoğrusundan geçen birinci ortalama yüzeyin D ile belirli olan merkez düzlemiyle, kongrüansın D den geçen bir doğrusal yüzeyinin D ile tanımlanan merkez düzlemi arasındaki açıyı göstermektedir.

Birinci ve ikinci ortalama yüzeylerin D ile belirli olan merkez düzlemlerine birinci ve ikinci ortalama düzlem diyeceğiz.

Uygulama 11-2. Dağılma parametresinin ekstremumları cinsinden HAMILTON formülü

Ω orta noktasının geometrik yeri olan orta yüzeyin doğrultman yüzey olarak seçildiği (11-38) formülünde, $\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 = 0$ dır ve limit noktalardan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

birinin apsisi $\bar{\lambda}_1'$ ve genel olarak boğaz noktalarının apsisleri $\bar{\lambda}'$ ile gösterilmiştir:

(11-38 $$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda}_1' \cos 2\varphi$$

Böyle olunca, [11-56; 2)

$$\bar{\lambda}_1' = \frac{p_2 - p_1}{2}$$

biçiminde yazılabileceğinden, (11-57) dolayısiyle, (11-38) i

$$\bar{\lambda}' = -\frac{p_2 - p_1}{2} \sin 2\alpha$$

veya

(11-59) $$\bar{\lambda}' = (p_1 - p_2) \sin\alpha \cos\alpha$$

biçimine sokabiliriz.

Bu formül, bundan önce, geodezik burulma için bulduğumuz (47-16) OSSIAN BONNET formülünü andırır.

(11-59) formülü gösterir ki ortalama yüzeylerin $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$ ile tanımlanan boğaz noktaları, Ω orta noktası ile çakışırlar. Bunu, daha önce, Teorem 11-16 da da görmüştük.

Uyarı 11-8.

Uyarı 11-6 da sözü edilen a, b, c özelikleri (11-59) formülü ile de bulunabilir.

Tanımlar ve özelikler 11-1.

a. Eğer $p_1 p_2 > 0$ ise, (11-58) formülü gösterir ki, D anadoğrusundan geçen tüm doğrusal yüzeylerin D ile belirli olan dağılma parametreleri aynı işaretlidir, dolayısiyle, bunlar arasında sıfıra eşit olan yoktur. Başka deyişle, **bu doğrusal yüzeylerin D üzerindeki odak noktaları gerçel değildir.** Kongrüansın bu tür anadoğrularına **eliptik** denilir.

b. Eğer bir D anadoğrusu için $p_1 p_2 < 0$ ise, p_1 ve p_2 ters işaretlidir ve D den geçen doğrusal yüzeylerin D ile belirli olan dağılma parametreleri,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bu yüzeylerin bir bölümü için pozitif, bir bölümü için de negatifdir. Buna göre, **D anadoğrusu üzerindeki odak noktaları gerçeldir.** Böyle olunca d_a, (11-55) den

$$p_1 p_2 = \bar{p}^2 - \left(\frac{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}{2}\right)^2 < 0 \qquad (11\text{-}60)$$

çıkarılır ve bu da (11-30) ve (11-49) yardımıyle

$$\frac{\overline{m}^2}{eg} - \frac{1}{4}\left(\frac{n}{g} - \frac{l}{e}\right)^2 < 0 \qquad (m + \overline{m} = 0) \qquad (11\text{-}61)$$

biçimine sokulur.

Doğrultman yüzey olarak, orta yüzey alındığında

$$\frac{l}{e} + \frac{n}{g} = 0$$

olacağından, (11-61) bağıntısı

$$m^2 + ln < 0 \qquad (11\text{-}62)$$

verir. Odakların gerçel olması halinde, (11-62), (11-42) den çıkarılabilir.

Aynı bir D anadoğrusundan geçen odak düzlemlerin, birinci ortalama düzlemle oluşturdukları $\bar{\alpha}$ açısı için, (11-58) formülünden, $p = 0$ için

$$tg\,\bar{\alpha} = \pm \sqrt{-\frac{p_1}{p_2}} \qquad (11\text{-}63)$$

bulunur.

Böyle bir D anadoğrusuna da **hiperbolik** denilir.

c. Kongrüansın bir D anadoğrusundan geçen odak düzlemlerinden birisinin, D den geçen birinci asal düzlemle oluşturduğu açı φ' ise, (11-38) ve (11-51) formüllerinden çıkarılacak

$$\cos 2\varphi' = \frac{\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}'_1}, \quad \sin 2\varphi = \frac{\bar{p}}{\bar{\lambda}_1'} \qquad (11\text{-}64)$$

formülleri.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

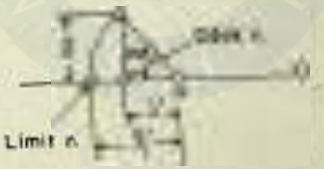
(11-65) $$\bar{\lambda}_1'^2 = \bar{\lambda}'^2 + \bar{p}^2$$

verir.

Aynı sonuca, (11-47) yardımiyle de varılabilir:

$$\text{Sin}\,\theta = \text{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi'\right) = \text{Cos}\,2\varphi' = \frac{\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}_1'}$$

Söylemeye gerek yoktur ki bu bağıntı, başka birçoklarında olduğu gibi, geometrik tanımı nedeniyle, koordinat çizgilerinin seçimine bağlı değildir.



Şekil 85

d. Dağılma parametrelerinin ekstremumlarını gösteren p_1, p_2 parametrelerinden **birisi sıfıra eşitse,** bu özeliğin üzerinde gerçekleştiği D anadoğrusuna da **parabolik** denilir.

Bir D anadoğrusu parabolikse, (11-63) bağıntısı dolayısiyle, birinci ortalama düzleme göre simetrik olan odak düzlemler, $p_1 = 0$ olduğu için, bu düzlemle çakışırlar. Buna göre, odak düzlemlerle birinci asal düzlemin oluşturacağı açı $\varphi' = \frac{\pi}{4}$ olacağından, (11-64; 1) gösterir ki $\bar{\lambda}' = 0$ dır, yâni D nin odak noktalarından ikisi de Ω orta noktasında çakışırlar. **D anadoğrusundan geçen iki açılabilen yüzeyin dönüm ayrıntıları, Ω da D ye teğet olacaklarından, aynı noktada birbirlerine teğettirler.** Öte yandan, odak düz-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

lemler, birinci ortalama düzlemle çakıştıklarından, **D den geçen iki açılabilen yüzey, D boyunca birbirine teğettir.**

Eğer doğru kongrüansının tüm D anadoğruları parabolikse, o zaman **kongrüansa da parabolik** adı verilir. Böyle bir kongrüansta, kongrüansın herhangi bir D anadoğrusundan geçen iki açılabilen yüzey çakışır ve odak yüzeyleri de, ortak dönüm ayrıtının geometrik yeri olan orta yüzeyden oluşur.

12. Normaller kongrüansı

Bir yüzeyin normalleriyle oluşan doğru kongrüansına, **normaller kongrüansı** denilir. Böyle bir kongrüansın anadoğruları, verilen yüzeyin paralelı olan ∞ yüzeyin de ortak normalidir —Paralel Yüzeyler bölümüne bakınız.—

(11-1) vektörel denklemiyle verilen bir doğru kongrüansının hangi koşullarda, bir normaller kongrüansı olacağını araştıralım.

Bunun için, kongrüansın D anadoğrularının bir Q(u, v) noktasında

$$\vec{y}(u,v) = \vec{x}(u,v) + \lambda(u,v)\,\vec{w}(u,v)$$

denklemiyle tanımlanan yüzeye normal kaldıklarını düşünelim.

Bunun için,

$$\vec{w} \cdot d\vec{y} = 0, \qquad (\vec{w}^2 = 1)$$

veya

$$\vec{w} \cdot (d\vec{x} + d\lambda\,\vec{w}) = 0$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu da

$$d\lambda = -\vec{w}\,d\vec{x} = -(\vec{w} \cdot \vec{x}_u\,du + \vec{w} \cdot \vec{x}_v\,dv, \tag{12-1}$$

demektir.

(12-1) in ikinci yanının bir tam diferansiyel olması için

$$(\vec{w} \cdot \vec{x}_u)_v = (\vec{w} \cdot \vec{x}_v)_u$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{W}_r \cdot \vec{X}_s = \vec{W}_s \cdot \vec{X}_r$$

yâni (11-12) nedeniyle

(12-2) $$m = \bar{m}$$

eşitliğinin bulunması gereklidir. Bunun yeterli olacağı da açıkça görülmektedir.

Teorem 12-1.

Doğrultman yüzeyi veren $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ vektörel fonksiyonunun en az ikinci ve $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ doğrultu birim vektörünün de en az birinci sınıftan olduğu bir doğru kongrüansının normaller kongrüansı olması için gerekli ve yeterli koşul

$$m = \bar{m}$$

dir.

12-1. $m = \bar{m}$ bağıntısının geometrik anlamı

Kongrüansın doğrultman yüzeyi olarak Ω orta noktasının geometrik yeri olan orta yüzeyi alalım ve koordinat çizgileri de asal çizgiler olsun. Buna göre, (11-29), (11-37)' ve (12-2) formülleri nedeniyle

(12-3) $$en + g\bar{l} = 0, \quad f = 0, \quad m + \bar{m} = 0, \quad 2m = -2\bar{m} = 0, \quad en - gl \neq 0$$

dır. Böyle olunca, (11-49) dolayısiyle, asal çizgilerin birbirine eşit olan dağılma parametrelerinin $\bar{p}$ değeri

(12-4) $$\bar{p} = \frac{\bar{m}}{\sqrt{eg}} = 0$$

dır. Öte yandan, (11-65) formülü de, (12-4) nedeniyle

(12-5) $$\bar{\lambda}'^2 = \bar{\lambda}_1'^2$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

biçimine girer. Demek ki, normaller kongrüansında, bir D anadoğrusu üzerinde bulunan limit noktalarla odak noktaları çakışmaktadır. Bunun karşıtının da doğru olacağı kolayca görülmektedir. Bu sonuç veya $\bar{p} = 0$ dolayısiyle, odak düzlemlerle asal düzlemler de çakışmakta, yâni odak düzlemler birbirini dik olarak kesmektedir.

Teorem 12-2.

Doğrultman yüzeyi ile doğrultu birim vektörü, sıra ile, en az ikinci ve birinci sınıftan olan bir doğru kongrüansının normaller kongrüansı olması için gerekli ve yeterli koşul, her D anadoğrusu üzerinde odaklarla limit noktaların çakışması, ya da odak düzlemlerin birbirlerini dik kesmeleridir.

Özellikler 12-1.

a. Normaler kongrüansında, (12-4) nedeniyle, (11-55) bağıntısı

(12-6) $$p_2 = -p_1 = \bar{\lambda}_1'$$

verir.

b. Normaler kongrüansında, doğrultman yüzey olarak, D anadoğrularının normal kaldıkları ∞ paralel yüzey arasından gelişi güzel birisi seçilirse, (11-1) vektörel denklemindeki $\vec{w}(u, v)$ doğrultu birim vektörü, bu seçilen yüzeyin $\vec{n}(u, v)$ normal birim vektörü olarak alınabilir. Eğer doğrultman yüzey üzerinde koordinat çizgileri olarak eğrilik çizgileri seçilirse, (25-6) OLINDE RODRIGUES formülleri yardımiyle

$$\vec{w}_u^2 = \vec{n}_u^2 = e = \bar{r}^2 E, \quad f = 0, \quad \vec{w}_v^2 = \vec{n}_v^2 = g = \bar{r}^2 G$$

veya (25-5) nedeniyle

(12-7) $$e = L r, \quad f = 0, \quad g = N \bar{r}$$

dir. Ayrıca

$$-\vec{x}_u \cdot \vec{w}_u = -\vec{x}_u \cdot \vec{n}_u, \quad -\vec{x}_v \cdot \vec{w}_v = -\vec{x}_v \cdot \vec{n}_v$$

olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$l = L, \quad m = \bar{m} = 0, \quad n = N$$

dir ve dolayısiyle

$$R = \frac{l}{e} = \lambda_1', \quad \bar{R} = \frac{n}{g} = \lambda_2' \tag{12-8}$$

dir.

Görülüyor ki: **normaler kongrüansında, anadoğruların normal kaldıkları sonsuz yüzey arasından birisi seçildiğinde, bir D anadoğrusunun limit noktaları ile, seçilen yüzeyin D üzerindeki asal eğrilik merkezleri çakışır, dolayısiyle bu sonuncular, seçilen yüzeye bağlı değildir.** Bu söylediklerimizin karşıtı da doğrudur.

c. Kongrüansın D anadoğrularının normal kaldıkları doğrultman yüzeyi deldikleri nokta P ise, Ω orta noktası

$$\overline{P\Omega} = \frac{R + \bar{R}}{2} \tag{12-9}$$

bağıntısını sağlar.

D üzerindeki asal eğrilik merkezlerine P^*, $\bar{P}^*$ der ve $P = \Omega$ varsayarsak,

$$\overline{\Omega P^*} + \overline{\Omega \bar{P}^*} = R + \bar{R} = 0 \tag{12-10}$$

olur ve (12-5), (12-8) nedeniyle de

$$\lambda_1 = \frac{R - \bar{R}}{2} = p_2 - p_1, \quad \frac{1}{2} R = p_2, \quad \frac{1}{2} \bar{R} = p_1 \tag{12-11}$$

dir.

12-2. Normaller kongrüansında odak yüzeyler

Bir S yüzeyinde, koordinat çizgileri olarak C, $\bar{C}$ eğrilik çizgilerini alalım ve S nin normallerinin C, $\bar{C}$ boyunca değişmeleri hâlinde teğet kaldıkları dönümayrıtları C^*, $\bar{C}^*$, ve bunların geometrik yerleri olan odak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 86

yüzeyleri de F, $\bar{F}$ olsun, C^* eğrisine teğet kalan D anadoğrularının $\bar{F}$ ye değdikleri noktaların geometrik yerine L, aynı biçimde F üzerinde bulunan eğriye de $\bar{L}$ diyelim. C ve $\bar{C}$ nin P deki teğet birim vektörleri $\vec{a}_1$, $\vec{\bar{a}}_1$ ise, F ve $\bar{F}$ odak yüzeylerinin P^* ve $\bar{P}^*$ noktalarındaki teğet düzlemleri, sırasıyla, $(\vec{n}, \vec{\bar{a}}_1)$ ve $(\vec{n}, \vec{a}_1)$ düzlemleridir. Öte yandan C^* a teğet D anadoğruları ile tanımlanan açılabilen yüzeyin P^* noktasındaki teğet düzlem $(\vec{n}, \vec{a}_1)$ olduğundan $\vec{a}_1$ vektörü, C^* in P^* noktasındaki asal normaline paraleldir. Aynı nedenle, $\vec{\bar{a}}_1$ de $\bar{C}^*$ nin $\bar{P}^*$ daki asal normaline paraleldir.

C^* eğrisinin P^* daki asal normaline paralel olan $\vec{a}_1$ vektörü, F yüzeyinin P^* daki $(\vec{n}, \vec{\bar{a}}_1)$ teğet düzlemine dik olduğundan, C^* eğrisi F odak yüzeyinin bir geodeziğidir. Aynı biçimde, $\bar{C}^*$ eğrisi de $\bar{F}$ odak yüzeyinin bir geodeziğidir.

Bu sonuca, F ve $\bar{F}$ odak yüzeylerinin vektörel tanımları yardımıyla da varılabilir.

Buna göre, Teorem 39-5 dolayısıyla, şu teorem söz konusudur:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 12-3.

Bir S yüzeyinin eliptik-ombilik ve parabolik-ombilik olmayan düzgün noktalarından oluşan bir B bölgesinde sınıfı ≥ 3 ise, bu bölgenin en az ikinci sınıftan bir C eğrilik çizgisi boyunca değişen yüzey normallerinin doğurdukları açılabilenin dönüm ayrıtı, üzerinde bulunduğu odak yüzeyin geodezigidir.

Karşıt olarak, bir F yüzeyi üzerinde bir parametreli bir geodezik ailesi alındığında, bunların teğetleriyle tanımlanacak doğru kongrüansı, bir normaller kongrüansıdır ve F de bunun odak yüzeylerinden biridir.

Gerçekten, F yüzeyi üzerinde, bir parametreli bir geodezik ailesini, $v=$sâbit koordinat çizgileri olarak alalım, ve bunların dik yörüngeleri de $u=$sâbit eğrileri olsun. Buna göre, F yüzeyi üzerinde

$$F = 0$$

dır. (42-5) koşulu nedeniyle de

(12-12) $$E, [u, v] = 0 \quad \text{veya} \quad E = E[u]$$

dır.

Birinci yol

F yüzeyinin vektörel denklemi $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ ise, $v=$sâbit eğrilerinin teğetleriyle tanımlanan kongrüansın vektörel denklemi

$$\vec{y}(u, v) = \vec{x}(u, v) = \lambda \vec{t}(u, v), \quad \vec{t} = \frac{\vec{x}_u}{\sqrt{E}}, \quad (\vec{t}^2 = 1)$$

dir.

λ yı u ve v cinsinden o biçimde bulabilmeliyiz ki, kongrüansın ana doğruları veya $\vec{t}$, bir yüzeyin normalleri olabilsin, yâni

$$\vec{t} \cdot \vec{dy} = 0$$

koşulunu sağlayan λ ları bulabilmeliyiz. Bu da açılınca

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{t} \cdot (d\vec{x} + \vec{t}\, d\lambda) = 0,$$

veya $F = 0$ nedeniyle

$$d\lambda = -\vec{t} \cdot d\vec{x} = -\frac{\vec{x}_u}{\sqrt{E(u)}} (\vec{x}_u du + \vec{x}_v dv) = -\sqrt{E(u)}\, du$$

yâni

(12-13) $$\lambda = -[\int \sqrt{E(u)}\, du] + a, \quad (a : \text{sabit})$$

verir.

İkinci yol

Teorem 12-1 nedeniyle, verilen kongrüansın, normaller kongrüansı olabilmesi için

$$m = \overline{m}$$

bağıntısının sağlanması gereklidir. Hâlbuki

$$\overline{m} = -\vec{x}_u \cdot \vec{t}_v, \quad m = -\vec{x}_v \cdot \vec{t}_u, \quad F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0$$

veya (12-12) nedeniyle

$$\overline{m} = -\vec{x}_u \cdot \left(\frac{\vec{x}_u}{\sqrt{E}}\right)_v = -\frac{1}{\sqrt{E}} \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{uv} = -\frac{E_v}{2\sqrt{E}} = 0,$$

$$m = -\vec{x}_v \cdot \left(\frac{\vec{x}_u}{\sqrt{E}}\right)_v = -\frac{1}{\sqrt{E}} \vec{x}_v \cdot \vec{x}_{vu} = \frac{1}{\sqrt{E}} \vec{x}_u \cdot \vec{x}_{uv} = 0,$$

yâni

$$m = \overline{m} = 0$$

dır.

Teorem 12-4.

Sınıfı ≥ 2 olan bir F yüzeyi üzerinde bir parametreli ve en az 2-nci sınıftan bir geodezik ailesi alındığında, bunların teğetleriyle tanımlanan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

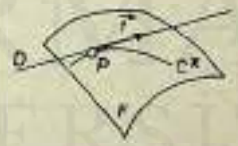
doğru kongrüansı, normaler kongrüansıdır ve F de bu kongrüansın odak yüzeylerinden biridir.

12-3. Bir doğru kongrüansının, odak yüzeylerinden birisi yardımiyle tanımlanması ve bâzı özelikler

Teorem 12-4 ü ispat ederken yaptığımız gibi, bir doğru kongrüansının odak yüzeylerinden birisi F, kongrüansın bunu meydana getiren dönüm ayrıtları da C^* olsun. F üzerinde, v=sâbit eğrileri olarak C^* eğrilerini, u=sâbit eğrileri olarak da birincilerin dik yörüngelerini alalım. F yüzeyinin vektörel denklemi $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ ise, kongrüansın vektörel denklemi

$$\vec{y}(u, v) = \vec{x}(u, v) + \lambda\, \vec{t}(u, v), \quad [\vec{t}^2 = 1] \tag{12-14}$$

dir ve bu bağıntıdaki $\vec{t}(u, v)$ vektörü, C^* ın bir P(u, v) noktasındaki teğet birim vektörüdür. C^* eğrilerini dik kesen u=sâbit koordinat çizgilerinin P deki teğet birim vektörlerine de $\vec{t}^*$ diyeceğiz.



Şekil 87

Bu biçimde tanımlanan doğru kongrüansını incelemek için de, v=sâbit ve u = sâbit doğrultularında hesaplanan invariyant türevleri kullanacağız. Bu da, bir çeşit, invariyant türevlerin uygulanmasına bir örnek oluşturacaktır.

(48-10) ve (48-11) formüllerinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{x_1} = \vec{t}, \quad \vec{x_2} = \vec{t^*}, \quad \vec{x_{11}} = \vec{t_1}, \quad \vec{x_{12}} = \vec{t_2},$$

$$\vec{x_{21}} = \vec{t_1^*}, \quad \vec{x_{22}} = \vec{t_2^*}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan, (48-11)' formülleri geçerlidir:

$$(48\text{-}11)' \quad \begin{cases} \vec{t_1} = g^* \vec{t^*} + r^* \vec{n}, \quad \vec{t_2} = g^{**} \vec{t^*} + \tau^* \vec{n} \\ \vec{t_1^*} = -g^* \vec{t} + \tau^* \vec{n}, \quad \vec{t_2^*} = -g^{**} \vec{t} + r^{**} \vec{n} \end{cases}$$

Bu bağıntılardaki çeşitli katsayıların neleri gösterdiklerini anımsayalım: r^*, r^{**}, τ^*, τ^{**} katsayıları, F odak yüzeyinin P noktasından geçen koordinat çizgilerinin bu noktadaki teğetleri doğrultusunda normal eğriliklerle geodezik burulmaları; g^* ve g^{**} katsayıları da aynı koordinat çizgilerinin P deki geodezik eğriliklerini göstermektedir. Geodezik burulmalar arasında da

$$(12\text{-}15) \qquad \tau^* + \tau^{**} = 0$$

bağıntısı vardır.

Doğru kongrüansında, doğrultman yüzey olarak, F odak yüzeyi alındığında, (11-6) ve (11-12) formülleri nedeniyle, kongrüansın, I ve II formlarının katsayıları

$$e = \vec{t_1}^2, \quad f = \vec{t_1} \cdot \vec{t_2}, \quad g = \vec{t_2}^2, \quad -l = \vec{t} \cdot \vec{t_1}, \quad -n = \vec{t^*} \cdot \vec{t_2},$$

$$-m = \vec{t} \cdot \vec{t_2}, \quad -\bar{m} = \vec{t^*} \cdot \vec{t_1}$$

dir. (48-11)' bağıntıları kullanıldığında da

$$(12\text{-}16) \quad \begin{cases} e = g^{*2} + r^{*2}, \quad f = g^* g^{**} + r^* \tau^*, \\ g = g^{**2} + \tau^{*2}, \quad h^2 = (g^* \tau^* - r^* g^{**})^2, \\ l = 0, \quad -n = g^{**}, \quad \bar{m} = 0, \quad m = -g^* \end{cases}$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Görülüyor ki: v=sâbit koordinat çizgileri, geodezik eğrilerse, P noktasında $g^* = 0$ dır, ve m ile $\bar{m}$ katsayılarının ikisi birden sıfır olacağından, Teorem 12-1 nedeniyle, normaller kongrüansı söz konusu olur, bu da Teorem 12-3 ün başka bir ispat biçimidir.

D anadoğrusu üzerindeki ikinci odak noktası

D nin F ye değdiği P odak noktasının apsisi sıfır olduğundan, odak noktalarının apsislerini veren (11-42) denkleminin sâbit terimi sıfıra eşit olmalıdır. Esasen (12-16) formülleri ile bulunan katsayılarda bunu gerçekler. Buna göre, ikinci P^* odak noktasının apsisi, aynı (11-42) formülüne göre

$$\bar{\lambda}^* = \frac{en - fm}{h^2}, \quad (h > 0)$$

olacağından, (12-16) yardımiyle

(12-17) $$\bar{\lambda}^* = \frac{r^*}{\tau^* g^* - r^* g^{**}}$$

bulunur.

Özelikler 12-2.

a. C^* eğrisi F odak yüzeyinin bir geodeziği ise, C^* üzerinde $g^* = 0$ olacağından, ikinci P odak noktasının apsisi, (12-17) dolayısiyle, C^* eğrisi bir doğrudan farklı olduğu sürece, bunun üzerinde aynı zamanda $r^* = 0$ olamayacağından

(12-18) $$\bar{\lambda}^* = -\frac{1}{g^{**}}$$

dır.

b. C^* dönüm ayrıtı, F odak yüzeyinin bir eğrilik çizgisi ise, C^* boyunca $\tau^* = 0$ dır. Eğer C^* eğrisi aynı zamanda bir asimptotik değilse, yâni $r^* \neq 0$ ise; C^* eğrisi, düzlemi F odak yüzeyine teğet bir düzlem eğri değildir ve böyle olunca da, P^* ikinci odak noktasının apsisi gene

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(12-19) $$\bar{\lambda}^{*} = -\frac{1}{g^{**}}$$

olur.

c. C^* dönüm ayrıtı, F odak yüzeyinin bir asimptotik çizgisi ise, C^* boyunca $r^* = 0$ olacağından,

(12-20) $$\bar{\lambda}^{*} = 0$$

yâni

$$p = p^*$$

dır ve bunun tersi de doğrudur.

d. F odak yüzeyi üzerinde, F' odak yüzeyinin dönüm ayrıtlarını verecek olan C^{**} eğrilerinin diferansiyel denklemi, (11-43) ve (12-16) nedeniyle

(12-21) $$\sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} = -\frac{r^*}{\tau^*}$$

dır.

Bu C^{**} eğrilerinin C^* eğrileriyle, yâni v=sâbit eğrileriyle oluşturdukları açıya φ_1 dersek, görülüyor ki

(12-22) $$\operatorname{tg}\varphi_1 = -\frac{r^*}{\tau^*}$$

dır, yâni P odak noktasından geçen C^*, C^{**} eğrilerinin P deki teğetleri, (47-22) nedeniyle, eşlenik iki doğrultudur. Eğer C^* eğrileri, F odak yüzeyinin asimptotik çizgileri ise, C^* ve C^{**} eğrileri çakışırlar. Böyle olunca da, F orta yüzey olur.

Teorem 12-5.

Sınıfı ≥ 3 olan bir F yüzeyinin bir parametreli C^* eğrilerinin teğetleriyle tanımlanan doğru kongrüansının odak yüzeylerinden birisi F dir. F nin öteki F' odak yüzeyi ile çakışması, yâni kongrüansın iki kat odak yüzeyli olması için gerekli ve yeterli koşul, C^* eğrilerinin F üzerinde asimptotik çizgi ailelerinden birisini oluşturmalarıdır, bu hâlde de F, orta yüzey olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 12-1.

Doğru kongrüansı, normaller kongrüansı ise, Teorem 12-3 nedeniyle, C^* boyunca $g^* = 0$ dır ve ikinci P^* odak noktasının $\bar{\lambda}'$ apsisi, (12-18) formülü nedeniyle

$$\bar{\lambda}' = -\frac{1}{g'^*}$$

ile belirlidir ve $p \neq p^*$ dır. Başka deyimle: **ikikat odak yüzeyli normaller kongrüansı yoktur,** meğer ki doğrultman yüzey bir küre olsun. —Bu sonuca, asal eğrilik yarıçapları yardımiyle, doğrudan doğruya da varılabilir.— Bu hâlde, odak yüzeyler, kürenin merkezi ile tanımlanan **nokta-yüzeyler**dir.

12-4. Odak yüzeylerinden birisi, veya ikisi, eğri olan doğru kongrüansları

Bir doğru kongrüansının odak yüzeylerinden birisi, örneğin F, bir eğri ise, kongrüansın iki açılabilen yüzey ailesinden birisi integralsiz elde edilir. Bunlar: tepeleri F eğrisi üzerinde bulunan ve F' ye dıştan teğet olan konilerdir. Özel olarak, F' de bir eğri ise, kongrüansın açılabilen yüzey aileleri, tepeleri F ve F' eğrileri üzerinde bulunan ve F' ve F ye dayanan doğrulardan oluşan konilerdir.

Eğer F ve F' eğrileri çakışırsa, yâni kongrüansın bir ikikat odak eğrisi varsa, anadoğrular bir eğriyi kesen doğrulardan oluşur.

Özel hal 12-1. Normaller kongrüansı

Verilen kongrüans, **normaller kongrüansı** ise, doğrultman yüzeyin eğrilik çizgilerini koordinat çizgisi olarak seçtiğimizde, odak yüzeylerin vektörel denklemi

$$\vec{y}(u, v) = \vec{x}(u, v) + \lambda \vec{n}(u, v), \qquad (\lambda = R \text{ veya } \bar{R})$$

R, $\bar{R}$: asal eğrilik yarıçapları

biçimindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

v=sâbit eğrilik çizgileriyle tanımlanan açılabilen yüzeylerin bir-konî olmaları için

$$\vec{y}_u = \vec{x}_u + \lambda_u \vec{n} + \lambda \vec{n}_u = \vec{0}$$

bağıntısının gerçekleşmesi gerekmektedir. Bunu $\vec{n}$ ile skaler olarak çarptığımızda

$$\lambda_u = R_u = 0$$

veya

$$R = R(v)$$

olur.

Aynı biçimde, u=sâbit eğrilik çizgileri alındığında da

$$\overline{R} = \overline{R}(u)$$

bulunur. Görülüyor ki v=sâbit eğrilik çizgisi boyunca R=sâbittir ve u=sâbit eğrilik çizgisi boyunca da $\overline{R}$=sâbittir, yâni doğrultman yüzeyin eğrilik çizgileri küresel eğrilerdir. Böyle olunca da, doğrultman yüzey bir **DUPIN siklidîdir.** —**Bâzı yüzeyler** bölümünde DUPIN siklidlerine bakınız.—

Teorem 12-5.

Doğrultman yüzeyinin sınıfı ≥ 3 olan bir normaller kongrüansında, odak yüzeylerin iki ayrı eğriden oluşmaları için gerekli ve yeterli koşullar, doğrultman yüzeyin eğrilik çizgilerinin küresel olmaları, başka deyişle, bu yüzeyin bir DUPIN siklidinden ibaret bulunmasıdır.

Küre dışındaki yüzeylerde, asal eğrilik merkezleri çakışmadıkları için, F ve F′ odak eğrileri aynı olamazlar.

13. Bir doğru kongrüansında, $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörüne uygulanan GAUSS formülleri

Birim küresinde (32-5) formülü

$$\rho_n = \frac{II}{I} = -1$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

vereceğinden, (11-7) nedeniyle, birim küresinin II nci formunun katsayıları: $-e$, $-f$, $-g$ dir ve dolayısiyle $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ birim vektörüne uygulanan (26-1) GAUSS formülleri, (26-5) nedeniyle

$$(13\text{-}1)\qquad \begin{cases} \vec{W}_{uu} = \Gamma_{11}^{1}\vec{W}_u + \Gamma_{11}^{2}\vec{W}_v - e\vec{W}, \\ \vec{W}_{uv} = \Gamma_{12}^{1}\vec{W}_u + \Gamma_{12}^{2}\vec{W}_v - f\vec{W}, \\ \vec{W}_{vv} = \Gamma_{22}^{1}\vec{W}_u + \Gamma_{22}^{2}\vec{W}_v - g\vec{W} \end{cases}$$

$$(13\text{-}2)\qquad \begin{cases} 2h^2\,\Gamma_{11}^{1} = g e_u + f e_v - 2f f_u, \\ 2h^2\,\Gamma_{11}^{2} = 2e f_u - e e_v - f e_u, \\ 2h^2\,\Gamma_{12}^{1} = g e_v - f g_u, \\ 2h^2\,\Gamma_{12}^{2} = e g_u - f e_v, \\ 2h^2\,\Gamma_{22}^{1} = 2g f_v - g g_v - f g_v, \\ 2h^2\,\Gamma_{22}^{2} = e g_v + f g_v - 2f f_v \end{cases}$$

biçimindedir.

a. Birim küresinin koordinat çizgileri bir dik eğri şebekesi oluşturmaktadırlar.

Yüzey üzerinde $f = 0$ olacağından, (13-1) formülleri, (13-2) yardımiyle

$$(13\text{-}3)\qquad \begin{cases} \vec{W}_{uu} = \dfrac{e_u}{2e}\vec{W}_u - \dfrac{e_v}{2g}\vec{W}_v - e\vec{W}, \\ \vec{W}_{uv} = \dfrac{e_v}{2e}\vec{W}_u + \dfrac{g_u}{2g}\vec{W}_v, \\ \vec{W}_{vv} = -\dfrac{g_u}{2e}\vec{W}_u + \dfrac{g_v}{2g}\vec{W}_v - g\vec{W} \end{cases}$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b. Birim küresinin koordinat çizgileri, kürenin izotrop doğrularıdır.

Birim küresi üzerinde, koordinat çizgisi olarak, sıfır uzunlukta eğriler alındığında, küre üzerinde

$$e = 0, \quad f \neq 0, \quad f = 0$$

olacağından, (13-2) formüllerinden

$$\text{(13-4)} \qquad \overset{1}{\gamma}_{11} = (\lg |f|)_u, \quad \overset{2}{\gamma}_{22} = (\lg |f|)_v, \quad \overset{2}{\gamma}_{11} = \overset{1}{\gamma}_{12} = \overset{2}{\gamma}_{12} = \overset{1}{\gamma}_{22} = 0$$

elde edilir ve (13-1) formülleri

$$\text{(13-5)} \qquad \begin{cases} \vec{w}_u = (\lg |f|)_u \vec{w}_v, \\ \vec{w}_v = -f \vec{w}, \\ \vec{w}_{vv} = (\lg |f|)_v \vec{w}_v \end{cases}$$

biçiminde yazılırlar.

13-1. $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ birim vektörüne uygulanan GAUSS denklemlerinin integre edilebilme koşulları

Birim küresine uygulanan (27-2) ve (27-2)' bağıntılarının, MAINARDI-CODAZZI diye adlandırdığımız üçüncüleri özdeş olarak sıfırdır ve geriye

$$\text{(13-6)} \qquad \begin{cases} e = (\overset{1}{\gamma}_{11})_v - (\overset{2}{\gamma}_{12})_u + \overset{1}{\gamma}_{11}\overset{2}{\gamma}_{12} + \overset{2}{\gamma}_{11}\overset{2}{\gamma}_{22} - \overset{2}{\gamma}_{11}\overset{1}{\gamma}_{12} - (\overset{2}{\gamma}_{12})^2, \\ f = (\overset{2}{\gamma}_{12})_u - (\overset{1}{\gamma}_{11})_v + \overset{1}{\gamma}_{12}\overset{2}{\gamma}_{12} - \overset{2}{\gamma}_{11}\overset{1}{\gamma}_{22} = (\overset{2}{\gamma}_{12})_v - (\overset{2}{\gamma}_{22})_u \\ \qquad\qquad + \overset{1}{\gamma}_{12}\overset{2}{\gamma}_{12} - \overset{2}{\gamma}_{11}\overset{2}{\gamma}_{22}, \\ g = (\overset{1}{\gamma}_{22})_u - (\overset{1}{\gamma}_{12})_v + \overset{1}{\gamma}_{11}\overset{1}{\gamma}_{22} + \overset{1}{\gamma}_{12}\overset{2}{\gamma}_{22} - \overset{1}{\gamma}_{22}\overset{2}{\gamma}_{12} - (\overset{1}{\gamma}_{12})^2 \end{cases}$$

bağıntıları kalır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

f nin iki ayrı değerinin eşitliği, (26-1) den de çıkarılabilir.

a. Birim küresinin koordinat çizgileri birbirine diktir.

Birim küresi üzerinde, $f = 0$ olacağından, (13-2) ve (13-6) formülleri

$$(13\text{-}7)\quad \begin{cases} e = -\left(\frac{e_v}{2g}\right)_v - \left(\frac{g_u}{2g}\right)_u + \frac{e_u g_u}{4eg} \\ \qquad + \frac{(e_u)^2}{4g^2} - \frac{e_v g_v}{4g^2} - \left(\frac{g_u}{2g}\right)^2, \\ o = \left(\frac{g_u}{2g}\right)_u - \left(\frac{e_u}{2e}\right)_v + \frac{e_v}{4g^2}(g_u + g_v), \\ g = -\left(\frac{g_u}{2e}\right)_u - \left(\frac{e_v}{2e}\right)_v - \frac{e_u g_u}{4e^2} \\ \qquad + \frac{e_v g_v}{4eg} + \frac{(g_u)^2}{4eg} - \left(\frac{e_v}{2e}\right)^2 \end{cases}$$

verir.

b. Birim küresi üzerinde izotrop doğrular kordinat çizgileridir.

Birim küresi üzerinde: $e = 0$, $f \neq 0$, $g = 0$ olacağından, (13-6) denklemlerinin birincisi ile sonuncusu özdeş olarak gerçekleşir, ikinci ve üçüncüsü ise,

$$(13\text{-}8)\quad (\lg|f|)_{uv} + f = 0$$

verir.

Bu sonuca, (13-5) den de varılabilirdi.

(13-8) ikinci mertebeden kısmî türevli denklemi, f fonksiyonu için, integre edildiğinde

$$(13\text{-}9)\quad f = \frac{2}{(u - v)^2}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 13-1.

Şurasını da belirtelim ki, birim küresi izotrop doğrularına nispet edildiğinde,

$$\vec{w}(u,v)=\frac{uv-1}{v-u}\vec{k}_1+i\,\frac{uv+1}{v-u}\vec{k}_2+\frac{v+u}{v-u}\vec{k}_3,\quad i=\pm\sqrt{-1}$$

denkleminden, f fonksiyonu için, doğrudan doğruya bulunacak değer, (13-9) un aynıdır.

13-2. Doğrultman yüzeyin yer vektörünün birinci mertebeden kısmi türevlerini $\vec{W}_u$, $\vec{W}_v$, $\vec{W}$ cinsinden veren formüller

Birim küresi herhangi bir kordinat sistemine nispet edildiğinde, doğrultman yüzeyi veren $\vec{X}=\vec{X}(u,v)$ vektörünün birinci mertebeden kısmi türevlerini $\vec{W}_u$, $\vec{W}_v$, $\vec{W}$ vektörleri cinsinden

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned}\vec{X}_u&=\alpha_1\vec{W}_u+\alpha_2\vec{W}_v+\alpha_3\vec{W},\\ \vec{X}_v&=\beta_1\vec{W}_u+\beta_2\vec{W}_v+\beta_3\vec{W}\end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz.

Bu iki eşitliğin her iki yanını skaler olarak $\vec{W}_u$ ve $\vec{W}_v$ ile çarpar ve (11-6), (11-12) eşitliklerinden yararlanırsak, sıra ile

$$(13\text{-}10)\qquad \begin{cases}\alpha_1=\dfrac{\overline{fm}-gl}{eg-f^2}, & \alpha_2=\dfrac{fl-\overline{em}}{eg-f^2},\\[2ex] \beta_1=\dfrac{fn-gm}{eg-f^2}, & \beta_2=\dfrac{fm-en}{eg-f^2}\end{cases}$$

buluruz.

$\vec{X}_u$ ve $\vec{X}_v$ nin üçüncü α_3, β_3 katsayılarını birazdan sözünü edeceğimiz integre edilebilme koşullarından yararlanarak elde edeceğiz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

13-3. İntegre edilebilme koşulu

(α) denklemlerinden birincisinin v ye göre kısmî türevi, ikincisinin u ya göre kısmî türevine eşit olacağından, (13-1) formüllerini kullandığımızda,

$$(13\text{-}11)\quad \begin{cases} \alpha_{1v} + \alpha_1 \gamma_{12}^{1} + \alpha_2 \gamma_{22}^{1} = \beta_{1u} + \beta_1 \gamma_{11}^{1} + \beta_2 \gamma_{12}^{2} + \beta_3, \\ \alpha_1 \gamma_{12}^{2} + \alpha_{2v} + \alpha_2 \gamma_{22}^{2} + \alpha_3 = \beta_1 \gamma_{11}^{2} + \beta_2 \gamma_{12}^{2} + \beta_{2u} \\ -\alpha_2 f - \alpha_3 g + \alpha_{3v} = -\beta_1 e - \beta_2 f + \beta_{3u} \end{cases}$$

bağıntılarını buluruz.

Sonuncudan

$$(13\text{-}12)\qquad \alpha_{3v} - \beta_{3u} = m - \overline{m}$$

çıkar.

İlk ikisi de

$$(13\text{-}13)\quad \begin{cases} \alpha_3 = \beta_{2u} - \alpha_{2v} + \beta_1 \gamma_{11}^{2} - \alpha_2 \gamma_{22}^{2} + \dfrac{f(m-\overline{m}) + gl - en}{h^2} \gamma_{12}^{1}, \\ -\beta_3 = \beta_{1v} - \alpha_{1u} + \beta_1 \gamma_{11}^{1} - \alpha_2 \gamma_{22}^{1} + \dfrac{f(m-\overline{m}) + gl - en}{h^2} \gamma_{12}^{2} \end{cases}$$

vereceğinden, (13-12) nedeniyle

$$(13\text{-}14)\quad \left[\beta_{2u} - \alpha_{2v} + \beta_1 \gamma_{11}^{2} - \alpha_2 \gamma_{22}^{2} + \frac{f(m-\overline{m}) + gl - en}{h^2} \gamma_{12}^{1}\right]_v -$$

$$\left[\alpha_{1v} - \beta_{1u} - \beta_1 \gamma_{11}^{1} + \alpha_2 \gamma_{22}^{1} - \frac{f(m-\overline{m}) + gl - en}{h^2} \gamma_{12}^{2}\right]_u = m - \overline{m}$$

integre edilebilme koşulu elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

a. Birim küresinin koordinat çizgileri birbirine diktir.

Küre üzerinde, $f = 0$ olacağından, (13-14) integre edilebilme koşulu

$$(13\text{-}15)\quad \left[-\left(\frac{n}{g}\right)_v + \frac{m\,e_v}{2eg} + \frac{\bar{m}_v}{g} - \frac{\bar{m}\,g_v}{2g^2} + e_v\,\frac{gl - en}{4e^2 g} \right]_u -$$

$$\left[-\left(\frac{l}{e}\right)_v + \bar{m}\,\frac{g_v}{2eg} - \frac{m_u}{e} - m\,\frac{e_v}{2e^2} - g_u\,\frac{gl - en}{4eg^2} \right]_u = m - \bar{m}$$

biçimine girer.

b. Doğrultman yüzey üzerinde asal çizgiler koordinat çizgileridir.

(11-29) nedeniyle, doğrultman yüzey üzerinde

$$f = 0, \quad m + \bar{m} = 0$$

olacağından, (13-15) denklemi

$$(13\text{-}16)\quad \left[-\left(\frac{n}{g}\right)_u + \frac{m}{2g}\,[lg\ eg]_v - \frac{m_v}{g} + e_v\,\frac{gl - en}{4e^2 g} \right]_v -$$

$$\left[-\left(\frac{l}{e}\right)_v + \frac{m}{2e}\,[lg\ eg]_u - \frac{m_u}{e} - g_u\,\frac{gl - en}{4eg^2} \right]_u = 2m$$

olur.

c. Birim küresi izotrop doğrulara nispet edilmiştir.

Birim küresi üzerinde $e = g = 0$, $f \neq 0$ olacağından, (13-4) yardımıyle, (13-14) bağıntısı

$$(13\text{-}17)\qquad \left(\frac{m - \bar{m}}{f}\right)_{uv} + m - \bar{m} = \left(\frac{l_v}{f}\right)_v - \left(\frac{n_u}{f}\right)_u$$

integre edilebilme koşulunu verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

13-4. Birim küresi izotrop doğrularına nispet edildiğinde, doğrultman yüzeyin $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlerini; $\vec{W}_u$, $\vec{W}_v$, $\vec{W}$ vektörleri cinsinden veren formüller

O(1) birim küresi izotrop doğrularına, yani sıfır-uzunluktaki minimal eğrilerine nispet edilmiş olsun.

Bu hâlde, bundan önce de gördüğümüz gibi, O(1) küresi üzerinde

$$e = 0, \quad f \neq 0, \quad g = 0, \quad \gamma_{11}^{1} = \frac{f_u}{f}, \quad \gamma_{22}^{2} = \frac{f_v}{f},$$

$$\gamma_{11}^{2} = \gamma_{12}^{1} = \gamma_{12}^{2} = \gamma_{22}^{1} = 0$$

olduğundan, (13-10) formülleri

$$(13\text{-}19) \qquad \alpha_1 = -\frac{\bar{m}}{f}, \quad \alpha_2 = -\frac{l}{f}, \quad \beta_1 = -\frac{n}{f}, \quad \beta_2 = -\frac{m}{f}$$

verir ve (13-13) den de

$$(13\text{-}20) \qquad \alpha_3 = -\left(\frac{m}{f}\right)_u + \frac{l_v}{f}, \quad \beta_3 = -\left(\frac{\bar{m}}{f}\right)_v + \frac{n_u}{f}$$

çıkarılacağından, bu değerler, (α) da yerlerine konuldukta

$$(13\text{-}21) \qquad \begin{cases} \vec{x}_u = -\dfrac{\bar{m}}{f}\vec{w}_u - \dfrac{l}{f}\vec{w}_v + \left[\dfrac{l_u}{f} - \left(\dfrac{m}{f}\right)_u\right]\vec{w}, \\ \vec{x}_v = -\dfrac{n}{f}\vec{w}_u - \dfrac{m}{f}\vec{w}_v + \left[\dfrac{n_u}{f} - \left(\dfrac{\bar{m}}{f}\right)_v\right]\vec{w}, \end{cases}$$

olur.

(13-21) formüllerinden de, (13-5) eşitlikleri yardımiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$
(13\text{-}22)\quad
\begin{cases}
\vec{x}_{e^2} = -\left[\left(\frac{m}{f}\right)_u + \frac{\overline{m}_u}{f} - \frac{l_v}{f}\right]\vec{w}_u - \left(\frac{l}{f}\right)_u \vec{w}_v + \\
\qquad\qquad \left[1 + \left(\frac{l_v}{f}\right)_u - \left(\frac{m}{f}\right)_v\right]\vec{w}, \\
\vec{x}_{uv} = -\left(\frac{\overline{m}}{f}\right)_v \vec{w}_u - \left(\frac{m}{f}\right)_u \vec{w}_v + \\
\qquad\qquad \left[\left(\frac{l_v}{f}\right)_v - \left(\frac{m}{f}\right)_{vv} + \overline{m}\right]\vec{w}, \\
\vec{x}_{v^2} = -\left(\frac{m}{f}\right)_v \vec{w}_v - \left[\left(\frac{\overline{m}}{f}\right)_v + \frac{m_v}{f} - \frac{n_u}{f}\right]\vec{w}_v + \\
\qquad\qquad \left[n + \left(\frac{n_v}{f}\right)_v - \left(\frac{\overline{m}}{f}\right)_v\right]\vec{w}
\end{cases}
$$

bağıntıları elde edilir.

Bu hesapları yaparken, $\vec{X}_{uv} = \vec{X}_{vu}$ dan, (13-17) integre edilebilme koşulu da elde edilebilir.

14. İntegre edilebilme koşulları gerçekleştiğinde, I ve II formları, bir ve yalnız bir doğru kongrüansını, uzayda durum farkiyle belirler.

Her şeyden önce I formu, O(1) birim küresine ait olduğundan, bu kürenin GAUSS eğriliği 1 e eşit olmalıdır. Bu da, (13-6) formüllerinden ilk ikisi, ya da bunların eş değeri olan son ikisi ile ifade olunur.

Bu koşullardan birisi gerçekleştiğinde, I formu, O(1) küresinin lineer elemanı olarak alınabilir. Bu da, O noktası etrafında, gelişigüzel bir dönme farkiyle olabilir.

(13-10) ve (13-13) formülleri, α_i ve β_i leri, kongrüansın I ve II nci formlarının katsayıları cinsinden verdiğinden, doğrultman yüzeyin I nci formunun

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$E = \vec{x}_u^2, \quad F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v, \quad G = \vec{x}_v^2$$

katsayıları, (α) denklemleri nedeniyle, u ve v bağımsız değişkenlerinin belirli fonksiyonlarıdır.

Aynı şeyi, doğrultman yüzeyin

$$\vec{n} = \frac{1}{H} \vec{x}_u \wedge \vec{x}_v$$

normal birim vektörü ile bunun birinci mertebeden $\vec{n}_u$, $\vec{n}_v$ kısmî türev vektörleri için de yineleyebiliriz. Dolayısiyle, doğrultman yüzeyin II nci formunun

$$L = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_u, \quad M = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_u = -\vec{n}_u \cdot \vec{x}_v, \quad N = -\vec{n}_v \cdot \vec{x}_v$$

katsayıları da u, v bağımsız değişkenlerinin belirli fonksiyonlarıdır. Buna göre :

(13-6) integre edilebilme koşullarının gerçekleşmesi koşulu ile, 30-7 BONNET teoremi dolayısiyle, doğrultman yüzey uzayda durum farkiyle belirli olur, yâni, I ve II formları verilen bir ve yalnız bir doğru kongrüansı vardır, bunun uzaydaki durumu çeşitli olabilir.

15. İzotrop doğru kongrüansı

Tanım 1

Bir doğru kongrüansının tüm anadoğruları için, I ve II formlarının katsayıları arasında

$$\frac{l}{e} = \frac{m + \bar{m}}{2f} = \frac{n}{g} = p(u, v) \tag{15-1}$$

bağıntıları varsa, böyle bir kongrüansa **izotrop** adı verilir. Bu tür kongrüansları ilk inceleyen RIBAUCOUR olmuştur.

15-1. İzotrop kongrüansta bir anadoğru üzerindeki boğaz noktaları

(11-19) bağıntısı, bir izotrop kongrüans için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\bar{\lambda} = \frac{II}{I} = \mu(u, v)\,\frac{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

vereceğinden, eğer

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \neq 0$$

ise,

$$\bar{\lambda} = \mu(u, v) \tag{15-2}$$

dir. Görülüyor ki: İzotrop kongrüansın bir D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeyleri arasında, **birim küresi üzerindeki küresel görüntüleri bu kürenin izotrop doğruları olan iki doğrusal yüzey bir yana, kongrüansın herhangi bir D anadoğrusundan geçen tüm doğrusal yüzeylerinin D üzerindeki boğaz noktaları aynıdır, dolayısiyle bunlar D nin Ω orta noktasında çakışırlar.**

Teorem 15-1.

$\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörü ile doğrultman yüzeyin $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün sınıflarının ≥ 1 olduğu bir izotrop kongrüansta, herhangi bir D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeylerin D üzerindeki boğaz noktaları aynıdır ve D nin Ω orta noktasından ibarettir, elverir ki bu doğrusal yüzeylerin birim küresi üzerindeki görüntüleri, bu kürenin izotrop doğruları olmasın.

Uyarı 15-1.

a. Doğrultman yüzey olarak orta yüzey alındığında, $\mu = 0$ dır ve (15-1) bağıntıları

$$l = 0, \quad m + \bar{m} = 0, \quad n = 0 \tag{15-3}$$

verir.

b. Bir izotrop kongrüansta, D anadoğrularından geçen doğrusal yüzeylerin ikisi dışında, hepsinin boğaz noktalarının geometrik yeri olan boğaz çizgileri, Ω orta noktasının geometrik yeri olan orta yüzey üzerindedir.

Karşıt olarak: bir doğru kongrüansının herhangi bir D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeylerin bu D anadoğrusu üzerinde, odak noktalar dışında çakışan bir tek boğaz noktaları varsa, bu kongrüans bir izotrop kongrüanstır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Gerçekten, (11-19) bağıntısını

$$(15\text{-}4) \qquad (\bar{\lambda}\, e - l)\, du^2 + (2\,\bar{\lambda}\, f - m - \bar{m})\, du\, dv + (\bar{\lambda}\, g - n)\, dv^2 = 0$$

biçiminde yazdığımızda, hangi doğrultu seçilirse seçilsin, aynı $\bar{\lambda}$ bulunacağından, (15-4) bir özdeşliktir, dolayısiyle

$$\bar{\lambda}\, e - l = 0, \quad 2\,\bar{\lambda}\, f - m - \bar{m} = 0, \quad \bar{\lambda}\, g - n = 0$$

yâni

$$\bar{\lambda} = \mu(u, v) = \frac{l}{e} = \frac{m + \bar{m}}{2f} = \frac{n}{g}$$

dir ve bu nedenle de (15-1) gerçeklendiğinden, verilen kongrüans izotroptur.

Teorem 15-2.

$\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörleri ile doğrultman yüzeyin $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir doğru kongrüansının izotrop olması için gerekli ve yeterli koşul, herhangi bir D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeylerin D üzerindeki boğaz noktalarının aynı olması ve D nin Ω orta noktasından ibaret bulunmasıdır, yeter ki bu doğrusal yüzeyler arasında D den geçen iki açılabilen bulunmasın.

Yukarıda söylediklerimize göre, izotrop kongrüansın ikinci bir tanımı şöyle verilebilir:

Tanım II

Herhangi bir D anadoğrusundan geçen ve açılabilenden farklı olan doğrusal yüzeylerinin D üzerinde çakışan bir tek boğaz noktaları varsa, böyle bir kongrüansa izotrop denilir.

15-2. Bir izotrop kongrüansın açılabilen yüzeyleri

(15-1) bağıntılarını, kongrüansın açılabilen yüzeylerini veren (11-43) diferansiyel denkleminde kullandığımızda, doğrusal yüzeyin açılabilen yüzeyleri veren eğrilerinin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(15-5) $$(f\mu - m)(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2) = 0,$$

$$(f\mu - m = -f\mu + \bar{m} \neq 0)$$

diferansiyel denklemini elde ederiz.

Görülüyor ki: kongrüansın bir D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeyler arasında demin bir yana bırakılan ikisi, D den geçen açılabilen yüzeylerdir.

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

diferansiyel denklemiyle tanımlanan açılabilen yüzeylerin ikisi de

$$f^2 - eg = -h^2 < 0$$

eşitsizliği nedeniyle, sanal yüzeylerdir.

Teorem 15-3.

$\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörü ile doğrultman yüzeyinin $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir izotrop kongrüansın açılabilen yüzeyleri sanaldır ve bunların birim küresi üzerindeki görüntüleri, kürenin izotrop doğrularıdır.

15-3. Bir D anadoğrusu üzerindeki odak noktalarının apsisleri

Bir izotrop kongrüansın herhangi bir D anadoğrusu üzerinde bulunan odak noktalarının apsislerini bulmak için, (11-42) denkleminde (15-1) bağıntılarından yararlandığımızda, bu denklem

(15-6) $$h^2(\lambda - \mu)^2 + (f\mu - m)^2 = 0$$

biçimine girer.

Eğer birim küresi üzerinde koordinat çizgileri olarak, izotrop doğrular alınırsa, (15-1) eşitliklerinde

$$e = 0, \quad g = 0, \quad h^2 = -f^2 \neq 0, \quad l = 0, \quad n = 0$$

olacağından, odak noktalarının apsisleri

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(15-7) $$\bar{\lambda}' = 2\mu - \frac{m}{f}, \quad \bar{\lambda}'' = \frac{m}{f}$$

eşitlikleriyle belirli olur.

Bundan önce gördüğümüz gibi, bu iki odak noktası, D nin Ω orta noktasına göre simetriktir. Esasen

(15-8) $$\frac{1}{2}(\bar{\lambda}' + \bar{\lambda}'') = \mu$$

bağıntısı da bunu gösterir.

Ortalama yüzey, doğrultman yüzey olarak alındığında, $\mu = 0$ olacağından, (15-7) formülleri, odak noktalarının apsisleri için

(15-9) $$-\frac{m}{f}, \quad \frac{m}{f}$$

verir.

15-4. İzotrop kongrüansta, bir anadoğrudan geçen doğrusal yüzeylerin, bu anadoğru ile belirli olan dağılma parametreleri

Bir izotrop doğru kongrüansı için, (11-22) bağıntısı, (15-1) bağıntıları kullanıldığında

$$p = \frac{f\mu - m}{h} \cdot \frac{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}$$

$$(f\mu - m = \bar{m} - f\mu \neq 0)$$

vereceğinden, kongrüansın D den geçen iki açılabilen yüzeyi bir yana bırakıldığında

(15-10) $$p = \frac{f\mu - m}{h} = \frac{\bar{m} - f\mu}{h} \neq 0$$

olur.

Teorem 15-4.

$\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörünün ve doğrultman yüzeyin

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir izotrop kongrüansta, herhangi bir D anadoğrusundan geçen doğrusal yüzeylerin bu anadoğru ile belirli olan dağılma parametreleri, D den geçen iki açılabilen bir yana hep aynıdır.

Teorem 11-2 nedeniyle, izotrop kongrüansın bir D anadorusundan geçen ve açılabilenlerden farklı olan bir doğrusal yüzeyinin birim küresi üzerindeki E küresel görüntüsünün teğeti, alınan doğrusal yüzeyin D ile belirli olan merkez düzlemine dik olduğundan, boğaz çizgisinin teğetine de diktir. Tüm boğaz çizgileri de, orta yüzey üzerinde bulunduklarından, şu teorem elde edilir:

Teorem 15-5.

$\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörünün ve doğrultman yüzeyin $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir izotrop doğru kongrüansında, orta yüzeyin herhangi bir eğri yayı ile bunun birim küresi üzerindeki küresel görüntüsünün homolog noktalarındaki teğetler birbirine diktir.

Bunun karşıtı da doğrudur, yâni $\vec{OD_1} = \vec{W}(u, v)$, $(\vec{W}^2 = 1)$ bağıntısı ile tanımlanan her D_1 noktasının homologu, $\vec{OP} = \vec{X}(u, v)$ nin verdiği P noktası ise, ve homolog noktalar nasıl seçilirse seçilsin, bu noktalarda $d\vec{W} \cdot d\vec{X} = 0$ ise, P noktasından $\vec{W}$ nin paralelini geçirerek bulunan doğru kongrüansı izotroptur ve P nin yeri orta yüzeydir.

Gerçekten, her $\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultusu için

$$-d\vec{W} \cdot d\vec{X} = l\,du^2 + (m + \bar{m})\,du\,dv + n\,dv^2 = 0$$

ise, II formunun katsayıları

$$l = 0, \quad m + \bar{m} = 0, \quad n = 0$$

bağıntılarını sağlayacaklarından, (15-1) eşitlikleri gerçekleşir ve $\mu = 0$ olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 15-6.

$\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörü ile doğrultman yüzeyinin $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün sınıflarının $\geqslant 1$ olduğu bir doğru kongrüansında, orta yüzeyin herhangi bir eğri yayı ile bunun birim küresi üzerindeki küresel görüntüsünün homolog noktalarındaki teğetlerin birbirlerine dik olmaları için gerekli ve yeterli koşul, verilen doğru kongrüansının izotrop olmasıdır.

15-5. (13-21) ve (13-22) formüllerinin bir izotrop kongrüansa uygulanması

Eğer birim küresi izotrop doğrularına nispet edilirse,

$$e = 0, \quad f \neq 0, \quad g = 0$$

olacağından, izotrop kongrüansı tanımlayan (15-1) koşulları

$$l = 0, \quad m + \bar{m} \neq 0, \quad n = 0$$

verir ve dolayısiyle (13-21) denklemleri

$$(15\text{-}11) \quad \begin{cases} \vec{x}_u = -\dfrac{\bar{m}}{f}\vec{w}_u - \left(\dfrac{m}{f}\right)_u \vec{w}, \\ \vec{x}_v = -\dfrac{m}{f}\vec{w}_v - \left(\dfrac{\bar{m}}{f}\right)_v \vec{w} \end{cases}$$

biçimine girerler.

(13-17) integre edilebilme koşulu da

$$(15\text{-}12) \qquad \left(\frac{m - \bar{m}}{f}\right)_v + m - \bar{m} = 0$$

olur.

(15-12) de, f yerine bunun (13-9) değeri konulduğunda, hesap sonucunda

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{v-u}{2}(m-\overline{m})_{uv}+(m-\overline{m})_u-(m-\overline{m})_v=0 \tag{15-13}$$

bulunur.

Eğer izotrop kongrüansta, doğrultman yüzey olarak orta yüzey alınırsa, (15-3) nedeniyle, (15-11) formülleri

$$\begin{cases} \vec{x}_u=\dfrac{m}{f}\vec{w}_u-\left(\dfrac{m}{f}\right)_u\vec{w}, \\ \vec{x}_v=-\dfrac{m}{f}\vec{w}_v-\left(\dfrac{m}{f}\right)_v\vec{w} \end{cases} \tag{15-14}$$

biçiminde, (15-12) ve (15-13) de

$$\left(\frac{m}{f}\right)_{uv}+m=0,\quad \frac{v-u}{2}m_{uv}+m_u-m_v=0 \tag{15-15}$$

olarak yazılırlar.

(13-22) formüllerine gelince: gene birim küresi izotrop doğrularına nispet edildiğinde, izotrop kongrüans için, $\vec{W}=\vec{W}(u,v)$ ve $\vec{X}=\vec{X}(u,v)$ nin sınıfları $\geqslant 2$ ise,

$$e=0,\quad f\neq 0,\quad g=0$$

$$l=0,\quad m+\overline{m}\neq 0,\quad n=0$$

olacağından

$$\begin{cases} \vec{x}_{uu}=-\left[\left(\dfrac{m}{f}\right)_u+\dfrac{\bar{m}_u}{\bar{f}}\right]\vec{w}_u-\left(\dfrac{m}{f}\right)_{uu}\vec{w}, \\ \vec{x}_{uv}=-\left(\dfrac{\bar{m}}{\bar{f}}\right)_v\vec{w}_u-\left(\dfrac{m}{f}\right)_u\vec{w}_v+ \\ \qquad\left[\overline{m}-\left(\dfrac{m}{f}\right)_{uv}\right]\vec{w}, \\ \vec{x}_{vv}=-\left[\left(\dfrac{\bar{m}}{\bar{f}}\right)_v+\dfrac{m_v}{f}\right]\vec{w}_v-\left(\dfrac{\bar{m}}{\bar{f}}\right)_v\vec{w} \end{cases} \tag{15-16}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Orta yüzeyin doğrultman yüzey olması hâlinde de, (15-16) formüllerini, (15-15; 1) nedeniyle

$$\text{(15-17)} \qquad \begin{cases} \vec{x}_{u^1} = -\left(\frac{1}{f}\right)_u m \vec{w}_u - \left(\frac{m}{f}\right)_{v^1} \vec{w}, \\ \vec{x}_{v^2} = \left(\frac{m}{f}\right)_v \vec{w}_u - \left(\frac{m}{f}\right)_u \vec{w}_v, \\ \vec{x}_{u^2} = \left(\frac{1}{f}\right)_v m \vec{x}_v + \left(\frac{m}{f}\right)_{v^2} \vec{w} \end{cases}$$

biçiminde yazabiliriz.

15-6. RIBAUCOUR teoremi

$\vec{W} = \vec{W}(u, v)$ doğrultu birim vektörü ile, doğrultman yüzeyinin $\vec{X} = \vec{X}(u, v)$ yer vektörünün sınıflarının $\geqslant 2$ olduğu bir doğru kongrüansında, anadoğrulara orta noktalarından dik olarak geçirilen düzlemler, bir minimal yüzeye teğet kalırlar.

İzotrop kongrüansın herhangi bir D anadoğrusuna, bunun Ω orta noktasından çıkılan dik düzlemin herhangi bir Q noktasının yer vektörü $\vec{X}$ ise, $\vec{O\Omega} = \vec{x}(u, v)$ orta yüzeyi göstermek üzere, söz konusu düzlemin vektörel denklemi

$$\text{(15-18)} \qquad (\vec{X} - \vec{x}) \cdot \vec{w} = 0$$

dır.

«Analiz» den bilindiği gibi, D anadoğrularına, Ω orta noktalarında dik olan düzlemlerin teğet kaldıkları S^* yüzeyine değdikleri Q^* noktalarının yer vektörü $\vec{X}^*$ ise, bu vektör,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(15\text{-}19)\qquad \begin{cases} (\vec{x}^* - \vec{x}) \cdot \vec{w} = 0 \\ -\vec{x}_u \cdot \vec{w} + (\vec{X}^* - \vec{x}) \cdot \vec{w}_u = 0 \\ -\vec{x}_v \cdot \vec{w} + (\vec{X}^* - \vec{x}) \cdot \vec{w}_v = 0 \end{cases}$$

denklemlerini sağlar.

Birinci denklem dolayısiyle, $\vec{X}^* - \vec{x}$ vektörü, $\vec{w}$ vektörüne dik olduğundan

$$\vec{X}^* - \vec{x} = \gamma_1 \vec{w}_u + \gamma_2 \vec{w}_v$$

dersek, bunun her iki yanını önce $\vec{w}_u$, sonra da $\vec{w}_v$ ile skaler olarak çarptığımızda, (15-14) ve (15-19) denklemleri nedeniyle

$$(15\text{-}20)\qquad \gamma_1 = \left(\frac{m}{f}\right)_v \frac{1}{f}, \qquad \gamma_2 = -\left(\frac{m}{f}\right)_u \frac{1}{f},$$

ve

$$(15\text{-}21)\qquad \vec{X}^* = \vec{x} + \frac{1}{f}\left(\frac{m}{f}\right)_v \vec{w}_u - \frac{1}{f}\left(\frac{m}{f}\right)_u \vec{w}_v$$

veya (15-17; 2) dolayısiyle

$$(15\text{-}22)\qquad \vec{X}^* = \vec{x} + \frac{1}{f}\vec{x}_{uv}$$

olur.

Görülüyor ki: D anadoğrularına Ω orta noktasında dik olan düzlemlerin teğet kaldıkları S* yüzeyine değdikleri Q* noktası

$$(15\text{-}23)\qquad \overrightarrow{\Omega Q^*} = \frac{1}{f}\vec{x}_{uv}$$

vektörel bağıntısını sağlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

S* yüzeyinin temel formlarının katsayıları

İzotrop kongrüansın herhangi bir D anadoğrusu üzerinde bulunan ve Ω orta noktasına göre simetrik olan iki odak noktasından birinin apsisini kısaca λ ile gösterirsek, (15-9) nedeniyle, örneğin

$$\lambda = \frac{m}{f} \tag{15-24}$$

dir. Buna göre, (15-15; 1) bağıntısı

$$\lambda_{uv} + f\lambda = 0 \tag{15-25}$$

biçiminde yazılır.

(15-21) den u ve v ye göre birinci mertebeden kısmi türevler alınır ve (15-11), (15-24), (15-25) formüllerinden yararlanılırsa

$$\vec{X}_u^* = -\left(\frac{\lambda_u}{f}\right)_u \vec{w}_r, \qquad \vec{X}_v^* = \left(\frac{\lambda_v}{f}\right)_v \vec{w}_r \tag{15-26}$$

bulunur.

Görülüyor ki S* yüzeyi üzerinde birinci formun birinci ve üçüncü katsayıları

$$E^* = \vec{X}_u^{*2} = 0, \qquad G^* = \vec{X}_v^{*2} = 0 \tag{15-27}$$

olduğundan, S* ın koordinat çizgileri, minimal çizgilerdir.

S* yüzeyinin normal birim vektörü $\vec{w}$ olduğundan, (15-26) dolayısıyle, II nci formunun ikinci katsayısı

$$M^* = -\vec{w}_u \cdot \vec{X}_v^* = -\vec{w}_v \cdot \vec{X}_u^* = 0 \tag{15-28}$$

dir.

Öte yandan, S* ın ortalama eğriliği, (36-4) formülüne göre, (15-27) ve (15-28) nedeniyle

$$W = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{E^* N^* + G^* L^* - 2F^* M^*}{-2F^{*2}} = 0 \tag{15-29}$$

olacağından, S* bir **minima yüzeydir.**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

15-7. Alıştırmalar

1. Bir doğru kongrüansı, birbirine dik iki aykırı doğruyu kesen doğrulardan oluşuyor. Bu kongrüansı inceleyiniz.

Aykırı ve birbirine dik iki Δ_1, Δ_2 doğrusunun A_0B_0 ortak dikmesini Ox_3 ekseni olarak alalım. Ox_1 ve Ox_2 eksenleri de, Δ_1 ve Δ_2, nin açıortay doğrultularına paralel, O da $\overline{A_0B_0}$ ın orta noktası olsun.



Şekil 88

Kongrüansın, Δ_1 ve Δ_2 yi A ve B noktalarında kesen herhangi bir doğrusu da D olsun. Buna göre

$$A\left(\frac{u}{\sqrt{2}}, \frac{u}{\sqrt{2}}, a\right), \quad B\left(-\frac{v}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}, -a\right)$$

olacağından,

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{v-u}{\sqrt{2}}, -2a\right), \quad \overline{AB}^2 = u^2 + v^2 + 4a^2$$

dır ve

$$\vec{w}\left(-\frac{u+v}{\sqrt{2}\,\overline{AB}}, \frac{v-u}{\sqrt{2}\,\overline{AB}}, \frac{-2a}{\overline{AB}}\right)$$

olur.

$\vec{X}$ vektörü olarak da

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{X} = \vec{OA}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{u}{\sqrt{2}}\,,\ a\right)$$

yi alırsak, $\vec{X}_* = \vec{0}$ olacağından

$$m = 0, \quad n = 0$$

dır. Öte yandan

$$\vec{w}_* \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{uv - v^2 - 4a^2}{\overline{AB}^2}\,,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{uv + v^2 + 4a^2}{\overline{AB}^2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{2\sqrt{2}\,au}{\overline{AB}^2}\right)$$

$$\vec{w}_* \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{uv - u^2 - 4a^2}{\overline{AB}^2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{uv + u^2 + 4a^2}{\overline{AB}^2}\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{2\sqrt{2}\,av}{\overline{AB}^2}\right)$$

olduğundan

$$e = \vec{w}_*^{\,2} = \frac{v^2 + 4a^2}{\overline{AB}^2}\,, \quad f = \vec{w}_u \cdot \vec{w}_* = -\frac{uv}{\overline{AB}^2}\,,$$

$$g = \vec{w}_*^{\,2} = \frac{u^2 + 4a^2}{\overline{AB}^2}$$

$$h^2 = eg - f^2 = \frac{4a^2}{\overline{AB}^2}$$

$$l = -\vec{x}_u \cdot \vec{w}_u = \frac{v^2 + 4a^2}{\overline{AB}^2} \qquad \overline{m} = -\vec{x}_v \cdot \vec{w}_v = -\frac{uv}{\overline{AB}^2}$$

bulunur.

Genellikle, $m \neq \overline{m}$ olduğundan, alınan doğru kongrüansı, bir normaller kongrüansı değildir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Odak noktaları

Odakların, Δ_1 ve Δ_2 doğruları üzerinde bulunacaklarını önceden bilmekle beraber, hesapla da bunu doğrulayabiliriz. Şöyle ki (11-42) denklemi, hesaplanan katsayılara göre

$$[h^2\bar{\lambda} + (f\bar{m} - g\bar{l})]\,\bar{\lambda} = 0, \quad \bar{\lambda}^2 = 0,$$

$$\bar{\lambda}^e = \frac{g\bar{l} - f\bar{m}}{h^2} = \overline{AB}$$

dır ve odaklardan biri A, öteki de B dir.

Odak düzlemlere gelince, (11-43) denklemi

$$[(e\bar{m} - f\bar{l})\,du + (f\bar{m} - g\bar{l})\,dv]\,du = 0$$

biçiminde yazılabileceğinden

$$u = \text{sabit}, \quad v' = \frac{g\bar{l} - f\bar{m}}{e\bar{m} - f\bar{l}} = \frac{uv(v^2 - u^2)}{\overline{AB}^2}$$

olur.

2. Bir yüzeyin koordinat çizgilerinden birinin teğetleriyle tanımlanan kongrüans

Koordinat çizgilerinin teğet birim vektörleri $\vec{t}^*$, $\vec{t}^{**}$ olsun, ve

$$\vec{y} = \vec{x}(u, v) + \lambda \vec{t}(u, v)$$

doğru kongrüansını ele alalım. Hesaplar hakkında bir fikir vermek üzere de invariyant türevleri kullanalım, ve koordinat çizgileri arasındaki açıyı da α ile gösterelim. Buna göre: $\vec{w} = \vec{t}$ dir ve (48-10) ve (48-11) formüllerinden

$$\vec{r}_1^* = g^* \frac{\vec{t}^{**} - \vec{t}^* \cos\alpha}{\sin\alpha} + t^* \vec{n},$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{t}_2^{\,*} = (g^{**} - \alpha_2)\,\frac{\vec{t}^{\,**} - \vec{t}^{\,*}\,\mathrm{Cos}\,\alpha}{\mathrm{Sin}\,\alpha} + (r^{**}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \tau^{**}\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,\vec{n}$$

yazılabileceğinden,

$$e = g^{*2} + r^{*2} = r^2, \quad (r : v = \text{sabit'in eğriliği})$$

$$g = (g^{**} - \alpha_2)^2 + (r^{**}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \tau^{**}\,\mathrm{Sin}\,\alpha)^2$$

$$f = g^{*}\,(g^{**} - \alpha_2) + r^{*}\,(r^{**}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \tau^{**}\,\mathrm{Sin}\,\alpha),$$

$$h^2 = [\,(r^{**}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \tau^{**}\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,g^{*} - (g^{**} - \alpha_2)\,r^{*}]^2$$

$$-l = \vec{x}_1 \cdot \vec{t}_1^{\,*} = \vec{t}^{\,*} \cdot \vec{t}_1^{\,*} = 0, \quad -\bar{m} = \vec{x}_1 \cdot \vec{t}_2^{\,*} = +\vec{t}^{\,*} \cdot \vec{t}_2^{\,*} = 0,$$

$$-m = \vec{x}_2 \cdot \vec{t}_1^{\,*} = \vec{t}^{\,**} \cdot \vec{t}_1^{\,*} = g^{*}\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

$$-n = \vec{x}_2 \cdot \vec{t}_2^{\,*} = \vec{t}^{\,**} \cdot \vec{t}_2^{\,*} = (g^{**} - \alpha_2)\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Odaklar

(11-42) denklemi

$$\bar{\lambda}\,[h^2\,\bar{\lambda} + (l\,m - e\,n)\,] = 0$$

vereceğinden, odaklardan biri $\vec{X} = \vec{X}\,[u, v)$ eğrisi üzerindedir. İkinci odak

$$\bar{\lambda}'' = (e\,n - f\,m)\,/\,h^2$$

$$\bar{\lambda}'' = \frac{r^{*}\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{g^{*}\,(r^{**}\,\mathrm{Cos}\,\alpha - \tau^{**}\,\mathrm{Sin}\,\alpha) - r^{*}\,(g^{**} - \alpha_2)}$$

dır. Özel halleri metinde gözden geçirmiştik.

III. DOĞRU KOMPLEKSLERİ

16-1. Bir doğrunun PLÜCKER vektörleri

Üç boyutlu Öklid uzayında herhangi bir D doğrusunun gelişigüzel bir noktası N, bu noktanın bir O başlangıcına göre yer vektörü $\vec{X}$, D doğru

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 89.

sunun herhangi bir doğrultu vektörü $\vec{a}$, $(\vec{a} \neq \vec{0})$ olsun. Şimdilik D doğrusunun O başlangıcından geçmediğini varsayalım.

Tanım 16-1.

Eğer

$$\vec{g} = \vec{x} \wedge \vec{a} \tag{16-2}$$

dersek, **$(\vec{a}, \vec{g})$ vektör takımına**, D doğrusunun **PLÜCKER vektörleri adı** verilir.

(16-2) eşitliği ile tanımlanan **$\vec{g}$ vektörü, N noktasının D doğrusu üzerindeki yerine bağlı değildir.** Gerçekten, D nin başka bir N_1 noktası için

$$\vec{g}_1 = \overrightarrow{ON_1} \wedge \vec{a} = (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NN_1}) \wedge \vec{a} = \vec{g}$$

dir.

(16-2) dolayısiyle

$$\vec{a} \cdot \vec{g} = 0 \tag{16-3}$$

olduğu gibi, $\vec{g}$ vektörü, O, D düzlemine diktir. Ayrıca, **D doğrusu O dan geçmedikçe**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-4) $$\vec{g} \neq \vec{0}$$

dür.

O den D ye indirilen dikmenin ayağı N_0 ve

(16-5) $$\vec{x_0} = \vec{ON_0}, \quad (\vec{x_0} \cdot \vec{a} = 0)$$

ise, $\vec{g}$ nin D üzerinde seçilen N noktasına bağlı olmadığını gördüğümüze göre

(16-6) $$\vec{g} = \vec{x_0} \wedge \vec{a}$$

dır.

(16-6) nın her iki yanını vektörel olarak çarparsak, (16-5; 2) nedeniyle

(16-7) $$\vec{x_0} = \frac{\vec{a} \wedge \vec{g}}{\vec{a}^2}$$

olur.

$\vec{x_0}, \vec{a}, \vec{g}$ vektörleri bir pozitif dikçeyizlü tanımlarlar. Eğer

(16-8) $$|\vec{x_0}| = x_0, \quad |\vec{a}| = a, \quad |\vec{g}| = g$$

dersek, (16-17) gösterir ki, O noktasının D den x_0 uzaklığı

(16-9) $$x_0 = \frac{g}{a}$$

eşitliği ile belirli olur.

(16-9) dan şu sonuç çıkarılır:

$a = g$ eşitliğini sağlayan D doğruları, O merkezli birim küresine teğettir.

Karşıt olarak, (16-3) koşulunu sağlayan, sıfır-vektörden farklı iki $(\vec{a}, \vec{g})$ vektörü verildiğinde, öyle bir ve yalnız bir D doğrusu bulunabilir ki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

bu doğru O başlangıcından geçmesin ve bunun PLÜCKER vektörleri $(\vec{a}, \vec{g})$ olsun.

Gerçekten, (16-3)

$$\vec{a} \cdot \vec{g} = 0$$

koşulunu sağlayan $\vec{a}$, $\vec{g}$ vektörleri yardımıyle, O başlangıcından itibaren alınan

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{a} \wedge \vec{g}}{\vec{a}^2} \neq \vec{0}, \quad (\vec{a} \neq \vec{0}, \ \vec{g} \neq \vec{0})$$

vektörünün ucundan $\vec{a}$ **vektörüne paralel olan** D doğrusunu geçirelim. Bu doğrunun ikinci PLÜCKER vektörü olarak

$$\vec{g}_1 = \vec{x}_0 \wedge \vec{a} = -\vec{a} \wedge \frac{\vec{a} \wedge \vec{g}}{\vec{a}^2}$$

yı alırsak, (16-3) nedeniyle

$$\vec{g}_1 = \vec{g}$$

dir. Öte yandan, $\vec{a} \cdot \vec{x}_0 = 0$ olduğundan, D doğrusu, sıfır-vektörden farklı olan $\vec{X}_0$ vektörüne ucunda diktir. Buna göre:

Sıfır-vektörden farklı iki $\vec{a}, \vec{g}$ **vektörünün, O dan geçmeyen bir D doğrusunun PLÜCKER vektörleri olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul** $\vec{a} \cdot \vec{g} = 0$ **dır.**

Bundan sonra, PLÜCKER vektörleri ile verilen ve başlangıçtan geçmiyen bir D doğrusuna $(\vec{a}, \vec{g})$ doğrusu diyeceğiz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 16-1.

(16-2) dolayısiyle, $\vec{g}$ vektörü hem $\vec{x}$ e, hem de $\vec{a}$ ya dik olduğundan:

D doğrusu, O başlangıcından $\vec{g}$ ye dik olarak geçirilen düzlem üzerindedir.

Özel haller 16-1.

a. O başlangıcından geçen doğrular

D doğrusu O dan geçtiğinde, D nin O dan farklı noktaları için $\vec{X}$ vektörü $\vec{a}$ ya paralel, O için de $\vec{0}$ olacağından, (16-2) bağıntısı

$$\vec{g} = \vec{0}$$

verir ve (16-3) de sağlanmış olur.

Karşıt olarak, bir D doğrusunun PLÜCKER vektörleri

$$(\vec{a}, \vec{0}), \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

biçiminde ise, (16-3) sağlanır ve (16-7) dolayısiyle $\vec{X}_s = \vec{0}$ dır. Buna göre:

Bir D doğrusunun O başlangıcından geçmesi için gerekli ve yeterli koşul, bunun PLÜCKER vektörlerinin

$$(\vec{a}, \vec{0}), \quad (\vec{a} \neq \vec{0})$$

biçiminde olmasıdır.

b. Sonsuza atılmış doğrular

D doğrusu, bir $\vec{g}$ vektörüne dik düzlemlerin sonsuzda ortak olan doğruları olsun. Böyle bir durumda, $\vec{X}_s \to \infty$ olacağından, (16-9) dolayısiyle

$$a = 0,$$

yâni

$$\vec{a} = \vec{0}$$

dır ve (16-3) de sağlanmış olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

Karşıt olarak, bir D doğrusunun PLÜCKER vektörleri

$$(\vec{0}, \vec{g}), \quad (\vec{g} \neq \vec{0})$$

biçiminde ise, (16-3) sağlanır ve (16-9) dolayısiyle $X_\infty \to \infty$ olur, yani:

D doğrusunun bir $\vec{g} \neq \vec{0}$ vektörüne dik düzlemler doğrultusunda sonsuza atılmış olması için gerekli ve yeterli koşul, bunun PLÜCKER vektörlerinin

$$(\vec{0}, \vec{g}), \quad (\vec{g} \neq \vec{0})$$

biçiminde olmasıdır.

Uyarılar 16-2.

1. **PLÜCKER vektörleri $(\vec{0}, \vec{0})$ biçiminde olan doğrular belirsizdir.**
2. **Verilen bir D doğrusunun PLÜCKER vektörleri, bir skaler çarpan farkıyle belirli olurlar.**

a. Gerçekten, sonsuza atılmamış bir D doğrusunun doğrultu vektörü, olarak, $\vec{a}$ yerine

$$\vec{a_1} = \lambda \vec{a}, \qquad (\lambda \neq 0, \quad \vec{a} \neq \vec{0})$$

vektörünü alırsak, (16-2) dolayısiyle

$$\vec{g_1} = \lambda \vec{g}$$

olur.

Karşıt olarak,

$$\vec{a_1} = \lambda \vec{a}, \quad \vec{g_1} = \lambda \vec{g}, \quad (\lambda \neq 0, \quad \vec{a_1} \neq \vec{0})$$

PLÜCKER vektörlü doğru, $\vec{a_1}$ in $\vec{a}$ ya paralel olması ve (16-7) ile tanımlanan $\vec{X_0}$ ın değişmemesi dolayısiyle, D den ibarettir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b. D doğrusu, $\vec{g} \neq \vec{0}$ vektörüne dik düzlemlerin sonsuzda ortak olan doğruları ise, $(\vec{0}, \lambda \vec{g})$, $(\lambda \neq 0)$ PLÜCKER vektörlü doğru da, aynı D doğrusudur.

3. Uzayın D doğruları ile bunların PLÜCKER vektör takımları arasında bire-bir bir ilişki yoktur.

16-2. İki doğrunun aynı bir düzlemde bulunması koşulu

a. Sonlu uzaklıkta bir N noktasında kesişen ve başlangıçtan geçmeyen herhangi iki doğru, $\vec{a}_p \cdot \vec{g}_p = 0$ koşullarını sağlayan

$$(\vec{a}_p, \vec{g}_p), \quad (p = 1, 2), \quad \vec{g}_p \neq \vec{0}$$

PLÜCKER vektörleri ile verilmiş olsun.

$$\vec{ON} = \vec{x}$$

dersek,

$$\vec{g}_p = \vec{x} \wedge \vec{a}_p, \quad (p = 1, 2)$$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 = \vec{a}_2 \cdot (\vec{x} \wedge \vec{a}_1) + \vec{a}_1 \cdot (\vec{x} \wedge \vec{a}_2)$$

veya

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0 \tag{16-8}$$

olur.

Karşıt olarak, başlangıçtan geçmeyen ve sonsuza da atılmamış olan iki D_p doğrusunun PLÜCKER vektörleri (16-8) bağıntısını sağlasın ve bu iki doğru birbirine paralel olmasın, yâni

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \neq \vec{0} \tag{16-9}$$

koşulu sağlansın. Buna göre, D_p doğruları, sonlu uzaklıkta bir N noktasında kesişirler.

Gerçekten, bu iki doğru kesişmiyorsa, ortak dikmelerinin ayaklarının yer vektörleri $\vec{X}_p$ olduğuna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{g}_p = \vec{x}_p \wedge \vec{a}_p, \quad (p = 1, 2)$$

bağıntısı, (16-8) nedeniyle

$$\vec{a}_2 \cdot (\vec{x}_1 \wedge \vec{a}_1) + \vec{a}_1 \cdot (\vec{x}_2 \wedge \vec{a}_2) = 0$$

veya

$$(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2)\ (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = 0$$

verir.

Yukarıki skaler çarpımı oluşturan $\vec{X}_1 - \vec{X}_2$ ve $\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$ vektörlerinin ikisi de D_p doğrularının ortak dikmesine paralel olduklarından, ve (16-9) nedeniyle, ancak

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$$

eşitliği söz konusudur, bu da D_p doğrularının kesişmesi demektir.

Kesim noktasının yer vektörü

Birinci yol

D_p doğrularının N kesim noktalarının $\vec{x}$ yer vektörü, $\vec{g}_p$ vektörlerine dik olacağından,

$$\vec{x} = \lambda\, \vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2, \quad (\lambda \neq 0)$$

biçimindedir.

Yukarıki bağıntıda, $\vec{g}_p$ vektörlerinden biri yerine $\vec{x} \wedge \vec{a}_p$ koyarak

$$\vec{x} = \lambda\, (\vec{x} \wedge \vec{a}_1) \wedge \vec{g}_2 = \lambda\, \vec{g}_1 \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}_2)$$

$$= -\lambda\, (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2)\, \vec{x} = \lambda\, (\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1)\, \vec{x}$$

veya

$$\lambda = -\frac{1}{\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2} = \frac{1}{\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1}, \quad (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 \neq 0, \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 \neq 0)$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buna göre, N kesim noktasının $\vec{x}$ yer vektörü

$$\vec{x} = -\frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2} = \frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2}{\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_2}, \quad (\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2 \neq \vec{0}) \tag{16-10}$$

dir.

İkinci yol

$$\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2 = \vec{g}_1 \wedge (\vec{x} \wedge \vec{a}_2) = (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2)\,\vec{x}$$

bağıntısından $\vec{x}$ derhal çıkarılır.

Uyarı 16-3.

(16-10) formülü

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \neq \vec{0}, \quad \vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2 \neq \vec{0}, \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_2 = 0, \quad \vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 \neq 0,$$

$$\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 \neq 0, \quad \vec{a}_1 \cdot \vec{g}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 = 0$$

koşulları gerçekleştiğinde, kesim noktasının $\vec{x}$ yer vektörünü verir.

b. Sonlu uzaklıkta bir N noktasında kesişen ve başlangıçtan geçmiyen iki doğru, başlangıçtan geçen bir düzlem üzerindedirler.

Bu durumda $\vec{g}_1$ ve $\vec{g}_2$ vektörleri birbirine paralel olacaklarından

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 \neq \vec{0}, \quad \vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2 = \vec{0}, \quad \vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0, \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 = 0, \quad \vec{g}_2 \neq \vec{0}$$

dır ve N kesim noktasının $\vec{x}$ yer vektörü için (16-10) formülü kullanılamaz.

Buna karşılık, $\vec{x}$ yer vektörü, $\vec{a}_2$ vektörlerine lineer olarak bağlıdır, yani

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i \vec{a}_i, \quad (\alpha_i \neq 0)$$

dır. Buradan sıra ile

$$\vec{g}_1 = \vec{x} \wedge \vec{a}_1 = -\alpha_2 \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2,$$

$$\vec{g}_2 = \vec{x} \wedge \vec{a}_2 = \alpha_1 \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$$

yâni

$$\alpha_1 = \frac{\vec{g}_2^2}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{-\vec{g}_1^2}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_1)}$$

bulunur ve

$$\vec{x} = \frac{\vec{g}_2^2}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_2)} \vec{a}_1 - \frac{\vec{g}_1^2}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_1)} \vec{a}_2 \tag{16-11}$$

olur.

Eğer $\vec{g}_1 = \vec{g}_2$ ise, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ dır ve

$$x = \frac{\vec{g}_1^2}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_1)} (\vec{a}_1 - \vec{a}_2), \quad (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_1) \neq 0 \tag{16-12}$$

bulunur.

c. Doğrulardan birisi başlangıçtan geçmektedir.

Başlangıçtan geçen $D_1 (\vec{a}_1, \vec{0})$ doğrusu $D_2 (\vec{a}_2, \vec{g}_2)$ yi kessin. Buna göre, $\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_2 = 0$ dır ve D_1, D_2 düzlemi O dan geçeceği için,

$$\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_1 = 0 \text{ ve } \vec{g}_1 = \vec{0} \tag{16-13}$$

dır. Böyle olunca da (16-8) sağlanmış olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Karşıt olarak, $(\vec{a}_1, 0)$ ve $(\vec{a}_2, \vec{g}_2)$ doğruları (16-8) i sağlıyorsa, (16-13) de sağlanmış olur ve O dan geçen D_1 doğrusu D_2 yi keser.

Kesim noktasının yer vektörü

N kesim noktasının $\vec{x}$ yer vektörü

$$\vec{x} = \lambda \vec{a}_1 \qquad (\lambda \neq 0)$$

biçimindedir. Buradan sıra ile

(16-14)
$$\vec{g}_2 = \vec{x} \wedge \vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$$

$$\vec{g}_2^2 = \lambda (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_2)$$

veya

(16-15)
$$\vec{x} = \frac{\vec{g}_2^2}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_2)} \vec{a}_1, \quad (\vec{g}_2 \neq 0, \ (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_2) \neq 0, \ \vec{g}_1 \cdot \vec{a}_1 = 0)$$

bulunur.

Uyarılar 16-4.

1. Bu eşitlik, (16-11) de $\vec{g}_1 = \vec{0}$ olarak da bulunabilir.

2. Her iki doğru da O dan geçiyorsa, $\vec{g}_1 = \vec{g}_2 = \vec{0}$ olacağından, (16-14) dolayısiyle, $\lambda = 0$ olur.

d. Sonsuzda kesişen —paralel— doğrular.

1. Paralel doğruların düzlemi, başlangıçtan geçmemektedir, ve doğrular sonlu uzaklıktadır.

D_p doğrularının PLÜCKER vektörleri $(\vec{a}_p, \vec{g}_p)$ ise $(\vec{a}_p \cdot \vec{g}_p = 0)$, $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ vektörleri birbirine paraleldir ve dolayısiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0\,, \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 = 0$$

olacağından, (16-8) sağlanmış olur.

İki paralel doğrunun düzlemi O dan geçmediğinden, $\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2 \neq \vec{0}$ dır ve (16-10) gösterir ki kesim noktası sonsuzdadır.

2. Paralel doğruların düzlemi başlangıçtan geçmektedir ve doğrular sonlu uzaklıktadır.

Böyle olunca, hem $\vec{a}_p$ hem de $\vec{g}_p$ vektörleri kendi aralarında birbirlerine paraleldir, dolayısiyle (16-8) gene sağlanır. Ayrıca, $\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = \vec{0}$ olduğundan, $\vec{g}_1 = \vec{g}_2$ olarak alındığında, (16-12) gösterir ki kesim noktası sonsuzdadır.

Doğrulardan birinin, örneğin D_1 in O dan geçmesi, sadece $\vec{g}_1 = \vec{0}$ olmasını gerektirir, (16-8) gene sağlanır, bu kez de (16-15) gösterir ki kesim noktası sonsuzdadır.

e. Her iki doğru sonsuza atılmıştır. Böyle iki doğrunun PLÜCKER vektörleri $(\vec{o}, \vec{g}_1)$, $(\vec{o}, \vec{g}_2)$ biçimindedir ve (16-8) gene sağlanır; (16-10) da kesim noktasının sonsuzdaki düzlem üzerinde bulunduğunu gösterir.

f. Bir doğru sonsuza atılmıştır, öteki de birinciden geçen düzlemlere paraleldir.

Sözü edilen doğrular

$$(\vec{o}, \vec{g}_1), \quad (\vec{a}_2, \vec{g}_2), \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 = 0\,, \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_2 = 0$$

biçiminde verildiklerinden, (16-8) sağlanır ve genellikle $\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2 \neq \vec{0}$ olduğundan, (16-10) formülü kesim noktasının sonsuzdaki düzlem üzerinde bulunduğunu gösterir.

Özel olarak, D_2 doğrusu, O dan $\vec{g}_1$ e dik olarak geçirilen düzlem üzerinde —hattâ O dan geçer durumda— bulunabilir. Böyle olunca da $\vec{g}_2$ vektörü $\vec{g}_1$ e paralel —ya da sıfır-vektör— dür. (16-8) sağlanır. Kesim noktası için (16-12) ya da (16-15) kullanılabilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Yukarıdan beri söylediklerimizi şu teorem özetler :

Teorem 16-1.

Uzayda iki doğrunun sonlu uzaklıktaki bir düzlem üzerinde veya sonsuzdaki düzlem üzerinde bulunmaları için gerekli ve yeterli koşul, bu iki doğrunun PLÜCKER vektörleri arasında

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 = 0$$

bağıntısının bulunmasıdır.

İki doğrunun üzerinde bulunduğu düzlem O dan geçmiyor. O dan geçiyor ya da O doğrulardan biri üzerinde ise, N kesim noktasının yer vektörü olan

$$\vec{ON} = \vec{x}$$

şu biçimde belirlidir:

$$\vec{x} = -\frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2}{\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2} = \frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}_2}{\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1},$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{g}_1^{\,2}}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_1)} (\vec{a}_1 - \vec{a}_2), \quad \vec{g}_1 = \vec{g}_2$$

$$\vec{x} = \frac{\vec{g}_2^{\,2}}{(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{g}_2)} \vec{a}_1$$

16-3. Aykırı iki doğrunun ortak dikmesi

Aykırı iki doğru

$$(\vec{a}_2, \vec{g}_2), \quad \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_2 = 0, \quad \vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 + \vec{a}_2 \cdot \vec{g}_1 \neq 0 \tag{16-16}$$

olsun.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bunların $(\vec{a}_3, \vec{g}_3)$ ortak dikmesi

(16-17) $\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_3 = 0, \quad \vec{a}_3 \cdot \vec{g}_1 + \vec{g}_3 \cdot \vec{a}_1 = 0, \quad \vec{a}_1 \cdot \vec{g}_3 = 0$

koşullarını sağlayan doğrudur.

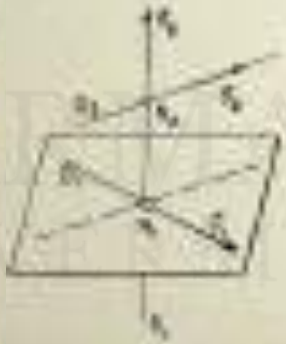
Ortak dikmenin D_1, D_2 üzerindeki ayakları N_1, N_2 olsun. Ortak dikmenin $\vec{a}_3$ doğrultu vektörünü de

(16-18) $$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2$$

biçiminde alalım; ve $\vec{g}_3$ ü hesaplamak için

(16-19) $$\vec{g}_3 = \frac{\vec{a}_3 \wedge (\vec{g}_3 \wedge \vec{a}_3)}{\vec{a}_3^2}$$

özdeşliğinden yararlanalım.



Şekil 16

(16-18) nedeniyle

$$\vec{g}_3 \wedge \vec{a}_3 = \vec{g}_3 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) = (\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_2)\,\vec{a}_1 - (\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_1)\,\vec{a}_2$$

veya (16-17) dolayısiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{g}_3 \wedge \vec{a}_3 = -(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_1 + (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_2$$

olacağından, her iki yan vektörel olarak $\vec{a}_2$ ile çarpılırsa

$$\vec{g}_3 = \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_2)\,\vec{a}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_1)\,\vec{a}_2}{\vec{a}_3^{\,2}} \wedge \vec{a}_3 \tag{16-20}$$

bulunur.

Buradan sıra ile

$$(\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_2)\,\vec{a}_3 = \vec{a}_3 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{g}_2),$$

$$(\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_1)\,\vec{a}_2 = \vec{a}_3 \wedge (\vec{a}_2 \wedge \vec{g}_1),$$

$$(\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_2)\,\vec{a}_1 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_1)\,\vec{a}_2 = \vec{a}_3 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{g}_2 - \vec{a}_2 \wedge \vec{g}_1)$$

$$\vec{g}_3 = -\frac{\vec{a}_3 \wedge [\vec{a}_3 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{g}_2 - \vec{a}_2 \wedge \vec{g}_1)]}{\vec{a}_3^{\,2}}$$

$$= \vec{a}_1 \wedge \vec{g}_2 - \vec{a}_2 \wedge \vec{g}_1 - \frac{[\vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \wedge \vec{g}_2 - \vec{a}_2 \wedge \vec{g}_1)]\,\vec{a}_3}{\vec{a}_3^{\,2}}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\vec{a}_3 \cdot (\vec{a}_1 \wedge \vec{g}_2 - \vec{a}_2 \wedge \vec{g}_1) = [\vec{g}_2 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_3)] \cdot \vec{a}_3 - [\vec{g}_1 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2)] \cdot \vec{a}_3$$

$$= -(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_1)(\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3) - (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_3)$$

olacağından,

$$\vec{g}_3 = \vec{a}_1 \wedge \vec{g}_2 - \vec{a}_2 \wedge \vec{g}_1 + \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2)^2}(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_1 + \vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2)(\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) \tag{16-21}$$

sonucuna varılır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Uyarı 16-5.

$\vec{a}_3$ vektörüne dik olan $\vec{g}_3$ vektörü $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ düzlemine paralel olacağından

$$\vec{g}_3 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 \tag{16-22}$$

biçimindedir.

Bu bağıntının her iki yanını önce $\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3$ sonra $\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1$ vektörleri ile skaler olarak çarptığımızda

$$\alpha_1 = \frac{(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{g}_3)}{\vec{a}_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{(\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{g}_3)}{\vec{a}_3^2}$$

bulunur.

Öte yandan, (16-17) yardımıyla

$$(\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{g}_3) = (\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3) \cdot \vec{g}_3 = [\vec{a}_2 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2)] \cdot \vec{g}_3$$

$$= [\vec{a}_2^2 \cdot \vec{a}_1 - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)\vec{a}_2] \cdot \vec{g}_3$$

$$= [(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)\vec{g}_3 - \vec{a}_2^2 \vec{g}_3] \cdot \vec{a}_3$$

$$(\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{g}_3) = (\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1) \cdot \vec{g}_3 = -[\vec{a}_1 \wedge (\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1)] \cdot \vec{g}_3$$

$$= [\vec{a}_1^2 \vec{a}_3 - (\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1)\vec{a}_1] \cdot \vec{g}_3$$

$$= [(\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1)\vec{g}_3 - \vec{a}_1^2 \vec{g}_3] \cdot \vec{a}_3$$

olacağından,

$$\vec{g}_3 = \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_3)[(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)\vec{a}_2 - \vec{a}_2^2 \vec{a}_1] + (\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_3)[(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)\vec{a}_1 - \vec{a}_1^2 \vec{a}_2]}{\vec{a}_3^2} \tag{16-23}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$= \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_2)\,\vec{a}_1 - (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2)\,\vec{a}_3}{\vec{a}_3^{\,2}} \wedge \vec{a}_3$$

$$= \frac{(\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_2)\,\vec{a}_1 + (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2)\,\vec{a}_3}{\vec{a}_3^{\,2}}$$

elde edilir.

(16-22) nin her iki yanını sıra ile $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ vektörleri ile skaler olarak çarptıktan sonra da aynı sonuca varılabilir.

Ortak dikmenin iki doğru üzerindeki ayaklarının yer vektörleri

En genel halde, (16-10) ve (16-20) dolayısiyle, ortak dikmenin N_2 ayaklarının $\vec{x}_2$ yer vektörü

$$\vec{x}_2 = \frac{\vec{g}_2 \wedge \vec{g}_3}{\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3} = \vec{g}_2 \wedge \frac{[(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_1 - (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_2] \wedge \vec{a}_3}{(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_3^{\,2}}$$

veya

(16-24)
$$\vec{x}_1 = \frac{(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_1 + (\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_2 - (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2)\,\vec{a}_3}{\vec{a}_3^{\,2}}$$

$$\vec{x}_2 = \frac{(\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_1 + (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_1)\,\vec{a}_3 - (\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_1)\,\vec{a}_3}{\vec{a}_3^{\,2}}$$

ve bu sonuncudan da

(16-25)
$$\overrightarrow{N_1 N_2} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = -\frac{(\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{g}_2 \cdot \vec{a}_1)}{\vec{a}_3^{\,2}}\,\vec{a}_3$$

eşitliği çıkarılır.

Orta dikmenin uzunluğu

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-26) $$|\overrightarrow{N_1 N_2}| = \frac{|\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{g}_2 \cdot \vec{a}_1|}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|}$$

dir.

Orta dikmeyi $\vec{a}_3$ ile yönlersek, $\overrightarrow{N_1 N_2}$ nin bu eksene göre değeri

(16-27) $$-\frac{\vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2 + \vec{g}_2 \cdot \vec{a}_1}{|\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2|}$$

olur.

Uyarılar 16-6.

a. $\vec{g}_3$ ü veren (16-23) formülü gösterir ki

$$\vec{x}_3 = \frac{(\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_1 + (\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_1)\,\vec{a}_2}{\vec{a}_3^{\,2}}$$

vektörü, D_3 ortak dikmesinin bir noktasının yer vektörüdür. Üstelik,

$$\vec{x}_3 \cdot \vec{a}_3 = 0$$

olduğundan, bu nokta, başlangıçtan D_3 e indirilen dikmenin ayağıdır.

b. $\vec{x}_3$ yardımıyle, orta dikmenin D_1, D_2 üzerindeki ayaklarının $\vec{x}_p$ yer vektörleri bulunabilir. Gerçekten,

$$\vec{x}_3 + \lambda_p \vec{a}_3 = \vec{x}_p$$

bağıntısının her iki yanını $\vec{g}_p$ ile çarparak

(16-28) $$\lambda_p = -\frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{g}_p}{\vec{a}_3 \cdot \vec{g}_p} = (-1)^q \frac{\vec{g}_p \cdot \vec{a}_q}{\vec{a}_3^{\,2}}, \quad (p \neq q)$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

c. Hem $\vec{x}_3$, hem de onun yardımıyla $\vec{g}_3$ çok daha kısa olarak hesaplanabilir. Gerçekten, (16-7) dolayısıyla

$$\vec{x}_3 = \frac{\vec{a}_3 \wedge \vec{g}_3}{\vec{a}_3^2} = -\frac{\vec{g}_3 \wedge (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2)}{\vec{a}_3^2} =$$

$$= -\frac{(\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_2)\,\vec{a}_1 - (\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_1)\,\vec{a}_2}{\vec{a}_3^2}$$

$$= \frac{(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_1 + (\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_2}{\vec{a}_3^2}$$

ve

$$\vec{g}_3 = \vec{x}_3 \wedge \vec{a}_3 = \frac{(\vec{g}_2 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_1 - (\vec{g}_3 \cdot \vec{a}_3)\,\vec{a}_2}{\vec{a}_3^2} \tag{16-29}$$

elde edilir.

16-4. Doğru kompleksleri

3 bağımsız parametreye bağlı doğru ailelerine **doğru kompleksleri** denilir.

Bu tanıma uygun bazı örnekler şöyle sıralanabilir:

1. Bir yüzeye teğet doğruların tanımladığı kompleks
2. Sonlu uzaklıkta —ya da sonsuzda— bulunan bir eğriye —ya da bir doğruya— dayanan doğruların oluşturdukları kompleks

Kompleksin konisi

Uzayın bir P_0 noktasından geçen ve verilen bir komplekse ait olan doğrular, sadece bir tek değişken parametreye bağlı kalacaklarından, P_0 tepeli bir koni doğururlar. Buna **kompleksin konisi** denilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Kompleksin eğrisi

Verilen bir doğru kompleksinin bir π_0 düzlemi üzerinde bulunan doğruları da, gene sadece bir tek değişken parametreye bağlı kalacaklarından, bu düzlemin bir eğrisine teğet kalırlar. Bu da: **kompleksin eğrisidir.**

Genel olarak, doğru komplekslerinin herhangi bir D doğrusunu, bunun $(\vec{a}, \vec{g})$, $(\vec{a} \cdot \vec{g} = 0)$ PLÜCKER vektörleri ile vereceğiz. Bilindiği gibi, aynı D doğrusu, $\lambda \neq 0$ olmak koşulu ile, $(\lambda\vec{a}, \lambda\vec{g})$ PLÜCKER vektörleriyle de tanımlanabileceğinden, **verilen bir doğru kompleksini oluşturan doğruların PLÜCKER vektörleri arasında bir tek homogen ve skaler bağıntı vardır.**

Söz konusu bağıntının homogen olması gereklidir, yoksa aynı $(\vec{a}, \vec{g})$ doğrusunu veren $(\lambda\vec{a}, \lambda\vec{g})$ PLÜCKER vektörleri bu bağıntıya uymaz.

Bir karteziyen koordinat sistemine göre, D doğrusunun $(\vec{a}, \vec{g})$ PLÜCKER vektörlerinin skaler bileşenleri (a_p, g_p), $(p = 1, 2, 3)$ ise, kompleksi tanımlayan homogen ve skaler bağıntı

(16-30) $$f(a_1, a_2, a_3, g_1, g_2, g_3) = 0$$

biçimindedir. (a_p, g_p) ler, D nin **PLÜCKER koordinatlarıdır.**

Kompleksin kongrüansları ve doğrusal yüzeyleri

Kompleksi tanımlayan üç bağımsız parametre arasında bir tek bağıntı kurulursa, kompleksin bu bağıntıya uyan doğruları bir kongrüans oluştururlar. Bu: **kompleksin kongrüansıdır.** Eğer söz konusu üç bağımsız değişken arasında, gene bağımsız iki bağıntı kurulursa, kompleksin **doğrusal yüzeyleri** elde edilir.

Kompleksin konisinin karteziyen denklemi

Doğru kompleksinin, uzayın bir $P_0(X_1^0, X_2^0, X_3^0)$ noktasından geçen herhangi birisi üzerinde bir $P(X_1, X_2, X_3)$, $(P_0 \neq P)$ noktasını seçelim ve bu doğrunun birinci PLÜCKER vektörü olarak

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_0P}$$

yi alalım. Buna göre

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$a_p = x_p - x_{p+}, \quad (p = 1, 2, 3)$$

tür. Aynı doğrunun ikinci PLÜCKER vektörü olarak da

$$\vec{g} = \vec{OP_0} \wedge \vec{P_0P}$$

yi alırsak, $\vec{g}$ nin skaler bileşenleri de

$$g_1 = x_2^\circ x_3 - x_3^\circ x_2, \quad g_2 = x_3^\circ x_1 - x_1^\circ x_3, \quad g_3 = x_1^\circ x_2 - x_2^\circ x_1$$

olacağından, (16-30) bağıntısı kompleksin P_0 tepeli konisinin karteziyen denklemi olarak

$$(16\text{-}30)' \qquad f(x_1 - x_1^\circ,\ x_2 - x_2^\circ,\ x_3 - x_3^\circ,\ x_2^\circ x_3 - x_3^\circ x_2,\ x_3^\circ x_1 - x_1^\circ x_3,\ x_1^\circ x_2 - x_2^\circ x_1) = 0$$

verir.

P_0 ve P noktasının

$$x_p^\circ = \frac{X_p^\circ}{X_4^\circ}, \quad x_p = \frac{X_p}{X_4}, \quad (p = 1, 2, 3)$$

denklemleriyle tanımlanan homogen koordinatları (16-30)' de yerlerine konulursa,

$$(16\text{-}30)'' \quad f(X_4^\circ X_1 - X_4 X_1^\circ,\ X_4^\circ X_2 - X_4 X_2^\circ,\ X_4^\circ X_3 - X_4 X_3^\circ,\ X_2^\circ X_3 - X_3^\circ X_2,\ X_3^\circ X_1 - X_1^\circ X_3,\ X_1^\circ X_2 - X_2^\circ X_1) = 0$$

homogen denklemi elde edilir. Böylece tepesi sonsuzda bulunan koniler de incelenebilir.

Uyarı 16-7.

Uzayın bâzı P_0 noktaları için (16-30)' denklemi özdeş olarak sıfırdır, başka deyişle, uzayın böyle bir noktadan geçen tüm doğruları komplekse aittir. Böyle noktalara **tekil** diyeceğiz.

Cebirsel doğru kompleksleri

Bir doğru kompleksini tanımlayan (16-30) homogen denklemi cebirsel ise, tanım olarak, kompleks de **cebirsel**dir. Bu denklemin derecesi, cebirsel

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

kompleksin **mertebesidir.** Bu bakımdan, **kompleksin** (16-30)' denklemiyle belirlenen **konisinin derecesi, kompleksin mertebesine eşittir.**

Kompleksin, verilen bir düzlem üzerinde bulunan eğrisine, bu düzlemin bir N_0 noktasından çizilecek teğetlerin sayısı, kompleksin N_0 tepeli konisi ile verilen düzlemin arakesit doğrularının sayısına, yani koninin derecesine eşittir. **Kompleksin eğrisinin sınıfı, kompleksin mertebesine eşittir.**

Bâzen öyle düzlemler bulunabilir ki bunların üzerindeki her doğru kompleksin doğrusudur. Böyle düzlemlere de **tekil** diyeceğiz.

16-6. Lineer doğru kompleksleri

Cebirsel kompleksler arasında en yalını, kuşkusuz, (16-30) denkleminin lineer olmasiyle tanımlananıdır:

$$g_1^* a_1 + g_2^* a_2 + g_3^* a_3 + a_1^* g_1 + a_2^* g_2 + a_3^* g_3 = 0 \tag{16-31}$$

Görüldüğü gibi, bu bağıntıda

$$a_1^*,\ a_2^*,\ a_3^*,\ g_1^*,\ g_2^*,\ g_3^*$$

ile gösterilen bağımsız 6 parametre vardır. Bunlardan hiç olmazsa bir tanesi sıfırdan farklı olacağından —hepsi birden sıfır olursa, ortada denklem kalmaz— bununla tüm katsayılar bölündüğünde, gerçekte bağımsız olarak 5 parametre kalır:

Bir lineer doğru kompleksi 5 bağımsız parametreye bağlıdır. Dolayısiyle, üç boyutlu uzayda lineer komplekslerin sayısı ∞^5 dir. İlerde göreceğiz ki **bir lineer kompleksin tamamiyle belirlenebilmesi için, kompleksin, izdüşsel olarak bağımsız 5 doğrusunun verilmesi gerekir.**

Skaler bileşenleri sıra ile a_p^* ve g_p^*, $(p = 1, 2, 3)$ olan vektörleri $\vec{a}^*$ ve $\vec{g}^*$ ile gösterecek olursak, (16-31) denklemini **dik koordinat sisteminde**

$$\vec{g}^* \cdot \vec{a} + \vec{a}^* \cdot \vec{g} = 0 \tag{16-32}$$

biçiminde de yazabiliriz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

16-7. Lineer doğru kompleksinin özelikleri

A. Önce

(16-33) $$\vec{a}^* \cdot \vec{g}^* \neq 0$$

varsayacağız.

Mertebesi n olan cebirsel doğru kompleksleri için söylediklerimize göre bir lineer doğru kompleksinde, kompleksin konisi 1-nci dereceden, kompleksin eğrisi de 1-nci sınıftandır. Dolayısıyle, kompleksin konisi bir düzlem, kompleksin eğrisi de bir **noktadır**. Başka deyişle:

Lineer doğru kompleksinin, bir P noktasından geçen doğruları, gene P den geçen bir π düzlemi üzerindedir ve bir π düzlemi üzerinde bulunan doğruları da π üzerindeki bir P noktasından geçerler.

π ye, P noktasından **kutup düzlemi**, P ye de π düzleminin **kutbu** denilir.

Kutup ve kutup düzlemi kavramlarıyle bunlardan çıkarılacak başka sonuçları, bir doğrunun PLÜCKER vektörlerini uygulayarak, elde edebiliriz. Bunun için de, (16-32) denklemini kullanacağız.

a. Kutup düzlemi

Uzayın bir P, $(\overrightarrow{OP} = \vec{x})$ noktasından geçen ve lineer kompleks üzerinde bulunan doğrulardan herhangi birisinin $\vec{a}$, $\vec{g} = \vec{x} \wedge \vec{a}$ PLÜCKER vektörleri, (16-32) nedeniyle

(16-34) $$(\vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}) \cdot \vec{a} = 0$$

denklemini sağlar.

(16-34)ü oluşturan iki çarpandan ilkinin skaler olarak $\vec{a}^*$ ile çarpımı

$$(\vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}) \cdot \vec{a}^* = \vec{a}^* \cdot \vec{g}^*$$

dir ve (16-33) nedeniyle

$$\vec{a}^* \cdot \vec{g}^* \neq 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

dır. Buna göre, sıfır-vektörden farklı olan $\vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}$ vektörü ile $\vec{a}$ nın skaler çarpımı sıfıra eşit olduğundan, lineer kompleksin P noktasından geçen doğruları $\vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x} \neq 0$ vektörüne dik bir π düzlemi üzerinde bulunurlar. P noktasının π kutup düzleminin dikme vektörlerinden birisini $\vec{v}$ ile gösterirsek

$$\vec{v} = \vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}, \quad (\vec{x} = \vec{OP}) \tag{16-35}$$

dir.

P noktası OP doğrusu üzerinde yer değiştirirse, π düzleminin dikme vektörü

$$\vec{v} = \vec{g}^* + \lambda(\vec{a}^* \wedge \vec{x}) \tag{16-36}$$

olur.

OP doğrusunun sonsuzdaki noktası için

$$\vec{v}_\infty = \vec{a}^* \wedge \vec{x} \tag{16-37}$$

başlangıç için de

$$\vec{v}_0 = \vec{g}^* \tag{16-38}$$

dır.

Eğer P noktası, $\vec{a}^*$ vektörüne paralel bir Δ doğrusu üzerinde yer değiştirirse, (16-35) de $\vec{x}$ yerine $\vec{x} + \mu\vec{a}^*$ konulacağından, $\vec{v}$ vektörü değişmez. Buna göre:

$\vec{a}^*$ vektörüne paralel doğrular üzerinde bulunan P noktalarının π kutup düzlemleri birbirlerine paralel kalırlar.

Özel olarak, OP doğrusu $\vec{a}^*$ vektörüne paralelse,

$$\vec{v} = \vec{g}^* \tag{16-39}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Karşıt olarak, **kutup düzlemleri birbirine paralel olan noktaların geometrik yeri, $\vec{a}^*$ vektörüne paralel bir Δ doğrusudur.** Gerçekten, P_1, $(\overrightarrow{OP_1} = \vec{x}_1)$, P_2, $(\overrightarrow{OP_2} = \vec{x}_2)$ noktaları ile belirli olan π_1, π_2 kutup düzlemlerinin dikme vektörleri, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ise, (16-35) gereğince

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}^* (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$$

dir.

$\vec{v}_1$ vektörünün $\vec{v}_2$ vektörüne paralel olabilmesi için, sağ yandaki ikinci vektörün, yani $\vec{a}^* \wedge (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ vektörünün ya $\vec{v}_1$ e paralel, ya da sıfır-vektör olması gerekir. $\vec{a}^*$ a dik olan bu vektör $\vec{v}_1$ e paralelse, $\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^* = 0$ olmalıdır. Oysa, (16-33) ve (16-35) nedeniyle bu, olamaz, çünkü $\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^* = \vec{a}^* \cdot \vec{g}^* \neq 0$ dır. Buna göre, tek olasılık

$$\vec{a}^* \wedge (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = \vec{0}$$

dır. Bu da, $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \vec{0}$ bir yana, $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \overrightarrow{P_1 P_2}$ vektörünün $\vec{a}^*$ vektörüne paralel olmasını gerektirir. Demek ki:

Bir lineer doğru kompleksinde, kutup düzlemlerinin birbirlerine paralel olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bunların kutuplarının $\vec{a}^*$ vektörüne paralel bir doğru üzerinde bulunmalarıdır.

$\vec{a}^*$ vektörüne paralel Δ doğrularına, lineer, doğru kompleksinin **köşegenleri** denilir.

Sonuçlar 16-1.

1. Bundan önce de gördüğümüz gibi, $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ nasıl seçilirse seçilsin, P den geçen kutup düzleminin (16-35) le tanımlanan

$$\vec{v} = \vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

dikme vektörü, (16-33) nedeniyle, $\vec{a}^*$ vektörüne dik olamaz, dolayısiyle:

Lineer kompleksin hiçbir doğrusu $\vec{a}^*$ vektörüne paralel değildir.

2. $\vec{x} = \vec{OP}$ nasıl seçilirse seçilsin, (16-35) nedeniyle

$$\vec{v} \cdot \vec{a}^* = \vec{g}^* \cdot \vec{a}^* = \text{sabit}$$

dir.

b. Kutup

Bir O^*, $(\vec{OO^*} = \vec{y^*})$ noktasından geçen ve dikme vektör $\vec{v}$ olan π düzleminin, herhangi bir noktası Q, $(\vec{OQ} = \vec{y})$ ise, bu düzlemin vektörel denklemi

(16-40) $$\vec{v} \cdot (\vec{y} - \vec{y^*}) = 0 \quad \text{veya} \quad \vec{v} \cdot \vec{y} = \vec{v} \cdot \vec{y^*}$$

dir.

(16-32) denklemi ile tanımlanan lineer doğru **kompleksinin bu π düzlemi üzerinde bulunan doğruları**, genellikle, **sonlu uzaklıkta ya da sonsuzda bulunan bir P noktasından geçerler.** Gerçekten, π nin herhangi bir noktası Q olduğuna göre, bu nokta ile belirli olan kutup düzleminin dikme vektörü, (16-35) nedeniyle

$$\vec{v_e} = \vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{y}$$

olacağından, lineer kompleksin Q den geçen ve π düzlemi üzerinde D doğrusunun $\vec{a}$ doğrultu vektörü

$$\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{v_e} = \vec{v} \wedge \vec{g}^* + (\vec{v} \cdot \vec{y})\,\vec{a}^* - (\vec{v} \cdot \vec{a}^*)\,\vec{y}$$

veya (16-40) dolayısiyle

(16-41) $$\vec{a} = \vec{v} \wedge \vec{g}^* + (\vec{v} \cdot \vec{y^*})\,\vec{a}^* - (\vec{v} \cdot \vec{a}^*)\,\vec{y}$$

dir. Buna göre, D dorusunun vektörel denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{z} = \vec{y} + \lambda\,[\vec{v} \wedge \vec{g}^* + (\vec{v}\cdot\vec{y}^*)\,\vec{a}^* - (\vec{v}\cdot\vec{a}^*)\,\vec{y}]$$

$$= [1-\lambda\,(\vec{v}\cdot\vec{a}^*)]\,\vec{y} + \lambda\,[\vec{v}\wedge\vec{g}^* + (\vec{v}\cdot\vec{y}^*)\,\vec{a}^*]$$

dır. Eğer λ yı

$$1 - \lambda\,(\vec{v}\cdot\vec{a}^*) = 0$$

biçiminde seçersek, D üzerinde O noktasına bağlı olmayan ve yer vektörü

$$\vec{x} = \frac{\vec{v}\wedge\vec{g}^* + (\vec{v}\cdot\vec{y}^*)\,\vec{a}^*}{\vec{v}\cdot\vec{a}^*}, \qquad \vec{v}\cdot\vec{a}^* \neq 0 \tag{16-42}$$

olan sabit bir P noktasını elde ederiz. Buna göre, (16-32) ile verilen lineer doğru kompleksinin, π düzlemi üzerinde bulunan tüm doğruları, bu P noktasından, π nin P kutbundan, geçerler.

Uyarılar 16-8.

1. (16-42) nin paydası sıfırsa, yâni

$$\vec{v}\cdot\vec{a}^* = 0$$

ise, alınan düzlem bir köşegene paraleldir, dolayısiyle, (16-41) nedeniyle de bu düzlemin kutbu sonsuzdadır. Lineer doğru kompleksinin, böyle bir düzlem üzerinde bulunan doğrularının doğrultu vektörü, (16-41) dolayısiyle

$$\vec{a} = \vec{v}\wedge\vec{g}^* + (\vec{v}\cdot\vec{y}^*)\,\vec{a}^*, \quad (\vec{v}\cdot\vec{a}^* = 0) \tag{16-43}$$

dır.

Bir kutbun sonsuzda olması için gerekli ve yeterli koşul, kutup düzleminin bir köşegene paralel olmasıdır.

2. (16-42) nin payı, genelikle, bir sıfır-vektör olamaz, gerçekten,

$$\vec{v}\wedge\vec{g}^* + (\vec{v}\cdot\vec{y}^*)\,\vec{a}^* = \vec{o}$$

olsaydı, bunun $\vec{g}^*$ ile skaler çarpımının da sıfır olması, yâni

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(\vec{v} \cdot \vec{y^*})\ \vec{a^*} \cdot \vec{y^*} = 0$$

bulunması gerekecekti. bu ise (16-33) e aykırıdır, meğer ki

$$\vec{v} \cdot \vec{g^*} = 0$$

olsun, yâni $\vec{v}$ vektörü O^* noktasında $\vec{y^*} = \vec{OO^*}$ vektörüne dik olsun, yâni π düzlemi OO^* doğrusundan geçsin. Böyle olunca da, (16-42) nin paynın sıfır-vektör olabilmesi için $\vec{v}$ nin $\vec{g^*}$ a paralelliği gereklidir.

Bir kutbun başlangıçta olması için gerekli ve yeterli koşul, kutup düzleminin başlangıçtan geçmesi ve dikme vektörünün $\vec{g^*}$ vektörüne paralel olmasıdır. (16-38) de bunu gösterir.

3. (16-42) ile tanımlanan $\vec{OP} = \vec{x}$ noktasının kutup düzleminin $\vec{v}$ dikme vektörünü, denetleme niteliğinde, (16-35) formülü ile arayıp $\vec{v}$ ye eşit veya paralel olup olmadığına bakalım:

$$\vec{g^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{x} = \vec{g^*} + \vec{a^*} \wedge \frac{\vec{v} \wedge \vec{g^*} + (\vec{v} \cdot \vec{g^*})\vec{a^*}}{\vec{v} \cdot \vec{a^*}}$$

$$= \vec{g^*} + \frac{(\vec{a^*} \cdot \vec{g^*})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{a^*})\ \vec{g^*}}{\vec{v} \cdot \vec{a^*}}$$

$$= \frac{\vec{a^*} \cdot \vec{g^*}}{\vec{v} \cdot \vec{a^*}}\ \vec{v}$$

c. Birbirlerinin kutuplarından geçen düzlemler

π_1, π_2 düzlemleriyle bunların P_1, P_2 kutuplarını alalım ve ispat edelim ki:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

π_1 düzlemi P_2 den geçerse, P_1 kutbu da π_2 düzlemi üzerindedir.

1. **π_1, π_2 düzlemleri, lineer kompleksin köşegenlerine paralel değildir; başka deyişle, P_1 ve P_2 kutupları sonlu uzaklıktadır.**

Geometrik olarak, ispatı gereken özelik, çok açıktır: P_1 kutbu π_2 düzlemi üzerinde ise, aynı zamanda π_1 üzerinde de bulunduğundan, π_1 ve π_2 nin arakesiltesi üzerindedir. Öyleyse, π_1 üzerinde bulunan ve P_1 den geçen bu arakesit, lineer kompleksin bir doğrusudur. π_2 üzerinde de bulunduğundan, P_2 kutbu bunun üzerindedir, yani π_1 de P_2 den geçmektedir.

Şimdi bu sonucu, PLÜCKER vektörleri yardımıyle elde edelim.

π_1, π_2 nin dikme vektörler $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ ve bunların P_1, P_2 kutuplarının yer vektörleri de $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ olsun. Buna göre, π_1 ve π_2 düzlemleri üzerinde sâbit birer nokta N_1, $(\vec{ON}_1 = \vec{y}_1)$ ve N_2, $(\vec{ON}_2, \vec{y}_2)$ ise, (16-42) nedeniyle

$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{v}_1 \wedge \vec{g}^* + (\vec{v}_1 \cdot \vec{y}_1)\,\vec{a}^*}{\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^*}, \quad (\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^* \neq 0)$$

$$\vec{x}_2 = \frac{\vec{v}_2 \wedge \vec{g}^* + (\vec{v}_2 \cdot \vec{y}_2)\,\vec{a}^*}{\vec{v}_2 \cdot \vec{a}^*}, \quad (\vec{v}_2 \cdot \vec{a}^* \neq 0)$$

dır.

P_2 nin π_1 üzerinde bulunması demek, (16-40) dolayısıyle

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{x}_2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{y}_1$$

yâni

$$\frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{g}^*) + (\vec{v}_2 \cdot \vec{y}_2)(\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^*)}{\vec{v}_2 \cdot \vec{a}^*} = \vec{v}_1 \cdot \vec{y}_1$$

demektir.

Oysa

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = \frac{-(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{g}^*) + (\vec{v}_1 \cdot \vec{y}_1)(\vec{v}_2 \cdot \vec{a}^*)}{\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^*}$$

veya bir önceki eşitlik yardımıyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{y}_2$$

bulunacağından, P_1 noktası da π_2 düzlemi üzerindedir.

2. Sonsuzda bulunan P_2 noktası π_1 üzerindedir. Böyle olunca, Uyarı 16-8; 1 dolayısiyle

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{a}^* = 0 \tag{16-44}$$

dır ve $\vec{OP}_2$ nin doğrultu vektörü. (16-43) nedeniyle

$$\vec{a}_2 = \vec{v}_2 \wedge \vec{g}^* + (\vec{v}_2 \cdot \vec{y}_2)\,\vec{a}^*$$

dır ve bu vektör, $\vec{v}_2$ ye dik olduktan başka, $\vec{v}_2$ vektörüne de diktir. Buna göre, $\vec{a}_2$ nin $\vec{v}_1$ le skaler çarpımı

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{a}_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{g}^*) + (\vec{v}_1 \cdot \vec{y}_2)(\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^*) = 0 \tag{16-45}$$

dır. Öte yandan, biraz önce gördük ki

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_1 = \frac{-(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{g}^*) + (\vec{v}_1 \cdot \vec{y}_1)(\vec{v}_2 \cdot \vec{a}^*)}{\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^*}$$

dır ve (16-44) nedeniyle

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_1 = -\frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{g}^*)}{\vec{v}_1 \cdot \vec{a}^*}$$

olur ve (16-45) dolayısiyle de

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{x}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{y}_2$$

bulunur. Görülüyor ki P_1 noktası da π_2 üzerindedir.

3. P_1 ve P_2 noktaları sonsuzdadır. Uyarı 16-8; 1 nedeniyle, her iki kutup düzlemi bir köşegene, yâni $\vec{a}^*$ e paraleldir. Böyle olunca da, bunların

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

arakesitleri $\vec{a}^*$ vektörüne paraleldir. Bu da, arakesitin, lineer komplekse ait bir doğru olmasını gerektirir. Oysa, Sonuçlar 16-1 nedeniyle, lineer kompleksin hiçbir doğrusu $\vec{a}^*$ vektörüne paralel olamaz. Dolayısiyle kutup noktalarının her ikisi de sonsuzda ise, kutup düzlemlerinin arakesiti $\vec{a}^*$ e paraleldir ve bunların kutupları birbiri üzerinde olamaz.

Uyarı 16-9.

Aynı sonuçlara, (16-35) formülü yardımiyle de varılabilir. Gerçekten, önce 1-nciyi ele alalım. P_2 kutbu π_2 düzlemi üzerinde ise, π_1 in $\vec{v}_1$ dikme vektörü, $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörüne diktir. Oysa, (16-35) gereğince

$$\vec{v}_1 = \vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}_1$$

olduğundan,

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v}_1 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\,(\vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}_1) = 0$$

veya

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\,\vec{g}^* + (\vec{a}^*, \vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

bulunur.

π_2 nin de P_1 den geçmesi için

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v}_2 = 0$$

olması yâni gene (16-35) nedeniyle

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v}_2 = (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot (\vec{g}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{x}_2) = 0$$

veya

$$(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot \vec{g}^* + (\vec{a}^*, \vec{x}_1, \vec{x}_2) = 0$$

bulunması gereklidir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2-nci ye gelince, P_2 noktası bir $\vec{b}$ vektörü doğrultusunda sonsuzda olsun. Eğer π_3 düzlemi P_1 den geçiyorsa, π_3 düzleminin

$$\vec{v_3} = \vec{g^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{y_3}, \quad (y_3 : \pi_3 \text{ in herhangi bir noktası})$$

dikme vektörü, $\vec{b}$ vektörüne diktir, yâni

$$\vec{b} \cdot (\vec{g^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{y_3}) = 0 \tag{16-46}$$

dır.

π_3 nin de herhangi bir noktası $\vec{y_2}$ ile belirli ise, lineer kompleksin bu noktadan geçen ve π_2 üzerinde bulunan doğrusu $\vec{b}$ ye paralel olacağından, π_2 nin

$$\vec{v_2} = \vec{g^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{y_2}$$

dikme vektörü de $\vec{b}$ ye diktir, yâni

$$\vec{b} \cdot (\vec{g^*} + \vec{a^*} \wedge \vec{y_2}) = 0 \tag{16-47}$$

dır. (16-46) ve (16-47) den de

$$(\vec{b} \wedge \vec{a^*}) \quad (\vec{y_2} - \vec{y_1}) = 0$$

elde edilir. $\vec{b} \wedge \vec{a^*}$ vektörü, π_2 nin dikme vektörü olduğundan, P_1 noktasının da π_2 üzerinde olduğu görülür.

d. Lineer doğru kompleksine göre eşlenik doğrular

Teorem 16-1.

Bir $\triangle_1$ doğrusu, lineer kompleksin bir doğrusu değilse, bundan geçen düzlemlerin kutupları, başka bir $\triangle_2$ doğrusu üzerinde bulunurlar ve $\triangle_2$ de lineer kompleksin bir doğrusu değildir. $\triangle_2$ den geçen düzlemlerin kutupları da $\triangle_1$ üzerindedir. $\triangle_1 = \triangle_2$ olması için gerekli ve yeterli koşul, bu doğruların lineer kompleksin doğruları olmalarıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ



Şekil 91

Δ_1 doğrusunu bir N_1, $(\overrightarrow{ON_1} = \vec{x}_1)$ noktası ve bir $\vec{a}_1$ doğrultu vektörü ile tanımlayalım. Buna göre, Δ_1 doğrusunun PLÜCKER vektörleri

$$\vec{a}_1 \,,\ \vec{g}_1 = \vec{x}_1 \wedge \vec{a}_1 \,,\quad (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_1 = 0) \tag{16-48}$$

olur.

1. Önce Δ_1 doğrusu, lineer doğru kompleksinin bir köşegenine paralel olmasın, başka deyimle

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}^* \neq \vec{0} \tag{16-49}$$

eşitsizliği bulunsun. Buna göre, Δ_1 den geçen bir π_1 düzlemini, başlangıçtan $\vec{a}^*$ e paralel olarak geçirilen doğrunun, bunu deldiği N, $(\overrightarrow{ON_1} = \vec{x})$ noktası ile tanımlayabiliriz, yeter ki N noktası Δ_1 üzerinde bulunmasın, yâni

$$(\vec{a}^* ,\ \vec{a}_1 ,\ \vec{x}_1) \neq 0$$

veya (16-48) nedeniyle

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* \neq 0 \tag{16-50}$$

olsun. Böyle olunca, π_1 düzleminin $\vec{v}_1$ dikme vektörü, (16-48) nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{v}_i = \overrightarrow{N_iN} \wedge \vec{a}_i = (\mu \vec{a}^* - \vec{x}_i) \wedge \vec{a}_i$$

$$= \mu \vec{a}^* \wedge \vec{a}_i - \vec{g}_i$$

olur. Dolayısıyle, π_i düzleminin P_i kutbunun yer vektörü, (16-42) nedeniyle

$$\overrightarrow{OP}_i = \frac{(\mu \vec{a}^* \wedge \vec{a}_i - \vec{g}_i) \wedge \vec{g}^* + [(\mu \vec{a}^* \wedge \vec{a}_i - \vec{g}_i) \cdot \mu \vec{a}^*] \cdot \vec{a}^*}{-\vec{g}_i \cdot \vec{a}^*}$$

veya

(16-51) $$\overrightarrow{OP}_i = \frac{\vec{g}_i \wedge \vec{g}^*}{\vec{g}_i \cdot \vec{a}^*} + \mu \frac{\vec{g}_i \cdot \vec{a}^* + a_i \cdot g^*) \vec{a}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*) \vec{a}_i}{\vec{g}_i \cdot \vec{a}^*}, \quad \vec{g}_i \cdot \vec{a}^* \neq 0$$

biçiminde bulunur.

Görülüyor ki π_i düzlemi Δ_2 etrafında döndürüldüğünde, yani μ katsayısı değiştirildiğinde, P_i **kutbunun geometrik yeri,**

$$\frac{\vec{g}_i \wedge \vec{g}^*}{\vec{g}_i \cdot \vec{a}^*}$$

vektörünün ucundan geçen ve doğrultu vektörü

$$(\vec{g}_i \cdot \vec{a}^* + \vec{a}_i \vec{g}^*) \vec{a}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*) \vec{a}_i$$

olan bir Δ_2 doğrusudur.

Buna göre, Δ_2 nin PLÜCKER vektörleri de $\vec{a}_2$, $\vec{g}_2$, $[\vec{a}_2 \cdot \vec{g}_2 = 0]$ ise, $\vec{a}_2$ olarak

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-52) $$\vec{a}_2 = (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^*)\,\vec{a}^* + (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}_1$$

vektörüne alırsak,

$$\vec{g}_2 = \frac{\vec{g}_1 \wedge \vec{g}^*}{\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^*} \wedge \vec{a}_2 = \frac{1}{\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^*}\,(\vec{g}_1 \wedge \vec{g}^*) \wedge$$

$$[(\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^*)\,\vec{a}^* + (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}_1]$$

veya

(16-53) $$\vec{g}_2 = (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^*)\,\vec{g}^* + (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}_1 \,, \quad (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* \neq 0)$$

olur.

Karşıt olarak, bir π_2 düzlemini, Δ_2 doğrusu etrafında döndürecek olursak, bunun P_2 kutbu da Δ_1 doğrusunu çizer. Gerçekten, P_2 nin çizdiği doğru, Δ_1 den ayrı bir Δ_1' doğru ise, bunun PLÜCKER vektörlerini $\vec{a}_1'$, $\vec{g}_1'$ ile gösterdiğimizde, (16-52) ve (16-53) nedeniyle

$$\vec{a}_1' = (\vec{g}_2 \cdot \vec{a}^*)\,\vec{a}^* + (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}_2$$

$$\vec{g}_1' = (\vec{g}_2 \cdot \vec{a}^*)\,\vec{g}^* + (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}_2$$

dir. $\vec{a}_2$ ve $\vec{g}_2$ yerine (16-52) ve (16-53) değerlerini kullandığımızda

$$\vec{a}_1' = (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}_1 \,, \quad \vec{g}_1' = (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}_1$$

bulunacağından

$$\Delta_1' = \Delta_1$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Δ_1 doğrusu, verilen lineer kompleksin bir doğrusu ise, (16-32) gereğince

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}^* = 0$$

olacağından, (16-52) ve (16-53) nedeniyle

$$\vec{a}_2 = -(\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}_1, \quad \vec{g}_2 = -(\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}_1$$

dir, başka deyişle

(16-54) $$\Delta_2 = \Delta_1$$

dir.

Karşıt olarak, (11-54) sağlanıyorsa

$$\vec{a}_2 \,//\, \vec{a}_1, \quad \vec{g}_2 \,//\, \vec{g}_1$$

olacağından,

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}^* = 0$$

dır, dolayısıyle Δ_1, verilen lineer kompleksin bir doğrusudur.

2. Diyelim ki $\vec{a}_1$ vektörü $\vec{a}^*$ vektörüne paralel olsun, başka deyişle

(16-55) $$\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* = 0$$

olsun.

Aynı hesaplar, Δ_2 için

(16-56)
$$\begin{cases} \vec{a}_2 = (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{a}_1, \\ \vec{g}_2 = (\vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,\vec{g}_1 \end{cases}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

verir, yani (16-52) ve (16-53) formülleri bu hâlde de doğrudur. Aslında, bu son denklemleri çıkarmak için, π_1 düzlemini ille $\mu \vec{a}^*$ vektörü ile tanımlamak zorunlu değildir, bu yüzden söz konusu denklemler $\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* = 0$ için de doğrudur.

3. Nihayet

$$\vec{a}_1 = \vec{a}^* \tag{16-57}$$

olsun. Buna göre de, Δ_1 bir köşegen olacağından, bunun üzerinde değişen noktaların kutup düzlemleri, birbirlerine paraleldir, dolayısıyle Δ_2 doğrusu sonsuzdadır. Zâten, (16-57) nedeniyle, (16-52) denklemi

$$\vec{a}_2 = \vec{o}$$

verir.

Bütün bu söylediklerimizden anlaşılır ki, hangi hâl söz konusu olursa olsun, $\Delta_1 (\vec{a}_1, \vec{g}_1)$ doğrusunun eşleniği olan Δ_2 doğrusunun PLÜCKER vektörleri için (16-52) ve (16-53) formülleri geçerlidir.

Eşlenik doğrularla ilgili özelikler 16-1.

1. İki eşlenik doğrunun ortak dikmesi

Δ_1, Δ_2 eşlenik doğrularının ortak dikmeleri

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\, \vec{a}_1 \wedge \vec{a}^*$$

vektörüne paralel, yani **tüm köşegenlere diktir.** Başka deyişle: **İki eşlenik doğruya paralel düzlem, köşegenlere de paraleldir,** yani

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}^*) = 0$$

dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

2. Δ_1 doğrusu, lineer doğru kompleksinin bir doğrusu değilse, Δ_2 eşleniğini hiçbir vakit kesemez.

İki doğrunun kesişme koşulu olan (16-8) bağıntısını uyguladığımızda, (16-52) ve (16-53) nedeniyle

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{g}_2 + \vec{g}_1 \cdot \vec{a}_2 = (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)^2 \neq 0$$

olur.

3. Lineer doğru kompleksinin bir D doğrusu, kompleksin doğruları arasında bulunmayan bir Δ_1 doğrusunu keserse, bunun Δ_2 eşleniğini de keser.

Geometrik olarak açık olan bu özeliği, hesap yolu ile doğrulayalım. Gerçekten, lineer doğru kompleksinin bir $D(\vec{a}, \vec{g})$ doğrusu lineer kompleksle ilgisi bulunmayan bir $\Delta_1(\vec{a}_1, \vec{g}_1)$ doğrusunu keserse,

$$\vec{a} \cdot \vec{g}^* + \vec{g} \cdot \vec{a}^* = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{g}_1 + \vec{g} \cdot \vec{a}_1 = 0$$

dır. Öte yandan, (16-52) ve (16-53) yardımiyle

$$\vec{a} \cdot \vec{g}_2 + \vec{g} \cdot \vec{a}_2 = \vec{a} \cdot [(\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\vec{g}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\vec{g}_1]$$

$$+ \vec{g}[(\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* + \vec{a}_1 \cdot \vec{g}^*)\vec{a}^* - (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\vec{a}_1] = 0$$

dır, yani D doğrusu Δ_2 yi keser.

4. Δ_1, Δ_2 eşlenik doğrularını kesen her D doğrusu, lineer kompleksin bir doğrusudur.

Bu özelik de geometrik olarak besbellidir. $D(\vec{a}, \vec{g})$ doğrusu, $\Delta_1(\vec{a}_1, \vec{g}_1)$ ve $\Delta_2(\vec{a}_2, \vec{g}_2)$ eşlenik doğrularını kesiyorsa,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{a} \cdot \vec{g_1} + \vec{g} \cdot \vec{a_1} = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{g_2} + \vec{g} \cdot \vec{a_2} = 0$$

dır. Öte yandan, bir önceki hesaptan

$$\vec{a} \cdot \vec{g_2} + \vec{g} \cdot \vec{a_2} = (\vec{g_1} \cdot \vec{a^*} + \vec{a_1} \cdot \vec{g^*})(\vec{a} \cdot \vec{g^*} + \vec{g} \cdot \vec{a^*}) = 0$$

elde edilir. Δ_1 doğrusu, kompleksin bir doğrusu olmadığına göre,

$$\vec{a} \cdot \vec{g^*} + \vec{g} \cdot \vec{a^*} = 0$$

yâni D doğrusu, lineer kompleksin bir doğrusudur.

5. **Herhangi iki Δ_1, Δ_2 doğrusunu kesen her doğru, lineer kompleksin bir doğrusu ise, Δ_1 ve Δ_2 doğruları lineer komplekse göre eşlenik iki doğrudur.**

Δ_1 doğrusunun bir P noktasından geçen ve Δ_2 doğrusunu kesen doğrular, kompleksin doğruları olduklarından, (P, Δ_2) düzlemi, P noktasının kutup düzlemidir. Buna göre, Δ_1 üzerinde değişen P noktalarının kutup düzlemleri, Δ_2 den geçeceklerinden, Δ_1 ve Δ_2 doğruları, lineer komplekse göre eşlenik iki doğrudur.

6. **(Δ_1, Δ_2) ve (Δ_1', Δ_2') doğru çiftleri, lineer komplekse göre eşlenik doğru çiftleri ise; Δ_1' doğrusu Δ_1 doğrusunu keserse, Δ_2' doğrusu da Δ_2 yi keser.**

Gerçekten, Δ_1' in Δ_1 i kestiği nokta P olsun. P nin kutup düzlemi, hem Δ_2 den hem de Δ_2' den geçeceğinden, bu iki doğru kesişir.

6. **(Δ_1, Δ_2) ve (Δ_1', Δ_2') doğru çiftleri, lineer komplekse göre ayrı iki doğru çifti ise; Δ_1' doğrusu ne Δ_1 i ne de Δ_2 yi kesmiyorsa, bu dört doğru ikinci dereceden bir yüzeyin aynı anadoğru sisteminin doğrularıdır.**

Gerçekten, ikişer ikişer kesişmeyen Δ_1, Δ_2, Δ_1' doğrularıyle tanımlanan kuvadriğin, bu üç doğruyu kesen herhangi bir anadoğrusu, 4. nedeniyle lineer kompleksin bir doğrusudur ve 3. Δ_2' doğrusunu da keser. Buna göre, verilen dört doğru, sözü edilen kuvadriğin aynı anadoğru sisteminin doğrularıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

e. Lineer doğru kompleksinin ekseni

Bir nokta bir köşegen üzerinde yer değiştirdiğinde, bunun birbirine paralel kalan kutup düzlemlerine, lineer doğru kompleksinin **çap düzlemleri** denilir.

Kendi çap düzlemlerine dik olan köşegen bir tanedir ve lineer doğru kompleksinin ekseni adını alır.

Bir Δ_1 köşegeninin PLÜCKER vektörleri $\vec{a}^*$, $\vec{g}$ olsun. Bunun sonsuzda bulunan Δ_2 eşleniğinin PLÜCKER vektörleri, (16-52) ve (16-53) nedeniyle

$$\vec{a}_2 = \vec{0} \quad \vec{g}_2 = (\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*)\,(\vec{g}^* - \vec{g}_1) \tag{16-58}$$

dir, Δ_2 doğrusu, $\vec{g}_2$ vektörüne dik düzlemlerin sonsuzda ortak olan doğrularıdır.

Δ_1 i o biçimde belirleyelim ki bunun çap düzlemi Δ_1 e, yâni $\vec{a}^*$ vektörüne dik olsun. Buna göre

$$\vec{g}^* - \vec{g}_1 = k\,\vec{a}^*\,,\ (\vec{g}_1 \cdot \vec{a}^* = 0)$$

olacağından, her iki yanı skaler olarak $\vec{a}^*$ vektörü ile çarptığımızda

$$k = \frac{\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*}{\vec{a}^{*2}}$$

bulunur ve lineer doğru kompleksinin PLÜCKER vektörleri olarak

$$\vec{a}_1 = \vec{a}^*\,,\quad \vec{g}_1 = \vec{g}^* - \frac{\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*}{\vec{a}^{*2}}\,\vec{a}^* = \frac{\vec{a}^* \wedge (\vec{g}^* \wedge \vec{a}^*)}{\vec{a}^{*2}} \tag{16-59}$$

elde edilir. Bu ekseni E ile göstereceğiz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Başka yol

Eksenin eşleniği olan doğrunun PLÜCKER vektörleri olarak

$$\vec{o}\,,\ \frac{\vec{a}^*}{\vec{a}^{*2}}$$

vektörleri alınırsa, (16-52) ve (16-53) formüllerinden derhal (16-59) formüleri çıkarılır.

f. Bir lineer doğru kompleksinin doğrularının metrik özeliği

Lineer doğru kompleksinin herhangi bir doğrusu $D(\vec{a}\,,\vec{g})$, **E eksenin PLÜCKER vektörleri de, (16-59) nedeniyle**

$$(\vec{a}^*\,,\vec{g}^* - \frac{\vec{a}^*\cdot\vec{g}^*}{\vec{a}^{*2}}\,\vec{a}^*)$$

dir. D doğrusu ile E ekseninin ortak dikme uzunluğunu δ **ve bunların arasındaki dar açıyı da** θ **ile gösterirsek, ispat edeceğiz ki**

$$\delta\ \mathrm{tg}\ \theta = h = \text{sabit}$$

dir.

$D(\vec{a}\,,\vec{g})$, verilen lineer kompleksin bir doğrusu olduğundan, (16-32) nedeniyle

$$\vec{a}\cdot\vec{g}^* + \vec{g}\cdot\vec{a}^* = 0$$

dır. Öte yandan

$$\mathrm{tg}\ \theta = \left|\frac{\vec{a}\wedge\vec{a}^*}{\vec{a}\cdot\vec{a}^*}\right|$$

olduundan, (16-26) dolayısiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\delta \operatorname{tg} \theta = \frac{\left| \vec{g} \cdot \vec{a}^* + \vec{a} \cdot \left(\vec{g}^* - \frac{\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*}{\vec{a}^{*2}} \cdot \vec{a}^* \right) \right|}{|\vec{a} \wedge \vec{a}^*|} \left| \frac{\vec{a} \wedge \vec{a}^*}{\vec{a} \cdot \vec{a}^*} \right|$$

veya

$$\delta \operatorname{tg} \theta = \left| \frac{\vec{a}^* \cdot \vec{g}^*}{\vec{a}^{*2}} \right| = \text{Sabit} = h \tag{16-60}$$

olur.

g. Lineer doru kompleksine göre eşlenik herhangi iki doğrunun ortak dikmesi, kompleksin eksenini dik olarak keser.

Her şeyden önce, lineer doğru kompleksine göre eşlenik iki doğrunun ortak dikmesi, 4. özelik nedeniyle, kompleksin bir doğrusudur. Bunun E eksenine dik olacağını da, 1. inci özelik dolayısiyle biliyoruz. (16-60) bağıntısında $\theta \to \frac{\pi}{2}$ olunca, $\delta \to 0$ dır ve söz konusu ortak dikme, lineer kompleksin E eksenini dik olarak keser. Bu sonuca, istenirse, hesap yolu ile de varılabilir.

h. Bir lineer doğru kompleksinin, izdüşel olarak bağımsız beş doğrusu ile belirlenmesi

Lineer doğru kompleksinin, izdüşel olarak bağımsız 5 doğrusu verildiğinde, bunlardan dördünü gelişigüzel alalım. Genellikle bu dört doğrunun dördünü de kesen iki doğru vardır. Bu iki doğru, lineer doğru kompleksine göre, bir çift eşlenik doğru oluştururlar. Gerçekten, bunlardan birinin eşleniği olan doğru, 3. özelik nedeniyle, aynı dört doğruyu keseceğinden, ötekiyle çakışır. Buna göre, verilen 5 doğru arasından, dörder doğrudan oluşan iki ayrı grup alınırsa, böylece lineer doğru kompleksine göre eşlenik iki doğru çifti elde edilir. Bu iki çiftin ortak dikmelerinin ortak dikmesi, lineer doğru kompleksinin E eksenidir.

B. Özel lineer doğru kompleksleri

$$\vec{g}^* \cdot \vec{a} + \vec{a}^* \cdot \vec{g} = 0 \tag{16-32}$$

denklemiyle verilen lineer doğru kompleksinde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(16-61) $$\vec{a}^* \cdot \vec{g}^* = 0$$

olsun. Buna göre $(\vec{a}^*, \vec{g}^*)$ vektörleri, sonlu uzaklıkta veya sonsuzda bulunan bir D^* doğrusunun PLÜCKER vektörleridir ve (16-32) koşulu nedeniyle, verilen lineer doğru kompleksi, **D^* doğrusunu kesen doğrulardan oluşur.**

a. D^* doğrusunun PLÜCKER vektörleri

(16-62) $$\vec{a}^* \neq \vec{0}, \quad \vec{g}^* \neq \vec{0} \quad \text{veya} \quad \vec{a}^* \neq \vec{0}, \quad \vec{g}^* = \vec{0}$$

koşullarını sağlasın. Böyle olunca, ya sonlu uzaklıkta herhangi bir doğru, ya da O başlangıcından geçen bir doğrudur. **Her iki hâlde de, D^* doğrusu sonlu uzaklıktadır.**

Uzayın, D^* üzerinde bulunmayan, her P noktasının π kutup düzlemi D^* doğrusundan geçer ve D^* doğrusunu kesen her π düzleminin kutbu da π ile D^* in ortak noktasıdır.

P noktası D^* üzerinde ise, bu nokta, D^* doğrusundan ya da sadece P den geçen **her** düzlemin kutbudur. Bunun gibi, D^* den geçen her düzlemin kutbu, bu düzlemin herhangi bir noktası olabilir. Bu bakımdan, uzayın D^* üzerindeki bir noktasından geçen tüm doğruları, lineer doğru kompleksinin doğruları olduğundan, **D^* doğrusunun tüm noktaları tekil noktalardır.** Aynı biçimde, D^* doğrusundan geçen herhangi bir düzlem üzerindeki her doğru, alınan özel lineer doğru kompleksinin bir doğrusu olduğundan, **D^* doğrusundan geçen düzlemler de tekildir.**

Eşlenik doğrular.

Herhangi bir Δ_1 doğrusundan geçen düzlemlerin kutupları, D^* üzerinde bulunacağından, uzayın tüm Δ_1 doğrularının eşlenikleri D^* doğrusudur. Buna karşılık, D^* in eşleniği olan doğru belirsizdir, yani uzayın herhangi bir doğrusu olabilir.

Eksen

D^* in eşleniği gibi alınabilen herhangi bir Δ_1 doğrusu ile D^* in ortak dikmesi D^* i dik kestiğinden ve D^* de $\vec{a}^*$ vektörüne paralel olduğundan, **D^* doğrusu, özel lineer doğru kompleksinin eksenidir.**

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu sonuca, (16-59) formülü ile de derhal varılabilir.

(16-60) bağıntısında δ ve h sıfırdır, θ belirsizdir.

b. $\vec{a}^* = \vec{0}$, $\vec{g}^* \neq \vec{0}$ ise, D^* doğrusu, $\vec{g}^*$ vektörüne dik düzlemlerin sonsuzda ortak olan doğrularıdır. Buna göre, **bu özel doğru kompleksinin doğruları da, aynı bir düzleme paralel doğrulardan oluşur.**

Uyarı 16-10.

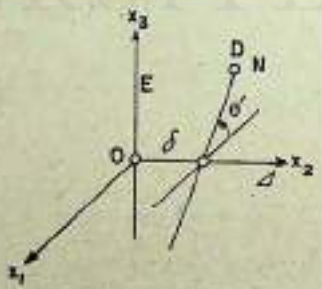
Bundan sonraki bölümlerde kullanmayacağımız için, doğru komplekslerinin diferansiyel geometresini ele almıyoruz.

16-8. Alıştırmalar

1. Özel olmayan bir lineer doğru kompleksinde E ekseni, kompleksin bir D doğrusu ile eksenin ortak dikmelerinin E üzerindeki A ayağı ve δ ortak dikme uzunluğu ile h verilmiştir. D doğrularının geometrik yerini bulunuz.

Verilenlere göre θ = sâbit olacağından, D lerin geometrik yeri bir dönel hiperboloiddir. Bunun en küçük çemberinin düzlemi A da E ye diktir ve yarıçapı da δ dır.

2. Özel olmayan bir lineer doğru kompleksinde, E ekseni, h ve E ye dik bir Δ doğrusu verilmiştir. Δ doğrusu E yi kesmektedir. Doğru kompleksinin Δ yı kesen doğrularının geometrik yerini bulunuz.



Şekil 92

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

E eksenini 3-üncü eksen, $\triangle$ doğrusunu da 2-nci eksen olarak alalım. Buna göre, bir D doğrusunun herhangi bir N noktasının koordinatları

$$x_1 = -\lambda \operatorname{Sin} \theta, \quad x_2 = \delta, \quad x_3 = \lambda \operatorname{Cos} \theta$$

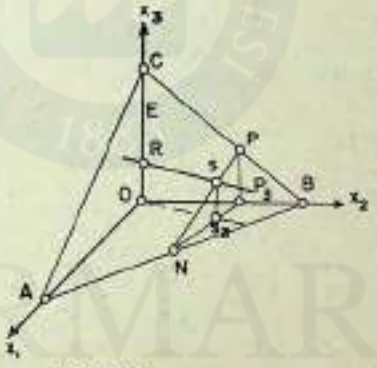
dır.

$\delta = h \operatorname{cotg} \theta$ değerini x_2 de kullanır ve θ, λ parametrelerini yokedersek

$$x_1 x_2 + h x_3 = 0$$

hiperbolik paraboloidini elde ederiz.

3. Özel olmayan bir lineer doğru kompleksi verildiğinde, kompleksin bir düzlem üzerinde bulunan doğrularıyla eksenin ortak dikmelerinin geometrik yerini bulunuz.



Şekil 93

Kompleksin E eksenini $O x_3$ ekseni olarak alalım, verilen düzlemin P kutbunu da $x_2 O x_3$ düzlemi üzerinde seçelim. P kutuplu düzlemin koordinat düzlemleriyle arakesitleri de ABC üçgeninin kenarları olsun. Lineer doğru kompleksinin ABC düzlemi üzerindeki doğruları P den geçer ve ABC nin kenarlarını keser. Bunlardan biri PN ise, aranılan geometrik yer PN ile $O x_3$ ün RS ortak dikmesinin geometrik yeridir. Bu da bir **PLÜCKER konoidi** ya da **silindroid**dir.

Karteziyen denklem

ABC üçgeninin tepelerinin koordinatları: (a, o, o), (o, b, o), (o, o, c); P_3 noktasının ki (0, β, o) olsun.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

CRS düzleminin denklemi

$$x_2 = m\,x_1$$

ise, buna dik olan PNP_1 düzleminin denklemi

$$x_2 - \beta = -\frac{1}{m}\,x_1$$

dir.

Bu iki düzlemin arakesiti, S_2S doğrusudur. S nin ilk iki koordinatı, S_2 ünkilerin aynıdır. S_2 ün koordinatlarına gelince, yukarıki iki denklem yardımiyle

$$x_1 = \beta\,\frac{m}{m^2+1}, \qquad x_2 = \beta\,\frac{m^2}{m^2+1}$$

olarak bulunur.

ABC düzleminin

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} - 1 = 0$$

denkleminde, S_2 ün yukarıda bulunan koordinatları kullanıldığında, S nin x_3 kotu elde edilir:

$$x_3 = c\left[1 - \frac{\beta m}{m^2+1}\,\frac{am+b}{ab}\right]$$

m yerine de $m = \frac{x_2}{x_1}$ değeri kullanıldığında, PLÜCKER konoidinin

$$x_3\,(x_1^2 + x_2^2) = c\left[\frac{b-\beta}{b}\,x_2^2 + \frac{1}{a}\,x_1\,(a\,x_1 - \beta\,x_2)\right]$$

karteziyen denklemi elde edilir.

4. (Özel olmayan) bir lineer doğru kompleksine ait olan, verilen P_1, P_2 noktalarından geçen ve birbirini dik kesen iki doğruyu bulunuz.

P_1, P_2 noktalarının π_1, π_2 kutup düzlemlerinin arakesiti A doğrusu olsun. P_1P_2 çaplı kürenin A doğrusu ile ortak: ayrı, çakışık noktalarını P_1 ve P_2 ye birleştiren doğrular, aranan doğru çiftleridir. Genellikle; iki, bir çözüm vardır, ya da sanal iki çözüm söz konusudur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM XI

DOĞRULTU FONKSİYONLARI

Bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan bir P noktasındaki teğet düzlemin herhangi bir δ doğrultusu verildiğinde, **P noktasında δ ile belirli olan fonksiyonlara: doğrultu fonksiyonları** denilir.

Bunların bazı örneklerini daha önce görmüştük: **normal eğrilik** ve **geodezik burulma** gibi. Buna karşılık, **geodezik eğrilik, bir doğrultu fonksiyonu değildir.**

Aşağıda, yüzey üzerinde çok tanınmış iki doğrultu fonksiyonunu ele alarak, bunların bazı özeliklerinden söz edeceğiz.

11-1. LAGUERRE doğrultu fonksiyonu

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, herhangi bir eğri C, bunun bir P noktasındaki normal ve geodezik eğrilikleriyle geodezik burulması da, sıra ile: ρ_n, ρ_g, τ_g, yay uzunluğu s ve herhangi skaler ya da vektörel bir f fonksiyonunun yaya göre türevi de

$$\frac{df}{ds} = f'$$

ile gösterildiğine göre,

$$L = \rho_n^{\circ} - 2\rho_g\tau_g \tag{11-1}$$

fonksiyonu, göreceğiz ki, **bir doğrultu fonksiyonudur.** Bu doğrultu fonksiyonu, Fransız Matematikçisi EDMOND LAGUERRE (1834-1886) in adını taşır.

Bunun bir doğrultu fonksiyonu olduğunu kolayca görmek için, S yüzeyini eğrilik çizgilerine nispet edelim. Buna göre, C eğrisinin P noktasındaki

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(34-9) EULER formülü, (47-16) OSSIAN BONNET formülü, (50-19; 1) LIOUVILLE formülü ile (27-5) MAINARDI-CODAZZI formülleri

(34-9) $$\rho_n = r\cos^2\varphi + \bar{r}\sin^2\varphi = \rho\cos\theta$$

(47-16) $$\tau_g = \frac{1}{2}(\bar{r} - r)\sin 2\varphi = \pi + \theta^\circ$$

(50-19; 1) $$\rho_g = \varphi^\circ + g\cos\varphi + \bar{g}\sin\varphi = \rho\sin\theta$$

(27-5) $$r_{12} = (r - \bar{r})\,g, \qquad \bar{r}_{12} = (r - \bar{r})\,\bar{g}$$

dir.

Bu formüllerdeki çeşitli sembollerin anlamlarını anımsayalım:

φ : P noktasının normal birim vektörü etrafındaki pozitif dönme yönünde hesab edilmek üzere, $v = st$ eğrilik çizgisi ile C arasındaki açı

θ : C nin yönlendirilmiş teğeti etrafındaki pozitif dönme yönünde hesab edilmek üzere, C nin asal normali ile yüzey normali arasındaki açı

$r, \bar{r}$: Asal eğrilikler

$g, \bar{g}$: Eğrilik çizgilerinin geodezik eğrilikleri

ρ, τ : C nin P noktasındaki eğrilik ve burulması

$\theta^\circ, \varphi^\circ$: θ ve φ nin, C nin s yayına göre türevleri

Bu formüller yardımiyle, (11-1) i

$$L = (r\cos^2\varphi + \bar{r}\sin^2\varphi)^\circ - 2(\bar{r} - r)(\varphi^\circ + g\cos\varphi + \bar{g}\sin\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$$

dir.

İnvariyant türevler ve MAINARDI-CODAZZI bağıntıları kullanıldığında,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-2) $$L = r_1 \cos^2\varphi + 3 r_2 \cos^2\varphi \sin\varphi + 3\bar{r}_1 \cos\varphi \sin^2\varphi + \bar{r}_2 \sin^2\varphi$$

olur.

(11-2) açıkça göstermektedir ki: **L —fonksiyonu, P noktasında, sadece φ doğrultusunun fonksiyonudur.**

(11-1) le tanımlanan L nin: ρ, θ, ρ^*, θ^* cinsinden ifadesi de kolaylıkla görülebileceği gibi

(11-3) $$L = \rho^* \cos\theta - \rho \sin\theta\,(3\delta^* + 2\tau)$$

dur.

11-2. Bir yüzeyin G— çizgileri

İlk kez Fransız Matematikcisi MAILLARD DE LA GOURNERIE (1814-1883) tarafından incelenen ve onun adı ile anılan veya kısaca G— çizgileri denilen eğrilerin bir ilk tanımı şöyledir:

G— çizgilerinin ilk tanımı

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan bir C eğrisinin bir P noktasındaki teğetinden ve yüzey normalinden geçen düzlemle yüzey kesildiğinde, elde edilen kesitin P noktasındaki eğrilik çemberinin kesitle üçten çok ortak noktası varsa, C çizgisi bir G— çizgisidir.

G— çizgilerinin karakteristik özeliği

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan bir C eğrisinin bir G— çizgisi olması için gerekli ve yeterli koşul, C boyunca

$$L = 0$$

olmasıdır.

S yüzeyinin P noktasından geçen ve C nin bu noktadaki teğetine teğet olan tüm eğriler için L nin değeri aynıdır. Özellikle, P noktasındaki teğetten geçen normal kesit için de bu böyledir.

Öte yandan, bu normal kesitin P noktasındaki eğrilik çemberinin bu noktadaki kesitle üçten çok ortak noktası bulunduğundan — L.P. EISEN-

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

HART, An Introduktion to Differantial Geometrie, PRINCETON UNİVERSITY PRESS, (1947), s. 24— nedeniyle, kesitin P deki eğriliğine $\bar{\rho}$, θ açısına da $\bar{\theta}$ dersek

$$\bar{\rho}^{\circ} = 0, \quad \bar{\theta}^{\circ} = 0$$

olacağından, C boyunca, (11-3) nedeniyle

$$L = 0$$

dır.

Karşıt olarak, S yüzeyinin C eğrisi boyunca, $L = 0$ olsun. C nin herhangi bir P noktasındaki teğetten geçen normal kesit için $\bar{\theta} = 0$ olacağından, (11-3) bağıntısı C nin her P noktasında

$$\bar{\rho}^{\circ} = 0$$

verir. Öyleyse, —L.P. EISENHART, An Introduction to Differantial Geometty, PRINCETON UNIVERSITY PRESS, (1947), s. 24— nedeniyle, normal kesitin P noktasındaki eğrilik çemberinin kesitle üçten çok ortak noktası vardır, dolayısiyle C bir G— çizgisidir.

G— çizgilerinin ikinci tanımı

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan bir C eğrisi boyunca LAGUERRE doğrultu fonksiyonu sıfıra eşitse, C eğrisine G— çizgisi denilir.

11-3. Herhangi bir dik eğri şebekesine nispet edilen bir yüzeyde LAGUERRE doğrultu fonksiyonu

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, v=sâbit, ve u=sâbit koordinat çizgileri birbirlerini dik kessin. Bu bölgede bulunan bir C eğrisinin bir P noktasından geçen koordinat çizgilerinin P noktasındaki normal ve geodezik eğrikleriyle geodezik burulmaları sırasiyle: r^*, $\bar{r}^*$, g^*, $\bar{g}^*$, t^*, $\bar{t}^*$ ise, (34-9), (47-16), (50-19; 1) ve (47-5) formülleri (50-19) ve (49-25; 2,3) nedeniyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-4)
$$\begin{cases} \rho_n = r^* \cos^2\varphi + \bar{r}^* \sin^2\varphi + \tau^* \sin 2\varphi \\ \tau_g = (\bar{r}^* - r^*) \sin\varphi \cos\varphi + \tau^* \cos 2\varphi \\ \rho_r = \varphi^\circ + g^* \cos\varphi + \bar{g}^* \sin\varphi \\ r_2^* = (r^* - \bar{r}^*)\, g^* + 2\tau^* \bar{g}^* + r_1^* \\ r_1^* = (r^* - \bar{r}^*)\, \bar{g}^* - 2\tau^* g^* + r_2^* \\ \tau^* + \bar{\tau}^* = 0 \end{cases}$$

biçimindadir.

Bu formülerdeki φ açısı, gene, C nin P noktasındaki teğetiyle v=st koordinat çizgisi arasındaki açıdır.

(11-1) formülünü ve invariyant türevleri kullandığımızda

$$L = (r^* \cos^2\varphi + \bar{r}^* \sin^2\varphi + \tau^* \operatorname{Sin} 2\varphi)' - 2(\varphi^\circ + g^* \cos\varphi + \bar{g}^* \sin\varphi)$$
$$[(\bar{r}^* - r^*) \sin\varphi \cos\varphi + \tau^* \cos 2\varphi]$$

veya MAINARDI-CODAZZI denklemleri yardımiyle

(11-5) $$L = (r_1^* - 2g^*\tau^*) \cos^3\varphi + 3(r_2^* - 2\bar{g}^*\tau^*) \cos^2\varphi \sin\varphi +$$
$$3(\bar{r}_1^* + 2g^*\tau^*) \cos\varphi \sin^2\varphi + (\bar{r}_2^* + 2\bar{g}^*\tau^*) \sin^3\varphi$$

olur.

Uyarı 11-1.

(11-5) denklemi gösterir ki, G— çizgilerinin yâni

$$L = 0$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklemiyle tanımlanan eğrilerin diferansiyel denklemi, genellikle, birinci mertebeden ve üçüncü derecedendir, meğer ki yüzey üzerinde

$$L = 0$$

olsun.

Buna göre, sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, genellikle, birbirinden ayrı üç G— çizgisi ailesi vardır. Eğer $L =$ ise, yüzeyi eğrilik çizgilerine nispet ettiğimizde, yüzeyin (11-2) diferansiyel denklemi

$$r_1 = 0, \quad \bar{r}_1 = 0, \quad r_2 = 0 \quad \bar{r}_2 = 0$$

yani

$$r = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad \bar{r} = \text{sabit}$$

verir. O hâlde: bir küre, bir dönel silindir ya da bir düzlem söz konusudur.

Karşıt olarak, bu son üç yüzeyden herhangi birisi alındığında, G— çizgilerinin ilk tanımına göre, yüzeyin tüm çizgileri, G— çizgileridir.

11-4. Bir yüzeyin 3 G— çizgisi ailesinden herhangi ikisinin bir dik eğri şebekesi oluşturmaları hâlinde, (11-4; 5,6) MAINARDI-CODAZZI formüllerinin özel biçimleri

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, dik eğri şebekesi oluşturan 2 G— çizgi ailesini koordinat çizgileri olarak alırsak, (11-5) nedeniyle, yüzey üzerinde

$$r_1^* - 2g^* \tau^* = 0 \quad \bar{r}_2^* + 2\bar{g}^* \tau^* = 0$$

dır.

Buna göre, (11-4; 4,5) formülleri

$$2\tau^* W_1 = (r^* - \bar{r}^*)\, \bar{r}_1^* + r_1^{*2}$$

$$2\tau^* W_1 = -(r^* - \bar{r}^*)\, \bar{r}_2^* + r_2^{*2}$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$K = r^* \bar{r}^* - \tau^{*2}$$

olduğundan,

$$(11\text{-}6) \qquad \begin{cases} 2\tau^* W_2 = r^* W_1 - K_1 \\ 2\tau^* W_1 = \bar{r}^* W_2 - K_2 \end{cases}$$

bulunur.

Teorem 11-1.

Ortalama eğriliği sabit ve sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, üç G– çizgi ailesinden herhangi ikisi bir dik eğri şebekesi oluşturamazlar, meğer ki yüzey bir küre, bir dönel silindir, ya da bir düzlem olsun.

Gerçekten, ortalama eğriliği sabit olan bir yüzeyin, birbirini dik kesen iki G– çizgisi ailesi varsa, (11-6) formülleri nedeniyle, aynı zamanda

$$K_1 = 0 \quad K_2 = 0$$

veya

$$K = \text{Sabit}$$

olacağından, yüzey: bir küre, bir dönel silindir ya da bir düzlemdir.

11-5. Koordinat çizgilerinin dik ve v=sâbitlerin G– çizgisi olduğu bir yüzeyde (11-5) formülü

Bu halde, (11-5) de sâdece

$$r_1^* - 2g^* \tau^* = 0$$

dir ve G– çizgilerinin, (11-5) i sıfıra eşit kılarak bulunacak diferansiyel denklemi, kolaylıkla görülebileceği gibi

$$(11\text{-}7) \qquad L = [(4\sin^2\varphi - 3)(\bar{r}_2^* + 2\bar{g}^* \tau^*) + 3(W_1 \sin\varphi + W_2 \cos\varphi)\cos\varphi]\sin\nu = 0$$

biçimindedir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 11-2.

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, G— çizgilerinin aralarında 120° lik açılar oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşul, S yüzeyinin —bir küreden, bir dönel silindirden, bir düzlemden farklı— sâbit ortalama eğrilikli bir yüzey olmasıdır.

Gerçekten, ortalama eğriliği sâbit olan bir yüzeyin G— çizgilerini bulmak için (11-7) bağıntısı kullanıldığında,

$$W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \quad \bar{r}_2^* + 2\bar{g}^* \tau^* \neq 0$$

olacağından, G— çizgilerinin doğrultuları için,

$$(4 \sin^2 \varphi - 3) \sin \varphi = 0$$

yâni

$$\varphi_1 = 0, \quad \sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

Karşıt olarak, bir S yüzeyinde G— çizgileri aralarında 120° lik açılar oluşturuyorlarsa, bunlardan birisi v=st olarak alındığında (11-7) uygulanabilir ve

$$\sqrt{3}\, W_1 \pm W_2 = 0$$

veya

$$W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \quad W = \text{sabit}$$

olur.

11-6. Özel G— çizgileri

a. Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan her doğru bir G— çizgisidir.

Gerçekten, bir doğru boyunca

$$\rho = 0, \quad \rho'' = 0$$

olacağından, (11-3) bağıntısının sıfıra eşitliği sağlanmış olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b. Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan bir çember boyunca yüzey ile çember düzlemi sâbit açı altında kesişirse, bu çember bir G— çizgisidir.

Böyle bir çember boyunca

$$\rho = \text{sabit}, \quad \tau = 0, \quad \vartheta^\circ = 0$$

olacağından, (11-3) bağıntısı, yâni

$$L = \rho^\circ \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta \, (3\,\vartheta^\circ + 2\,\tau) = 0$$

olur.

c. Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir β bölgesinde bulunan bir MONGE eğrisi, bir geodezikse, bu eğri bir G— çizgisidir.

Böyle bir MONGE eğrisi boyunca da

$$\rho = \text{Sabit}, \quad \vartheta = 0$$

olacağından, gene

$$L = 0$$

olur.

d. Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde bulunan bir C eğrisi eğrilik çizgisi ise, ve bunun boyunca normal eğrilik —asal eğrilik— sâbitse, bu eğri bir G— çizgisidir.

Bu sonuç ta (11-1) den derhal çıkarılır.

Bâzı sonuçlar

a ya göre, bir kuvadrikte iki ayrı sistemin anadoğruları G— çizgileridir. Üçüncü G— çizgisi boyunca da GAUSS eğriliğinin sâbit olduğunu göreceğiz.

Bir yüzeyin eğrilik çizgileri b koşuluna uygun çemberlerden oluşuyorsa, yüzey üzerinde

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = 0$$

olacağından, ileride de göreceğimiz gibi, yüzey bir DUPIN siklidîdir ve bunun karşıtı da doğrudur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Herhangi bir yüzey üzerindeki C ye uygun G— çizgilerinden ikisinin oluşturduğu aileler arasındaki açı da sâbit olamaz, meğer ki yüzey açılabilir olsun. Gerçekten, geodeziklerden meydana gelecek olan bu iki aile, (49-8) ya da (49-25; 1) nedeniyle, $K = 0$ olmasını gerektirir.

11-7. (11-5) formülünün genelleştirilmesi

(11-5) formülünün, genel hâlde, yâni yüzeyin dik olmayan bir koordinat sistemine nispet edilmesi hâlinde, nasıl yazılacağını göreceğiz.

Kullanılacak formüller

(48-10), (48-11) ve (48-20) formülleri

$$\vec{x}_{11} = \frac{g^*}{\operatorname{Sin}\alpha}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1\cos\alpha) + r^*\vec{n}$$

$$\vec{x}_{12} = \frac{g^{**}-\alpha_2}{\operatorname{Sin}\alpha}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1\cos\alpha) + (r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha)\vec{n}$$

$$\vec{x}_{21} = \frac{g^* + x_1}{\sin\alpha}(\vec{x}_2\cos\alpha - \vec{x}_1) + (r^*\cos\alpha + \tau^*\sin\alpha)\vec{n}$$

$$\vec{x}_{22} = \frac{g^{**}}{\sin\alpha}(\vec{x}_2\cos\alpha - \vec{x}_1) + r^{**}\vec{n}$$

(11-8)

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sin\alpha}[(\tau^*\cos\alpha - r^*\sin\alpha)\vec{x}_1 - \tau^*\vec{x}_2]$$

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{\sin\alpha}[(\tau^{**}\vec{x}_1 - (r^{**}\sin\alpha + \tau^{**}\cos\alpha)\vec{x}_2],$$

$$r^*\cos\alpha + \tau^*\sin\alpha = r^{**}\cos\alpha - \tau^{**}\sin\alpha$$

dir.

Bu formüllerdeki çeşitli sembollerin anlamlarını anımsatalım:

$\vec{x}$: Yüzeyin bir P noktasının yer vektörü.

α : Koordinat çizgileri arasındaki açı.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

r^*, r^{**} : Koordinat çizgilerinin normal eğrilikleri.

τ^*, τ^{**} : Koordinat çizgilerinin geodezik burulmaları.

g^*, g^{**} : Koordinat çizgilerinin geodezik eğrilikleri.

1 ve 2 indisleri : Koordinat çizgileri doğrultusunda invaryant türevler.

(11-8) denklemlerinden ilk dördü yardımiyle son iki si için, sıra ile

$$\vec{n}_{21} = -[\tau_1^* - g^* \tau^* - (\tau_1^* + r^* g^*) \operatorname{cotg} \alpha] \vec{x}_1 -$$

$$\frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha} (\tau_1^* + r^* g^*) \vec{x}_2 - (r^{*2} + \tau^{*2}) \vec{n}$$

$$\vec{n}_{22} = \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha} [\tau_2^* + r^{**} g^{**}) \vec{x}_1 + [\tau^{**} - r^{*2} \operatorname{cotg} \alpha] (g^{**} - \alpha_2)$$

$$- (\tau_2^{**} \operatorname{cotg} \alpha + r_2^{*2})] \vec{x}_2 - (r^{*2} + \tau^{*2}) \vec{n}$$

$$\vec{n}_{12} = \left[\tau_2^* \operatorname{cotg} \alpha - \tau_2^{**} + (g^{**} - \alpha_2) (r^* \cos \alpha + \tau^* \operatorname{sin} \alpha) \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha} \right] \vec{x}_1 -$$

$$[\tau^* + r^* (g^{**} - \alpha_2) \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha}] \vec{x}_2 + [(r^* \tau^{**} - \tau^* r^{**}) \operatorname{Sin} \alpha$$

$$- (r r^* + \tau^* \tau^{**}) \cos \alpha] \vec{n},$$

$$\vec{n}_{21} = [\tau^{**} (g^* + \alpha_1) + \tau_1^{**}] \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha} \vec{x}_1 + [\tau^{**} - r^{**} \cos \alpha] (g^* + \alpha_1)$$

$$- (\tau_1^{**} \operatorname{cotg} \alpha + r_1^{**}] \vec{x}_2$$

$$+ [(r^* \tau^{**} - \tau^* r^{**}) \operatorname{Sin} \alpha - (r^* r^{**} + \tau^* \tau^{**}) \cos \alpha] \vec{n}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

P noktasındaki φ doğrultusu ile belirli olan normal eğrilikle geodezik burulma ρ_n ve τ_g; P den geçen S üzerinde bulunan ve P deki teğetinin doğrultusu φ olan bir eğrinin geodezik eğriliği de ρ_g ise, φ doğrultusu ile belirli olan LAGUERRE doğrultu fonksiyonu, φ doğrultusundaki invariyant türev I indisi ile gösterildiğinde

$$L(\varphi) = (\rho_n)_I - 2\rho_g \tau_g \tag{11-10}$$

dir.

Genelleştirilmiş formül

$$\begin{cases} \rho_n = \vec{n} \cdot \vec{x}_{II} = -\vec{n}_I \cdot \vec{x}_I , \\ \tau_g = (\vec{x}_I , \vec{n} , \vec{n}_I) , \\ \rho_g = (\vec{x}_I , \vec{x}_{II} , \vec{n}) \end{cases} \tag{11-11}$$

formüllerinden

$$\rho_g \tau_g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \vec{n} \cdot \vec{x}_{II} & 1 \\ -\rho_n & \vec{n}_I \cdot \vec{x}_{II} & 0 \end{vmatrix} = -\vec{n}_I \cdot \vec{x}_{II} , \tag{11-12}$$

elde edileceğinden, (11-10)

$$L(\varphi) = \vec{n}_I \cdot \vec{x}_{II} - \vec{n}_{II} \cdot \vec{x}_I \tag{11-13}$$

biçiminde yazılır.

Öte yandan, (50-4) nedeniyle, skaler ya da vektörel bir f fonksiyonu için

$$f_1 = \frac{f_1 \sin \bar{\varphi} + f_2 \sin \varphi}{\sin \alpha} , \quad \alpha = \varphi + \bar{\varphi}$$

olduğundan,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}_1 \sin\bar{\varphi} + \vec{n}_2 \sin\varphi}{\sin\alpha}$$

dır, dolayısiyle

$$\vec{n}_{02} = [(\vec{n}_{01}\sin\bar{\varphi} + \vec{n}_{02}\sin\varphi)\sin\bar{\varphi} + (\vec{n}_{12}\sin\bar{\varphi} + \vec{n}_{22}\sin\varphi)\sin\varphi]\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$+\left(\frac{\sin\bar{\varphi}}{\sin\alpha}\right)_1 \vec{n}_1 + \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)_1 \vec{n}_2$$

$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{x}_1\sin\bar{\varphi} + x_2\sin\varphi}{\sin\alpha}$$

$$\vec{x}_{21} = [(\vec{x}_{11}\sin\bar{\varphi} + \vec{x}_{21}\sin\varphi)\sin\bar{\varphi} +$$

$$+ (\vec{x}_{12}\sin\bar{\varphi} + \vec{x}_{22}\sin\varphi)\sin\varphi]\frac{1}{\sin^2\alpha} +$$

$$+\left(\frac{\sin\bar{\varphi}}{\sin\alpha}\right)_1 \vec{x}_1 + \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\right)_1 \vec{x}_2$$

eşitliklerini kullandığımızda, (11-10) bağıntısı

$$(11\text{-}13)' \quad \sin^3\alpha\, L(\varphi) = (\vec{n}_1\cdot\vec{x}_{12} - \vec{x}_1\cdot\vec{n}_{11})\sin^3\bar{\varphi} + (\vec{n}_1\cdot\vec{x}_{21}$$

$$+ \vec{n}_1\cdot\vec{x}_{12} + \vec{n}_2\cdot\vec{x}_{11} - \vec{x}_1\cdot\vec{n}_{21} - \vec{x}_1\cdot\vec{n}_{12} - \vec{x}_2\cdot\vec{n}_{11})\sin^3\varphi\sin\varphi$$

$$+ (\vec{n}_2\cdot\vec{x}_{21} + \vec{n}_2\cdot\vec{x}_{12} + \vec{n}_1\cdot\vec{x}_{22} - \vec{x}_1\cdot\vec{n}_{21} - \vec{x}_2\cdot\vec{n}_{12} - \vec{x}_1\cdot\vec{n}_{22})\sin\bar{\varphi}\sin^2\varphi$$

$$+ (\vec{n}_2\cdot\vec{x}_{22} - \vec{x}_2\cdot\vec{n}_{22})\sin^3\varphi$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(48-5) integre edilebilme koşulunu $\vec{x}$ fonksiyonuna uyguladığımızda

$$\vec{x}_{12} + q\,\vec{x}_2 = \vec{x}_{21} + q\,\vec{x}_2$$

çıkacağından, her iki yanı skaler olarak $\vec{n}_1$ vektörü ile çarpsak, (11-11; 1) nedeniyle

(11-14) $$\vec{n}_1 \cdot \vec{x}_{12} = \vec{n}_1 \cdot \vec{x}_{21} + q\,r^* + q\,\vec{n}_1 \cdot \vec{x}_2$$

olur. Aynı integre edilebilme koşulu bir kez de $\vec{n}$ fonksiyonuna uygulanıp her iki yan $\vec{x}_1$ vektörü ile skaler olarak çarpıldığında

(11-15) $$\vec{x}_1 \cdot \vec{n}_{12} = \vec{x}_1 \cdot \vec{n}_{21} + q\,r^* + q\,\vec{x}_1 \cdot \vec{n}_2$$

olur.

(11-8; 7) nedeniyle (11-8; 5,6) dan

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \cdot \vec{x}_2$$

olacağından, bunun 1 indisli invariyant türevi

(11-16) $$\vec{n}_1 \cdot \vec{x}_{21} - \vec{x}_1 \cdot \vec{n}_{21} = \vec{n}_2 \cdot \vec{x}_{11} - \vec{x}_2 \cdot \vec{n}_{11}$$

verir. Buna göre, (11-14) ve (11-15) den

(11-17) $$\vec{n}_1 \cdot \vec{x}_{12} - \vec{x}_1 \cdot \vec{n}_{12} = \vec{n}_1 \cdot \vec{x}_{21} - \vec{x}_1 \cdot \vec{n}_{21} = \vec{n}_2 \cdot \vec{x}_{11} - \vec{x}_2 \cdot \vec{n}_{11}$$

çıkar. Aynı biçimde

(11-18) $$\vec{n}_2 \cdot \vec{x}_{12} - \vec{x}_2 \cdot \vec{n}_{12} = \vec{n}_2 \cdot \vec{x}_{21} - \vec{x}_2 \cdot \vec{n}_{21} = \vec{n}_2 \cdot \vec{x}_{22} - \vec{x}_2 \cdot \vec{n}_{22}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Buna göre: (11-8), (11-9) formülleri kullanıldığında, kolaylıkla

$$
(11\text{-}19)\quad
\begin{cases}
\vec{n}_1 \cdot \vec{x}_{11} - \vec{x}_1 \cdot \vec{n}_{11} = r_1^* - 2\,g^*\,\tau^* \\
\vec{n}_1 \cdot \vec{x}_{12} - \vec{x}_1 \cdot \vec{n}_{12} = r_1^* - 2\,\tau^*\,(g^{**} - \alpha_2) \\
\qquad = \tau_1^*\,\sin\alpha + r_1^*\,\cos\alpha + (r^* - r^{**})\,g^*\,\dfrac{1}{\sin\alpha} \\
\qquad = r_1^{**}\cos\alpha - \tau_1^{**}\sin\alpha + (r^* - r^{**})\,(g^* + \alpha_1)\,\dfrac{1}{\sin\alpha} \\
\vec{n}_2 \cdot \vec{x}_{21} - \vec{x}_2 \cdot \vec{n}_{21} = r_2^{**} - 2\,\tau^{**}\,(g^* + \alpha_1) \\
\qquad = r_2^{**}\cos\alpha - \tau_2^{**}\sin\alpha + (r^* - r^{**})\,g^{**}\,\dfrac{1}{\sin\alpha} \\
\qquad = r_2^*\cos\alpha + \tau_2^*\sin\alpha + (r^* - r^{**})\,(g^{**} - \alpha_2)\,\dfrac{1}{\sin\alpha} \\
\vec{n}_2 \cdot \vec{x}_{22} - \vec{x}_2 \cdot \vec{n}_{22} = r_2^{**} - 2\,g^{**}\,\tau^{**}
\end{cases}
$$

elde edilir.

Buna göre, (11-13)' nihayet

$$
(11\text{-}20)\quad \sin^3\alpha\,L(\varphi) = (r_1^* - 2\,g^*\,\tau^*)\sin^2\bar{\varphi}
$$

$$
+ 3\,[r_2^* - 2\,\tau^*\,(g^{**} - \alpha_2)\sin^2\bar{\varphi}\sin\varphi
$$

$$
+ 3\,[r_1^{**} - 2\,\tau^{**}\,[g^* + \alpha_1)]\,\sin\bar{\varphi}\sin^2\varphi + (r_2^{**} - 2\,g^{**}\,\tau^{**})\sin^3\varphi
$$

biçimine girer.

Şurasını da kaydedelim ki $L(\varphi)$ nin ikinci ve üçüncü katsayıları için

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-19) formülleriyle elde edilen çeşitli değerler, MAINARDI-CODAZZI formülerinin değişik biçimlerini verir.

DARBOUX teoremi 11-3.

Bir kuvadriği ele alalım ve bunun koordinat çizgilerini anadoğruları oluşturusun. O halde bu doğrular boyunca

$$r^* = 0, \quad g^* = 0, \quad r^{**} = 0, \quad g^{**} = 0$$

dır.

Bu özel halde,

$$\tau^* = -\tau^{**} \quad \text{ve} \quad K = -\tau^{*2}$$

olduğundan, (11-19; 2,3) den, MAINARDI-CODAZZI bağıntıları olarak

$$2\tau^* \omega_2 = \tau_1^* \sin\alpha, \quad 2\tau^* \omega_1 = \tau_2 \sin\alpha$$

bulnur. Dolayısiyle, (11-20) bağıntısı

(11-21) $$L(\varphi) = \frac{3 \sin\varphi \sin\varphi}{\operatorname{Sin}\alpha}\, \tau_1^*$$

verir. Böyle olunca da, bir kuvadriğin G— çizgileri için şu teorem elde edilir:

DARBOUX teoremi

Bir kuvadriğin G— çizgileri, anadoğrularla üzerlerinde GAUSS eğriliğinin sâbit olduğu eğrilerden oluşur.

11-8. DARBOUX doğrultu fonksiyonu

Sınıfı $\geqslant 3$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, herhangi bir eğri C ve bunun bir noktası da P olduğuna göre, C nin P deki normal ve geodezik eğrilikleri ile geodezik burulması arasında kurulan

(11-22) $$D = \tau_g^* + (\rho_n - \bar{\rho}_n)\, \rho_g$$

fonksiyonu, göreceğiz ki, **bir doğrultu fonksiyonudur.** Bu bağıntıdaki $\bar{\rho}_n$, C nin P deki teğetine dik doğrultudaki normal eğriliktir, yâni

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(11-23) $$\bar{\rho}_n = w - \rho_n = r + \bar{r}$$

dir.

Bu doğrultu fonksiyonu da, DARBOUX nun adını taşır. S, eğrilik çizgileriyle tanımlandığında (34-9) formülü yardımiyle

$$\rho_n = r\cos^3\varphi + \bar{r}\sin^2\varphi\,,\quad \bar{\rho}_n = r\sin^2\varphi + \bar{r}\cos^2\varphi$$

bağıntılarından

(11-24) $$\bar{\rho}_n - \rho_n = (r - \bar{r})\cos 2\varphi$$

çıkacağından, (11-22) yi

$$D = [(\bar{r}-r)\sin\varphi\cos\varphi]' + (r - \bar{r})\cos 2\varphi\ (\varphi' + g\cos\varphi + \bar{g}\sin\varphi)$$

biçiminde yazabileceğimizden,

$$D = -(\bar{r}-r)\cos 2\varphi\,(g\cos\varphi + \bar{g}\sin\varphi)$$
$$+ [(\bar{r}_1-r_1)\cos\varphi + (\bar{r}_2-r_2)\sin\varphi]\sin\varphi\cos\varphi$$

veya (27-5) yardımiyle

(11-25) $$D = -r_1\cos^2\varphi\sin\varphi + r_2(1-3\sin^2\varphi)\cos\varphi$$
$$+ \bar{r}_1(3\cos^2\varphi - 1)\sin\varphi + \bar{r}_2\cos\varphi\sin^2\varphi$$

bulunur.

(11-25) açıkça göstermektedir ki, **D — fonksiyonu P noktasında sadece φ doğrultusunun fonksiyonudur.**

(11-25) başka biçimde de yazılabilir. Şöyle ki:

(11-26) $$D = r_2\cos^3\varphi + (2\bar{r}_2 - r_1)\cos^2\varphi\sin\varphi$$
$$+ (\bar{r}_2 - 2r_2)\cos\varphi\sin^2\varphi - \bar{r}_1\sin^3\varphi$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

11-9. Birbirine dik doğrultulardaki L ve D doğrultu fonksiyonları arasında bâzı bağıntılar

φ ve $\varphi + \frac{\pi}{2}$ doğrultuları ile belirli olan L ve D doğrultu fonksiyonlarının değerleri, (11-2) ve (11-25) e göre

$$L = L(\varphi) = r_1 \cos^3 \varphi + 3 r_2 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 3 \bar{r}_1 \cos \varphi \sin^2 \varphi + \bar{r}_2 \sin^3 \varphi$$

$$\bar{L} = L(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -r_1 \sin^3 \varphi + 3 r_2 \sin^2 \varphi \cos \varphi - 3 \bar{r}_1 \sin \varphi \cos^2 \varphi + \bar{r}_2 \cos^3 \varphi$$

$$D = D(\varphi) = -r_1 \cos^2 \varphi \sin \varphi + r_2 (1 - 3 \sin^2 \varphi) \cos \varphi + \bar{r}_1 (3 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi + \bar{r}_2 \cos \varphi \sin^2 \varphi$$

$$\bar{D} = D(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -r_1 \sin^2 \varphi \cos \varphi - r_2 (1 - 3 \cos^2 \varphi) \sin \varphi + \bar{r}_1 (3 \sin^2 \varphi - 1) \cos \varphi - \bar{r}_2 \sin \varphi \cos^2 \varphi$$

olduğundan, görüldüğü gibi

$$\bar{L} + D = -(r_1 + \bar{r}_1) \sin \varphi + (r_2 + \bar{r}_2) \cos \varphi = W_1 \cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) + W_2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{2})$$

yâni

(1-27) $$\bar{L} + D = W_\alpha, \quad (W_\alpha = -W_1 \sin \varphi + W_2 \cos \varphi)$$

ve aynı biçimde

(11-28) $$L - \bar{D} = W_1, \quad (W_1 = W_1 \cos \varphi + W_2 \sin \varphi)$$

bulunur.

Böylece görülüyor ki:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

D nin bir φ doğrultusu ile belirli olan değerini bulmak için, ortalama eğriliğin $\varphi + \frac{\pi}{2}$ doğrultusunda hesaplanan invariyant türevinden, L nin aynı $\varphi + \frac{\pi}{2}$ doğrultusundaki değerini çıkarmak gerekmektedir.

Buna göre, yüzey herhangi bir dik koordinat sistemine nispet edilmişse, veya gelişigüzel bir koordinat sistemi söz konusu ise, L nin değeri bilindiğinde, yukarıki kural yardımiyle D de bulunur.

11-10. Bilinen bir doğrultu fonksiyonu yardımiyle başka bir doğrultu fonksiyonu üretme yöntemi

Yöntemi açıklamadan önce, şimdiye kadar sözünü ettiğimiz iki doğrultu fonksiyonunun, yani L ve D doğrultu fonksiyonlarının, neden doğrultu fonksiyonu olduklarını, hiç hesap yapmadan, doğrudan doğruya bulmaya çalışalım.

$$L = \rho_n^\circ - 2\rho_g\,\tau_g$$

biçiminde tanımlanan birincisinde, koordinat çizgileri eğrilik çizgileri ise

$$\rho_n = r\,\cos^2\varphi + \bar{r}\,\sin^2\varphi$$

olduğundan, normal eğrilik: u , v ve φ nin fonksiyonlarıdır. Dolayısiyle

$$\rho_n^\circ = (\rho_n)_1\,\cos\varphi + (\rho_n)_2\,\sin\varphi + (\rho_n)_\varphi\,\varphi^\circ,\quad (\rho_n)_\varphi = 2\tau_g$$

dır ve burada (doğrultu fonksiyonu olma) niteliğini bozan son terimdir. Halbuki $\rho_g = \varphi^\circ + g\,\cos\varphi + \bar{g}\,\sin\varphi$ de φ° bulunduğundan ρ_n° dan $2\tau_g\rho_g$ yi çıkarmakla bu terim ortadan kalkmaktadır.

Bunun gibi

$$D = \tau_g^\circ + (\rho_n - \bar{\rho}_n)\,\rho_g$$

de de

$$\tau_g^\circ = (\tau_g)_1\,\cos\varphi + (\tau_g)_2\,\sin\varphi + (\tau_g)_\varphi\,\varphi^\circ,\ (\tau_g)_\varphi = (r - \bar{r})\cos 2\varphi = \bar{\rho}_n - \rho_n$$

doğrultu fonksiyonu kalması için son terim yokedilmeli, yani τ_g° dan $(\bar{\rho}_n - \rho_n)\,\rho_g$ çıkarılmalıdır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Bu açıklamalardan da anlaşılacağı gibi, bilinen bir doğrultu fonksiyonu yardımiyle yeni bir doğrultu fonksiyonu bulmak için şöyle hareket edilir:

$$f = f(u, v, \varphi)$$

bir doğrultu fonksiyonu ise,

(11-29) $$F = f^* - f_\varphi \rho_g$$

de bir doğrultu fonksiyonudur.

Gerçekten,

$$F = f_1 \cos\varphi + f_2 \sin\varphi + f_\varphi \varphi' - f_\varphi (\varphi^* + g \cos\varphi + \bar{g} \sin\varphi)$$

$$= f_1 \cos\varphi + f_2 \sin\varphi - f_\varphi (g \cos\varphi + \bar{g} \sin\varphi)$$

dir. —G. DARBOUX, Leçons sur la theorie des surfaces, cilt II, s. 370-372.—

Örnek 11-1.

Yüzey eğrilik çizgilerine nispet edildiğinde,

(11-30) $$W \rho_n - K = \rho_s^2 + \tau_g^2 = r^2 \cos^2\varphi + \bar{r}^2 \sin^2\varphi$$

dir. Buna göre

$$F = (\rho_s^2 + \tau_g^2)^* - 2 W \tau_g \rho_g = (r^2 \cos^2\varphi + \bar{r}^2 \sin^2\varphi)$$

$$-2(\bar{r}^2 - r^2)(\varphi^* + g \cos\varphi + \bar{g} \sin\varphi) \cos\varphi \sin\varphi$$

ifadesi bir **doğrultu fonksiyonu**dur.

Kolaylıkla görülür ki

(11-31) $$F = 2 [r r_1 \cos^3\varphi + (2r + \bar{r}) r_2 \cos^2\varphi \sin\varphi$$

$$+ (2\bar{r} + r) r_1 \cos\varphi \sin^2\varphi + \bar{r}\,\bar{r}_2 \sin^3\varphi]$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM XII

PARALEL YÜZEYLER

12-1. Paralel yüzeyler

Sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, herhangi bir nokta P olsun. P noktasındaki normaller üzerinde,

$$\overrightarrow{PP^*} = a\,\vec{n} \qquad a = \text{sabit} \tag{12-1}$$

bağıntısını sağlayan P^* noktalarının geometrik yeri olan S^* yüzeyine, **S nin paraleli** denilir. Görülüyor ki: verilen bir S yüzeyinin, a ile değişen, **sonsuz paraleli** vardır.

P^* homolog noktasının yer vektörü $\vec{x}^*$ ise, (12-1) nedeniyle

$$\vec{x}^* = \vec{x} + a\,\vec{n} \tag{12-2}$$

dir.

Hesaplarda kolaylığı sağlamak amaciyle, **S üzerinde, koordinat çizgileri olarak, eğrilik çizgilerini alacağız.**

S üzerinde, eğrilik çizgilerinin DARBOUX-RIBAUCOUR dik üçyüzlülerinin birim vektörleri $\vec{t}, \vec{t}, \vec{n}$ ve $\vec{t}, -\vec{t}, \vec{n}$ ise, bunların invaryant türevleri,

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(12\text{-}3)\qquad \begin{cases} \vec{t}_1 = g\,\vec{t} + r\,\vec{n}, & \vec{t}_2 = -g\,\vec{t} \\ \vec{t}_1 = -g\,\vec{t}, & \vec{t}_2 = g\,\vec{t} \\ \vec{n}_1 = -r\,\vec{t}, & \vec{n}_2 = -r\,\vec{t} \end{cases}$$

dir.

Koordinat çizgilerinin homolog teğet birim vektörleri

S^* paralel yüzeyi üzerinde, koordinat çizgilerinin teğet birim vektörleri $\vec{t}^*$, $\vec{\bar{t}}^*$ ve yay uzunlukları da s^*, $\bar{s}^*$ ise, (12-2) nedeniyle

$$(12\text{-}4)\qquad \begin{cases} s_1^*\,\vec{t}^* = (1 - ar)\,\vec{t}, \quad s_1^* = 1 - ar, \quad \vec{t}^* = \vec{t}, \\ \bar{s}_1^*\,\vec{\bar{t}}^* = (1 - \bar{a}r)\,\vec{\bar{t}}, \quad \bar{s}_1^* = 1 - \bar{a}r, \quad \vec{\bar{t}}^* = \vec{\bar{t}} \end{cases}$$

bulunur.

Bu formüller gösterir ki:

S yüzeyinden S^* paraleline, (12-1) uyarınca geçildiğinde, P ve P^* homolog noktalarında, koordinat çizgilerinin teğetleri birbirlerine paralel kalırlar, dolayısiyle S^* paralelinin koordinat çizgileri arasındaki açı da diktir.

Öte yandan,

$$(12\text{-}5)\qquad \vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{\bar{t}} = \vec{t}^* \wedge \vec{\bar{t}}^* = \vec{n}^*$$

olduğundan, **P ve P^* homolog noktalarındaki normaller ortaktır.** Buna göre, **S nin eğrilik çizgilerinin S^* paraleli üzerindeki homologları, S^* ın eğrilik çizgileridir;** çünkü S nin koordinat çizgileri boyunca değişen yüzey normalleri, birer açılabilir doğururlar.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Homolog doğrultular

S ve S* paralel yüzeylerinin P ve P* homolog noktalarından geçen C ve C* homolog eğrilerinin P, P* noktalarındaki homolog teğetlerinin $\vec{t} = \vec{t}^*$ birim vektörleriyle oluşturdukları açılar φ, φ^* olsun. C ve C* in P ve P* daki yüzey uzunlukları da σ, σ^* ile gösterildiğinde, (12-2) den

$$\frac{d\vec{x}^*}{d\sigma^*} = \vec{t}^* \cos\varphi^* + \vec{t}^* \sin\varphi^* = \vec{t}\cos\varphi^* + \vec{t}\sin\varphi^*$$

$$= \frac{(1-ar)\vec{t}\cos\varphi + (1-\bar{a}r)\vec{t}\sin\varphi}{\sigma^{**}}, \quad \sigma^{**} = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}$$

elde edileceğinden

$$\text{(12-6)} \qquad \cos\varphi^* = \frac{1-ar}{\sigma^{**}}\cos\varphi, \quad \sin\varphi^* = \frac{1-\bar{a}r}{\sigma^{**}}\sin\varphi, \quad (\sigma^{**} \neq 0)$$

olur. (12-6) denklemlerinden de

$$\text{(12-7)} \qquad \operatorname{tg}\varphi^* = \frac{1-\bar{a}r}{1-ar}\operatorname{tg}\varphi$$

çıkarılır.

Görüldüğü gibi, **ancak** $\varphi = 0$ **ve** $\varphi = \frac{\pi}{2}$ **için** $\varphi^* = \varphi$ **dir.**

$\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = \sigma^{**}$ nın değeri

(12-2) den $\vec{dx}^* = \vec{dx} + a\vec{dn}$

çıkacağından, S* in birinci formunu I^* ile gösterdiğimizde, her iki yanın skaler karesi

$$\text{(12-8)} \qquad I^* = I - 2a\,II + a^2\,III, \quad I^* = d\sigma^{*2}$$

verir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

C nin P deki normal eğriliği ρ_n ise,

(12-9) $$\frac{I^*}{I} = (\sigma^{*\,*})^2 = 1 - 2a\rho_n + a^2(W\rho_n - K),\ \frac{III}{I} = W\rho_n - K$$

bağıntısı elde edilir.

Homolog eğrilik çizgilerinin homolog noktalarında asal eğriliklerle geodezik eğrilikler

12-4) bağıntılarından, (12-3) yardımiyle

$$\frac{d\vec{t}^*}{ds^*} = g^*\vec{t}^* + r^*\vec{n} = \frac{1}{s_1^*}(g\vec{t} + r\vec{n}),\ s_1^* = 1 - ar$$

$$\frac{d\vec{t}^*}{d\bar{s}^*} = -\bar{g}^*\vec{t}^* = -\frac{1}{\bar{s}_2^*}\bar{g}\vec{t},\quad \bar{s}_2^* = 1 - a\bar{r},$$

$$\frac{d\vec{n}}{d\bar{s}^*} = -\bar{r}^*\vec{t}^* = -\frac{1}{\bar{s}_1^*}\bar{r}\vec{t}$$

elde edileceğinden,

(12-10) $$g^* = \frac{g}{1-ar},\quad \bar{g}^* = \frac{\bar{g}}{1-a\bar{r}},\quad r^* = \frac{r}{1-ar},$$

$$\bar{r}^* = \frac{\bar{r}}{1-a\bar{r}}$$

bulunur.

Bu formüller gösterir ki:

(12-11) $$\frac{g^*}{r^*} = \frac{g}{r},\quad \frac{\bar{g}^*}{r^*} = \frac{\bar{g}}{\bar{r}}$$

dir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Homolog eğrilik çizgilerinin P, P* homolog noktalarındaki asal normallerin ortak yüzey normaliyle oluşturdukları açılar $\theta, \bar{\theta}$; $\theta^*, \bar{\theta}^*$ ise, (12-11) formülleri dolayısiyle

(12-12) $$tg\,\theta^* = tg\,\theta, \quad tg\,\bar{\theta}^* = tg\,\bar{\theta}$$

dir. Buna göre:

Teorem 12-1.

Sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, S ve S* paralel yüzeylerinin homolog eğrilik çizgilerinin P, P* homolog noktalarındaki asal normaller bir birine paraleldir.

Homolog noktalarda ortalama eğrilikle GAUSS eğriliği

(12-10; 3,4) formüllerinden

$$W^* = r^* + \bar{r}^* = \frac{r}{1-ar} + \frac{\bar{r}}{1-\bar{a}\bar{r}}, \quad K^* = \frac{K}{(1-ar)(1-\bar{a}\bar{r})}$$

veya

(12-13) $$W^* = \frac{W - 2aK}{1 - aW + a^2K}, \quad K^* = \frac{K}{1 - aW + a^2K}$$

sonuçları çıkarılır.

Son formüller gösterir ki:

K GAUSS eğriliği S üzerinde

$$K = 0$$

ise, K* da S* üzerinde sıfırdır. Bu demektir ki, **bir açılabilir yüzeyin herhangi bir paraleli de bir açılabilir yüzeydir.** Özellikle: koni, silindir ve düzlem için bu böyledir.

Eğer S üzerinde aynı zamanda

$$K = \text{sâbit}, \qquad W = \text{sâbit}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

ise, yani bir küre söz konusu ise, **bunun herhangi bir paraleli de bir küredir.** Geometrik olarak bu sonuç açıktır. Zaten bu hâlde

$$K^* = \text{sâbit}, \quad W^* = \text{sâbit}$$

dir.

BONNET teoremi 12-2.

Eğer

$$K = \frac{1}{a^2} = \text{sabit}$$

ise, S yüzeyinin P noktalarından itibaren $\pm a \vec{n}$ vektörünün alınmasiyle bulunan iki paralel yüzeyin P^* homolog noktalarında

$$W^* = \mp \frac{1}{a} = \text{sabit}$$

dir. Buna göre, BONNET teoremi söz konusudur.

BONNET teoremi

Bir açılabiiir yüzey ve bir küreden farklı ve sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde,

$$K = \frac{1}{a^2} = \text{sabit}$$

ise, S ye paralel ve $\pm a$ uzaklığındaki iki yüzeyin ortalama eğrilikleri sâbittir ve

$$W^* = \mp \frac{1}{a}$$

dır.

Homolog noktalarda asal eğrilikler in invariyant türevleri

(12-10) bağıntılarından

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(12-14)
$$\begin{cases} \dfrac{dr^*}{ds^*} = \dfrac{1}{s_1^*}\, r_1^* = \dfrac{r_1}{(1-ar)^2}, \\ \dfrac{dr^*}{d\bar{s}^*} = \dfrac{1}{\bar{s}_1^*}\, r_2^* = \dfrac{r_2}{(1-ar)^2(1-\bar{a}r)}, \\ \dfrac{d\bar{r}^*}{ds^*} = \dfrac{1}{s_2^*}\, \bar{r}_1^* = \dfrac{\bar{r}_1}{(1-\bar{a}r)^2(1-ar)}, \\ \dfrac{d\bar{r}^*}{d\bar{s}^*} = \dfrac{1}{\bar{s}_2^*}\, \bar{r}_2^* = \dfrac{\bar{r}_2}{(1-\bar{a}r)^2} \end{cases}$$

elde edilir.

Birbirlerine dik homolog doğrultular

(12-7) bağıntısında

$$\operatorname{tg}\varphi^* \cdot \operatorname{tg}\varphi = -1$$

ise,

$$\frac{1-\bar{a}r}{1-ar}\operatorname{tg}^2\varphi = -1$$

veya

$$(1-\bar{a}r)\sin^2\varphi + (1-ar)\cos^2\varphi = 0$$

yâni

(12-15)
$$\rho_0 = r\cos^2\varphi + \bar{r}\sin^2\varphi = \frac{1}{a}$$

dır.

Karşıt olarak, (12-15) sağlanıyorsa,

$$\operatorname{tg}\varphi^* \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{1-\bar{a}r}{1-ar}\operatorname{tg}^2\varphi,\quad \rho_0 = r\cos^2\varphi + \bar{r}\sin^2\varphi = \frac{1}{a}$$

olur ve sonuncusundan da

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\rho_n = \frac{\bar{r}\,tg^2\varphi + r}{1 + tg^2\varphi} = \frac{1}{a}, \quad tg^2\varphi = \frac{ar-1}{1-a\bar{r}}, \quad tg\varphi\, tg\varphi^* = -1$$

çıkar.

Teorem 12-3.

Bir küre ve bir açılabilir yüzeyden farklı ve sınıfı $\geqslant 2$ olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, S ve S^* paralel yüzeylerinin φ ve φ^* homolog doğrultularının birbirlerine dik olabilmeleri için gerekli ve yeterli koşul, S yüzeyinin P noktasında, φ doğrultusundaki ρ_n normal eğriliğinin

$$\rho_n = \frac{1}{a} = \text{sabit}$$

olmasıdır.

C, C^* homolog eğrilerinin P, P^* homolog noktalarındaki normal eğrilik, geodezik burulma ve geodezik eğrilikler

a. Normal eğrilikler

C^* eğrisinin P^* noktasındaki normal eğrilik

$$\rho_n^* = r\cos^2\varphi^* + \bar{r}^*\sin^2\varphi^*$$

olduğundan, (12-6) ve (12-9), (12-10) formüllerinden yararlanıldığında

12-16) $$\rho_n^* = \frac{(1-a\,W)\,\rho_n + a\,K}{1-2a\,\rho_n + a^2(W\rho_n - K)}$$

bulunur.

b. Geodezik burulma

C^* eğrisinin P^* noktasındaki geodezik burulma

$$\tau^* = (\bar{r}^* - r^*)\sin\varphi^*\cos\varphi^*$$

olduundan, (12-6), (12-9) ve (12-10) bağıntıları kullanıldığında

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(12-17) $$\tau_g^* = \frac{\tau_g}{1-2a\rho_n + a^2(W\rho_n - K)}$$

olur.

Görülüyor ki, bundan önce de bulduğumuz gibi, eğrilik çizgilerinin homologları, gene eğrilik çizgileridir.

c. Geodezik eğrilik

C^* eğrisinin P^* noktasındaki geodezik eğriliği

$$\rho_g^* = \frac{d\varphi^*}{ds^*} + g^* \cos\varphi^* + \bar{g}^* \sin\varphi^*$$

dır.

(12-6) ve (12-10) formülleri nedeniyle

(12-18) $$g^* \cos\varphi^* = \frac{1}{\varphi^{**}}\, g\cos\varphi,\quad \bar{g}^* \sin\varphi^* = \frac{1}{\sigma^{**}}\, \bar{g}\sin\varphi^*$$

dir.

Buna göre

(12-19) $$\rho_g^* = \frac{1}{\sigma^{**}}(\varphi^{**} + \rho_n - \sigma^*) = \frac{1}{\sigma^{**}}[(\varphi^* - \varphi)^* + \rho_n]$$

dir.

Öte yandan, 12-7) nedeniyle

$$\operatorname{tg}(\varphi^* - \varphi) = \frac{\left(\frac{1-a\bar{r}}{1-ar} - 1\right)\operatorname{tg}\varphi}{1 + \frac{1-a\bar{r}}{1-ar}\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{a(r-\bar{r})\operatorname{tg}\varphi}{(1-a\rho_n)\frac{1}{\cos^2\varphi}}$$

veya

(12-20) $$\operatorname{tg}(\varphi^* - \varphi) = \frac{a\tau_g}{a\rho_n - 1}$$

olduğundan, (12-19)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(12-21) $$\rho_t^* = \frac{1}{\sigma^{**}} \left[\left(\operatorname{arc\,tg} \frac{a\,\tau_t}{a\,\rho_n - 1} \right)^\circ + \rho_t \right]$$

elde edilir.

Homolog noktalardaki LAGUERRE doğrultu fonksiyonları

S ve S* paralel yüzeylerinin, P, P* homolog noktalarındaki LAGUERRE doğrultu fonksiyonları L, L* olsun. Her iki yüzey de eğrilik çizgilerine nispet edildiklerinden

$$L^* = \frac{dr^*}{ds^*} \cos^3 \varphi^* + 3 \frac{d\bar{r}^*}{d\bar{s}^*} \cos^2 \varphi \sin \varphi$$

$$+ 3 \frac{d\bar{r}^*}{ds^*} \cos \varphi^* \sin^2 \varphi^* + \frac{d\bar{r}^*}{d\bar{s}^*} \sin^3 \varphi^*$$

dir.

(12-6) ve (12-14) formülleri kullanıldığında,

$$L^* = \frac{1}{(\sigma^{**})^3} (r_1 \cos^3 \varphi + 3 r_2 \cos^2 \varphi \sin \varphi +$$

$$3 \bar{r}_1 \cos \varphi \sin^2 \varphi + \bar{r}_2 \sin^3 \varphi)$$

ve (11-2) nedeniyle

(12-22) $$L^* = \frac{1}{(\sigma^{**})^3} L, \quad (\sigma^{**} \neq 0)$$

bulunur.

(12-22) bağıntısına göre:

Teorem 12-4.

Sınıfı ≥ 3 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinde, S yüzeyinin G— çizgilerinin S* paraleli üzerindeki homologları da G— çizgileridir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Homolog noktalarda birinci ve ikinci formun katsayıları

(12-2) den çıkarılan

$$\vec{dx}^* = \vec{dx} + a\,\vec{dn}$$

bağıntısı

$$\vec{x}_u^*\,du + \vec{x}_v^*\,dv = (1-ar)\,\vec{x}_u\,du + (1-ar)\,\vec{x}_v\,dv$$

biçiminde yazıldığında, buradan

$$E^* = (1-ar)^2\,E, \quad F^* = 0, \quad G^* = (1-ar)^2\,G, \tag{12-23}$$

$$H^{*2} = (1 - aW + a^2K)^2\,H^2$$

elde edilir.

Öte yandan,

$$\vec{x}_u^* \wedge \vec{x}_v^* = H^*\,\vec{n}^* = (1-ar)\,(1-ar)\,\vec{x}_u \wedge \vec{x}_v = (1-aW+a^2K)\,H\,\vec{n}$$

dir.

$$H^* > 0, \qquad H > 0$$

olarak alındığında

$$\vec{n}^* = \varepsilon\,\vec{n}, \quad \varepsilon = \mp 1 \tag{12-24}$$

dır ve

$$1 - aW + a^2K$$

nın sıfırdan büyük, ya da sıfırdan küçük oluşuna göre $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ dir.

(12-24) den

$$\vec{n}_u^* = \varepsilon\,\vec{n}_u = -\varepsilon\,r\,\vec{x}_u, \qquad \vec{n}_v^* = \varepsilon\,\vec{n}_v = -\varepsilon\,r\,\vec{x}_v$$

elde edileceğinden

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(12\text{-}25)\quad \begin{cases} L^* = -\vec{x}_v^* \cdot \vec{n}_u^* = \varepsilon r(1-ar)\ E = \varepsilon(1-ar)\ L \\ N^* = -\vec{x}_v^* \cdot \vec{n}_v^* = \varepsilon \bar{r}(1-ar)\ G = \varepsilon(1-a\bar{r})\ N \\ M^* = 0 \end{cases}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM XIII

EVİRTİM

13-1. Evrik yüzeylerde homolog elemanlar

Merkezi O, kuvveti de k olan bir evirtimde: evrik iki S, S* yüzeyinin koordinat çizgileri, evrik çizgiler olsun. S ve S* ın homolog P, P* noktalarının yer vektörleri $\vec{x}$, $\vec{x}^*$; koordinat çizgilerinin bu noktalardaki yay uzunluklar s, $\bar{s}$ ve s*, $\bar{s}^*$; teğet birim vektörleri de $\vec{t}$, $\bar{t}$ ve $\vec{t}^*$, $\bar{t}^*$ la gösterilsin.



Şekil 94

Evirtimin tanımına göre

$$\vec{x} \cdot \vec{x}^* = k, \ (k \lesseqgtr 0) \tag{13-1}$$

olduğundan

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(13-2) $$\vec{x}^* = \frac{k}{x^2}\vec{x}, \quad x = |\vec{x}|, \quad \vec{x} = x\vec{u}$$

dur.

K nın artı ya da eksi işaretli olmasına göre, P, P* homolog noktaları O merkezinin aynı yanında veya ayrı yanlarındadır.

Koordinat çizgilerinin P, P* homolog noktalarındaki teğetler

Önce v=sâbit evrik koordinat çizgilerini alalım. (13-2) bağıntısından

$$\frac{d\vec{x}^*}{ds^*} = \vec{t}^* = \frac{1}{s_1^*}\left(\frac{k}{x^2}\vec{t} - 2k\frac{x_1}{x^3}\vec{x}\right)$$

veya

(13-3) $$\vec{t}^* = \frac{1}{s_1^*}\cdot\frac{k}{x^2}(\vec{t} - 2x_1\vec{u})$$

elde edilir.

Her iki yanın skaler karesini aldığımızda,

(13-4) $$s_1^* = \frac{k}{x^2} \quad \text{veya} \quad ds^* = \frac{k}{x^2}ds$$

bulunacağından

(13-5) $$\vec{t}^* = \vec{t} - 2x_1\vec{u}$$

olur.

Öte yandan

(13-6) $$\vec{t}\cdot\vec{u} = \vec{x}_1\cdot\frac{\vec{x}}{x} = \frac{x_1 x}{x} = x_1$$

olduğundan, 13-5) bağıntısı

(13-7) $$\vec{t}^*\cdot\vec{u} = -x_1$$

verir ve dolayısiyle

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\vec{t} \cdot \vec{u} + \vec{t}^* \cdot \vec{u} = 0 \tag{13-8}$$

sonucuna varılır. Buna göre:

PP^*, $\vec{t}$, $\vec{t}^*$ elemanları aynı bir düzlem üzerinde bulunduklarından sınıfı ≥ 1 olan bir C eğrisinin düzgün noktalardan oluşan bir parçasının C^* evriğinin P, P^* homolog noktalarındaki teğetler, PP^* doğru parçasının orta dikme düzlemine göre simetriktir.

Bâzı sonuçlar

a. (13-4; 2) formülü gösterir ki: **C eğrisi S yüzeyinin minimal eğrisi ise** —sıfır uzunluklu eğri— **C^* da bir minimal eğridir.** Başka deyişle, **S ve S^* evrik yüzeylerinin minimal eğrileri, evirtimde homolog eğrilerdir.**

b. (13-5) bağıntısı

$$\vec{t}^* + x_3 \vec{u} = \vec{t} - x_1 \vec{u} \tag{13-9}$$

biçiminde yazılabilir.

Her iki yanı $\vec{u}$ vektörü ile skaler olarak çarptığımızda, (13-6) ve (13-7, nedeniyle, her iki yan ayrı ayrı sıfıra eşit olur. Buna göre:

$$\vec{t}^* + x_1 \vec{u}, \quad \vec{t} - x_1 \vec{u}$$

vektörleri, $\vec{u}$ ya dik vektörlerdir.

Eğer ayrıca u = sâbit evrik koordinat çizgileri de alınacak olursa, aynı hesaplar yapıldığında,

$$\vec{t}^* = \vec{t} - 2x_2 \vec{u} \tag{13-10}$$

bağıntısı elde edilir.

(13-5) ve (13-10) bağıntılarının skaler çarpımından

$$\vec{t}^* \cdot \vec{t}^* = \vec{t} \cdot \vec{t} \tag{13-11}$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

eşitliği elde edilir. Bu da gösterir ki: S yüzeyinin koordinat çizgileri arasındaki açı, S* evrik yüzeyinin evrik koordinat çizgileri arasındaki açıya eşittir. Bu sonuç, kısaca, şöyle ifade edilir: **Evirtim, açıları korur.** Bundan böyle, koordinat çizgileri arasındaki açıyı α ile göstereceğiz:

$$\vec{t} \cdot \vec{\bar{t}} = \vec{t^*} \cdot \vec{\bar{t}^*} = \cos \alpha$$

Homolog noktalardaki normal birim vektörleri

(13-5) ve (13-10) vektörel eşitliklerinin skaler olarak çarpılmaları sonucunda

$$\vec{t^*} \wedge \vec{\bar{t}^*} = \vec{n^*} \sin \alpha = (\vec{t} - 2x_1 \vec{u}) \wedge (\vec{\bar{t}} - 2x_2 \vec{u}) \tag{13-12}$$

$$= \vec{n} \sin \alpha - 2(x_2 \vec{t} \wedge \vec{u} - x_1 \vec{\bar{t}} \wedge \vec{u})$$

(13-6) nedeniyle

$$x_1 = \vec{t} \cdot \vec{u}$$

dır ve

$$\vec{\bar{t}} \cdot \vec{u} = x_2 \cdot \frac{\vec{x}}{x} = x_2$$

olduğundan

$$(x_2 \vec{t} - x_1 \vec{\bar{t}}) = (\vec{t} \cdot \vec{u}) \vec{t} - (\vec{t} \cdot \vec{u}) \vec{t} = \vec{u} \wedge (\vec{t} \wedge \vec{\bar{t}}) = \sin \alpha \, \vec{u} \wedge \vec{n}$$

dır. Buna göre

$$(x_2 \vec{t} - x_1 \vec{\bar{t}}) \wedge \vec{u} = -[\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{n})] \sin \alpha = [-(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{u} + \vec{n}] \sin \alpha$$

elde edileceğinden, (13-12)

$$\vec{n^*} = -\vec{n} + 2(\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{u} \tag{13-13}$$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

S yüzeyinin P noktasındaki teğet düzleminden O noktasının uzaklığına δ dersek

$$\delta = \vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{x^{-1}}$$

olacağından, (13-13)

$$\vec{n}^* = -\vec{n} + 2\frac{\delta}{x}\vec{u} = -\vec{n} + 2\delta\frac{\vec{x}}{x^2} \tag{13-14}$$

çıkar.

Görülüyor ki, $\vec{n} + \vec{n}^*$ geometrik toplamı $\vec{u}$ vektörüne paralel olduğundan, **$\vec{n}$ ve $\vec{n}^*$ vektörleri, P den itibaren alındıklarında, P de OP ye göre simetriktirler.** Dolayısiyle

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n}^* \cdot \vec{x} = \delta \tag{13-14}'$$

dır.

Homolog noktalarda birinci kuvadratik formlar

(13-2) formülünden

$$d\vec{x}^* = \frac{k}{x^2}d\vec{x} - 2k\frac{\vec{x} \cdot d\vec{x}}{x^4}\vec{x} \tag{13-15}$$

elde edileceğinden, her iki yanın skaler karesini almakla

$$I^* = \frac{k^2}{x^4}I - \frac{4k^3}{x^5}(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + \frac{4k^2}{x^4}(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2$$

veya

$$I^* = \frac{k^2}{x^4}I \tag{13-16}$$

sonucu elde edilir.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Homolog noktalardaki ikinci formlar

(13-14) bağıntısının her iki yanının diferansiyeli alındığında

$$\text{(13-17)}\quad \delta = \vec{n}\cdot\vec{x},\ d\vec{n}^* = -\,d\vec{n} + 2\delta\left(\frac{d\vec{x}}{x^2} - 2\,\frac{\vec{x}\cdot d\vec{x}}{x^4}\,\vec{x}\right) + 2\,\frac{\vec{x}}{x^2}\,(\vec{x}\cdot d\vec{n})$$

bulunur.

Daha önce bulduğumuz (13-15) bağıntısı da

$$\text{(13-15)}\qquad d\vec{x}^* = \frac{k}{x^2}\,d\vec{x} - 2k\,\frac{\vec{x}\cdot d\vec{x}}{x^4}\,\vec{x}$$

olduğundan, (13-17) ile (13-15) in skaler çarpımını aldığımızda, sonuçta

$$\text{(13-18)}\qquad II^* = -\left(II + \frac{2\delta}{x^2}\,I\right)\frac{k}{x^2}$$

elde edilir.

(13-16) ve (13-18) formüllerinden, I ve II formlarının homolog noktalardaki katsayıları için

$$\text{(13-19)}\quad \begin{cases} E^* = \dfrac{k^2}{x^4}\,E,\quad F^* = \dfrac{k^2}{x^4}\,F,\quad G = \dfrac{k^2}{x^4}\,G,\quad H^* = \dfrac{k^3}{x^4}\,H \\ L^* = -\left(L + \dfrac{2\delta}{x^2}\,E\right)\dfrac{k}{x^2}, \\ M^* = -\left(M + \dfrac{2\delta}{x^2}\,F\right)\dfrac{k}{x^2}, \\ N^* = -\left(N + \dfrac{2\delta}{x^2}\,G\right)\dfrac{k}{x^2} \end{cases}$$

olur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Homolog koordinat çizgilerinin homolog noktalardaki normal eğrilikler, geodezik burulmalar ve geodezik eğrilikler

a. Normal eğrilikler

Bilindiği gibi, v=sâbit, u=sâbit koordinat çizgilerinin P ve P* homolog noktalarındaki normal eğrilikler

$$r = \frac{L}{E}, \quad \bar{r} = \frac{N}{G}, \quad r^* = \frac{L^*}{E^*}, \quad \bar{r}^* = \frac{N^*}{G^*}$$

dır. (13-19) formülleri kullanıldığında

(13-20) $$r^* = -\frac{1}{k}(x^2 r + 2\delta), \quad \bar{r}^* = -\frac{1}{k}(x^2 \bar{r} + 2\delta)$$

$$\bar{r}^* - r^* = -\frac{x^2}{k}(\bar{r} - r)$$

çıkar.

b. Geodezik burulmalar

(47-8) formülüne göre, v=sâbit ve u=sâbit koordinat çizgilerinin τ_g ve $\bar{\tau}_g$ geodezik burulmalarının değerleri, sıra ile

$$\tau_g = \frac{EM - FL}{HE}, \quad \bar{\tau}_g = \frac{FN - GM}{HG}$$

dir.

Buna göre, S* yüzeyinin P* noktasından geçen koordinat çizgilerinin bu noktadaki τ_g^* ve $\bar{\tau}_g^*$ geodezik burulmaları

$$\tau_g^* = \frac{E^*M^* - F^*L^*}{H^*E^*}, \quad \bar{\tau}_g^* = \frac{F^*N^* - G^*M^*}{H^*G^*}$$

veya

(13-21) $$\tau_g^* = -\frac{k}{x^2}\tau_g, \quad \bar{\tau}_g^* = -\frac{k}{x^2}\bar{\tau}_g$$

dir. Görülüyor ki:

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Teorem 13-1.

Sınıfı ≥ 2 olan bir S yüzeyinin düzgün noktalardan oluşan bir B bölgesinin evriğinde, eğrilik çizgilerinin evrikleri, S* evrik yüzeyinin eğrilik çizgileridir.

c. Geodezik eğrilikler

S* evrik yüzeyinin v=sâbit ve u=sâbit koordinat çizgilerinin P* daki g^* ve $\bar{g}^*$ geodezik eğrilikleri, (41-7) formülleri gereğince

$$g^* = \frac{H^*}{E^{*3/2}}\,\Gamma^{*2}_{11}, \qquad \bar{g}^* = \frac{H^*}{G^{*3/2}}\,\Gamma^{*1}_{22}$$

dır.

(26-5; 2,5) ve (13-19; 1, 2, 3) bağıntıları da

$$g^* = \frac{H^*}{E^{*3/2}}\,\frac{2E^*F_u^* - E^*E_v^* - F^*E_u^*}{2H^{*3}}$$

$$= \frac{1}{2H^*E^{*3/2}}\,(2E^*F_u^* - E^*E_v^* - F^*E_u^*)$$

$$\bar{g}^* = \frac{H^*}{G^{*3/2}}\,\frac{2G^*F_v^* - G^*G_u^* - F^*G_v^*}{2H^{*3}}$$

$$= \frac{1}{2H^*G^{*3/2}}\,(2G^*F_v^* - G^*G_u^* - F^*G_v^*)$$

verir. Bunlardan birincisi, koordinat çizgileri arasındaki açı α olduğuna göre

$$g^* = \frac{x^2}{k}\,g + \frac{2x}{4kHE^{1/2}}\,(Ex_v - Fx_u) = \frac{x^2}{k}\,g$$

$$+ \frac{2x}{k}\,\frac{1}{E\sqrt{G}\sin\alpha}\,(E\,x_v - \sqrt{E}\,\sqrt{G}\cos\alpha\,x_u)$$

veya

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

(13-22) $$g^* = \frac{x^2}{k}\, g + \frac{2x}{k}\left(\frac{x_2 - x_1 \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$= \frac{x^2}{k}\, g + \frac{1}{\sin\alpha}\left[(x^2)_2 - (x^2)_1 \cos\alpha\right]$$

sonucuna vardırır.

Aynı biçimde hesap yapıldığında

(13-23) $$\bar{g}^* = \frac{x^2}{k}\,\bar{g} + \frac{2x}{k}\,(x_2 \cos\alpha - x_1) / \sin\alpha$$

$$= \frac{x^2}{k}\,\bar{g} + \frac{1}{\sin\alpha}\left[(x^2)_2 \cos\alpha - (x^2)_1\right]$$

bulunur.

Koordinat çizgileri birbirlerini dik kesiyorsa

(13-24) $$g^* = \frac{x^2}{k}\, g + \frac{2x}{k}\, x_2, \quad \bar{g}^* = \frac{x^2}{k}\,\bar{g} - \frac{2x}{k}\, x_1$$

olur.

Uyarı 13-1.

(50-2) formüllerine göre, (13-22) ve (13-23) formülleri

(13-25) $$g^* = \frac{x^2}{k}\, g + \frac{2x}{k}\, x_2 = \frac{x^2}{k}\, g + \frac{(x^2)_2}{k},$$

$$\bar{g}^* = \frac{x^2}{k}\,\bar{g} + \frac{(x^2)_2}{k}$$

biçiminde de yazılabilirler.

I ve II invariyant türevlerinin alındığı doğrultular, v=sâbit ve u=sâbit koordinat çizgilerinin P deki teğetlerinin, pozitif dönme yönünde $\frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesiyle bulunan doğrultulardır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

d. Ortalama eğrilik ve GAUSS eğriliği

(36-4) formülleriyle verilen ortalama eğrilikle GAUSS eğriliği, S^* evrik yüzeyinin P noktası için

$$W^* = \frac{E^* N^* + G^* L^* - 2F^* M^*}{2H^{*2}}, \quad K^* = \frac{L^* N^* - M^{*2}}{H^{*2}}$$

dir.

(13-19) un ilk üç formülü kullanıldığında

(13-26) $W^* = -\frac{1}{k}(x^2 W + 2\delta)$, $K^* = \frac{x^4}{k^4}(x^4 K + 2\delta x^2 W + 4\delta^2)$

bulunur.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

PROBLEMLER

1. $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = 1$ yüzeyinin Oz eksenini kestiği noktadaki asal eğrilik yarıçaplarını bulunuz.

2. $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$ yüzeyinin regle olduğunu gösteriniz ve bunun boğaz çizgisi ile dağılma parametresini bulunuz.

3. Bir küreye teğet olan ve bir doğruyu dik kesen doğruların oluşturduğu regle yüzeyinin boğaz çizgisini ve dağılma parametresini bulunuz.

4. Bir uzay eğrisinin binormalleri ile tanımlanan regle yüzeyinin minima olma koşulu nedir?

5. Bir açılabilir yüzeyde (GAUSS eğriliği = 0) ortalama eğriliği hesaplayınız. Bulunan sonucu helikoidlere, ve binormallerle elde edilen yüzeye uygulayınız.

6. $x = (a+z)\cos t$, $y = (a-z)\sin t$ regle yüzeyinin: teğetler konisini, boğaz çizgisini ve dağılma parametresini bulunuz ve karteziyen denklemini yazınız.

7. $x_1 = u\cos v$, $x_2 = u\sin v$, $x_3 = cv$ yüzeyi veriliyor:
   a) Koordinat çizgilerinin geodezik eğriler olduğunu gösteriniz.
   b) Yüzeyin karteziyen denklemini bulunuz.
   c) Yüzeyin bir dik konoid olduğunu gösteriniz.
   d) Geodeziklerin diferansiyel denklemini bulunuz. Bunlar içinde başlangıçtan geçen ve üçüncü eksene teğet olanı arayınız.

8. $\vec{x}(u, v) = u\cos v\,\vec{k}_1 + u\sin v\,\vec{k}_2 + f(v)\,\vec{k}_3$ dik konoidi verildiğine göre:
   a) Birinci ve ikinci formun katsayılarını hesaplayınız.
   b) GAUSS eğriliği ile ortalama eğriliği bulunuz.

9. Bir dik eksen sisteminde

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$x_1 = \text{Cos } u + \text{Cos } v, \quad x_2 = \text{Sin } u + \text{Sin } v, \quad x_3 = u + v$

denklemleriyle tanımlanan yüzey veriliyor:

a) GAUSS eğriliği ile ortalama eğriliği hesaplayınız.

b) DUPINI göstergesinin cinsini söyleyiniz ve asal eksenlere göre denklemini yazınız.

c) Eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemini integre ediniz.

d) Asimptotik çizgilerin diferansiyel denklemini integre ediniz.

10. Bir uzay eğrisinin asal normalleriyle tanımlanan regle yüzeyin asimptotiklerini bulunuz. Bu eğriler düzlem olabilir mi? Bu yüzeyin boğaz çizgisi hangi kosulda bir asimptotik olabilir? Böyle olan bir yüzeyde, boğaz çizgisinin herhangi bir noktasındaki burulmayı hesaplayınız.

11. Σ regle yüzeyinin anadoğruları, t değişken bir parametreyi göstermek üzere

$$x = tz + 2t\varphi(t), \quad y = f(t)z + t\varphi^2(t)$$

denklemleriyle tanımlanmaktadır.

a) Σ nın açılabilir bir yüzey olabilmesi için f ve φ fonksiyonlarının sağlamaları gereken koşul nedir? Bu biçimde birbirinden farklı iki açılabilir yüzey ailesi bulunduğunu gösteriniz.

b) Bu iki aileden birinin dönüm sayrıları bir ikinci derece yüzeyi üzerindedir. Bu sonuncunun denklemini bulunuz.

12. $x_1 = a(1 + \text{Cos } v)\,\text{cotg } u, \quad x_2 = a(1 + \text{Cos } v), \quad x_3 = a\,\dfrac{\text{Cos } v}{\text{Sin } u}$

denklemleriyle tanımlanan yüzey veriliyor.

a) Koordinat çizgileri nasıl çizgilerdir

b) Yüzeyin karteziyen denklemini bulunuz.

c) Yüzeyin asimptotik çizgilerinin diferansiyel denklemini integre ediniz.

13. $x_1 = u\,\text{Cos } v, \quad x_2 = u\,\text{Sin } v, \quad x_3 = a\left(v + \int\sqrt{\dfrac{a^2 + u^2}{u^2 - a^2}}\;\dfrac{du}{u}\right)$

a : sabit

yüzeyinin minimal olduğunu gösteriniz.

14. Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = u\,\text{Cos } v, \quad x_2 = u\,\text{sin } v, \quad x_3 = uv$$

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

denklemleriyle tanımlanan yüzey veriliyor:
a) Koordinat çizgileri nasıl çizgilerdir
b) Yüzeyin geometrik tanımı
c) Eğrilik çizgilerini bulunuz ve bunların cinsini söyleyiniz.

15. $P(u, v)$, $Q(u, v)$ aynı zamanda sıfır olmayan iki sürekli fonksiyonu göstermek üzere, verilen bir S yüzeyi üzerinde bulunan bir eğri ailesi

$$P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv = 0$$

diferansiyel denklemi ile veriliyor.

S üzerinde bulunan ve verilen eğri ailesini dik olarak kesen eğri ailesinin (verilen ailenin dik yörüngesinin) diferansiyel denklemini bulunuz.

16. Bir dik eksen sistemine göre tanımlanan

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

dönel silindiri üzerinde, bunun

$$xz - \lambda y = 0, \quad (\lambda : \text{parametre})$$

paraboloidi ile arakesiti olan eğri ailesi alınıyor. Bu aileyi oluşturan eğrilerin dik yörüngelerinin, sabit merkezli bir küre üzerinde bulunduklarını gösteriniz.

17. Bir uzay eğrisinin asal normalleri ile tanımlanan regle yüzeyinin eğrilik çizgilerini bulunuz.

18. Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = u \cos v, \quad x_2 = u \sin v, \quad x_3 = u + v$$

koordinatlarıyla tanımlanan yüzey veriliyor:

a) Koordinat çizgileri nasıl eğrilerdir?
b) Yüzeyin cinsi için ne söylenebilir?
c) Yüzey üzerinde bulunan ve u = sabit koordinat çizgilerini sabit açı altında kesen eğrileri bulunuz.

19. Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = (a + v) \cos u, \quad x_2 = (a + v) \sin u, \quad x_3 = b\,u$$

denklemleriyle tanımlanan yüzeyin:
a) Regle minima olduğunu gösteriniz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

b) Asimptotik çizgilerini bulunuz.

c) Eğrilik çizgilerini bulunuz.

20. Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = (1 + u)\,\mathrm{Cos}\,v, \quad x_2 = (1-u)\,\mathrm{Sin}\,v, \quad x_3 = u$$

yüzeyi verildiğine göre:

a) Koordinat çizgileri nasıl eğrilerdir?
b) Yüzeyin kartezyen denklemini yazınız.
c) Asimptotiklerin diferansiyel denklemini integre edin.

21. $e^z = \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\,y$ yüzeyinin eğrilik çizgilerini bulunuz.

22. $z = xy$ yüzeyi üzerinde, $y =$ sabit çizgilerinin dik yörüngelerini bulunuz.

23. $x = a\,\dfrac{uv+1}{u+v}, \quad y = b\,\dfrac{u-v}{u+v}, \quad z = c\,\dfrac{uv-1}{u+v}$

parametreli denklemleriyle verilen yüzeyin kartezyen denklemini bulunuz.

24. $x_1 = u^2 + 2uv, \quad x_2 = u + v, \quad x_3 = u^3 + 3u^2v$

denklemleriyle tanımlanan yüzeyin regle olduğunu gösteriniz. Yüzeyin açılabilir olup olmadığını denetleyiniz.

25. İspat ediniz ki birinci formu

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2$$

biçiminde olan bir yüzeyde

$$du + \sqrt{G}\,dv = 0, \quad du - \sqrt{G}\,dv = 0$$

diferansiyel denklemleriyle tanımlanan eğri aileleri birbirinin dik yörüngesidir.

26. Bir torun meridyenlerinin eğik eşit açılı yörüngelerini bulunuz.

27. $z = x^3 - y^2$ yüzeyinin parabolik noktasını bulunuz ve yüzeyin bu noktada teğet düzleme göre durumunu inceleyiniz.

28. Aynı soru : $z = y^2 - x^2$ yüzeyi için soruluyor.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

29. $z = lg \left| \dfrac{\cos x}{\cos y} \right|$ yüzeyinin ortalama eğriliğini bulunuz.

30. Bir uzay eğrisinin binormalleriyle tanımlanan regle yüzeyinin GAUSS eğriliği ile ortalama eğriliğini hesaplayınız.

31. $x_1 = (a + b \cos u) \cos v$, $x_2 = (a + b \cos u) \sin v$, $x_3 = b \sin u$ torunun ortalama eğriliğini hesaplayınız. Yüzeyin minimal noktaları var mıdır?

32. $xyz = a^3$ yüzeyinin ombiliklerini bulunuz.

33. C^3 sınıfından bir minimal yüzey üzerinde koordinatlar izometrik ise, yüzeyin $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ vektörel denklemini oluşturan $\vec{x}$ vektörü

$$\vec{x}_{uu} + \vec{x}_{vv} = \vec{0}$$

LAPLACE denklemini doğrular.

34. İspat ediniz ki $\vec{x}(u)$ ve $\vec{y}(v)$ nin C^2-nci sınıftan vektörel fonksiyon olmaları

$$\vec{z} = \vec{x}(u) + \vec{y}(v)$$

yüzeyinin (öteleme yüzeyi) koordinat çizgileri eşlenik bir şebeke oluştururlar.

35. $x_1 = u f(v)$, $x_2 = u g(v)$, $x_3 = v$ katenoidi üzerinde anadoğruların dik yörüngeleri ile bir eşlenik şebeke oluşturan eğrileri bulunuz.

36. $z = ax^2 + by^2$ yüzeyi üzerinde koordinat çizgilerinin eşlenik bir şebeke oluşturduklarını gösteriniz.

37. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ elipsoidi üzerinde, $y =$ sabit elipsleriyle eşlenik bir şebeke oluşturan eğrileri bulunuz.

38. $x_1 = a \cos u \cos v$, $x_2 = b \cos u \sin v$, $x_3 = c \sin u$ elipsoidinin koordinat çizgilerinin eşlenik bir şebeke oluşturduklarını gösteriniz.

39. $x_1 = u \cos v$, $x_2 = u \sin v$, $x_3 = u + v$ eğik helikoidinin asimptotik çizgilerini bulunuz.

40. $z = \dfrac{x^4}{a^4} - \dfrac{y^4}{b^4}$ yüzeyinin asimptotik çizgilerini bulunuz. Bunların

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\text{sabit} \quad \text{ve} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\text{sabit}$$

silindirleri üzerinde bulunduklarını gösteriniz.

41. $z=\dfrac{y}{x}\lg|x|$ yüzeyinin asimptotik çizgilerini bulunuz. (İki asimptotik çizgi ailesinden birisi bir doğru ailesidir).

42. $x_1=\text{Cos } u-(u+v)\text{ Sin } v$, $x_2=\text{Sin } u+(u+v)\text{ Cos } v$, $x_3=u+2v$ yüzeyinin herhangi bir noktasındaki asal eğrilikleri bulunuz.

43. $x_1=u\text{ Cos } v$, $x_2=u\text{ Sin } v$, $x_3=u+v$ eğik helikoidinin GAUSS eğriliği ile ortalama eğriliğini bulunuz.

44. $x_1=3u+3uv^2-u^3$ $x_2=v^3-3v-3u^2v$, $x_3=3(u^2+v^2)$ yüzeyinin GAUSS eğriliği ile ortalama eğriliğini bulunuz.

45. İspat ediniz ki

$$x_1=\frac{a}{2}(u+v),\quad x_2=\frac{b}{2}(u-v),\quad x_3=\frac{uv}{2}$$

yüzeyinin koordinat çizgileri doğrulardan oluşmaktadır. Bu yüzeyin eğrilik çizgilerini bulunuz.

46. $x_1=v^3$, $x_2=u^2+u$, $x_3=\dfrac{u^2}{2a+av}$, $a>0$ yüzeyinin parabolik noktalardan oluşan eğrisinin bir eğrilik çizgisi olduğunu gösteriniz.

47. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>b>c$ elipsoidinin eğrilik çizgilerinin $z=0$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümleri ortak odaklı elips ve hiperbollerden oluşur.

48. İspat ediniz ki

$$A\,du+B\,dv=0$$

diferansiyel denklemiyle tanımlanan eğri ailesinin dik yörüngelerinin diferansiyel denklemi

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

$$(EB - FA)\,du + (FB - GA)\,dv = 0$$

dır. Bundan yararlanarak düzlemde a nın değişimiyle elde olunan tüm çemberlerin dik yörüngelerini bulunuz.

49. İspat ediniz ki

$$A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,du^2 = 0$$

diferansiyel denklemiyle tanımlanan eğrilerin bir dik eğri ağı oluşturmaları için gerekli ve yeterli koşul

$$EG - 2FB + GA = 0$$

dır.

50. Bir yüzeyin birinci formu

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)\,du\,dv$$

biçiminde yazılabilirse, u=sâbit çizgileri, tüm v=sâbit çizgileri üzerinde eşit uzunluklar ayırırlar.

51. Bir yüzeyin koordinat çizgileri bir dik eğri şebekesi oluşturduğuna göre, koordinat çizgileri arasındaki açıyı ortalayan eğrilerin diferansiyel denklemi

$$F\,du^2 - G\,dv^2 = 0$$

dır.

52. İspat ediniz ki bir dairesel helisin kirişlerinin orta noktalarının geometrik yeri bir dik helikoiddir.

53. İspat ediniz ki

$$z = a + bx + cy + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (px + qy)^n,$$

denklemiyle tanımlanan yüzey açılabilirdir.

54. Birinci formu

$$ds^2 = du^2 + (a^2 - u^2)\,dv^2$$

olan dönel yüzeyi bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

55. $z = y \operatorname{Sin} x$ yüzeyinin asimptotik çizgilerini bulunuz.

54. $x_1 = u \operatorname{Cos} v$, $x_2 = u \operatorname{Sin} v$, $x_3 = f(v)$ dik konoidinde koordinat çizgilerinin eşlenik bir şebeke oluşturmaları için $f(v)$ nasıl olmalıdır.

55. $x_1 = u \operatorname{Cos} v$, $x_2 = u \operatorname{Sin} v$, $x_3 = m \operatorname{Sin}^2 v$ silindroidinin asimptotik çizgilerini bulunuz.

56. $z(x^2 + y^2) - 2mxy = 0$ silindroidinin eğrilik çizgileriyle asal eğrilikleri bulunuz.

57. $z^2(x^2 + y^2) = c^4$ yüzeyinin eğrilik çizgileriyle asal eğrilikleri bulunuz.

58. İspat ediniz ki

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} - 1 = 0$$

yüzeyinin ombilikleri bir küre üzerindedir.

59. $xyz = abc$ yüzeyinin eğrilik çizgilerini bulunuz.

60. Birinci formu

$$ds^2 = e^{2v}\,[du^2 + U^2(u)\,dv^2]$$

biçiminde olan yüzeyin geodeziklerini bulunuz.

61. Bir dik koordinat sisteminde

$$x_1 = \frac{a}{2}(u + v), \quad x_2 = \frac{b}{2}(u - v), \quad x_3 = \frac{uv}{2}$$

denklemleriyle tanımlanan yüzeyin koordinat çizgilerinin oluşturdukları açıları ortalayan eğrileri bulunuz.

62. İspat ediniz ki

$$y \operatorname{Cos} \frac{z}{a} = x \operatorname{Sin} \frac{z}{a}$$

yüzeyinin asal eğrilik yarıçapları: $\pm(x^2 + y^2 + a^2)/a$ dır.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

Aynı yüzeyin eğrilik çizgilerini bulunuz.

63. Bir dik eksen sisteminde

$$x_1 = u \operatorname{Cos} v, \quad x_2 = u \operatorname{Sin} v, \quad x_3 = a \lg \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right|$$

denklemleriyle tanımlanan dönel yüzeyin minimal olduğunu ve bundan başka dönel minimal yüzey bulunamayacağını ispat edin.

64. İspat ediniz ki

$$e^x \operatorname{Cos} x = \operatorname{Cos} y$$

yüzeyi minimaldir.

65. $t x_1 + t^2 x_2 - t^3 x_3 - 1 = 0$ düzlem ailesinin teğet kaldığı açılabilir yüzeyin dönüm ayrıtını bulunuz.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ III

BÖLÜM I. İKİ SKALER DEĞİŞKENLİ VEKTÖREL FONKSİYONLAR

1. İki skaler değişkenli vektörel fonksiyonların tanımı 1
2. Vektörel kısmî limit ve bununla ilgili teoremler 2
3. Bir noktada veya bir bölgede vektörel kısmî süreklilik 4
4. Birinci mertebeden vektörel kısmî türevler 5
5. Bileşik vektörel fonksiyonlar ve bunların birinci mertebeden türevleri 6
6. Çeşitli mertebelerden vektörel kısmî türevler 8
7. Vektörel tam diferansiyel 12
8. Çeşitli mertebelerden diferansiyeller 14
9. İki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlarda sınıf kavramı ... 15
10. İki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlar için TAYLOR formülü 15
11. İki bağımsız değişkenli vektörel fonksiyonlarda iki katlı integraller 17

BÖLÜM II. ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA YÜZEYLERİN YEREL ÖZELLİKLERİ

12. Örnekler 19
13. Yüzey kavramı. Analitik ve vektörel gösterilişler 21
    a) Parametreli vektörel ve skaler denklemler 24
    b) Karteziyen denklem 24
14. Eğrisel (veya Gaussî koordinatları. Koordinat (veya GAUSS) çizgileri. Koordinat çizgilerinden farklı çizgiler 25
    a) Eğrisel koordinatlar 25
    b) Koordinat çizgileri 26

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

15. Düzgün elemanlar 27

a) Düzgün nokta 27
b) Düzgün yüzey 29
c) Parametrelerin değiştirilmesi 29

16. Teğet düzlem ve normal birim vektörü 31

I. Düzgün noktada teğet düzlem 31
II. Düzgün noktada normal birim vektörü. Yönlendirme 43
III. Düzgün olmayan noktada teğet eleman 47

BÖLÜM III. TEMEL KUVADRATİK FORMLAR

A. BİRİNCİ TEMEL KUVADRATİK FORM. YÜZEYLERİN İÇ GEOMETRİSİ 55

17. Birinci temel kuvadratik form ve diskriminant 55

a) MONGE gösterilişi 61
b) İmplisit gösteriliş 62
18. Yüzeyin bir eğrisinin iki noktası arasındaki eğrisel uzunluk 67
19. Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen herhangi iki eğrisi arasındaki açı 68
a) φ açısının kosinüsü 70
b) φ açısının sinüsü 70
c) φ açısının tangenti 71

20. Alan elemanı ve bir yüzey parçasının alanı 81
a) GAUSS koordinatları 81
b) MONGE gösterilişinde alan elemanı 86
21. Normal birim vektörü ile ilgili bazı vektörel bağıntılar 88
22. Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen herhangi bir eğrisinin, koordinat çizgileri ile oluşturduğu açılarla ilgili bir formül ... 89
23. Yüzeylerin iç geometrisi 92

B. İKİNCİ TEMEL KUVADRATİK FORM. YÜZEYLERİN DIŞ GEOMETRİSİ 93

24. İkinci temel kuvadratik form. Düzgün nokta yakınlarının, düzgün noktadaki teğet düzleme göre durumu 93
a) İkinci temel kuvadratik formun tanımı 93
b) Teğet düzleme göre durum. Yüzey noktalarının sınıflandırılması 99

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM IV. WEINGARTEN, OLINDE RODRIGUES, GAUSS, DARBOUX-RIBAUCOUR, CODAZZI - MAINARDI FORMÜLLERİ

25. Normal birim vektörünün birinci mertebeden kısmi türevleri ... 109
26. GAUSS formülleri ... 110
a) MONGE gösterilişinde CHRISTOFFEL sembolleri ... 113
b) CHRISTOFFEL sembolleri arasında bazı bağıntılar ...
c) Özel hal : DARBOUX - RIBAUCOUR formülleri ... 115
27. MAINARDI-CODAZZI formülleri : İntegre edilebilme koşulları ... 116
28. Yüzeyler teorisinin temel teoremi : GAUSS karakteristik denklemi 119
29. Birinci temel kuvadratik formu verilen yüzeyler ... 123
30. Birinci ve ikinci temel kuvadratik formları verilen yüzeyler ... 124
31. Normal birim vektörünün 2-nci mertebeden kısmî türevleri ... 128

BÖLÜM V. YÜZEYLERİN DIŞ ÖZELLİKLERİ I

32. Bir yüzeyin düzgün bir noktası yakınlarında biçimi. Normal eğrilik 135
33. MEUSNIER teoremi ... 139
34. Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen normal kesitlerin bu noktadaki eğriliklerinin değişimi ... 145
34. Yüzeyin düzgün bir noktasından geçen normal kesitlerin bu noktadaki eğriliklerinin değişimi ... 145
35. Teğet yüzeylere uygulama ... 171
36. Genel halde asal eğriliklerle ortalama ve GAUSS eğrilikleri ... 178
37. Bir yüzeyin küresel görüntüsü ... 184

BÖLÜM VI. YÜZEYLERİN DIŞ ÖZELLİKLERİ II. BAZI EĞRİLER

38. Asimptotik çizgiler ... 187
39. Eğrilik çizgileri ... 199
40. Eşlenik doğrultular ... 226

BÖLÜM VII. YÜZEYLERİN İÇ ÖZELLİKLERİ. GEODEZİK ELEMANLAR

41. Geodezik eğrilik ... 239
42. Geodezik çizgiler ... 244
43. Geodezik paraleller ve geodezik paralel koordinatlar ... 250
44. Geodezik kutupsal koordinatlar ... 252
45. Geodeziklerin minimal özeliği ... 264
46. Uygulama ... 270

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

BÖLÜM VIII. DARBOUX - RIBEAUCOUR DEĞİŞEN DİK ÜÇYÜZLÜSÜ VE TÜREV FORMÜLLERİ

47. Darboux - Ribeaucour dikiçyüzlüsü 276

BÖLÜM IX. İNVARİYANT TÜREVLER - İNVARİYANT BİÇİMLER

48. Koordinat çizgilerinin teğetleri doğrultusunda çeşitli mertebelerden invariyant türevler 300
a) Birinci mertebeden invariyant türevler 300
b) İkinci mertebeden invariyant türevler 301
49. Genel halde GAUSS ve MAINARDI - CODAZZI formüllerinin invariyant biçimleri 307
50. Koordinat çizgilerinin teğetleri doğrultusundaki invariyant türevler cinsinden herhangi bir doğrultuda, çeşitli mertebelerden invariyant türevler 314

BÖLÜM X. DOĞRUSAL GEOMETRİ

I. DOĞRUSAL YÜZEYLER 322
A. AÇILAMAYAN DOĞRUSAL YÜZEYLER 322
1. Örnekler ve geometrik inceleme 322
2. Vektörel inceleme 336
3. Doğrusal yüzeyin C doğrultmanının $\vec{x}^0$ teğet vektörünün, E küresel görüntüsünün DARBOUX-RIBEAUCOUR dik üçyüzlüsüne göre bileşenleri 350
4. Bir doğrusal yüzeyin üç invariyantı 360
5. Doğrusal yüzeylerde temel kuvadratik formlar 373
a) Birinci form 373
1) Doğrultman herhangi bir eğridir 373
2) Doğrultman boğaz çizgisidir 374
b) İkinci form 374
1) Doğrultman herhangi bir eğridir 374
2) Doğrultman boğaz çizgisidir 374
6. Doğrusal yüzeylerde asimptotik çizgiler 375
7. Doğrusal yüzeylerde eğrilik çizgileri 380
a) Boğaz çizgisi bir eğrilik çizgisidir 381
b) Değilme parametresi sabittir 381

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

8. Doğrusal yüzeylerde geodezik çizgiler 383
9. Analitik inceleme 386
10. Alıştırmalar 388

B. AÇILABİLEN DOĞRUSAL YÜZEYLER 394

10. Tanım ve Özelikler 394

II. DOĞRU KONGRÜANSLARI 422

11. Tanım ve örnekler 422
12. Normaller kongrüansı 454
13. Bir doğru kongrüansında $\vec{w} = \vec{w}(u, v)$ doğrultu birim vektörüne uygulanan GAUSS formülleri 466
14. İntegre edilebilme koşulları gerçekleştiğinde, I ve II formları ... 474
15. İzotrop doğru kongrüansı 475

III. DOĞRU KOMPLEKSLERİ 489

BÖLÜM XI. DOĞRULTU FONKSİYONLARI 535

BÖLÜM XII. PARALEL YÜZEYLER 555

BÖLÜM XIII. EVİRTİM 567

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ YAYINEVİ

MARMARA ÜNİVERSİTESİ 1883
MARMARA ÜNİVERSİTESİ

Fiatı : 3000 TL.